Cours de Physique

pour la PCSI

par JPG

Introduction

Le programme de ce livre

Ce livre traite du programme de Physique de la voie PCSI. À chaque chapitre, le programme officiel est rappelé. Dans l'ensemble j'essaye de me tenir proche du programme, mais en allant parfois plus loin dans un but de culture générale. Certaines parties sont totalement hors programme — c'est alors signalé.

L'organisation de ce livre

Les chapitres ne sont pas traités exactement dans l'ordre du programme, mais dans l'ordre dans lequel je les aborde avec mes élèves (en MP2I), qui me paraît plus logique. De manière générale, les principaux thèmes (Électricité, Mécanique et Thermodynamique) sont traités en deux fois, ce qui aide à l'assimilation des méthodes. Mais il est tout à fait possible de lire ce livre en regroupant l'Électricité, la Mécanique et la Thermodynamique, sans que cela ne pose problème.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- le cours avec ses illustrations et des exemples ;
- le programme officiel correspondant à ce chapitre ;
- quelques conseils
- des QCMs permettant de s'entraîner sur les formules et notions de base du cours. Ils sont essentiels pour bien vérifier que le cours est compris ;
- des exercices pour s'entraîner, de difficultés variables, avec les réponses succinctes. Il n'est pas nécessaire de tous les faire : en prépa, il faut connaître son niveau et savoir viser juste. L'important est d'abord de comprendre le cours et de savoir faire les QCMs et les exemples marqué « À connaître » ; ensuite, les exercices [*] et [**] ; enfin, si on a envie d'aller plus loin et de viser des concours difficiles, on pourra s'amuser avec les [***] voire [****] ;
- des TD numériques permettant d'aller plus loin en mettant en équation des problèmes, puis en utilisant le langage Python pour les résoudre et tracer des courbes. Les courbes qu'il faut obtenir sont données à la fin, mais il n'y a pas de correction détaillée.

Les TD numériques, ainsi que certains exercices faisant utiliser Python, possèdent des étiquettes indiquant la compétence travaillée :

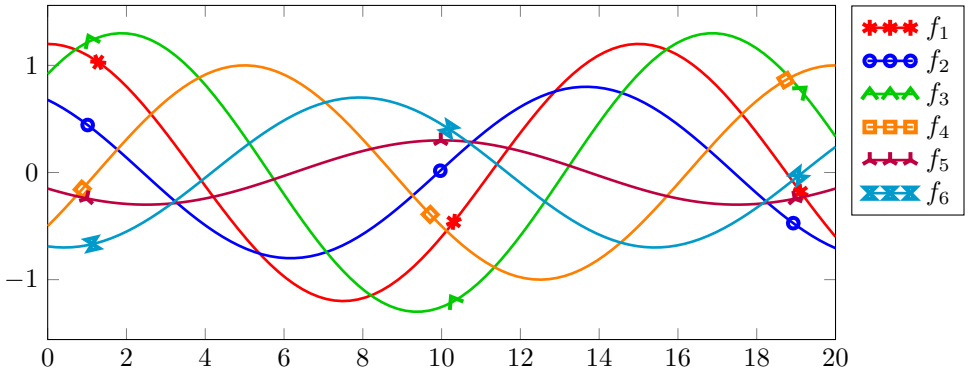
- .py plot pour les tracés de courbes, avec des variantes : .py plot(champ) pour les cartes de champ, .py plot(image) pour les images et cartes, .py plot(polaire) pour les coordonnées polaires et .py plot(3D) pour les graphes en 3D
- .py EDO pour la résolution d'Équations Différentielles Ordinaires, par méthode d'Euler ou à l'aide de `odeint`
- .py $f(x) = 0$ pour la résolution numérique d'une équation, par dichotomie ou à l'aide de `bisect`
- .py $f(x).dx$ pour le calcul d'intégrales, par méthode des rectangles ou à l'aide de `quad`
- .py A.X=B pour la résolution de systèmes linéaires sous forme matricielle, à l'aide de `solve`
- .py random pour la manipulation de tirages aléatoires à l'aide de la bibliothèque `random`
- .py $x + i.y$ pour la manipulation de nombres complexes

Un index des TD numériques se trouve à la fin.

Les TP sont aussi importants en prépa, mais je ne les ai pas mis dans ce livre, car ils sont trop dépendant du matériel spécifique à chaque laboratoire.

À propos des graphiques

Dans graphiques contenant plusieurs courbes, les courbes de différentes couleurs sont marquées de symboles discrets afin d'aider les personnes daltoniennes à mieux les distinguer.

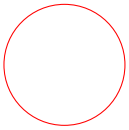


À propos des animations

Les cours sont illustrés avec des animations de deux types :

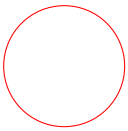
— des animations comme un film qui se joue, avec parfois des boutons de contrôle au-dessous :

Le rayon de ce cercle varie :

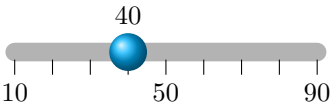


— des animations avec un curseur dans lesquelles on peut faire varier un paramètre et observer la figure qui change :

Réglez le rayon de ce cercle :



rayon=



Malheureusement, elles ne sont pas supportées par tous les lecteurs PDF. Voici, actuellement, ce que j'ai constaté :

Lecteur	Animations "film"	Animations "curseur"
Firefox	✓	✓
Okular	✓	✓
Evince	✗	✓
Adobe Acrobat Reader	✓	✓
Chrome	✗	✗

Un index des animations se trouve à la fin.

Remerciements

Merci à tous les élèves qui ont fait une relecture attentive de ces polycopiés et m'ont signalé de très nombreuses erreurs ; particulièrement à la promo MP2I 2025. Il reste néanmoins peut-être encore des erreurs, vous pouvez me les signaler sur la page *Issues* du site.

Merci également à la famille TikZlings



d'avoir accepté de veiller sur les pages de ce livre.

JPG, 27 août 2026

Ce document est distribué sous licence Creative Commons - Attribution — Utilisation non commerciale - Partage à l'identique.

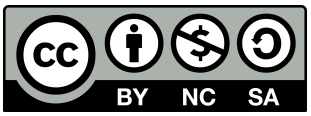


Table des matières

Page

P0 Préliminaires **11**
P0.A. Dimensions et unités . . . 12
P0.B. Chiffres significatifs . . . 13
P0.C. Annexe . . . 14

Optique 25

O0 Prérequis mathématiques pour l'optique **27**
O0.A. Géométrie de base . . . 28
O0.B. Trigonométrie . . . 30
O0.C. Fonctions . . . 30

O1 Bases de l'optique géométrique **37**
O1.A. Description de la lumière . . . 38
O1.B. Propagation des rayons lumineux . . . 41

O2 Systèmes optiques **69**
O2.A. Étude de systèmes optiques à l'aide de tracés de rayons . . . 71
O2.B. Les lentilles sphériques minces . . . 77
O2.C. Notions sur les miroirs sphériques . . . 87

O3 Systèmes de lentilles **117**
O3.A. Quelques conséquences des lois de conjugaison . . . 118
O3.B. La vision humaine . . . 123
O3.C. Exemple d'instruments optique . . . 126

O4 Propagation des ondes **159**
O4.A. Ondes progressives . . . 160
O4.B. Interférences de deux ondes . . . 168
O4.C. Paquets d'ondes . . . 175

Électricité 199

E0 Prérequis mathématiques pour l'électricité **201**
E0.A. Fonctions . . . 202
E0.B. Trigonométrie . . . 204

E1 Lois des circuits électriques **209**
E1.A. Intensité et tension . . . 210
E1.B. Les dipôles fondamentaux . . . 216
E1.C. Puissance électrique . . . 224

E2 Circuits linéaires en régime continu **245**
E2.A. Association de résistances ; ponts diviseurs . . . 246
E2.B. Autres lois des circuits linéaires . . . 251
E2.C. L'Amplificateur Linéaire ou Amplificateur Opérationnel . . . 255

E3 Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1 **281**

E3.A. Équations différentielles . . . 282
E3.B. Circuit RC série . . . 285
E3.C. Circuit RL série . . . 288
E3.D. Résolution générale d'équations différentielles d'ordre 1 . . . 289

E4 Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2 317
E4.A. Modèle de circuit linéaire d'ordre 2 : le RLC série . . . 318
E4.B. Évolution temporelle d'un circuit LC sans amortissement . . . 319
E4.C. Évolution temporelle du circuit RLC amorti . . . 321
E4.D. Stabilité des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2 . . . 326
E4.E. Résolution numérique . . . 327

Mécanique 351

M0 Prérequis mathématiques pour la mécanique 353
M0.A. Vecteurs . . . 354
M0.B. Dérivées . . . 356
M0.C. Cercles . . . 357

M1 Cinématique du point 361
M1.A. Référentiel . . . 362
M1.B. Position, vitesse, accélération . . . 364

M2 Dynamique newtonienne 381
M2.A. Référentiels galiléens . . . 382
M2.B. Principe fondamental de la dynamique . . . 383
M2.C. Modèle pour quelques forces . . . 385
M2.D. Exemples . . . 389

M3 Liaisons mécaniques 415
M3.A. Contact sans frottements avec un support . . . 416
M3.B. Contact avec frottements avec un support . . . 419
M3.C. Oscillateur harmonique . . . 422

M4 Énergie mécanique 445
M4.A. Énergie cinétique et travaux des forces . . . 446
M4.B. Forces conservatives et énergie mécanique . . . 449
M4.C. Étude des systèmes conservatifs à 1 degré de liberté . . . 455

Thermodynamique 483

T1 Bases de la thermodynamique 485
T1.A. Description d'un système thermodynamique . . . 486
T1.B. Le premier principe de la thermodynamique . . . 493
T1.C. Étude des transformations classiques . . . 498

T2 Thermodynamique des liquides et des solides 521
T2.A. Modèles pour un liquide ou un solide . . . 522
T2.B. Calorimétrie . . . 523
T2.C. Évolution temporelle d'un système sous pression constante . . . 525

T3 Thermodynamique des gaz 541
T3.A. Modèles pour les gaz . . . 542
T3.B. Énergie des gaz . . . 548
T3.C. Étude des transformations classiques . . . 552

Électricité 583

E5 Régime Sinusoïdal Forcé 585

E5.A. Comportement d'un système soumis à un signal sinusoïdal . . . 586
E5.B. Cas des circuits électriques en RSF . . . 591
E5.C. Aspect énergétique . . . 599

E6 Résonances 625
E6.A. Équations du RLC en RSF . . . 626
E6.B. Étude de la résonance aux bornes de la résistance . . . 627
E6.C. Étude de la résonance aux bornes du condensateur . . . 629
E6.D. Étude de la résonance aux bornes de la bobine . . . 634
E6.E. Résonance en puissance . . . 636

E7 Filtres linéaires 651
E7.A. Les filtres . . . 652
E7.B. Étude des filtres linéaires . . . 654
E7.C. Filtrage d'un signal périodique quelconque . . . 664

E8 Filtres électroniques 691
E8.A. Étude de filtres simples . . . 692
E8.B. Filtres en cascade . . . 701
E8.C. Filtres actifs avec AOp . . . 704
E8.D. Annexe : Bande passante et temps de réponse d'un filtre . . . 706

Mécanique 729

M5 Oscillateurs mécaniques 731
M5.A. Oscillateur harmonique en RSF . . . 732
M5.B. Oscillations d'un système à 1 degré de liberté au voisinage de sa position d'équilibre . . . 741
M5.C. Oscillateurs couplés (Hors programme) . . . 746

O5 Ondes stationnaires 779
O5.A. Ondes stationnaires sur un système continu homogène . . . 780
O5.B. Annexe : Régime libre et régime forcé . . . 789

M6 Coordonnées cylindriques 807
M6.A. Coordonnées polaires . . . 808
M6.B. Le pendule simple . . . 810
M6.C. Coordonnées cylindriques . . . 815

M7 Dynamique des systèmes matériels 841
M7.A. Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction . . . 842
M7.B. Théorème de la quantité de mouvement et variations . . . 842
M7.C. TEC pour un système matériel . . . 845
M7.D. Utilisation des lois de conservation . . . 848

M8 Dynamique des solides 865
M8.A. Caractéristiques d'un solide indéformable . . . 866
M8.B. Mouvement de translation . . . 867
M8.C. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe . . . 869
M8.D. Annexe : Calculs de moments d'inertie par intégration (Hors programme) . . . 882

M9 Mouvements à force centrale 907
M9.A. Coordonnées sphériques . . . 908
M9.B. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe . . . 912
M9.C. Principe de l'étude d'un mouvement à force centrale conservative . . . 914
M9.D. Annexe : étude du système à 2 corps (Hors programme) . . . 920

M10 Mouvements képlériens 943
M10.A. Potentiel newtonien . . . 944
M10.B. Étude qualitative du mouvement . . . 945
M10.C. Étude des orbites circulaires . . . 949
M10.D. Étude des orbites elliptiques . . . 949

M10.E. Application : le système solaire . . . 951
M10.F. Annexe : établissement de l'équation des trajectoires (hors programme) . . . 954

M11 Mouvements de particules chargées 977
M11.A. Forces s'exerçant sur une particule chargée . . . 978
M11.B. Mouvement dans un champ électrique uniforme constant . . . 980
M11.C. Mouvement dans un champ magnétique uniforme constant . . . 983
M11.D. Mouvement dans des champs électrique et magnétique uniformes constants . . . 990

Électromagnétisme 1011

EM1 Champs magnétiques et courants 1013
EM1.A. Généralités sur le champ magnétique . . . 1014
EM1.B. Action d'un champ magnétique sur un courant . . . 1020

EM2 Phénomènes d'induction 1039
EM2.A. Les lois de l'induction . . . 1040
EM2.B. Inductances . . . 1042

EM3 Systèmes électromécaniques 1061
EM3.A. Systèmes électromécaniques en translation . . . 1062
EM3.B. Systèmes électromécaniques en rotation . . . 1064

Thermodynamique 1083

T4 Changements d'état 1085
T4.A. Description des transitions de phases / changements d'état d'un corps pur . . . 1086
T4.B. Enthalpie de changement d'état . . . 1093

T5 Machines thermiques 1113
T5.A. Avancement historique de l'étude des machines thermiques . . . 1114
T5.B. Le second principe de la thermodynamique . . . 1119

T6 Bilans d'entropie 1149
T6.A. Le second principe de la thermodynamique (rappel) . . . 1150
T6.B. Bilans d'entropie . . . 1150
T6.C. Diagramme entropique (Hors programme) . . . 1156

T7 Systèmes en écoulement 1173
T7.A. Étude de la détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin) . . . 1174
T7.B. Étude énergétique d'un système quelconque en écoulement . . . 1176
T7.C. Bilans entropiques des systèmes en écoulement (Hors programme) . . . 1179
T7.D. Utilisation d'un diagramme enthalpique . . . 1179

T8 Statique des fluides 1201
T8.A. Pression dans un fluide au repos . . . 1202
T8.B. Force de pression sur des objets . . . 1210

Mécanique quantique 1237

MQ1 Introduction à la mécanique quantique 1239
MQ1.A. Quantification de la lumière . . . 1240
MQ1.B. Description des particules quantiques . . . 1246

Liste des animations 1265

Liste des TD numériques 1269

Chapitre P0 Préliminaires

Conseils p.15

Cours p.12
- P0.A. Dimensions et unités
- P0.B. Chiffres significatifs
- P0.C. Annexe

QCMs p.16

TDs numériques p.19

P0. Préliminaires

Cours

Ce chapitre fait quelques rappels sur des notions importantes en physique, qui nous serviront tout au long de l'année. Les notions abordées ici sont censées être maîtrisées par les étudiants.

P0.A. Dimensions et unités

A.1. Dimensions

Définition : Dimension d'une grandeur

La *dimension* d'une grandeur physique est ce qui caractérise sa nature physique : un temps, une longueur, une tension,...Toutes les grandeurs physiques ont une dimension qui peut s'exprimer en fonction d'un nombre restreint choisi de sept dimensions de base (cf. tableau P0.1).

Toutes les autres dimensions peuvent s'exprimer par combinaison des dimensions de base. Par exemple, par la relation $E = m.c^2$ on détermine la dimension de l'énergie E, ce qu'on notera $[E] = M.L^2.T^{-2}$.

Remarque : Il existe des grandeurs sans dimension, comme les angles.

Tableau P0.1 : Les 7 dimensions de base et leur unité SI.

dimension	masse	longueur	temps	intensité électrique	température	intensité lumineuse	quantité de matière
notation	M	L	T	I	Θ	J	N
unité SI	kilogramme (kg)	mètre (m)	seconde (s)	Ampère (A)	Kelvin (K)	candela (cd)	mole (mol)

A.2. Unités

Définition : Unité

Chaque dimension peut être exprimée dans différentes *unités* ; on peut passer d'une unité à l'autre grâce à un facteur de conversion. Pour exprimer une grandeur, il faut une valeur suivie d'une unité.

Le tableau P0.3 indique les unités du *Système International* qui est celui qu'on utilisera ; mais il en existe d'autres, par exemple le système CGS utilisé par les anglo-saxons. Ces unités peuvent aussi être multipliées par des préfixes à connaître (tableau P0.2).

Tableau P0.2 : Principaux préfixes multiplicatifs.

nom	symbole	valeur	nom	symbole	valeur
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^{3}
micro	μ	10^{-6}	méga	M	10^{6}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{9}
pico	p	10^{-12}	téra	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	péta	P	10^{15}

On note **unités de base du système SI** celles correspondant aux 7 dimensions de base ; à partir de ces unités, on peut reconstruire toutes les autres. Mais on utilisera de nombreuses unités SI pour les grandeurs qui ne sont pas de base dans le système SI, par exemple le Joule pour l'énergie.

! Il ne faut pas confondre unité et dimension. Une grandeur a une seule dimension, qui peut s'exprimer dans différentes unités.

TABLEAU P0.3 : Principales unités du système SI.

Grandeur	Dimension	Unité S.I.	Symbole	Définition	Autre unité courante
Temps	T	**Seconde**	s	À partir des vibrations d'un atome de césium	Jour solaire : 1j = 86 400 s Année : 1an = 365, 26j
Longueur	L	**Mètre**	m	Vitesse de la lumière dans le vide : $299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	Unité astronomique : $1\mathrm{ua} = 1{,}5\times10^{11}\,\mathrm{m}$
Masse	M	**Kilogramme**	kg	Constante de Planck : $h = 6{,}626\,070\,15\times10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$	
Énergie	$M.L^2.T^{-2}$	Joule	J	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}$	Electron-Volt : $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$
Puissance	$M.L^2.T^{-3}$	Watt	W	$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\cdot s^{-1}}$	Cheval : $1\mathrm{ch} = 736\,\mathrm{W}$
Force	$M.L.T^{-2}$	Newton	N	$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{J\cdot m^{-1}}$	
Pression	$M.L^{-1}.T^{-2}$	Pascal	Pa	$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N\cdot m^{-2}} = 1\,\mathrm{J\cdot m^{-3}}$	Bar : $1\,\mathrm{bar} = 1\times10^5\,\mathrm{Pa}$
Intensité	I	**Ampère**	A	Charge élémentaire : $e = 1{,}602\,176\,634\times10^{-19}\,\mathrm{A\cdot s}$	
Charge	$I.T$	Coulomb	C	$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\cdot s}$	
Tension	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	Volt	V	$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{W\cdot A^{-1}}$	
Résistance électrique	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	Ohm	Ω	$1\,\Omega = 1\,\mathrm{V\cdot A^{-1}}$	
Capacité électrique	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$	Farad	F	$1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{A\cdot s\cdot V^{-1}} = 1\,\mathrm{s\cdot\Omega^{-1}}$	
Inductance	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	Henry	H	$1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{V\cdot s\cdot A^{-1}} = 1\,\mathrm{s\cdot\Omega}$	
Champ magnétique	$M.T^{-2}.I^{-1}$	Tesla	T	$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{V\cdot s\cdot m^{-2}}$	Gauss : $1\mathrm{G} = 1\times10^{-4}\,\mathrm{T}$
Température	Θ	**Kelvin**	K	Constante de Boltzmann : $1{,}380\,649\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$	
Quantité de matière	N	**mole**	mol	$\mathcal{N}_A = 6{,}02\times10^{23}$ entités	

Remarque : 0 est la seule valeur pour laquelle il n'est pas nécessaire de préciser l'unité.

A.3. Homogénéité d'une expression

Il existe trois règles fondamentales concernant les expressions en physique, appelées *règles d'homogénéité* :

Propriété : Règles d'homogénéité

- on ne peut ajouter (ou soustraire) que des grandeurs de même dimension
- dans une équation, les deux côtés de l'égalité doivent avoir la même dimension
- les arguments des fonctions transcendantes (cosinus, sinus, exponentielle, logarithme, ...) doivent être sans dimension

Il faut donc toujours vérifier l'homogénéité de ses résultats avant de les encadrer. Exemples :

- si on écrit $\ell_2 = 1 + \ell_1$ où ℓ_1, ℓ_2 sont des longueurs : c'est forcément faux, on n'ajoute pas 1 (sans dimension) avec une longueur
- on écrit l'association de deux lentilles accolées : $f' = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ où les trois f' sont des longueurs : c'est faux, on s'est trompé dans le terme de gauche, c'est sans doute $\frac{1}{f'}$
- si on obtient l'altitude d'un point en chute libre : $z = h - \frac{1}{2}gt$ où h est une longueur, g une accélération en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et t le temps : c'est faux, car $\frac{1}{2}gt$ est en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, ce n'est pas une longueur ; on a sûrement oublié un carré à t
- en électricité on écrira souvent des fonctions en $\cos(2\pi ft)$ où f est une fréquence, en Hertz c'est-à-dire en $\mathrm{s^{-1}}$; donc $2\pi ft$ est sans dimension, c'est correct
- selon certains modèles, la pression dans l'atmosphère varie comme $P(z) = P(0)e^{-\frac{Mg}{RT}z}$ où z est l'altitude, M est une masse molaire, g une accélération, R une constante et T une température ; on peut alors affirmer que $\frac{RT}{Mg}$ est une longueur, car l'argument de l'exponentielle doit être sans dimension

P0.B. Chiffres significatifs

En physique, la majorité des calculs seront littéraux : on travaille avec des lettres désignant des grandeurs, puis tout à la fin, on effectue une application numérique (AN), qu'on donne avec son unité. Mais la question qui se pose

est : avec combien de chiffres écrit-on la réponse ?

La question des chiffres significatifs est une question complexe. Quand on écrit $x = 1,0$, le 0 après la virgule est là pour donner une indication de précision : ce n'est pas à peu près 1, mais bien 1,0, pas 1,1. C'est une façon assez rapide d'indiquer une précision sur la mesure ; on verra en TP une façon plus exacte, l'incertitude. Ici, dans le cas de $x = 1,0$, on dit que x est donné avec 2 chiffres significatifs.

Évidemment, il faut prendre en compte cette précision dans les calculs qu'on fera avec cette valeur. Quand on effectue des calculs, la calculatrice (ou Python) donne un résultat avec 12 ou 16 chiffres, mais il ne faut jamais tous les écrire. Une règle souvent proposée est la suivante : on écrit le résultat avec autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins. Par exemple, si $x = 1,02$ et $y = 2,1$, alors $x + y = 3,2$ cas y a 2 chiffres significatifs, contre 3 pour x, donc on en met 2 dans le résultat.

En fait, cette règle ne fonctionne pas dans plusieurs de cas, surtout des additions/soustractions :

— supposons que $x = 1,012345$ et $y = 3 \times 10^{-6}$; la somme vaut $x + y = 1,012348$; mais y n'a qu'un chiffre significatif ; va-t-on écrire $x + y = 1$? Non, car ici x et y ont des ordres de grandeur très différents, ce qui fait que y, bien que peu précis, contribue seulement au 6e chiffre après la virgule de la somme.

— supposons qu'un calcul donne $x = 1,0021$ et $y = 1,0032$, mais à partir de données avec 2 chiffres significatifs ; va-t-on écrire $x = 1,0 = y$? Peut-être que la différence entre x et y est très importante, et ne doit surtout pas être nulle par la suite.

Il faut donc réfléchir et ne pas appliquer une règle bête :

— il faut discerner l'influence apportée par chaque donnée de l'énoncé dans le calcul et choisir le nombre de chiffres significatifs en fonction ;

— il n'y a pas de réponse unique à la question des chiffres significatifs, sauf si on fait des calculs explicites d'incertitudes ;

— la précision dépend aussi de la grandeur physique mesurée. Ainsi, une température est souvent donnée au degré Celsius près, ou au dixième de degré éventuellement, jamais plus ; idem pour un angle, sauf dans des cas très particuliers (goniomètre,...) ;

— par contre, tout calcul peut servir dans des calculs ultérieurs, et si on l'arrondit, la suite risque d'être fausse. Il est donc conseillé, lorsqu'on fait un problème de physique, d'enregistrer tous les résultats intermédiaires dans sa calculatrice sous forme de variables qu'on réutilise par la suite.

P0.C. Annexe

Un simple tableau pour rappeler les lettres grecques, qu'on utilisera beaucoup.

Tableau P0.4 : Les lettres grecques.

Nom	Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A	iota	ι	I	rho	ρ	P
beta	β	B	kappa	κ	K	sigma	σ	Σ
gamma	γ	Γ	lambda	λ	Λ	tau	τ	T
delta	δ	Δ	mu	μ	M	upsilon	υ	Υ
epsilon	ϵ	E	nu	ν	N	phi	ϕ	Φ
dzeta	ζ	Z	xi	ξ	Ξ	khi	χ	X
êta	η	H	omicron	o	O	psi	ψ	Ψ
theta	θ	Θ	pi	π	Π	oméga	ω	Ω

P0. Préliminaires

Quelques conseils

✎ Attention au piège : l'unité SI de la masse est le **kilogramme**, et non pas le gramme.

✎ Avant de calculer des applications numériques, mettez toujours les grandeurs en unités SI, sauf dans 2 cas : 1) s'il y a un rapport de deux grandeurs de même dimension, par exemple de la forme $V_2 = V_1 \frac{P_1}{P_2}$; 2) si toutes les grandeurs apparaissant dans l'expression sont de même dimension, par exemple $\ell = \frac{1}{\frac{1}{\ell_1} + \frac{\ell_3}{\ell_1 \ell_2}}$. Dans les TDs numériques, mettez toujours les grandeurs en unité SI.

✎ Si une grandeur a une dimension simple, alors en mettant toutes les inconnues en unité SI, le résultat est en unité SI ; vous devez alors mettre la bonne unité. Par exemple dans l'expression de la pression de l'atmosphère isotherme $P(z) = P_0 e^{-z/d}$ avec $d = \frac{RT}{Mg}$, inutile de calculer longuement l'unité de d : puisque l'argument de l'exponentielle n'a pas de dimension, et que z est une longueur, on en déduit que d est une longueur ; si on a mis R, T, M et g en unités SI, alors d est en mètres.

Par contre, si la grandeur calculée a une dimension compliquée, on peut écrire USI (pour Unité Système International) comme unité.

✎ Traquez toujours les erreurs d'homogénéité évidentes (du genre $1 + \ell$) dans vos résultats.

✎ Il faut connaître **par cœur** les multiples des unités.

P0. Préliminaires

QCMs

réponses page 22

✓ QCM : Équivalence entre unités ✗

Q1. D'après la formule : énergie cinétique $= \frac{1}{2}$masse $\times$ vitesse^2, un Joule (unité d'énergie) est équivalent à

(a). $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(b). $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(c). $1\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(d). $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Q2. Donc dans la formule : énergie potentielle $=$ masse $\times\, g \times$ altitude, on peut savoir que g :

(a). peut avoir comme unité des $\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(b). a pour unité SI des $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(c). a la dimension d'une vitesse
(d). peut avoir comme unité des $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(e). a la dimension d'une accélération
(f). a pour unité SI des $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Q3. D'après la formule : force $=$ masse $\times$ accélération,

(a). $[\text{force}] = M.L.T^{-1}$
(b). $[\text{force}] = M.L.T^{-2}$
(c). $[\text{force}] = M.L^2.T^{-1}$
(d). $[\text{force}] = M.L^2.T^{-2}$

Q4. L'énergie électrique reçue par une résistance vaut : énergie $=$ tension $\times$ intensité $\times$ temps. La tension s'exprime en Volts ; donc

(a). $1\,\mathrm{V}{=}1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$
(b). $1\,\mathrm{V}{=}1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{A}^{-1}$
(c). $1\,\mathrm{V}{=}1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(d). $1\,\mathrm{V}{=}1\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}\cdot\mathrm{A}^{-1}$

✓ QCM : Manipulation des multiples ✗

Les multiples doivent être connus par cœur, et leurs conversions maîtrisées. Ce qui pose le plus de problèmes, ce sont les multiples au dénominateur ; pour ne pas faire d'erreur, il faut écrire l'unité comme un quotient. Par exemple, on veut convertir $4{,}1\,\mathrm{mV}\cdot\mu\mathrm{s}^{-1}$ en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; on écrit alors

$$4{,}1\,\mathrm{mV}\cdot\mu\mathrm{s}^{-1} = \frac{4{,}1\,\mathrm{mV}}{1\,\mu\mathrm{s}} = \frac{4{,}1\times10^{-3}\,\mathrm{V}}{1\times10^{-6}\,\mathrm{s}} = 4{,}1\times10^{3}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Q5. $3{,}2\,\mathrm{mm} =$

(a). $3200\,\mu\mathrm{m}$
(b). $32\times10^{-3}\,\mathrm{m}$
(c). $3{,}2\times10^{-2}\,\mathrm{m}$
(d). $0{,}32\,\mathrm{cm}$

Q6. $53\,\mu\mathrm{s} =$

(a). $53\times10^{-6}\,\mathrm{s}$
(b). $5{,}3\times10^{7}\,\mathrm{ps}$
(c). $0{,}53\,\mathrm{ms}$
(d). $53\,000\,\mathrm{ns}$

Q7. $2{,}3\,\mathrm{cm}^2 =$

(a). $2{,}3\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$
(b). $23\,\mathrm{mm}^2$
(c). $2{,}3\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$
(d). $2{,}3\times10^{2}\,\mu\mathrm{m}^2$

Q8. $5{,}1\,\mathrm{km}^3 =$

(a). $5{,}1 \times 10^{15}\,\mathrm{cm}^3$
(b). $5{,}1 \times 10^{8}\,\mathrm{m}^3$
(c). $5{,}1 \times 10^{15}\,\mathrm{dm}^3$
(d). $5{,}1 \times 10^{9}\,\mathrm{m}^3$

Q9. $23\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} =$

(a). $23 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{ms}^{-1}$
(b). $23 \times 10^{3}\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(c). $82{,}8\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$
(d). $23 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}\cdot\mu\mathrm{s}^{-1}$
(e). $6{,}39\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$
(f). $23\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{ms}^{-1}$

Q10. $9{,}1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\cdot\mu\mathrm{s}^{-2} =$

(a). $9{,}1 \times 10^{6}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(b). $9{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(c). $9{,}1 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(d). $9{,}1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Q11. $13{,}6\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3} =$

(a). $13\,600\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{dm}^{-3}$
(b). $13\,600\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
(c). $13{,}6\,\mu\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
(d). $13{,}6\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

✓ QCM : Vérification d'homogénéité des formules ✗

Dans ce QCM, les ℓ et les x sont des longueurs, les t des temps, les m des masses.

Q12. L'expression $\frac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2} = 3$ est-elle homogène ?

(a). Oui
(b). Non

Q13. L'expression $\frac{m_1}{1+m_1} = 0$ est-elle homogène ?

(a). Oui
(b). Non

Q14. Pour que l'expression $\ell = \frac{3x}{x+\frac{y}{x}}$ soit homogène, il faut que y ait la dimension :

(a). d'une surface
(b). d'une longueur
(c). d'un volume

Q15. L'expression $m_1 g x + m_2 g\left(1+\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) = 0$ est-elle homogène ?

(a). Non
(b). Oui

Q16. L'expression $m' = \frac{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1}\times\frac{1}{m_2}}$ est-elle homogène ?

(a). Oui
(b). Non

Q17. L'expression $\ell = x\cos(4t)$ est-elle homogène ?

(a). Oui
(b). Non

Q18. Dans l'expression $\cos(\alpha) = 3e^{-k\ell/t}$, le coefficient k a pour dimension :

(a). temps/distance
(b). on n'en sait rien
(c). distance/temps
(d). vitesse

P0. Préliminaires

TDs numériques

réponses page 23

TD numérique : Introduction aux outils numériques pour la Physique

numpy plot

Ce TD a pour but de mettre en place les outils qu'on utilisera au cours de l'année pour étudier toutes sortes de systèmes physiques. Le langage utilisé sera Python.

La bibliothèque Numpy

Python possède des listes qui permettent de stocker plusieurs valeurs : `liste=[1,2,3,5.2,"quatre"]` ; elles sont souples, permettant de mélanger toutes sortes d'objets dans la même liste, et d'ajouter/enlever des éléments. Mais elles ne sont pas performantes pour les calculs.
On va alors utiliser la bibliothèque Numpy qui implémente des tableaux de longueur fixe, contenant un seul type de valeurs numériques (entiers, réels ou complexes), et permettant d'effectuer dessus des calculs vectoriels très performants. Les exemples suivant illustrent le fonctionnement des tableaux Numpy, entrez les lignes dans l'interpréteur de Pyzo ou Spyder, ou dans une cellule de Notebook, et exécutez-les.
Avant toutes choses, on importe la bibliothèque, et souvent, on raccourcit son nom pour gagner du temps : `import numpy as np`.

Création d'un tableau

Pour créer un tableau, on a essentiellement trois solutions :

— soit on le crée à partir d'une liste (tableau 1D) ou d'une liste de listes (tableau 2D) :

```
a=np.array([1,2,4,6,3])
print(a)
b=np.array([[1,2,3],[6,5,4]])
print(b)
```

— soit on crée un tableau de zéros en donnant ses dimensions :

```
c=np.zeros(20)
print(c)
d=np.zeros( (2,3) ) # 2 lignes, 3 colonnes
print(d)
```

— enfin, il existe une fonction très pratique, `np.linspace`, qui crée un tableau 1D de valeurs régulièrement espacées entre deux bornes :

```
e=np.linspace(1,5,20) # 20 points entre 1 et 5
print(e)
```

Accès à une case

Les cases d'un tableau sont repérées par un index, la première case étant repérée par l'index 0. Pour un tableau 2D, on doit donner l'index de la ligne, puis de la colonne :

```
print(a[2])
print(b[1,0])
```

On peut s'en servir pour modifier une valeur :

```
d[1,1]=3
print(d)
```

Si on a besoin de connaître les dimensions d'un tableau, il y a 2 possibilités :

— pour un tableau 1D, avec `len(tableau)`

— pour tous les tableaux, avec `tableau.shape` qui renvoie une liste (un tuple en fait…) des dimensions

```
print(len(a))
print(b.shape)
```

Opérations vectorielles

Avec Numpy, toutes les opérations ou presque sont vectorielles, c'est-à-dire qu'elles s'appliquent terme à terme :

— ajout/soustraction d'un nombre, multiplication/division par un nombre

```
print(a)
print(a+1)
print(b)
print(2*b)
```

— addition/soustraction/multiplication/division terme à terme de deux tableaux **de mêmes dimensions** :

```
print(b)
print(d)
print(b+d)
```

sinon on a un message d'erreur

```
print(a)
print(c)
print(a+c)
```

— application d'une fonction mathématique à tous les termes du tableau grâce aux fonctions de la bibliothèque Numpy :

```
print(np.cos(a))
print(np.exp(b))
```

La bibliothèque Matplotlib

Matplotlib est une bibliothèque de tracé de courbes à partir de tableaux ou de listes. On commence par l'importer avec `import matplotlib.pyplot as plt` pour faire court.

Tracé de courbes simples

Matplotlib ne trace pas des courbes de fonctions, mais des points dont on lui donne les coordonnées sous forme de deux tableaux. La syntaxe de base est constituée de 3 instructions : `plt.figure()` qui crée une nouvelle figure (facultatif si on ne veut faire qu'une seule figure), `plt.plot(x,y)` qui trace la courbe mais ne l'affiche pas, et `plt.show()` qui affiche le résultat :

```
a=np.array([1,2,4,5])
b=np.array([2,3,2,4])
plt.figure()
plt.plot(a,b)
plt.show()
```

Pour tracer la courbe représentant une fonction, on procèdera toujours en créant d'abord le tableau des abscisses avec la commande `np.linspace` puis en calculant les ordonnées grâce au calcul vectoriel :

```
tab_x=np.linspace(0,2*np.pi,20) # 20 points entre 0 et 2 pi
tab_y=np.cos(tab_x) # fonction cosinus
plt.figure()
plt.plot(tab_x,tab_y)
plt.show()
```

Ajout de labels, modification du style

Testez, sur l'exemple précédent, les possibilités suivantes :

— entre le `plot` et le `show` on peut ajouter des instructions qui ajoutent des détails ; en voici quelques-uns :
  * `plt.xlabel("texte")` ou `plt.ylabel("texte")` qui ajoutent des labels sur les axes
  * `plt.title("texte")` qui ajoute un titre
  * `plt.xlim( [xmin,xmax] )` ou `plt.ylim( [ymin,ymax] )` qui modifient l'échelle

— dans la commande `plot`, après les tableaux d'abscisse et d'ordonnée, on peut ajouter des options qui modifient l'aspect du tracé de la courbe ; en voici quelques-uns (cf. l'aide sur internet pour voir toutes les valeurs possibles de ces options) :
  * `color="red"` trace la courbe en rouge
  * `marker="+"` ajoute des croix aux points de données (ou bien `"x"`, `"*"`,...)
  * `linestyle="--"` trace la courbe en tiretés (ou bien `":"` en pointillés ; si on met une chaîne vide `""`, la courbe disparaît)
  * `linewidth=3` trace une courbe de 3 pixels de large
  * `markersize=20` trace de gros marqueurs de 20 pixels

Tracé de plusieurs courbes

Pour tracer plusieurs courbes, il suffit de mettre plusieurs `plot` avant le `show`. Pour les distinguer, on peut ajouter l'option `label="texte"` à chaque courbe, et ajouter une légende avec `plt.legend()` qui peut prendre un paramètre `loc` pour changer sa position :

```
tab_x=np.linspace(0,2*np.pi,100) # 100 points entre 0 et 2 pi
plt.figure()
plt.plot(tab_x,np.cos(tab_x),color="red",label="cosinus")
plt.plot(tab_x,np.sin(tab_x),color="green",label="sinus")
plt.legend(loc=3)
plt.show()
```

Ajout de texte ou de traits

On peut ajouter du texte sur le tracé avec `plt.text(x,y,texte)`.
On peut tracer une ligne horizontale avec `plt.axhline(y)` ou verticale avec `plt.axvline(x)`.

Exercices simples

1. Tracez la courbe de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ entre -2 et 2.
2. Tracez les courbes de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{x+0,5}$ et $x \mapsto e^{x+1}$ entre 0 et 2 en ajoutant une légende.
3. Le calcul vectoriel (sur un tableau) ne fonctionne pas s'il y a des branchements conditionnels, par exemple. Dans ce cas, le tableau des ordonnée doit être calculé avec une boucle. On commence par créer un tableau de N zéros avec la commande `tab_y=np.zeros(N)` puis on rempli les cases `tab_y[i]` dans une boucle `for i in range(len(tab_x))`.

   Tracez par exemple la courbe de la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ entre -2 et 2.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Équivalence entre unités

Q1.(b)
Attention, l'unité SI de la masse est le kilogramme ; or le Joule est une unité SI.
Q2.(a) ET (b) ET (e)
L'unité SI est $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ mais d'autres unités sont permises, en particlier avec des multiples.
Q3.(b)
Q4.(c)
D'après ce qu'on a vu au-dessus, $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ donc la réponse $1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ aurait convenu.

Réponses au QCM : Manipulation des multiples

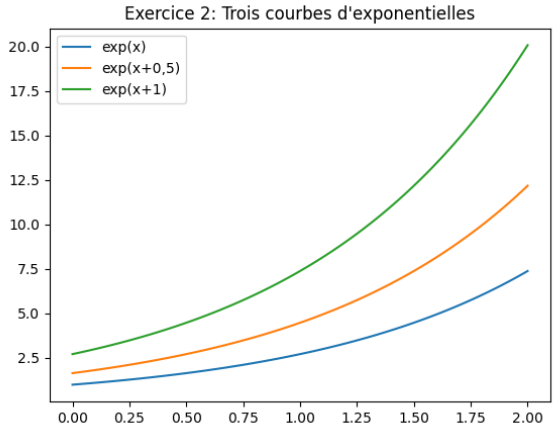
Q5.(a) ET (d)
Q6.(a) ET (b) ET (d)
Q7.(c)
Q8.(a) ET (d)
Q9.(a) ET (b) ET (c) ET (d) ET (f)
Q10.(a)
Q11.(a) ET (b)

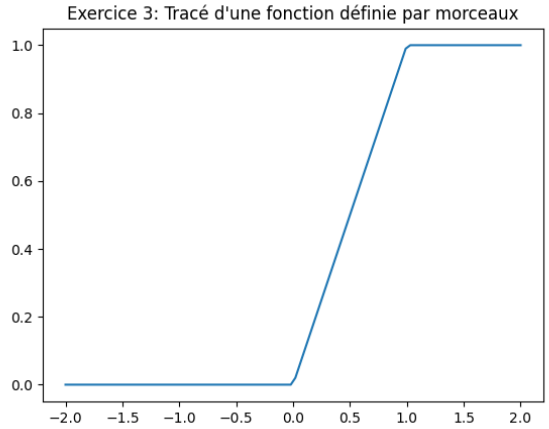
Réponses au QCM : Vérification d'homogénéité des formules

Q12.(a)
Q13.(b)
Q14.(a)
Q15.(b)
Inutile ici de connaître l'unité de g.
Q16.(a)
Q17.(b)
L'argument du cosinus doit être sans dimension.
Q18.(a)
Remarquez aussi que α doit être sans dimension.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Introduction aux outils numériques pour la Physique





Optique

Chapitre 00 Prérequis mathématiques pour l'optique

Conseils p.33

Cours p.28

O0.A. Géométrie de base
O0.B. Trigonométrie
O0.C. Fonctions

QCMs p.34

O0. Prérequis mathématiques pour l'optique

Cours

O0.A. Géométrie de base

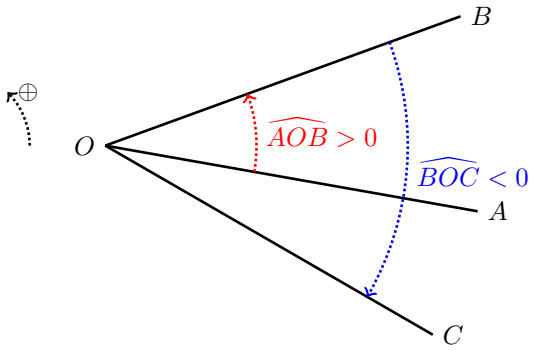
Propriété : Degrés et radians

Un angle peut se mesurer en degrés ou en radians. Un tour complet vaut 360° ou 2π rad ; on passe donc de l'un à l'autre par une règle de proportionnalité :

$$\frac{\text{angle}(^\circ)}{\text{angle(rad)}} = \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \tag{O0.1}$$

Propriété : Angles orientés

Un angle orienté est un angle avec un sens indiqué par une flèche. Le plan lui-même doit être orienté, c'est-à-dire qu'on lui associe un sens de rotation positif (par défaut, le sens trigonométrique). Si l'angle tourne dans le même sens que le sens positif, sa valeur est positive ; sinon, sa valeur est négative.



Les angles orientés vérifient

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \text{ (relation de Chasles)} \tag{O0.2a}$$

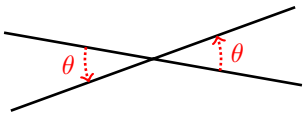
$$\widehat{AOB} = -\widehat{BOA} \tag{O0.2b}$$

Propriété : Angles d'un triangle

La somme des angles (non orientés) d'un triangle vaut 180° ou π rad.

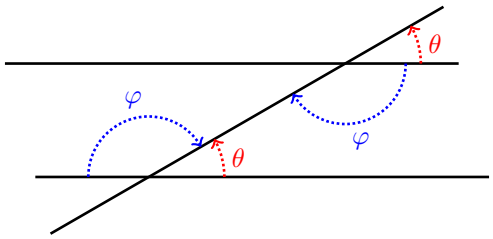
Propriété : Angles opposés par le sommet

Des angles opposés par le sommet sont égaux.



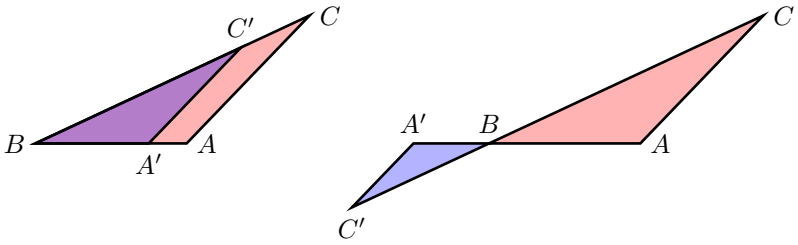
Propriété : Angles alternes-internes et correspondants

Lorsqu'une droite coupe deux droites parallèles, cela fait apparaître des angles correspondants (θ) et alternes-internes (φ) qui sont égaux.



Théorème de Thalès

Soient deux triangles semblables :



Alors peut écrire des rapports égaux soit entre les côtés parallèles des deux triangles

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(O0.3a)}$$

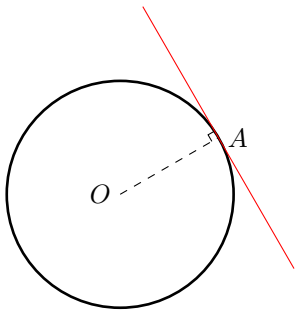
soit entre les côtés semblables de chaque triangle

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'} \quad \text{etc.} \qquad \text{(O0.3b)}$$

Enfin, une propriété importante concernant les cercles :

Propriété : Tangente à un cercle

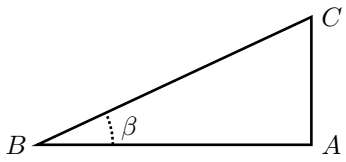
La tangente à un cercle en un de ses points est orthogonale au rayon du cercle aboutissant à ce point.



O0.B. Trigonométrie

Définition : Sinus, cosinus, tangente

Dans un triangle rectangle, soit β un des deux angles non droit.



On définit les rappport

$$\sin\beta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC} \qquad \cos\beta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC} \qquad \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \tag{O0.4}$$

Par le théorème de Pythagore, on montre facilement que

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \tag{O0.5}$$

Il est important de connaître les formules de trigonométrie de base :

Propriété : Somme d'angles

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{O0.6a}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{O0.6b}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{O0.6c}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \tag{O0.6d}$$

Des formules précédentes, on déduit plusieurs formules très importantes :

Propriété : Angles complémentaires

$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha \tag{O0.7a}$$
$$\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha \tag{O0.7b}$$

Propriété : Angles doubles

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{O0.8a}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha \tag{O0.8b}$$

O0.C. Fonctions

Une fonction est une entité mathématique qui reçoit des *arguments* appartenant à son espace de départ, et renvoie des *valeurs* qui appartiennent à son espace d'arrivée. Il est important de bien comprendre la différence entre f, qui est une fonction, et $f(x)$, qui est le résultat renvoyé par la fonction si on lui donne l'argument x.

En maths, l'argument de f est une variable muette ; ainsi, on peut écrire indifféremment $f : x \mapsto x^2$ ou $f : t \mapsto t^2$; en physique par contre, les arguments ont un sens, et une fonction qui dépend du temps n'est pas la même chose qu'une fonction qui dépend de la position. On écrira donc de façon équivalente (et mathématiquement inexacte) f ou $f(x)$, la deuxième notation servant à rappeler ici que f dépend de x et non pas d'une autre variable.

On associe à une fonction sa dérivée, notée différemment en physique et en maths ; en physique, on indique par rapport à quel argument on dérive :

Définition : Dérivée d'une fonction

On définit la dérivée d'une fonction en une valeur x_0 comme la limite du taux d'accroissement

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} \tag{O0.9}$$

Remarque : Dans la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, l'action de dériver est traduite par le bloc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; quand on dérive la dérivée, cela donne la dérivée seconde qui s'écrit donc en mettant ce bloc au carré : $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ou $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

On peut introduire une notation importante en physique : si x est une variable, on notera $\mathrm{d}x$ une petite variation de x, « petite » dans le sens de « qui tend vers 0 » ; autrement dit, il y a une notion de limite implicite. Ainsi, en physique, au lieu d'écrire $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}$, on écrira $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{f(x_0+\mathrm{d}x)-f(x_0)}{\mathrm{d}x}$ (la limite est sous-entendue par le $\mathrm{d}x$).

On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Approximation d'une fonction par sa tangente (ou développement limité d'ordre 1)

Au voisinage d'une valeur x_0, la fonction f vaut approximativement

$$f(x_0+dx) \approx f(x_0) + \mathrm{d}x.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \tag{O0.10}$$

Or on connaît les dérivées des fonctions trigonométriques :

Propriété : Dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \cos\alpha \tag{O0.11a}$$
$$\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\alpha \tag{O0.11b}$$
$$\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha \tag{O0.11c}$$

En appliquant la relation (O0.10) aux fonctions trigonométriques, on obtient :

Propriété : Fonctions trigo pour de petits angles

Pour des angles petits ($\ll 1\,\mathrm{rad}$ soit environ $< 15°$), on a les égalités suivantes **EN RADIANS** :

$$\sin\alpha \approx \alpha \tag{O0.12a}$$
$$\cos\alpha \approx 1 \tag{O0.12b}$$
$$\tan\alpha \approx \alpha \tag{O0.12c}$$

En physique, les fonction dépendent d'une variable précise ; mais cette variable peut être elle-même une fonction d'une autre variable : on a alors une fonction composée. Par exemple, une fonction f peut dépendre de la position x qui elle-même dépend du temps t. On notera alors, suivant le besoin de clarté, f ou $f(x)$ ou $f(x(t))$.

En maths, on peut considérer qu'on effectue la composition de f par x, notée $f\circ x$. Si on veut dériver cette fonction composée par rapport à sa variable t, alors $(f\circ x)' = x'\times(f'\circ x)$, autrement dit, avec les notations de la physique, $\frac{\mathrm{d}(f(x(t)))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, on obtient la notation abrégée et facile à retenir :

Propriété : Dérivation d'une fonction composée

Si f est une fonction qui dépend de g qui elle-même dépend de t, alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\times\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \tag{O0.13}$$

Exemple : Dérivée d'une fonction composée

Dériver $t \mapsto \cos(3t^2)$ par rapport à t.

On peut considérer qu'il s'agit de la fonction cosinus composée par $t \mapsto 3t^2$; la dérivée de cosinus est moins sinus, et la dérivée de $t \mapsto 3t^2$ est $t \mapsto 6t$; donc $\frac{\mathrm{d}\cos(3t^2)}{\mathrm{d}t} = -\sin(3t^2) \times 6t$.

L'intérêt de cette façon de l'écrire, c'est que la généralisation à des composées de composées est immédiate.
Il faut bien maîtriser en particulier les dérivées de fonctions de la forme $\cos(\omega t)$ ou $e^{\alpha t}$; cf. les QCM pour s'entraîner.

O0. Prérequis mathématiques pour l'optique

Quelques conseils

✎ Il faut absolument savoir passer de radians en degrés et vice-versa ; c'est une règle de proportionnalité : $180° = \pi$ rad.

✎ On écrira plutôt le théorème de Thalès sous forme d'égalité des rapports des côtés parallèles (formule (O0.3a)) ; ce sera essentiel quand on introduira les distances algébriques.

✎ Les formules d'angles doubles sont importantes, elles servent parfois dans l'autre sens pour des angles moitié : par exemple $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, etc.

✎ En physique, on écrit indifféremment f ou $f(t)$; la première notation est plus courte, la seconde permet de mieux comprendre ce qui est constant et ce qui varie. Au début, n'hésitez pas à préciser les (t) même si c'est un peu lourd, ça aide à comprendre ce qui doit être dérivé.

✎ La formule (O0.10) remplace une fonction f compliquée par une fonction affine plus simple à manipuler ; on appelle cela *linéariser la fonction* et on verra que c'est très utile.

✎ Retenez bien les approximations des fonctions trigonométriques aux petits angles avec la condition essentielle : les angles doivent être en radians lors de l'application numérique ; dans les calculs littéraux, cela n'importe pas.

O0. Prérequis mathématiques pour l'optique

QCMs

réponses page 36

✓ QCM : Trigonométrie ✗

Q1. $\cos 0 + \sin \frac{\pi}{4} =$

(a). $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
(b). $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c). $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(d). $\frac{1}{2}$

Q2. $\cos(\alpha + \beta) =$

(a). $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(b). $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
(c). $\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$
(d). $\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

Q3. $\cos(2\alpha) =$

(a). $1 - 2\sin^2\alpha$
(b). $2\sin^2\alpha - 1$
(c). $1 - 2\cos^2\alpha$
(d). $2\cos^2\alpha - 1$

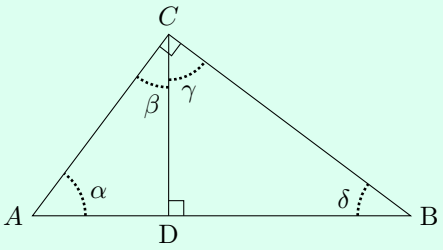
Q4. $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

(a). $\sin\alpha$
(b). $\sin(2\alpha)$
(c). $2\cos\alpha$
(d). $\frac{\sin\alpha}{2}$

Q5. $\sin^2\alpha =$

(a). $\frac{1-2\cos(2\alpha)}{2}$
(b). $\frac{1+2\cos(2\alpha)}{2}$
(c). $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
(d). $\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

Q6. Dans la figure ci-dessous, quel angle est égal à α ?



(a). β
(b). δ
(c). γ

Q7. En déduire quelles égalités sont justes :

(a). $CD = AC.\cos\alpha$
(b). $CB = AB.\cos\alpha$
(c). $AC = \frac{BC}{\tan\alpha}$
(d). $AC = AB.\sin\alpha$
(e). $CD = BC.\cos\alpha$
(f). $CD = BD.\tan\alpha$
(g). $BC = AB.\sin\alpha$
(h). $AB = AC.\cos\alpha$
(i). $DB = CD.\tan\alpha$

✓ QCM : Approximation d'une fonction par sa tangente ✗

Q8. Soit $f : x \mapsto x^2$; au voisinage de 1, on peut écrire

(a). $f(1+\mathrm{d}x) \approx 1 + 2.\mathrm{d}x^2$
(b). $f(1+\mathrm{d}x) \approx 1 + 2.\mathrm{d}x$
(c). $f(1+\mathrm{d}x) \approx 2.\mathrm{d}x$
(d). $f(1+\mathrm{d}x) \approx 1 + \mathrm{d}x$

Q9. $\sqrt{2+\mathrm{d}x} \approx$

(a). $\sqrt{2} + \frac{\mathrm{d}x}{2}$
(b). $1 + \frac{\mathrm{d}x}{2}$
(c). $\sqrt{2} + \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{2}}$
(d). $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{d}x}$

Q10. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{d}x\right) =$

(a). $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{d}x$
(b). $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{d}x$
(c). $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x$
(d). $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x$

✓ QCM : Dérivation de fonctions composées ✗

Pour dériver, vous êtes libre d'utiliser la formule façon maths ou façon physique, tant que c'est juste.

Q11. Que vaut la dérivée de $\exp(a.t)$ par rapport à t, avec $a = \text{cst}$?

(a). $a.t.e^{a.t}$
(b). $e^{a.t}$
(c). $a.e^{a}$
(d). $a.e^{a.t}$

Q12. Que vaut la dérivée de $2\cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à t, avec ω et φ des constantes ?

(a). $-2\sin(\omega t + \varphi)$
(b). $-2\omega\sin(\omega t + \varphi)$
(c). $2\omega\sin(\omega t + \varphi)$
(d). $2(\omega + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)$

Q13. Que vaut la dérivée de $\cos^2(t)$?

(a). $2\cos(t)$
(b). $\sin(t)\cos(t)$
(c). $-2\sin(t)$
(d). $-2\sin(t)\cos(t)$

Q14. Que vaut la dérivée de $\cos^2(\omega t)$ par rapport à t ?

(a). $-2\cos(\omega t)$
(b). $-2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$
(c). $-2\omega^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$
(d). $-2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)$

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Trigonométrie

Q1.(a)
Q2.(a)
Q3.(a) ET (d)
Q4.(d)
Q5.(c)
Q6.(c)
$\beta = \delta = 90° - \alpha$
Q7.(c) ET (e) ET (g) ET (i)

Réponses au QCM : Approximation d'une fonction par sa tangente

Q8.(b)
$f(1) = 1$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 2$.
Q9.(c)
La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Q10.(d)
La dérivée de $x \mapsto \sin(x)$ est $x \mapsto \cos(x)$

Réponses au QCM : Dérivation de fonctions composées

Q11.(d)
Q12.(b)
Q13.(d)
Q14.(d)

Chapitre 01 Bases de l'optique géométrique

Programme p.51

Conseils p.52

Cours p.38
- O1.A. Description de la lumière
- O1.B. Propagation des rayons lumineux

QCMs p.53

Exercices p.58

O1. Bases de l'optique géométrique

Cours

Dans ce chapitre, nous allons poser les bases qui vont nous permettre d'étudier plus tard les systèmes optiques : lunette, appareil photo, microscope,...Les lois fondamentales qui y seront présentées ne serviront que rarement telles quelles, mais nous permettront de comprendre les principes de la manipulation de la lumière.

O1.A. Description de la lumière

La lumière est un phénomène physique perçu par le moyen de la vue. L'expérience que nous en avons chaque jour nous permet d'en développer des idées quant à sa nature. Au fur et à mesure de l'histoire, des expériences ont amené à découvrir des aspects plus complexes de la lumière. Au final, trois grands modèles ont été développés pour expliquer la propagation de la lumière, du plus simple, décrivant les phénomènes basiques, au plus compliqué.

A.1. Modèles de propagation

La première expérience que nous faisons de la propagation de la lumière est celle de *rayons lumineux* passant par exemple à travers les nuages (figure O1.1), ces mêmes rayons que l'on imagine reliant les bords d'un objet aux bords de son ombre. C'est donc la première description possible pour la lumière, celle qui est la plus simple, mais suffisante pour expliquer de nombreux phénomènes :

Figure O1.1 : Rayons du soleil à travers les nuages.

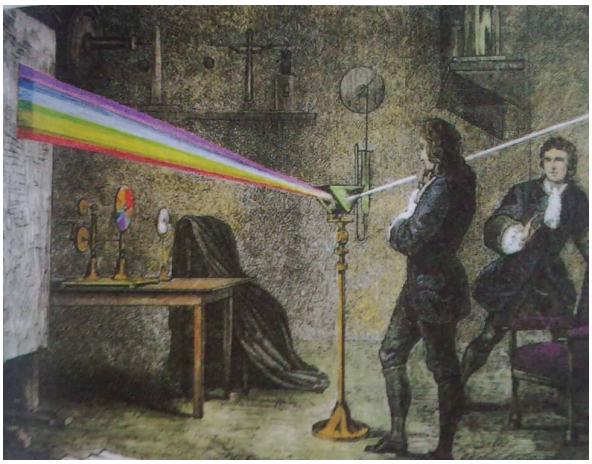


Définition : Optique géométrique

L'optique géométrique considère la lumière comme étant constituée de **rayons lumineux** qui sont indépendants les uns des autres (ils se croisent sans interagir).

De plus, les rayons lumineux possèdent une couleur, notion peu définie mais qui traduit la façon dont nos yeux la perçoivent. Newton a montré, en faisant passer un rayon de lumière solaire à travers un prisme (figure O1.2), que ces couleurs suivent un ordre particulier, qu'on retrouve aussi dans l'arc-en-ciel : rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet. En appliquant cette décomposition par un prisme à la lumière émise par différentes sources, on se rend compte qu'il existe 4 familles de sources de lumière.

FIGURE O1.2 : Isaac Newton décomposant la lumière blanche. *(Crédit : The Spalenka Letters)*



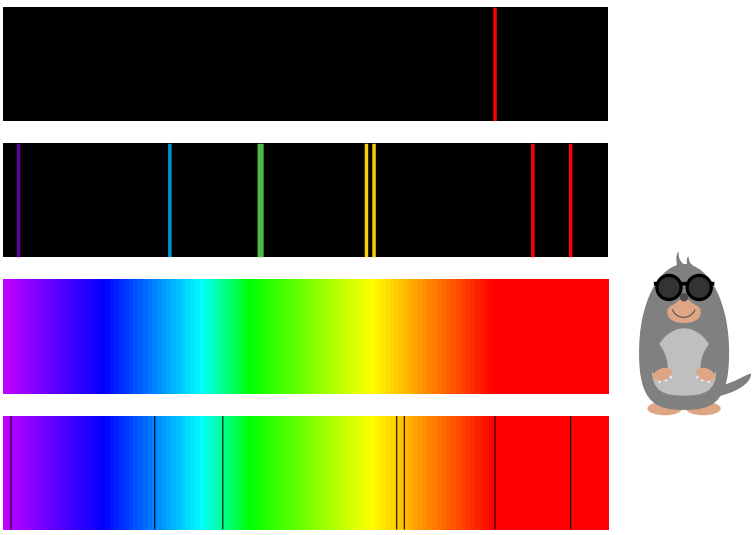
Définition : Spectre d'une source lumineuse

On appelle **spectre** d'une source lumineuse, l'ensemble des couleurs [a] contenues dans la lumière émise par cette source. On distingue 4 grandes familles de spectres (cf. figure O1.3) :

- les *spectres monochromatiques* ou *spectres harmoniques* ne contenant quasiment qu'une seule couleur ; c'est par exemple le spectre d'un laser
- les *spectres de raies* ou *spectres discrets* ne contenant qu'un nombre fini de couleurs ; c'est par exemple le spectre des lampes à décharge
- les *spectres continus* contenant toutes les couleurs dans un intervalle donné ; c'est par exemple le spectre d'un objet chauffé (comme une ampoule halogène)
- les *spectres à raies d'absorption* contenant toutes les couleurs dans un intervalle donné, sauf un nombre fini d'entre elles ; c'est par exemple le spectre du Soleil

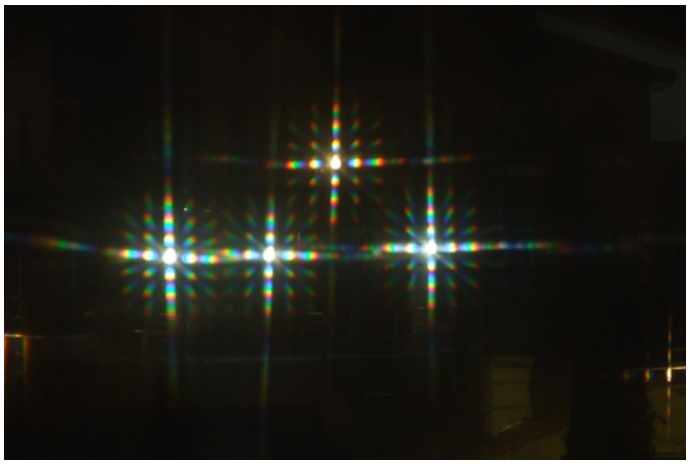
a. Avec le vocabulaire de l'optique géométrique, on dira l'ensemble des *fréquences* ou l'ensemble des *longueurs d'ondes*.

FIGURE O1.3 : Spectre monochromatique, discret (Hg ici), continu ou de raies d'absorption.



Cette approche de la propagation de la lumière, soutenue par Newton, est très simple car la propagation des rayons lumineux n'est décrite que par des lois géométriques ; mais elle ne peut cependant pas expliquer certains phénomènes qui apparaissent à de petites échelles : la diffraction en particulier, phénomène qu'on apperçoit lorsqu'on fait passer un rayon lumineux à travers un trou de petite taille (cf. chapitre PROPAGATION DES ONDES). En effet, après le trou, le faisceau lumineux s'élargit, et cela d'autant plus que le trou était petit. Un autre phénomène du même genre se voit lorsqu'on observe une source lumineuse ponctuelle à travers des rideaux très fins (figure O1.4).

Figure O1.4 : Diffraction à travers des rideaux fins.



A.2. Optique ondulatoire

C'est Huygens qui montra que ces phénomènes peuvent se comprendre en considérant la lumière comme une *onde*, à l'image des vagues à la surface de l'océan.

Définition : Optique ondulatoire

L'optique ondulatoire considère la lumière comme une **onde**, c'est-à-dire un phénomène physique qui se propage en vibrant. À une lumière de couleur donnée, on peut associer :

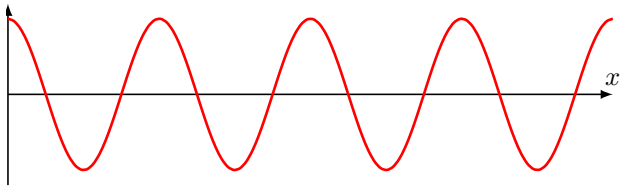
- une fréquence f en Hertz (Hz) qui représente le nombre de vibrations par seconde
- une période $T = \frac{1}{f}$ en secondes qui représente la durée d'une vibration
- une période spatiale appelée **longueur d'onde** qui représente la distance entre deux maxima de l'onde dans l'espace

La longueur d'onde de la lumière dans le vide est reliée à sa fréquence par la relation

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \tag{O1.1}$$

avec $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

Figure O1.5 : Propagation d'une onde (monochromatique).

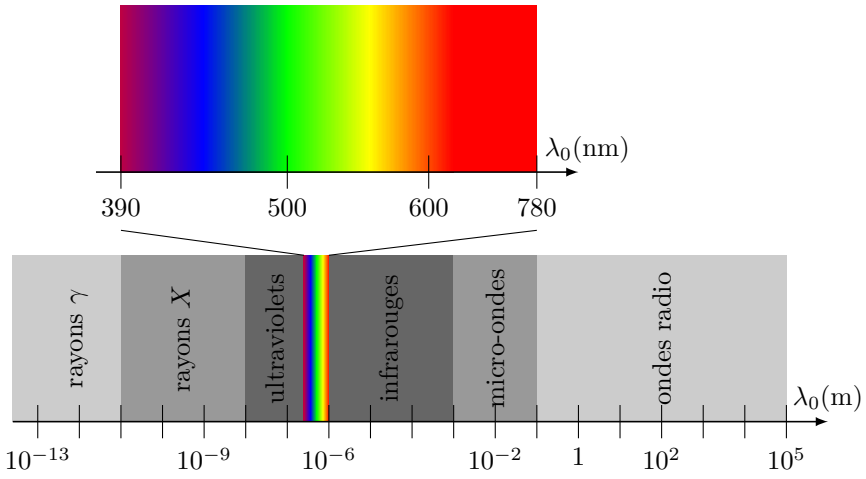


C'est une approche plus précise des propriétés exactes de la lumière, mais qui, en contrepartie, est plus complexe et plus calculatoire : au lieu de ne faire intervenir que les lois de la géométrie, elle fait intervenir des intégrales compliquées.

Dans cette approche, on constate que la couleur de la lumière est associée à la fréquence de l'onde qui la compose. En pratique, on donne plutôt la longueur d'onde λ_0 de la lumière dans le vide. La lumière visible par l'œil humain correspond à des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 400 nm (violet) et 800 nm (rouge – cette limite diminue avec l'âge). Mais on a découvert de nombreuses autres ondes lumineuses, non visibles.

Les ondes lumineuses ayant des longueurs d'onde proches ont des propriétés proches aussi. On les regroupe alors en *domaines* représentés sur la figure O1.6. On y voit au centre la bande de longueurs d'onde que notre œil est capable de voir : le *visible* ; de part et d'autre se trouvent les rayonnements infrarouge et ultraviolets, puis encore d'autres.

FIGURE O1.6 : Domaines des ondes lumineuses.



A.3. L'optique quantique, ou photonique

Ce modèle ondulatoire de la lumière a permis de décrire la majorité des propriétés observées au XIXème siècle ; cependant, l'étude des échanges d'énergie entre la lumière et la matière a montré la nécessité d'un modèle encore plus précis aux très petites échelles et/ou aux courtes longueurs d'onde :

Définition : Optique quantique ou photonique

L'optique quantique considère la lumière comme des particules appelées **photons** d'énergie

$$E = h.f \text{ (relation d'Einstein)} \qquad \text{(O1.2)}$$

avec $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ la *constante de Planck*.

Remarque : L'énergie s'exprime en Joules, ou en électron-Volts : $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

Si la description exacte des photons est très largement hors de portée d'un élève de prépa, on retiendra néanmoins la relation d'Einstein qui sert pour des calculs simples.

O1.B. Propagation des rayons lumineux

On se place désormais dans le cadre de l'optique géométrique.

B.1. Lois générales de propagation

Propriété : Propagation en ligne droite

Dans un milieu transparent homogène (dont les propriétés sont les mêmes partout) et isotrope (dont les propriétés sont les mêmes quelle que soit la direction), la lumière se propage en ligne droite.

C'est ce qui a donné naissance à la notion de rayon lumineux. Néanmoins, l'observation montre que les différents milieux transparents ont une propriété qui diffère :

Définition : Indice optique

Dans un milieu transparent, la lumière de longueur d'onde λ se déplace à une vitesse $v(\lambda)$ différente de sa vitesse dans le vide c. On définit alors l'indice optique du milieu à la longueur d'onde λ :

$$n(\lambda) = \frac{c}{v(\lambda)} \qquad \text{(O1.3)}$$

Remarque : On considèrera souvent que n est à peu près constant sur l'étendue du spectre visible pour un milieu donné. Néanmoins, dans tous les milieux matériels usuels, n(bleu) est légèrement supérieur à n(rouge).

Remarque : Contrairement à ce que l'on lit souvent, n n'a aucune raison d'être supérieur à 1. En effet, la théorie de la relativité indique qu'aucune *information* ne peut se propager à une vitesse supérieure à c ; mais vous verrez plus tard, en étudiant les ondes plus en détail, qu'un flash lumineux est un *paquet d'onde* dont la vitesse est différente de celle d'une *onde monochromatique* (onde qui ne contient qu'une seule longueur d'onde et n'a ni début, ni fin). C'est ce paquet d'onde qui ne peut pas aller plus vite que c, mais rien n'empêche la vitesse d'une onde parfaitement monochromatique (objet théorique qui n'existe pas) d'être supérieure à c.

Il existe même des milieux étranges où l'indice est négatif…mais dans tous les cas qu'on rencontrera cette année, on aura $n \geq 1$.

Le tableau O1.1 donne la valeur des indices optiques de milieux usuels pour la lumière jaune. Il est bon de retenir l'air ($n \approx 1$), l'eau ($n = 1{,}33$) et le verre ($1{,}5 \lesssim n \lesssim 1{,}7$ selon la composition).

Tableau O1.1 : Indices à 589 nm ; les milieux sont considérés dans les conditions d'utilisation courantes.

Air	1,0003	**Verre crown**	1,52
Glace	1,309	Chlorure de sodium	1,544
Eau	1,33	**Verre flint léger**	1,58
Saccharose	1,34	Polystyrène	1,59
Éthanol	1,36	**Verre flint lourd**	1,66
Quartz fondu	1,458	Zircone	2,15
Benzène	1,501	Diamant	2,417
Plexiglass®	1,51	GaP (semiconducteur)	3,50

Mais la lumière ne se propage pas seulement dans des milieux transparents homogènes : parfois, l'indice du milieu change. Les cas les plus simples qu'on va étudier, sont ceux où il existe plusieurs milieux transparents bien séparés.

Définition : Miroir

Un miroir est une surface qui limite un milieu transparent et renvoie la lumière qui le frappe vers le milieu d'où elle vient.

Définition : Dioptre

Un dioptre est une surface qui sépare deux milieux transparents différents.

Avant de considérer les lois de passage sur les miroirs et les dioptres, on va énoncer un principe général :

Propriété : Principe de retour inverse

Si la lumière va d'un point A à un point B en suivant un certain chemin, elle peut aller de B à A en suivant le même chemin en sens inverse.

Ce principe traduit le fait que, si A peut voir B, alors B peut voir A. Comme toute loi, elle possède des exceptions, très rares : les matériaux magnétiques.

Lois de Snell-Descartes pour la réflexion

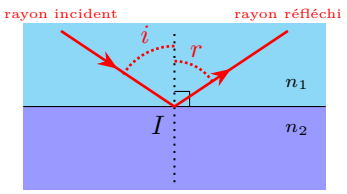
Un rayon est réfléchi lorsqu'il arrive sur un dioptre ou un miroir et qu'il repart en arrière dans le milieu d'où il vient.

Le **rayon réfléchi** frappe le miroir ou le dioptre au **point d'incidence** I ; on appelle **plan d'incidence** le plan qui contient le rayon incident et la normale au miroir/dioptre en I. Alors le rayon réfléchi vérifie les lois de Snell-Descartes :

— il est contenu dans le plan d'incidence

— l'angle entre le rayon réfléchi et la normale (angle réfléchi) est égal à l'angle entre le rayon incident et la normale (angle d'incidence) :

$$r = i \text{ (pour des angles non orientés)} \qquad \text{(O1.4)}$$



Remarque : Avec des angles orientés : $r = -i$.

Lois de Snell-Descartes pour la réfraction

Un rayon est réfracté lorsqu'il arrive sur un dioptre et qu'il le traverse en passant en changeant de direction. Le **rayon réfracté** frappe le dioptre au **point d'incidence** I ; on appelle **plan d'incidence** le plan qui contient le rayon incident et la normale au dioptre en I. Alors le rayon réfracté vérifie les lois de Snell-Descartes :

— il est contenu dans le plan d'incidence

— l'angle r entre le rayon réfracté et la normale (angle réfracté) est relié à l'angle i entre le rayon incident et la normale (angle d'incidence) par la loi :

$$n_1 . \sin i = n_2 . \sin r \qquad \text{(O1.5)}$$

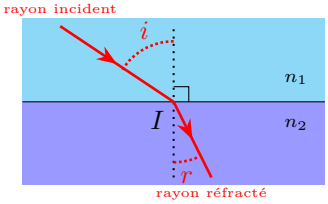
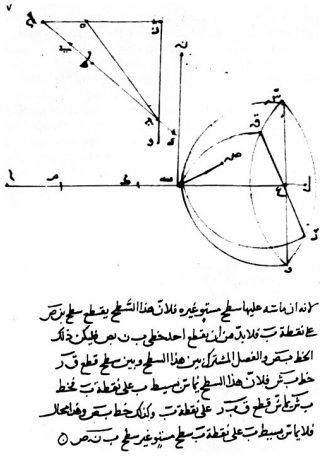


FIGURE O1.7 : Manuscrit d'Ibn Sahl (940-1000) mentionnant pour la première fois les lois de la réfraction. (Crédit : Wikipedia)

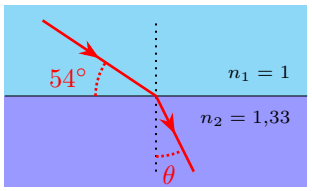


Remarque : Lorsque de la lumière arrive sur un dioptre, une partie est réfléchie, une autre partie est transmise.

Remarque : Si le dioptre n'est pas plan, on prend le plan tangent au dioptre au niveau du point d'incidence, et on trace la normale à celui-ci.

Exemple : Réfraction à la surface de l'eau

Un rayon lumineux passe de l'air ($n = 1$) dans l'eau ($n = 1{,}33$). Il arrive avec un angle 54° par rapport à la surface de l'eau. Déterminer l'angle θ de réfraction.



Cet exemple est là simplement pour bien insister que les angles d'incidence et de réfraction sont mesurés par rapport à la normale, et non pas au dioptre. Ainsi, ici l'angle d'incidence n'est par 54°, mais son complémentaire, soit $90 - 54 = 36°$. La loi de Snell-Descartes indique alors que $1 . \sin 36° = 1{,}33 . \sin\theta$ soit $\theta = 26°$.

B.2. Étude du comportement d'un rayon lumineux réfracté

Nous allons étudier plus en détail les lois de la réfraction, en faisant attention à distinguer le passage vers un indice plus fort ou vers un indice plus faible. On fait tous les calculs avec des angles non orientés, compris entre 0° et 90°. On rappelle aussi qu'on suppose $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$ (pas de milieux transparents bizarres).

Propriété : Position du rayon réfracté par rapport au rayon incident

— si la lumière passe d'un indice faible à un indice fort, le rayon réfracté se rapproche de la normale

— si la lumière passe d'un indice fort à un indice faible, le rayon réfracté s'éloigne de la normale

Démonstration

Avec les notations vues précédemment : i l'angle d'incidence, r l'angle de réfraction, n_1 et n_2 les indices des deux milieux, alors la loi de Snell-Descartes indique que $n_1.\sin i = n_2.\sin r$ soit $\sin r = \frac{n_1}{n_2}\sin i$:

— si $n_2 > n_1$ alors $\frac{n_1}{n_2} < 1$ donc $\sin r \leq \sin i$. Or la fonction sinus est croissante sur $[0°;90°]$ donc cela implique que $r \leq i$: le rayon réfracté est plus proche de la normale que le rayon incident.

— si $n_2 < n_1$ alors $\frac{n_1}{n_2} > 1$ donc $\sin r \geq \sin i$. Or la fonction sinus est croissante sur $[0°;90°]$ donc cela implique que $r \geq i$: le rayon réfracté est plus éloigné de la normale que le rayon incident.

Propriété : Variation de l'angle réfracté en fonction de l'angle d'incidence

Si le rayon incident arrive en incidence normale ($i = 0°$) alors il n'est pas dévié : $r = 0°$. Si l'angle d'incidence se met à croître, alors l'angle de réfraction r croît aussi.

Un peu de maths : Fonctions trigonométriques réciproques

Quand vous connaissez le sinus ou le cosinus d'un angle, vous utilisez la touche `cos-1` ou `sin-1` de votre calculatrice pour obtenir l'angle. Les vraies fonctions mathématiques associées s'appellent en réalité arcsinus (notée arcsin) et arccosinus (notée arccos). Nous n'allons pas étudier en détail ces fonctions, vous le ferez en maths, mais on va simplement en retenir deux propriétés importantes :

— pour des angles compris entre 0° et 90°, arcsinus (resp. arccosinus) est la réciproque de sinus (resp. cosinus), donc

$$\begin{cases} \forall \theta \in [0°;90°], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta \text{ et } \arccos(\cos(\theta)) = \theta \\ \forall x \in [0;1], \sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \cos(\arccos(x)) = x \end{cases} \quad \text{(O1.6)}$$

— les fonctions réciproques ont la même monotonie que les fonctions directes : arcsinus est croissante sur $[0;1]$, et arccosinus est décroissante sur $[0;1]$.

Démonstration

Il est évident que si $i = 0°$ alors $\sin i = 0$ donc par les lois de Snell-Descartes $\sin r = 0$ donc $r = 0°$: le rayon continue tout droit.
Soient deux angles d'incidence i_1 et $i_2 > i_1$. Alors $\sin i_2 > \sin i_1$ car la fonction sinus est croissante (toujours sur $[0°;90°]$). Donc $\frac{n_1}{n_2}\sin i_2 > \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$ puisque n_1 et n_2 sont positifs. Donc $\sin r_2 > \sin r_1$ où r_2 et r_1 sont les angles réfractés correspondants à i_1 et i_2. On applique la fonction arcsinus qui est croissante et on trouve $r_2 > r_1$: donc si l'angle d'incidence est plus grand, alors l'angle de réfraction est plus grand.

On peut alors tracer le rayon réfracté pour i variant de 0° à 90° (figure O1.8).

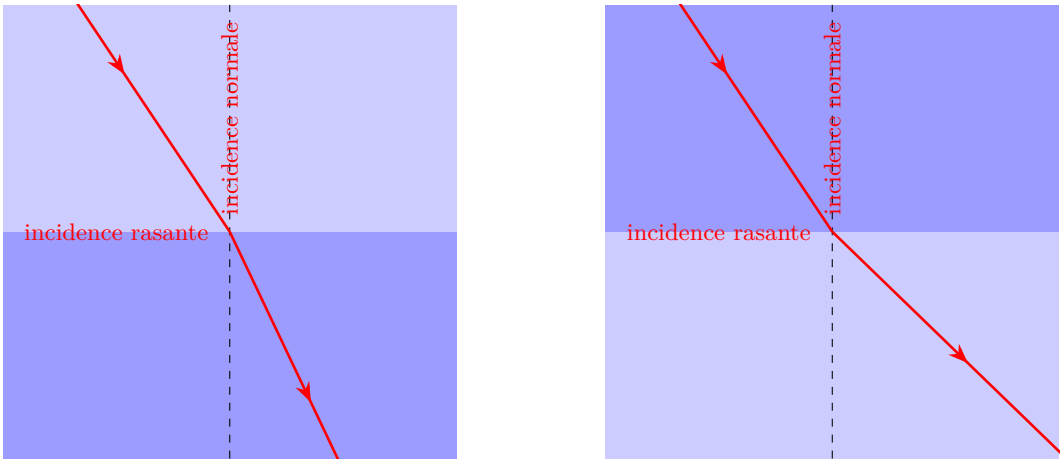
En fait, on voit apparaître deux comportements différents. Dans le cas du passage d'un indice *faible à fort*, on sait que $r \leq i$ donc quand i croît de 0° à 90° alors r croît de 0° à une valeur maximale appelée *angle maximal de réfraction* et dont on montre facilement qu'il vaut $\arcsin \frac{n_1}{n_2}$ (pour $i = 90°$).

Tableau de variation de r pour un passage d'un indice faible à fort

i	$0°$ →	$90°$
r	$0°$ →	$\arcsin \frac{n_1}{n_2}$

Par contre, lorsque la lumière passe d'un indice *fort à faible*, l'angle r croît plus vite que i, et atteint la valeur 90° pour $\sin i = \frac{n_2}{n_1}$. Si i continue de croître, la relation de Snell-Descartes donne $\sin r > 1$ ce qui est impossible : la réfraction n'est plus possible.

FIGURE O1.8 : Évolution de l'angle réfracté en fonction de l'angle d'incidence.



(a) Passage vers un indice plus fort (b) Passage vers un indice plus faible

Propriété : Réflexion totale (interne)

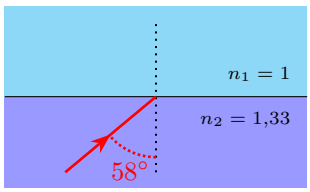
Lorsque la lumière passe *d'un milieu d'indice fort à un autre d'indice plus faible*, il existe un angle d'incidence maximal, nommé **angle limite de réflexion totale**, de valeur $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$, au-delà duquel la lumière ne peut plus être réfractée : elle est alors entièrement réfléchie.
Pour retrouver la condition de réflexion totale, on doit écrire que l'angle de réfraction n'existe que si $\sin r \leq 1$.

Démonstration

La réfraction n'est possible que si l'angle de réfraction existe, donc si $\sin r \leq 1$. D'après la loi de Snell-Descartes, cela est équivalent à $n_1 . \sin i \leq n_2$ soit $\sin i \leq \frac{n_2}{n_1}$ soit $i \leq \arcsin \frac{n_2}{n_1}$.

Exemple : Réflexion totale à la surface de l'eau

Un rayon lumineux dans l'eau ($n = 1{,}33$) arrive sur un dioptre eau/air en faisant un angle de 32° par rapport à la surface. Montrez qu'il subit une réflexion totale.



L'angle d'incidence vaut 58°. *Supposons que* le rayon soit réfracté ; alors d'après les lois de Snell-Descartes, en notant r l'angle de réfraction, on a $1{,}33 . \sin 58° = 1 . \sin r$ soit $\sin r = 1{,}13$ ce qui est impossible : il y a donc réflexion totale.

Le tableau de variation est alors le suivant :

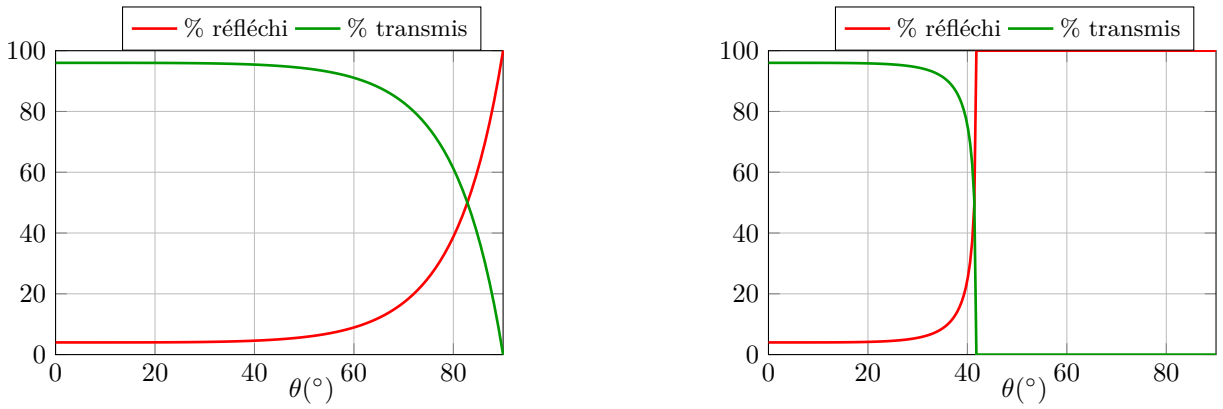
Tableau de variation de r pour un passage d'un indice fort à faible

i	$0°$	$\arcsin \frac{n_2}{n_1}$	$90°$
r	$0°$ ↗	$90°$	

Remarque : En réalité, même lorsqu'il y a de la lumière réfractée, il y a aussi de la lumière réfléchie. Quand l'angle d'incidence augmente, la proportion de lumière réfléchie augmente aussi. Dans le cas du passage d'un indice fort à faible, cette proportion atteint 100 % à l'angle limite de réflexion totale. Le calcul des proportions de lumière réfléchie

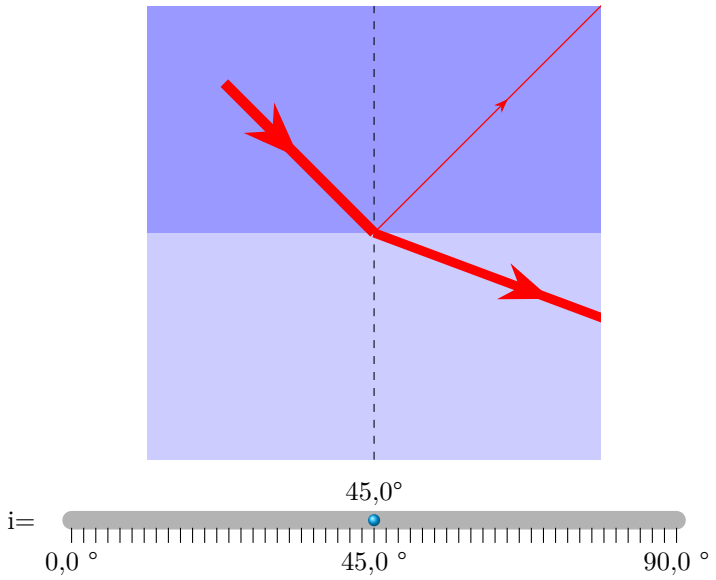
ou transmise (appelés coefficients de Fresnel) est compliqué ; leur profil est représenté figure O1.9. L'animation de la figure O1.10 montre ainsi l'évolution de la quantité de lumière réfléchie et transmise lorsque l'angle augmente.

FIGURE O1.9 : Coefficients de Fresnel pour un passage entre l'air ($n = 1$) et le verre ($n = 1{,}5$).



(a) Passage air→verre (b) Passage verre→air

FIGURE O1.10 : Évolution de la quantité de lumière transmise et réfléchie lorsque l'angle d'incidence sur l'interface eau/air augmente (cliquez en un point du glisseur pour modifier l'angle) : juste avant la réflexion totale, la quantité de lumière transmise diminue fortement.



B.3. Exemple d'application de la réflexion totale : la fibre optique

Une fibre optique est un fil transparent qui sert à conduire la lumière sur de longues distances. Il peut servir soit à faire de l'imagerie (par exemple, pour des examens de l'estomac,…) soit à transmettre de l'information.

Pour guider la lumière, on utilise le principe de réflexion totale sur les parois. Cela conduit à fabriquer une fibre dans laquelle le centre a un indice optique plus élevé que le bord. Deux grandes familles de fibres existent :

— les fibres à *saut d'indice*, formées d'un cœur d'indice constant entouré d'une gaine d'indice plus faible ;

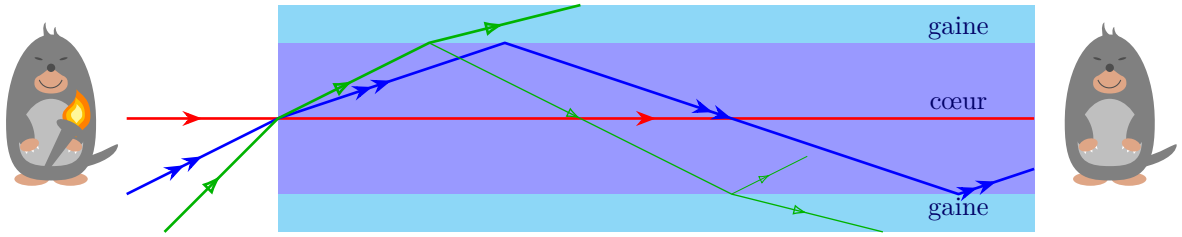
— les fibres à *gradient d'indice*, formées d'un cœur dans lequel l'indice décroît de façon continue du centre vers les bords.

Pour cette année, on se limitera aux fibres à saut d'indice, car elles sont assez simples à étudier.

Le principe de la propagation est illustré sur la figure O1.11. En entrée de la fibre (à gauche), on envoie plein de lumière avec un peu toutes les directions. Considérons alors les 3 rayons représentés :

— le rayon rouge → est parallèle à l'axe de la fibre : il n'est pas dévié sur la face d'entrée et continue tout droit à travers la fibre ; ce rayon est idéal, en réalité aucun rayon n'est ainsi parfaitement parallèle à l'axe, et aucune fibre n'est parfaitement rectiligne ;

FIGURE O1.11 : Principe de propagation de la lumière dans une fibre à saut d'indice.



— le rayon bleu ➤— est un peu incliné. Sur la face d'entrée, il est réfracté et pénètre dans le cœur. Une fois arrivé à l'interface cœur/gaine, il arrive avec une incidence tellement rasante qu'il subit une réflexion totale, et repart dans le cœur, subissant régulièrement d'autres réflexions ;

— le rayon vert —➤ est plus incliné. Sur la face d'entrée, il subit une réfraction, pénètre dans le cœur, puis arrive à l'interface cœur/gaine où il est à nouveau réfracté. Une grande partie de la lumière part donc dans la gaine, tandis qu'une toute petite partie est réfléchie. Au bout de quelques réflexions, il ne reste quasiment plus de lumière dans le cœur.

Ainsi, on voit que seuls les rayons pas trop inclinés par rapport à l'axe de la fibre pourront se propager sur de longues distances.

Propriété : Cône d'acceptance et ouverture numérique

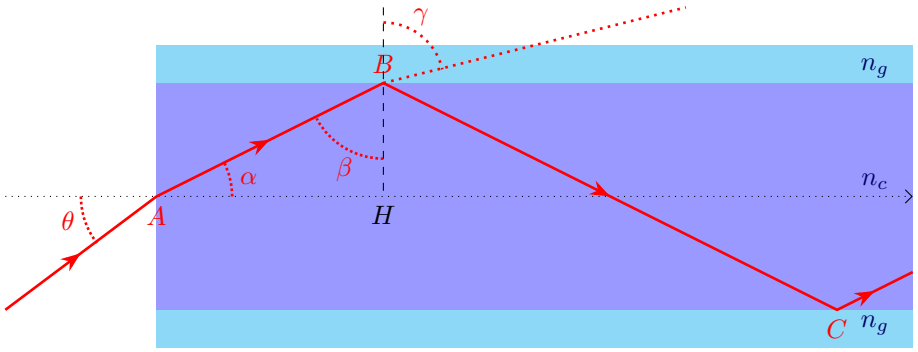
Dans une fibre optique, un rayon ne peut se propager sur de longues distances que si le rayon incident sur la face d'entrée fait partie du *cône d'acceptance* : son angle θ par rapport à l'axe de la fibre doit être inférieur à une certaine valeur θ_m. On définit l'ouverture numérique de la fibre comme le sinus de cet angle maximal [a].
Pour une fibre optique à saut d'indice, dont le cœur a pour indice n_c et la gaine $n_g < n_c$, et placée dans de l'air d'indice 1, l'ouverture numérique vaut

$$ON = \sin\theta_m = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \qquad \text{(O1.7)}$$

a. Plus exactement, le sinus de l'angle maximal multiplié par l'indice optique du milieu dans lequel se trouve la fibre ; on considèrera ici que c'est de l'air.

Démonstration

Commençons par un schéma où on nomme les points où il y a des réfractions/réflexions, et où on place les normales :



Ce qu'on cherche, c'est la condition pour qu'il y ait réflexion totale à l'interface cœur/gaine, c'est-à-dire en B. On a placé l'angle d'incidence en B, noté β. **La condition de réflexion totale se trouve toujours avec un raisonnement par l'absurde** : on suppose qu'il y a réfraction, et on cherche quand c'est impossible.
Supposons donc que la réfraction soit possible en B, et notons γ l'angle réfracté. Alors, d'après les lois de Snell-Descartes : $n_c.\sin\beta = n_g.\sin\gamma$ avec $\sin\gamma \leq 1$ donc $n_c.\sin\beta \leq n_g$ soit $\beta \leq \arcsin\frac{n_g}{n_c}$: c'est la condition pour qu'il y ait un rayon réfracté ; à l'inverse, il y a réflexion totale si $\beta > \arcsin\frac{n_g}{n_c}$.
Maintenant, on cherche à traduire cela par une condition sur l'ouverture numérique, donc sur $\sin\theta$. Pour cela, il faut d'abord relier β à α par des lois de géométrie. Il est facile de voir que le triangle ABH est rectangle en H, donc α et β sont complémentaires : $\alpha = 90° - \beta$. La condition de réflexion totale s'écrit donc $\alpha < 90° - \arcsin\frac{n_g}{n_c}$.
Or au point A il y a réfraction, le rayon passant de l'air d'indice 1 au cœur, donc d'après les lois de Snell-

Descartes : $1.\sin\theta = n_c.\sin\alpha$. Il y a donc réflexion totale si $\sin\theta < n_c.\sin\left(90° - \arcsin\frac{n_g}{n_c}\right)$ puisque la fonction sinus est croissante sur les angles entre 0° et 90°. On peut simplifier cette expression à condition de connaître soit les formules du genre $\sin(a+b) = \ldots$, ou bien en se souvenant des formules sur les angles complémentaires : $\sin(90° - x) = \cos(x)$ et $\cos(90° - x) = \sin(x)$. Ici on a donc $n_c.\sin\left(90° - \arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) = n_c.\cos\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right)$. Comme on n'a pas encore appris les formules donnant $\cos(\arcsin x)$, on utilise le fait que $\cos^2\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) + \sin^2\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) = 1$ donc $\cos^2\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) + \frac{n_g^2}{n_c^2} = 1$ soit $\cos\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) = \sqrt{1-\frac{n_g^2}{n_c^2}}$ d'où $n_c.\sin\left(90° - \arcsin\frac{n_g}{n_c}\right) = n_c.\sqrt{1-\frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$. On trouve donc bien que la lumière se propage dans la fibre si et seulement si $\sin\theta < \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ ce qui correspond à l'ouverture numérique recherchée.

Remarque : En fait, ce n'est pas la seule condition pour que la lumière se propage. Des considérations sur les interférence entre les rayons lumineux conduisent à montrer que seuls certains angles particuliers, correspondant à ce qu'on appelle des *modes*, peuvent se propager dans la fibre. Mais ces modes vérifient tous la condition imposée par l'ouverture numérique.

Plus la différence entre n_c et n_g sera grande, plus l'ouverture numérique de la fibre sera grande, et plus on pourra faire entrer de la lumière dans la fibre. Mais cela a une contrepartie :

Propriété : Dispersion intermodale

On appelle **dispersion intermodale** de la fibre, la différence de temps entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide qui parcourent la fibre.
Pour une fibre à saut d'indice, en négligeant les avances dues aux réflexions totales, cette dispersion vaut

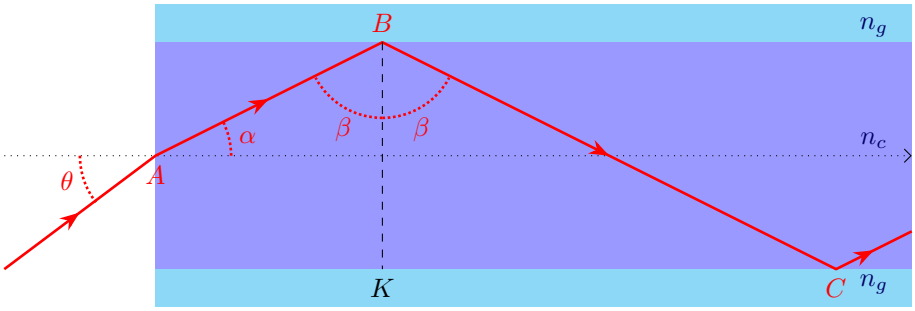
$$\Delta t = \frac{L.n_c}{c}\frac{n_c - n_g}{n_g}$$

avec L la longueur de la fibre et $c = 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque : Avant de démontrer cette relation, on peut faire remarquer qu'elle est totalement fausse, car les réflexions totales sur les bords amènent des gain de temps qui ne sont pas explicables par l'optique géométrique, et qu'en réalité le rayon qui zigzague le plus est le plus rapide. Mais comme c'est marqué au programme que vous devez savoir refaire ce calcul, on le fait !

Démonstration

Reprenons le schéma de la démonstration précédente, en ajoutant l'angle réfléchi en B :



Considérons ce qui se passe entre les points B et C. La lumière parcours la longueur BC, mais en réalité, dans le sens de la fibre elle n'a avancé que de la longueur KC ; le fait qu'elle zigzague n'importe pas, c'est du temps perdu. On peut alors appliquer une règle de proportionnalité : si la lumière parcourt une distance BC pour avancer de KC, alors pour avancer de la longueur L de la fibre, elle devra parcourir la distance $d = \frac{BC\times L}{KC}$.
Or il est facile de voir sur le schéma que, dans le triangle BKC, $\frac{KC}{BC} = \sin\beta$ (côté opposé/hypothénuse) donc $d = \frac{L}{\sin\beta}$. Ce trajet est parcouru à la vitesse $\frac{c}{n_c}$, donc le temps de parcours vaut $t = \frac{L.n_c}{c.\sin\beta}$
Or les deux rayons extrêmes sont :

- celui qui va tout droit, parallèle à l'axe, pour lequel $\beta = 90°$ donc $\sin\beta = 1$ donc $t = \frac{L.n_c}{c}$;
- celui qui est le plus incliné, à la limite de la réflexion totale, qui vérifie $\sin\beta = \frac{n_g}{n_c}$ (cf. démo précédente) donc $t = \frac{L.n_c}{c}\frac{n_c}{n_g}$.

La dispersion intermodale vaut donc bien $\frac{L.n_c}{c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right)$ ce qui correspond à la formule proposée.

Prenons un exemple : une fibre avec un cœur d'indice $n_c = 1{,}530$ et une gaine d'indice $n_g = 1{,}525$, de longueur $L = 100\,\text{m}$, possède une ouverture numérique $ON = 0,124 = \sin 7{,}1°$ et une dispersion intermodale $\Delta t = 1{,}7 \times 10^{-9}\,\text{s}$ suffisamment courte pour permettre des débits de plusieurs dizaines de megabits par seconde.

Ainsi, plus l'écart d'indice entre le cœur et la gaine est grand, plus la dispersion est grande. Or cette dispersion est importante, car quand on transmet des information par fibre optique sous forme de flashs lumineux, elle limite l'écart temporel entre deux flashs, autrement dit, le débit. On choisira donc :

— des fibres de grande ouverture numérique pour faire de l'observation

— des fibres de petite ouverture numérique pour transmettre de l'information.

Évidemment, il y a beaucoup d'autres problèmes qui vont se poser : le manque de luminosité, l'absorption par la fibre, ...

B.4. Exemple d'application : les mirages

Les mirages sont une autre application du phénomène de réflexion totale. Ils sont basés sur la très faible variation de l'indice optique de l'air avec la température : quand la température de l'air augmente, son indice optique diminue. Il existe alors principalement deux configuration :

— les *mirages chauds* apparaissent lorsque le sol est fortement chauffé par le soleil. L'air près du sol est chaud donc d'indice faible ; un rayon lumineux arrivant peu incliné sur cette couche sera alors réfléchi (figure O1.12) : le sol ressemble à un miroir. Souvent le ciel bleu s'y reflète, et on a l'impression alors qu'on est face à une étendue d'eau.

FIGURE O1.12 : Principe d'un mirage chaud.

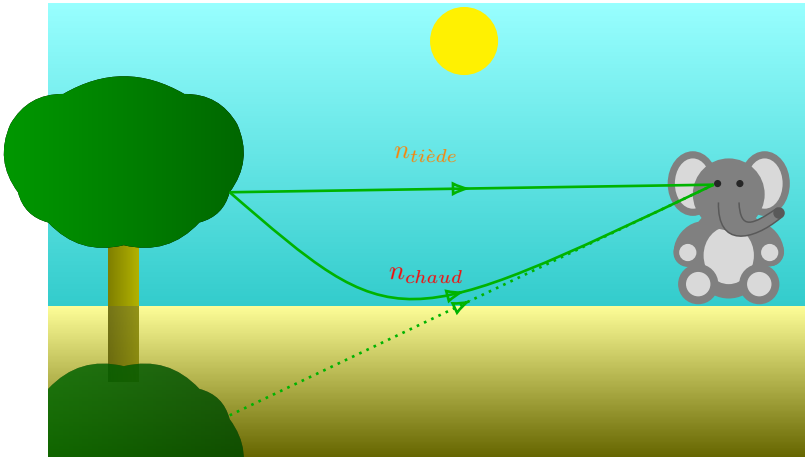


FIGURE O1.13 : Mirages chauds.



(a) Mirage chaud dans le désert (Crédit : Wikipedia/B.Inaglory)



(b) Mirage chaud dans le grand lac salé (Crédit : Wikipedia/Galvin)

— les *mirages froids* apparaissent au contraire lorsque le sol est froid, donc l'air proche du sol a un indice plus élevé que les couches supérieures : la lumière se réfléchit alors en l'air sur la couche moins froide, et on observe une réflexion dans le ciel des objets situés au sol. On observe cela par exemple l'hiver dans des conditions atmosphérique particulière (ou en particulier en Antarctique), ou encore en bord de mer froide (figure O1.14).

FIGURE O1.14 : Principe d'un mirage froid.

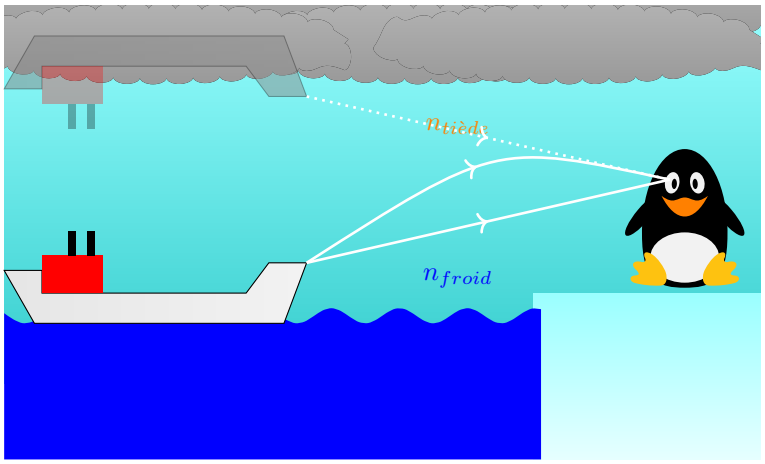


FIGURE O1.15 : Mirages froids.



(a) Mirage froid sur la mer. (Crédit : Wikipedia/Kervam3)



(b) Mirage froid vu de la Croix de Chaubouret (Mont Pilat)



(c) Mirage froid sur le village de Salers en 1900 *(Crédit : Abbé Gély)*

— on peut avoir parfois une combinaison des deux. Ce phénomène apparaît particulièrement dans le détroit de Messine, faisant apparaître des constructions fabuleuses appelées *Fata Morgana*.

O1. Bases de l'optique géométrique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Sources lumineuses	
Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique	
Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

O1. Bases de l'optique géométrique

Quelques conseils

- ✎ Il faut connaître les couleurs limitant le visible et leurs longueurs d'ondes approximatives.
- ✎ Si un énoncé ne donne pas l'indice de l'air, considérez qu'il vaut 1.
- ✎ Quand il y a réflexion ou réfraction, commencez par tracer la normale si elle n'est pas dessinée, et placez toujours les angles d'incidence et de réflexion/réfraction par rapport à la normale !
- ✎ Quand on trace qualitativement des trajets de rayons à travers des dioptres, il faut respecter deux règles : d'une part, un rayon en incidence normale n'est pas dévié ; d'autre part, un rayon réfracté se rapproche de la normale si l'indice augmente et s'en écarte si l'indice diminue.
- ✎ La condition de réflexion totale lors d'un passage d'indice fort à faible doit être redémontrée, n'apprenez pas par cœur la formule de l'angle limite. Pour la démonstration, il faut absolument rédiger pas l'absurde : commencer par supposer qu'il y a réfraction, écrire les lois de Snell-Descartes de la réfraction, puis chercher la condition pour que la solution à cette équation n'existe pas (sinus de l'angle réfracté supérieur à 1). Si vous commencez par supposer qu'il y a réflexion totale, vous n'aboutirez à rien.

O1. Bases de l'optique géométrique

QCMs

réponses page 63

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Le « rayon lumineux » est une modélisation toujours valable pour décrire la propagation de la lumière.

(a). Vrai
(b). Faux

Q2. Un photon de longueur d'onde $\lambda = 540\,\text{nm}$ a pour énergie :

(a). $2{,}3\,\text{eV}$
(b). $5{,}8 \times 10^{-20}\,\text{J}$
(c). $1{,}4\,\text{eV}$
(d). $3{,}7 \times 10^{-19}\,\text{J}$

Q3. De la lumière de longueur d'onde $1200\,\text{nm}$ appartient :

(a). au domaine visible
(b). au domaine ultraviolet
(c). au ondes radio
(d). au domaine infrarouge

Q4. La réflexion totale interne peut apparaître lorsque la lumière passe d'un milieu vers un autre milieu :

(a). d'indice plus fort
(b). d'indice plus faible

Q5. Lorsque la lumière passe vers un milieu d'indice plus fort, le rayon :

(a). s'éloigne de la normale
(b). se rapproche de la normale

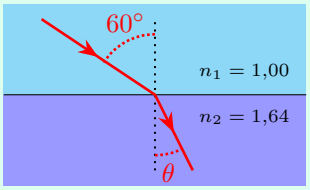
Q6. Un rayon lumineux incident sur un dioptre en incidence normale :

(a). n'est pas dévié
(b). repart à angle droit
(c). disparaît
(d). subit une réflexion totale

✓ QCM : Lois de la réfraction ✗

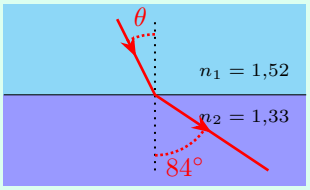
Calculez l'angle θ à l'aide des lois de la réflexion.

Q7.



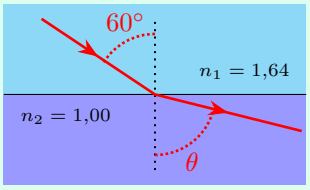
(a). 31,9°
(b). 46,2°
(c). 82,4°
(d). impossible

Q8.



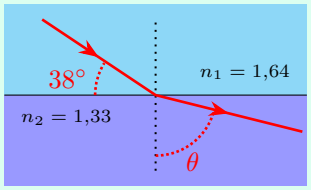
(a). 35,5°
(b). 18,1°
(c). impossible
(d). 60,5°

Q9.



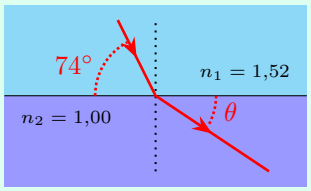
(a). impossible
(b). 82,4°
(c). 31,9°
(d). 46,2°

Q10.



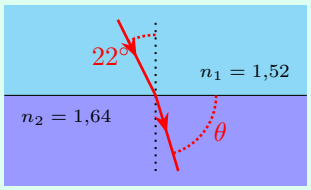
(a). 88,1°
(b). 38°
(c). 76,3°
(d). impossible

Q11.



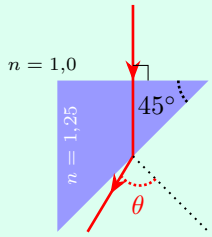
(a). 13,8°
(b). 46,0°
(c). 28,1°
(d). 65,2°

Q12.



(a). 69,7°
(b). 20,3°
(c). 23,8°
(d). 66,2°

Q13.

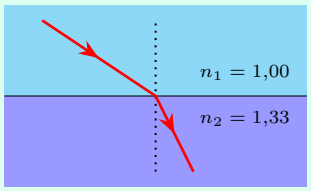


(a). 62,5°
(b). 38,8°
(c). 62,1°
(d). 65,2°

✓ QCM : Position du rayon réfracté ✗

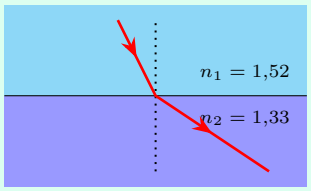
Pour chaque schéma, indiquez si le rayon réfracté est bien positionné (plus proche ou plus loin de la normale).

Q14.



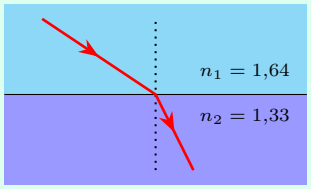
(a). Correct
(b). Incorrect

Q15.



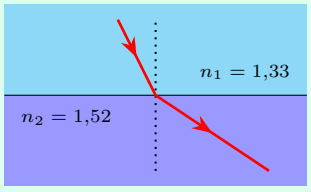
(a). Incorrect
(b). Correct

Q16.



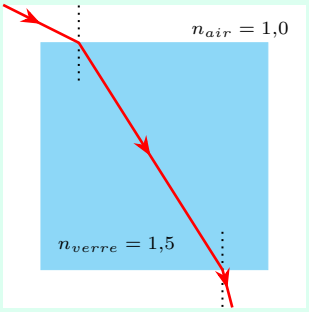
(a). Incorrect
(b). Correct

Q17.



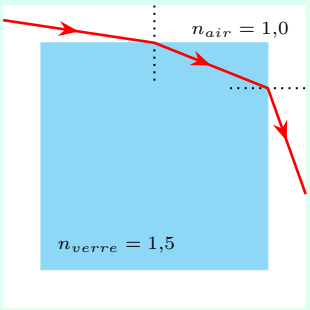
(a). Correct
(b). Incorrect

Q18.



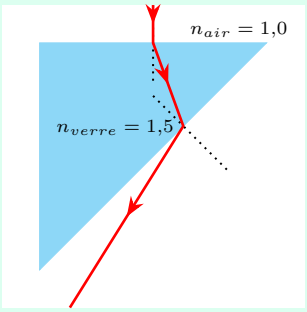
(a). Correct (b). Incorrect

Q19.



(a). Incorrect (b). Correct

Q20.



(a). Incorrect (b). Correct

✓ QCM : Réflexion totale ✗

Indices de quelques matériaux :

Air	1,00
Eau	1,33
Verre crown	1,52
Verre flint	1,62

Q21. Un rayon lumineux passe de verre flint vers du verre crown. L'angle limite de réflexion totale vaut :

(a). 43,2° (b). 69,8°
(c). Il n'y en a pas (d). 20,2°

Q22. Un rayon lumineux se propage dans le cœur d'une fibre optique d'indice 1,48 ; la gaine de la fibre

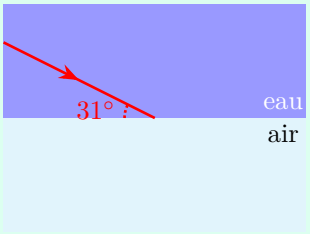
a pour indice 1,54. L'angle maximal de réflexion totale à cette interface vaut :

(a). 76,8°
(b). 42,5°
(c). 40,5°
(d). Il n'y en a pas

Q23. Un rayon lumineux se propage dans l'eau d'un lac et arrive à sa surface supposée plane. Pour qu'il puisse passer dans l'air, son angle d'incidence doit être :

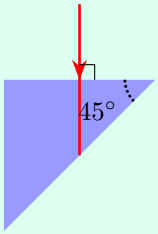
(a). supérieur à 41,2°
(b). supérieur à 48,8°
(c). inférieur à 41,2°
(d). inférieur à 48,8°

Q24. Y a-t-il réflexion totale ?



(a). Non
(b). Oui

Q25. À quelle condition sur l'indice du verre y a-t-il réflexion totale ?



(a). n>1,18
(b). Impossible
(c). n>1,41
(d). n<1,18

O1. Bases de l'optique géométrique

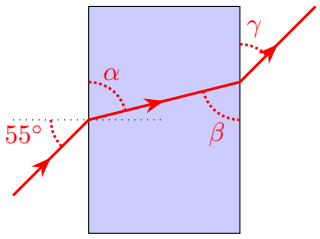
Exercices

réponses page 64

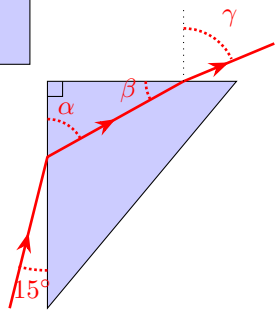
Exercice O1.1 : Trajectoires de quelques rayons [*]

Déterminez les angles inconnus (le rayon arrive depuis l'air d'indice 1) :

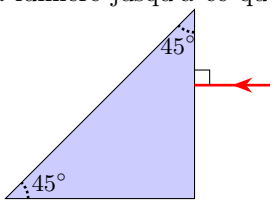
1. le rectangle a pour indice $n = 1{,}33$:



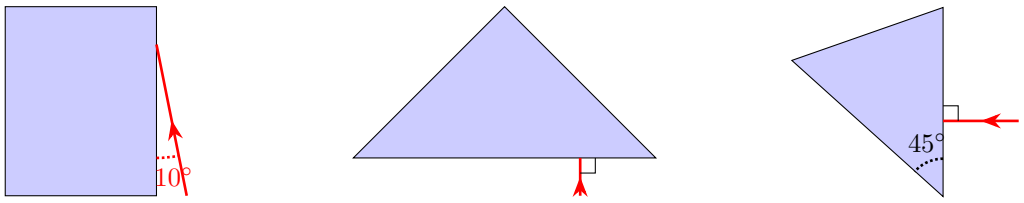
2. Le prisme est un triangle rectangle d'indice $n = 1{,}25$:



3. Tracez le trajet de la lumière jusqu'à ce qu'elle sorte du prisme, dans le cas d'un indice $n = 1{,}25$ puis dans le cas $n = 1{,}55$.



Exercice O1.2 : Trajet d'un rayon [**]



(a) (b) (c)

Dans chaque cas, tracez la trajectoire du rayon lumineux en indiquant les angles. Le verre a pour indice $n = 1{,}5$, et l'eau $n = 1{,}33$; dans les cas où la réfraction est possible, on négligera la réflexion.

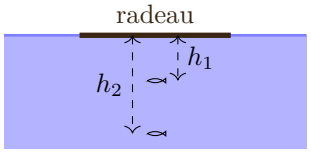
(a) Le rayon arrive pas trop loin de l'angle en haut à droite de l'aquarium rempli d'eau (on oublie les parois en verre).

(b) Le prisme de verre est un triangle rectangle isocèle.

(c***) Le prisme de verre est un triangle isocèle d'angle au sommet 45°.

Exercice O1.3 : Un naufragé sur son radeau [**]

Un naufragé est sur un radeau ayant la forme d'un carré de côté $a = 3\,\text{m}$, d'épaisseur négligeable ; la mer est très calme. Il aperçoit deux petits poissons qu'il souhaite pêcher. Les deux poissons se cachent alors juste sous le centre du radeau, l'un à une profondeur $h_1 = 90\,\text{cm}$, l'autre à une profondeur $h_2 = 1{,}4\,\text{m}$.



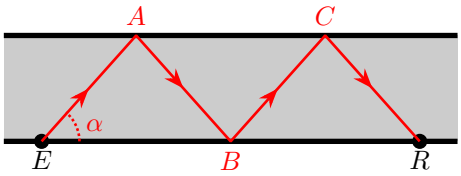
Le naufragé se penche pour les voir, sa tête au bord du radeau mais hors de l'eau.

1. Justifiez que le naufragé ne voit qu'un seul poisson.
   Indication : commencez par calculer l'angle d'incidence du rayon issu de chaque poisson qui atteint la surface de l'eau au bord du radeau.
2. À quelle profondeur apparente voit-il le poisson visible ?

Données : indice de l'eau : $n_e = 1,33$; indice de l'air égal à 1.

Exercice O1.4 : Détecteur de pluie [**]

Pour détecter la pluie sur le pare-brise d'une voiture et déclencher les essuie-glaces, une solution utilise le principe de réflexion totale.
Dans le schéma ci-contre, la vitre est représentée par une lame de verre d'indice $n = 1{,}52$ et d'épaisseur $e = 4\,\text{mm}$ placée dans l'air d'indice 1. Une LED émet en E un rayon lumineux incliné de α par rapport à la vitre. Ce rayon se propage alors dans la vitre par réflexion totale jusqu'en R où se trouve un détecteur.



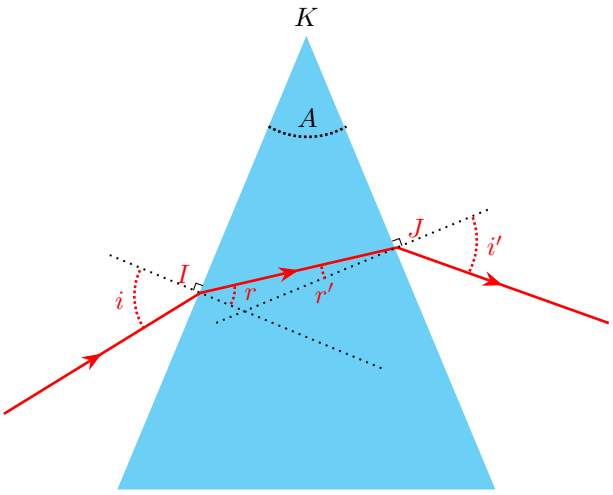
1. Déterminez la condition sur l'angle α pour qu'il y ait réflexion totale en A.
2. On suppose qu'une goutte d'eau (indice $n' = 1{,}33$) vient se poser sur la vitre en A ; justifiez qu'il n'y a plus réflexion totale si α est supérieur à une certains limite.
3. Déduisez-en le principe de la détection de la pluie.

Exercice O1.5 : Le prisme [**] py plot

Un prisme est un triangle fait d'une matière d'indice n et placé dans l'air d'indice 1. On va l'utiliser en travaillant sur deux de ses faces, séparées par un angle A qu'on appelle l'angle au sommet du prisme :

— la lumière arrive sur la première face au point I avec un angle d'incidence i ; il est réfracté avec un angle r ;

— la lumière arrive sur la seconde face au point J avec un angle d'incidence r' ; on suppose qu'il est réfracté avec un angle de réfraction i'. On fera attention à l'inversion des notations sur la seconde face, destinée à assurer une certaine symétrie dans les lettres.



On effectuera l'étude suivante avec des **angles non orientés** ; cela ne fonctionnera que si le rayon incidence arrive en-dessous de la normale (pointillé sur la figure) ; si on veut traiter le cas général, il faut utiliser des angles orientés.
On va commencer par établir les 4 équations du prisme, puis on va les utiliser.

1. Pour commencer, écrivez les équations de la réfraction en I, puis en J (2 équations).
2. La troisième équation se trouve en écrivant que la somme des angles du triangle KIJ vaut 180° ; montrez que $r + r' = A$.
3. On appelle *angle de déviation* du prisme l'angle dont a été dévié le rayon lumineux entre l'entrée et la sortie. Cet angle D est la somme :

d'un angle de déviation D_I en I : et d'un angle de déviation D_J en J :

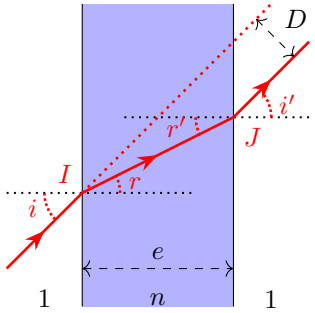


Exprimez D en fonction de i, i', r et r', puis en fonction de i, i' et A.

4. Déduisez-en que
$$D = i + \arcsin\left(n \sin\left[A - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right]\right) - A$$
5. Tracez la courbe $D(i)$ pour $A = 50°$, $n = 1{,}5$, i variant entre 15° et 90°. Observez qu'elle possède un minimum qu'on reverra en TP.
6. La théorie indique que ce minimum a lieu pour un trajet symétrique : lorsque $i = i'$ (notés i_m) et $r = r'$ (notés r_m). Exprimez r_m en fonction de A, puis i_m en fonction de A et D, et déduisez-en que $n . \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{D+A}{2}$. Cette formule sera utilisée en TP pour mesurer l'indice n.
7. On se place à $i = 60°$ pour $A = 50°$; verre a pour indice $n_r = 1{,}489$ dans le rouge et $n_b = 1{,}503$ dans le bleu. Calculez les deux angles de déviation ; quelle est la couleur la plus déviée ?

Exercice O1.6 : Lame à faces parallèles [***]

On s'intéresse à une lame à faces parallèles, c'est-à-dire un morceau de matière transparent, d'indice $n > 1$, limité par deux faces planes parallèles, séparées d'une épaisseur e. Elle est placée dans l'air.



1. Montrez que le rayon incident et le rayon émergent sont parallèles entre eux.
2. Exprimez le distance D entre ces deux rayons, en fonction de i (angle d'incidence sur la face d'entrée), e et n.
   Indication : calculez IJ en fonction de e et r ; appelez H le projeté orthogonal de J sur le rayon incident ; calculez $\widehat{HIJ}$, puis faites un peu de trigo dans le triangle IJH. Utilisez enfin les formules de trigo et les lois de Descartes pour exprimer r en fonction de i.
3. On envoie un faisceau de lumière blanche. La lame est constituée d'un verre ayant pour indice 1,514 pour le rouge et 1,522 pour le bleu ; elle a pour épaisseur $e = 5{,}000\,\text{mm}$. Calculez D pour le rouge et le bleu, dans le cas d'un angle d'incidence de 60°.
   La différence est-elle perceptible ?

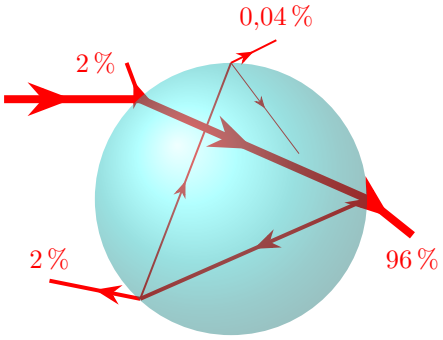
Exercice O1.7 : L'arc-en-ciel [***]

Lorsque le soleil éclaire un rideau de pluie, on peut apercevoir, en fonction de sa position, un arc-en-ciel faisant apparaître les différentes couleurs de la lumière.

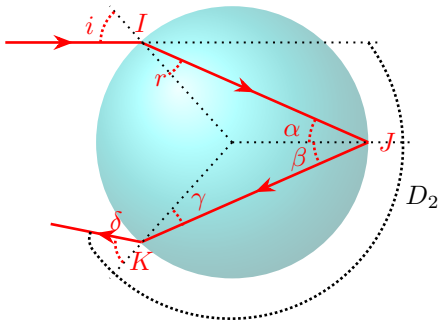


Arc-en-ciel (crédit : Wikipedia/O.Solstad)

Pour expliquer l'arc-en-ciel, on considère une goutte d'eau sphérique, sur laquelle arrive un rayon lumineux ; suivant les réflexions et les réfractions qu'elle subit, la lumière peut connaître plusieurs trajets.



1. **Lumière réfléchie une fois**
   On commence par considérer le cas où la lumière subit une seule réflexion. On travaille avec des angles non orientés ; n est l'indice de l'eau, l'indice de l'air vaut 1.

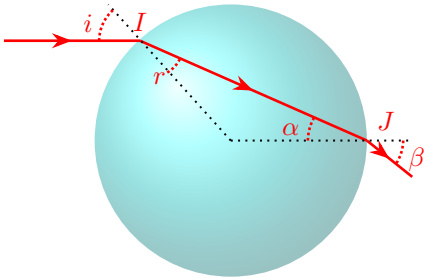


   (a) À l'aide d'un peu de géométrie, reliez les angles α, β, γ et δ à i et r. Montrez que $\delta = i$.
   (b) Déduisez-en l'angle de déviation D_2 en fonction de i et r, puis uniquement de i (et des constantes).
   Indication : calculez la déviation à chaque changement de direction du faisceau, puis ajoutez ces différentes contributions.
   (c) Montrez que $\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 2 - \frac{4\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$
   Indication : admettez cette question si vous n'avez pas encore vu les dérivations de fonctions composées, et/ou la dérivée de la fonction arcsinus.
   (d) Montrez qu'il existe une valeur i_2 de l'angle i pour laquelle la dérivée de la déviation s'annule. On exprimera $\sin i_2$ en fonction de l'indice n.
   (e) L'indice de l'eau vaut 1,3317 pour le rouge à 700 nm et 1,3448 pour le violet à 400 nm.
   Pour ces deux couleurs, calculez l'angle i_2, puis l'angle r_2 correspondant, et enfin la déviation D_{2m} associée.
   (f) En réalité, lorsque le soleil éclaire la goutte, il arrive sur cette goutte un ensemble de rayons tous parallèles entre eux, mais qui frappent la goutte sur l'intégralité de sa surface, donc avec tous les angles d'incidence possibles entre 0° et 90°.

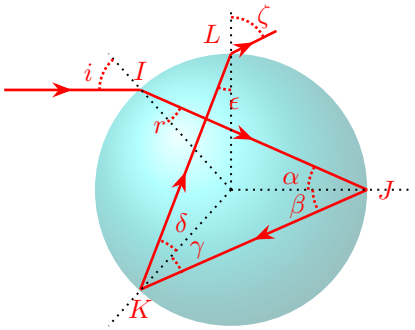
On considère une longueur d'onde donnée. Expliquez pourquoi il y a plus de lumière qui repart déviée avec l'angle D_{2m} correspondant, qu'avec un autre angle.

En déduire qu'un observateur voit de la lumière provenant d'un ensemble de gouttes situées sur un cône d'angle au sommet $180° - D_{2m}$; en déduire aussi la position du violet et du rouge dans l'arc-en-ciel.

2. **Lumière réfléchie aucune fois**
   Recommencer les mêmes questions dans le cas où la lumière ne subit aucune réflexion. Montrez qu'il n'apparaît pas d'arc-en-ciel.



3. **Lumière réfléchie deux fois**
   Recommencer les mêmes questions dans le cas où la lumière subit deux réflexions. Montrez qu'il apparaît un arc-en-ciel secondaire situé au-dessus du primaire, avec des couleurs en ordre inverse.



Exercice O1.8 : Piscine [*]

Quand on est sous l'eau et qu'on regarde vers le haut, on voit ceci au niveau de la surface :

— Un disque à l'intérieur duquel on aperçoit les objets qui se trouvent à l'extérieur, au-dessus de la piscine (arbres, oiseaux, ciel bleu,…)

— Autour de ce disque, on observe la réflexion des objets qui sont dans l'eau (fond, poissons,…)

Comment expliquer ce phénomène ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Elle n'est pas valable pour des faisceaux trop fins, quand le phénomène de diffraction apparaît.
Q2.(a) ET (d)
$E = h.f = \frac{hc}{\lambda}$
Q3.(d)
Q4.(b)
Q5.(b)
Q6.(a)

Réponses au QCM : Lois de la réfraction

Q7.(a)
lois de Snell-Descartes : $1{,}00 \times \sin 60° = 1{,}64 \times \sin\theta$
Q8.(d)
lois de Snell-Descartes : $1{,}52 \times \sin\theta = 1{,}33 \times \sin 84°$
Q9.(a)
lois de Snell-Descartes : $1{,}64 \times \sin 60° = 1{,}00 \times \sin\theta$ n'a pas de solution.
Q10.(c)
lois de Snell-Descartes : $1{,}64 \times \sin(90° - 38°) = 1{,}33 \times \sin\theta$
Q11.(d)
lois de Snell-Descartes : $1{,}52 \times \sin(90° - 74°) = 1{,}00 \times \sin(90° - \theta)$
Q12.(a)
lois de Snell-Descartes : $1{,}52 \times \sin 22° = 1{,}64 \times \sin(90° - \theta)$
Q13.(c)
lois de Snell-Descartes : $1{,}52 \times \sin 45° = \sin\theta$.

Réponses au QCM : Position du rayon réfracté

Q14.(a)
Q15.(b)
Q16.(a)
Q17.(b)
Q18.(b)
La première réfraction est correcte, mais pas la seconde : le rayon devrait d'écarter de la normale.
Q19.(b)
Q20.(a)
La première réfraction est incorrecte : en incidence normale, le rayon n'est pas dévié. La seconde est correcte.

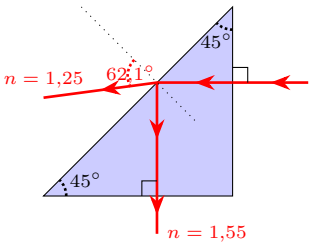
Réponses au QCM : Réflexion totale

Q21.(b)
Q22.(d)
Il n'y a réflexion totale que lorsqu'on passe d'un indice fort à un indice faible. Cette fibre a donc été construite à l'envers.
Q23.(d)
Q24.(b)
$1{,}33 \times sin(90° - 31°) = 1{,}14 > 1$
Q25.(c)
Il faut que $n.\sin 45° > 1$.

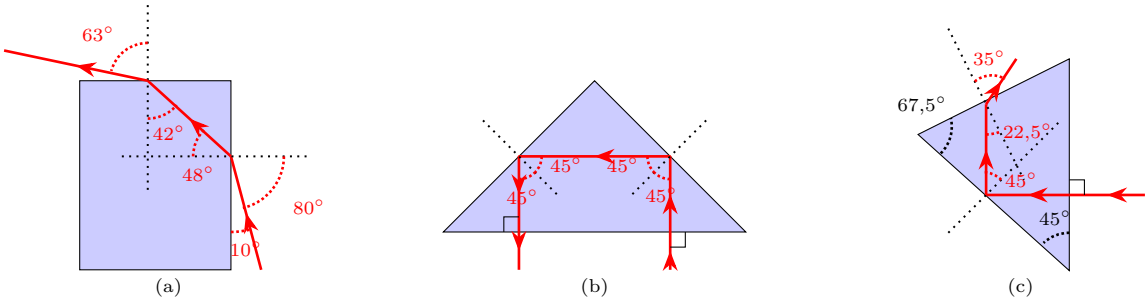
Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice O1.1 : Trajectoires de quelques rayons [*]

1. Il faut faire attention que l'angle d'incidence sur le premier dioptre vaut 55°, mais l'angle réfracté vaut $90° - \alpha$. Donc $\sin 55° = 1{,}33.\sin(90° - \alpha)$ soit $90° - \alpha = 38{,}0°$ soit $\alpha = 52{,}0°$.
   Les angles α et β sont alternes-internes donc $\beta = \alpha = 52{,}0°$.
   Par les lois de Snell-Descartes on trouve un angle réfracté égal à 55° donc $\gamma = 90° - 55° = 35°$.
2. On trouve $\alpha = 39{,}4°$ puis $\beta = 50{,}6°$ (complémentaire) puis $\gamma = 52{,}5°$
3. La lumière n'est pas déviée sur le premier dioptre et arrive sur le second avec un angle d'incidence de 45°.
   Si $n = 1{,}25$ alors la lumière est réfractée avec un angle de réfraction égal à 62,1°.
   Si $n = 1{,}55$ alors il y a réflexion totale sur la seconde face, puis non déviation sur la face de sortie.



Corrigé de l'exercice O1.2 : Trajet d'un rayon [**]



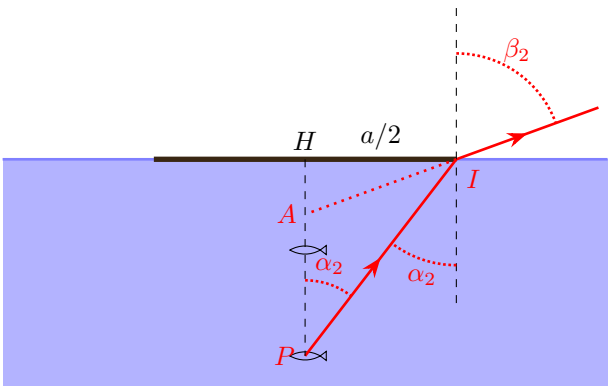
(a) (b) (c)

(a) On applique les lois de Descartes avec $n = 1{,}33$.

(b) Il y a réflexion totale pour un angle d'incidence de 45°.

(c) Il y a réflexion totale sur la face de gauche. On calcule ensuite les angles à l'aide des propriétés des triangles isocèles.

Corrigé de l'exercice O1.3 : Un naufragé sur son radeau [**]



1. Considérons le poisson du bas avec les notations de la figure ci-dessus. Le rayon qui arrive au bord du radeau a un angle d'incidence α_2. En reportant α_2 sur son angle alterne-interne, on peut faire de la trigonométrie dans

le triangle PHI : $\tan\alpha_2 = \frac{a/2}{h_2}$ d'où on tire $\alpha_2 = \arctan\frac{a}{2h_2} = 47{,}0°$. Supposons que la lumière puisse sortir de l'eau, soit β_2 l'angle réfracté, alors par les lois de Snell-Descartes, $\sin\beta_2 = n_e.\sin\alpha_2 = 0,97$ d'où $\beta_2 = 76{,}5°$.
Le même calcul avec l'autre poisson donne $\sin\beta_1 = 1,14$ ce qui n'est pas possible : il y a alors réflexion totale, donc le naufragé ne peut pas voir le poisson du haut.

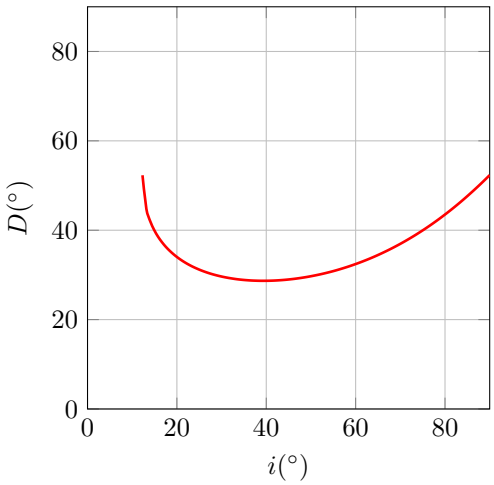
2. Le poisson sera vu en A (en fait, pas exactement, il sera décalé latéralement, mais on peut le négliger) donc par trigonométrie dans le triangle AHI (avec β_2 l'angle en A) on trouve $\tan\beta_2 = \frac{a}{2HA}$ soit $HA = \frac{a}{2\tan\beta_2} = 36\,\text{cm}$.

Corrigé de l'exercice O1.4 : Détecteur de pluie [**]

1. En A, la lumière arrive avec un angle d'incidence complémentaire de α, soit $90° - \alpha$. Supposons que la lumière réfractée existe, notons r l'angle réfracté, alors d'après les lois de Snell-Descartes, $n.\sin(90° - \alpha) = \sin r$. Si $n.\sin(90° - \alpha) > 1$ alors ancun angle r ne vérifie cette relation. Il y aura donc réflexion totale si $n.\sin(90° - \alpha) > 1$ soit $\cos\alpha > \frac{1}{n}$ soit $\alpha < \arccos\frac{1}{n} = 48{,}9°$
2. En procédant de la même manière, mais en tenant compte d'un indice $n' = 1{,}33$ pour le rayon réfracté, on trouve qu'il n'y a plus réflexion totale si $\alpha > \arccos\frac{n'}{n} = 29{,}0°$
3. On prend un α intermédiaire, par exemple 40°. Si le pare-brise est sec, la lumière arrive en R par réflexion totale ; s'il est mouillé, elle se perd hors de la vitre et le récepteur ne capte plus de lumière.

Corrigé de l'exercice O1.5 : Le prisme [**]

1. Par les lois de la réfraction : $\sin i = n.\sin r$ et $\sin i' = n.\sin r'$.
2. La somme des angles s'écrit $A + 90° - r) + (90° - r') = 180°$ donc $A = r + r'$
3. $D_I = i - r$ et $D_J = i' - r'$ donc $D = i + i' - r - r' = i + i' - A$
4. $i' = \arcsin(n\sin r') = \arcsin(n\sin[A - r]) = \arcsin\left(n\sin\left[A - \arcsin\left(\frac{\sin i}{i}\right)\right]\right)$ ce qui permet d'obtenir la formule demandée en remplaçant dans D.
5.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A=50*np.pi/180
n=1.5
tab_i=np.linspace(1e-10,np.pi/2-1e-10,100)
tab_D=tab_i+np.arcsin(n*np.sin(A-np.arcsin(np.sin(tab_i)/n)))-A
plt.figure()
plt.plot(tab_i*180/np.pi,tab_D*180/np.pi)
plt.xlabel("i(°)")
plt.ylabel("D(°)")
plt.show()
```



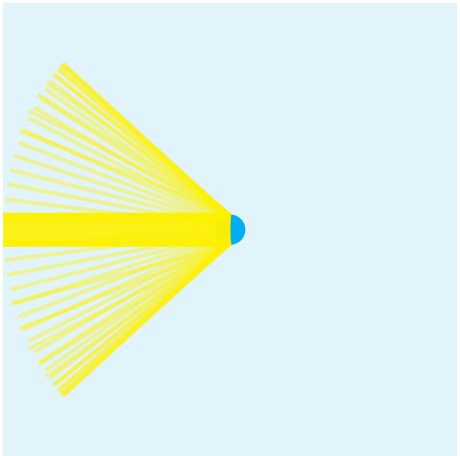
6. Les équations du prisme deviennent $\sin i_m = n.\sin r_m$, $2r_m = A$ et $D = 2i_m - A$ donc on en tire $r_m = \frac{A}{2}$, $i_m = \frac{D+A}{2}$ et $n.\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{D+A}{2}$.
7. $D_r = 31{,}8°$ et $D_b = 32{,}6°$: le bleu est plus dévié.

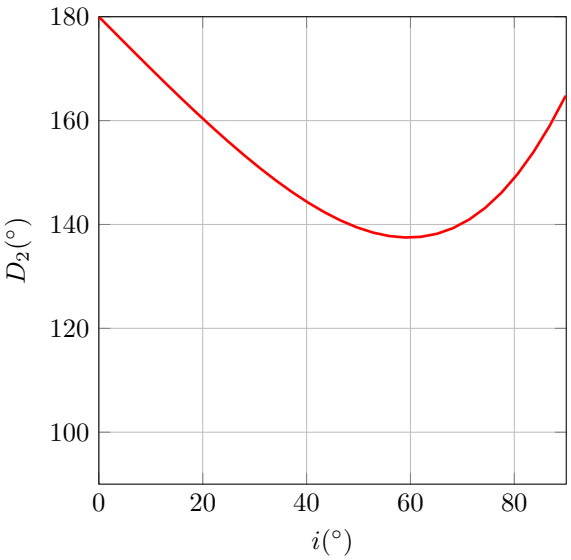
Corrigé de l'exercice O1.6 : Lame à faces parallèles [***]

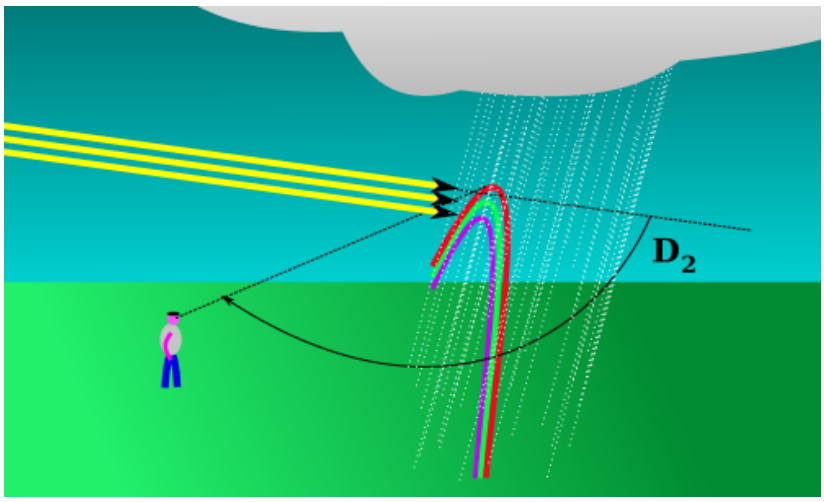
1. Les lois de Descartes permettent facilement de prouver que le problème est plan (car les deux faces sont parallèles, donc les normales aux deux faces sont parallèles).
   Ensuite, on a $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$. De plus, les normales sont parallèles, donc $r = r'$. Donc $i = i'$.
2. Le rayon parcourt dans la lame une distance $IJ = \frac{e}{\cos r}$. Pour trouver D, on peut par exemple prendre le projeté H de J sur le prolongement du rayon incident. Le triangle IHJ est alors rectangle en H, avec $JH = D$ et $\widehat{HIJ} = i - r$, ce qui donne $\sin(i-r) = \frac{D}{IJ}$.
   Donc $D = \frac{e}{\cos r} \sin(i-r) = e \frac{\sin i \cos r - \sin r \cos i}{\cos r}$. Or $\sin i = n \sin r$ donc on trouve après quelques calculs $D = e\left(\sin i - \dfrac{\sin r \cos i}{\cos r}\right) = e\left(\sin i - \cos i \dfrac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)$
   On peut vérifier que $D = 0°$ pour $i = 0°$.
   Remarque : il existe d'autres façons de trouver D. L'important est de travailler sur un schéma clair.
3. Pour $i = 60°$, on a $D = e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n^2 - 0{,}75}}\right)$.
   On trouve alors $D_{rouge} = 2{,}587\,\text{mm}$ et $D_{bleu} = 2{,}600\,\text{mm}$ soit une différence de $14\,\mu\text{m}$, ce qui n'est pas perceptible à l'œil nu.

Corrigé de l'exercice O1.7 : L'arc-en-ciel [***]

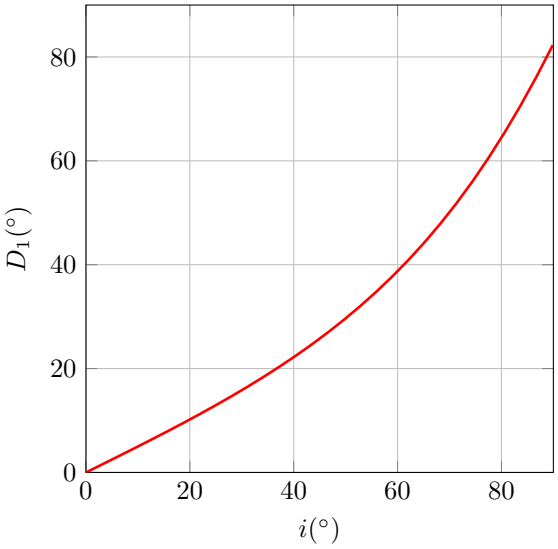
1. **Lumière réfléchie une fois**
   (a) $\alpha = \beta = \gamma = r$ et $\delta = i$
   (b) $D_2 = (i-r) + (180° - 2r) + (i-r) = 180° + 2i - 4r = 180° + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$
   (c) $\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 0 + 2 - 4\frac{\sin'(i)}{n} \arcsin'\left(\frac{\sin i}{n}\right) = 2 - 4\frac{\cos i}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} = 2 - \frac{4\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$
   (d) $\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{4\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \Leftrightarrow n^2 - \sin^2 i = 4\cos^2 i = 4 - 4\sin^2 i$ d'où on tire par quelques calculs rapides $\sin i_2 = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$
   (e) $D_{2m}^{rouge} = 137{,}73°$ et $D_{2m}^{violet} = 139{,}61°$
   (f) L'ensemble des rayons émerge dans un peu toutes les directions, mais il y en a beaucoup dans la direction D_{2m}.



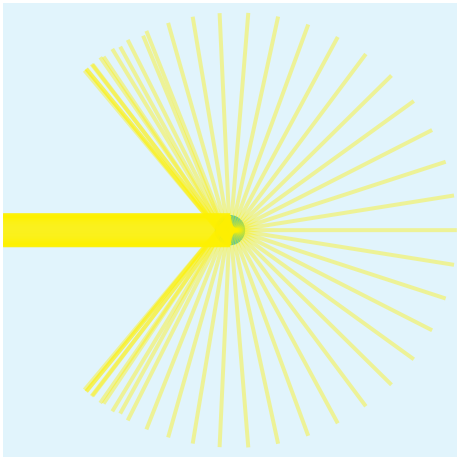


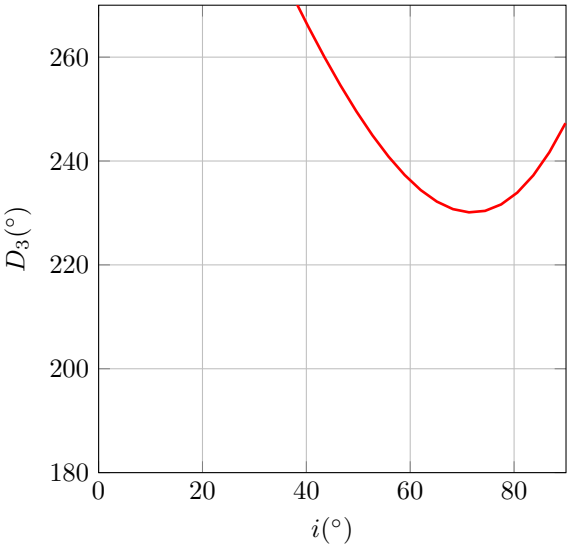


2. **Lumière réfléchie aucune fois**
   Cette fois, $D_1 = 2i - 2r$ donc $\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ce qui n'est pas le cas.



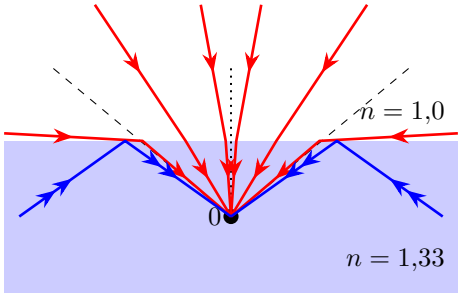
3. **Lumière réfléchie deux fois**
   $D_3 = 2i - 6r$ et $\frac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow \sin i = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$.
   On calcule $D_{3m}^{rouge} = 230{,}55°$ et $D_{3m}^{violet} = 233{,}94°$





Corrigé de l'exercice O1.8 : Piscine [*]

L'eau a pour indice 1,33 et l'air 1,0. Le schéma ci-dessous illustre ce que voit l'observateur placé en O :



Sur le schéma, on a tracé en pointillé la normale au dioptre eau/air passant par O, ainsi que le cône d'origine O et de demi-angle arcsin $\frac{1}{1{,}33} = 58°$ (en tirets).

— Tous les rayons provenant de l'air sont réfractés avec un angle de réfraction inférieur à 58°, donc à l'intérieur de ce cône on observe les objets extérieurs (rayons rouges)

— À l'extérieur de ce cône, ce sont les rayons provenant de la piscine qui se réfléchissent sur la surface par réflecion totale et arrivent à l'observateur (rayons bleus).

Chapitre O2 Systèmes optiques

Programme p.89

Conseils p.90

Cours p.70
- O2.A. Étude de systèmes optiques à l'aide de tracés de rayons
- O2.B. Les lentilles sphériques minces
- O2.C. Notions sur les miroirs sphériques

QCMs p.91

Exercices p.96

TDs numériques p.104

O2. Systèmes optiques

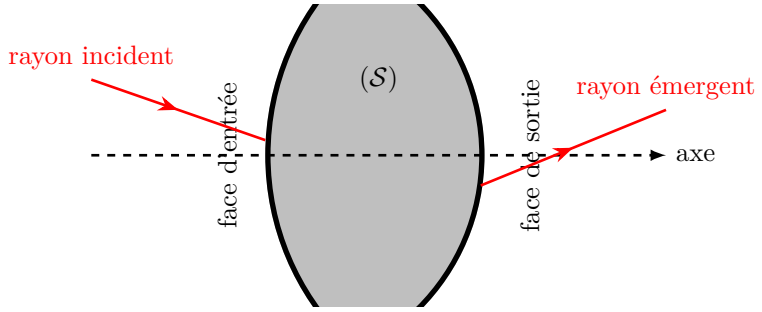
Cours

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment les lois de propagation de la lumière permettaient de prévoir la trajectoire d'un rayon lumineux. Néanmoins, l'étude de la trajectoire de chaque rayon lumineux est fastidieuse. On va donc, dans ce chapitre, s'intéresser à des ensembles de dioptres et de miroirs conçus pour réaliser certaines transformations à la lumière, et analyser les fonctions de ces systèmes non plus en terme de rayons, mais en terme de points objet et image.

Définition : Système optique

Un système optique est une portion de l'espace contenant des dioptres et des miroirs. Il possède une *face d'entrée* et une *face de sortie* (figure O2.1). Les *rayons incidents* arrivent sur la face d'entrée et les *rayons émergents* sortent par la face de sortie. Il possède parfois un axe particulier.

FIGURE O2.1 : Représentation générale d'un système optique $(\mathcal{S})$. Ici la face de sortie est du côté opposé à la face d'entrée, mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour les miroirs.

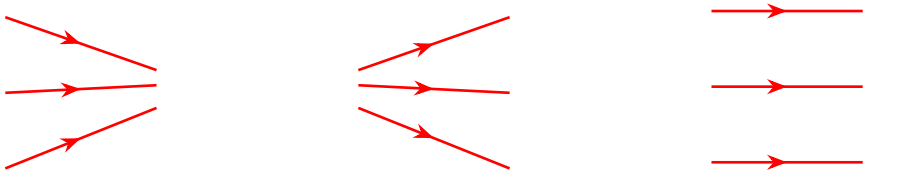


Définition très générale, qu'on pourrait aussi écrire : « un système optique est un système destiné à faire de l'optique… »

Définition : Faisceau lumineux

Un faisceau lumineux est un ensemble de rayons lumineux. S'ils s'écartent, on a un faisceau *divergent* ; s'ils se rapprochent, un faisceau *convergent* ; s'ils sont parallèles, un faisceau parallèle ou *collimaté*.

FIGURE O2.2 : Faisceaux lumineux.



(a) Faisceau convergent (b) Faisceau divergent (c) Faisceau collimaté

O2.A. Étude de systèmes optiques à l'aide de tracés de rayons

A.1. Objet et image d'un système optique

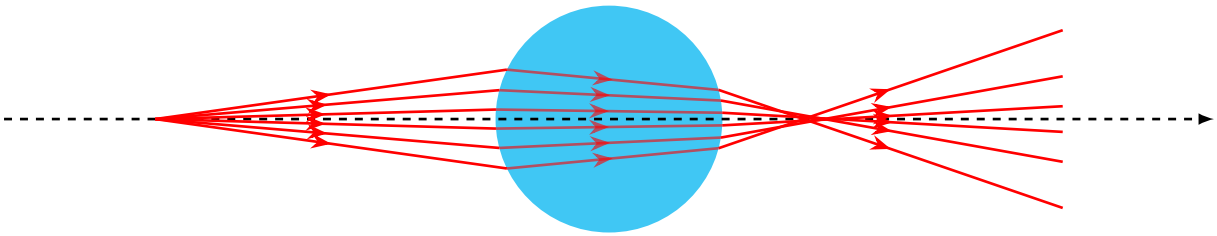
Définition : Objet/image

On appelle objet ponctuel d'un système optique, le point où se coupent les rayons incidents.
On appelle image ponctuelle d'un système optique, le point où se coupent les rayons émergents.

Remarque : Un objet étendu sera simplement considéré comme un ensemble d'objets ponctuels.

La figure O2.3 montre par exemple une simuation d'un objet ponctuel qui émet des rayons lumineux en direction d'une sphère. Après deux réfractions, on constate que les rayons lumineux émergents se coupent approximativement au même point : l'image du système.

FIGURE O2.3 : Déviation d'un faisceau lumineux émis par un objet ponctuel, par une sphère d'indice 1,6.



Définition : Stigmatisme

Considérons un système éclairé par un objet ponctuel :

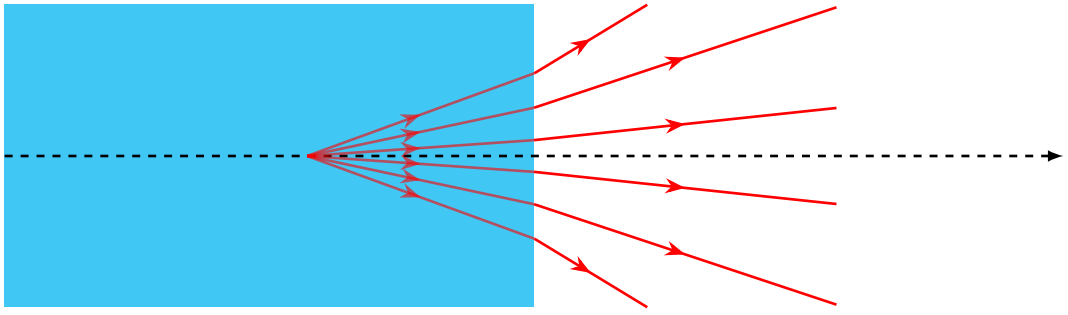
- si les rayons émergents se coupent exactement en un même point, on dit que le système est *rigoureusement stigmatique* (ou qu'il a un *stigmatisme rigoureux*)
- si les rayons émergents se coupent approximativement en un même point, on dit que le système est *approximativeent stigmatique* (ou qu'il a un *stigmatisme approché*)

Dans les deux cas, on dit que l'objet et l'image sont des *points conjugués* par le système optique.

Remarque : D'après le principe de retour inverse de la lumière, si l'objet A donne une image A' par un système, alors en inversant le trajet des rayons, A' devient l'objet et A devient son image conjuguée.

Considérons maintenant un autre système : un simple dioptre plan (figure O2.4). Un objet émet des rayons vers ce dioptre, qui sont réfractés. Les rayons qui émergent du dioptre divergent et ne se couperont jamais ; cependant, ils semblent provenir tous d'un même point. En prolongeant par la pensée ces rayons en arrière, on peut imaginer que leurs prolongements se coupent approximativement en un même point : c'est donc une image ponctuelle, mais comme les rayons ne passent pas réellement par ce point, on dit qu'elle est virtuelle.

FIGURE O2.4 : Déviation d'un faisceau lumineux par dioptre plan.



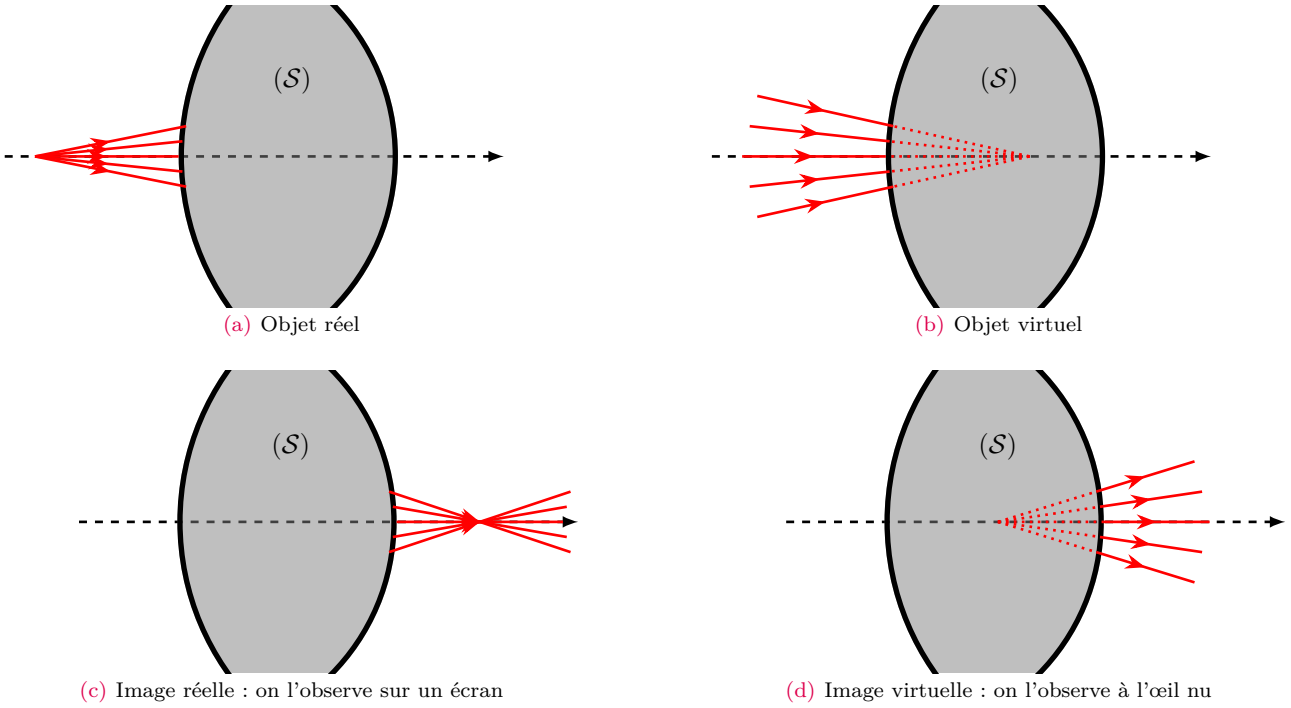
Définition : Réel/virtuel

Un objet ou une image est réel(le) si les rayons passent vraiment par ce point, et virtuel(le) si ce sont seulement leurs prolongements qui passent par ce point.

La figure O2.5 illustre les 4 combinaisons possibles. L'objet réel est un objet qui émet de la lumière, comme une lampe, ou tout objet éclairé ; l'objet virtuel n'existe pas en tant que tel, c'est forcément l'image (réelle) d'un système précédent qui peut devenir l'objet virtuel du système suivant. La figure O2.6 illustre ce cas ; il est important de remarquer que le caractère réel/virtuel n'est pas intrinsèque à l'objet/l'image, mais est relatif au système : l'image réelle d'un système peut devenir pour le système suivant un objet réel ou virtuel, suivant où il est placé.

Quant à l'image, il faut retenir la différence suivante : une image réelle s'observe en plaçant un écran à l'endroit où elle se forme ; tandis qu'une image virtuelle ne peut être observée sur un écran, mais on la voit très bien en regardant simplement avec son œil placé en sortie du système.

FIGURE O2.5 : Réel ou virtuel.



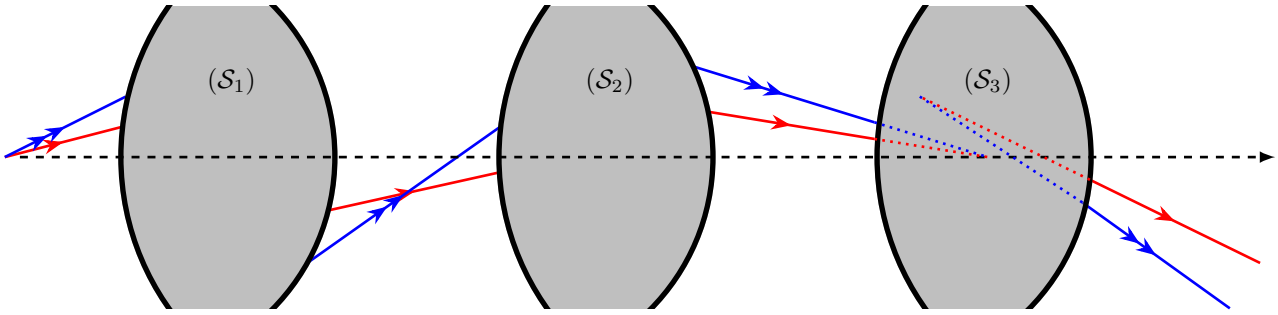
(a) Objet réel

(b) Objet virtuel

(c) Image réelle : on l'observe sur un écran

(d) Image virtuelle : on l'observe à l'œil nu

FIGURE O2.6 : Exemple de systèmes à la suite : le système $(\mathcal{S}_1)$ a un objet réel et une image réelle, qui devient l'objet réel du système $(\mathcal{S}_2)$; ce système a une image réelle qui devient l'objet virtuel du système $(\mathcal{S}_3)$, qui en donne une image virtuelle.



Ces illustrations permettent de donner une autre façon de caractériser le caractère réel ou virtuel d'un objet ou d'image, en fonction de leur place.

Propriété : Espace objet/image

Un objet est réel si et seulement s'il est situé *avant la face d'entrée* : on appelle cette zone *l'espace objet*.
Une image est réelle si et seulement si elle est située *après la face de sortie* : on appelle cette zone *l'espace image*.

A.2. Objets et images à l'infini

À partir de maintenant, on ne va étudier que des systèmes qui possèdent une propriété amenant quelques simplifications.

Définition : Système centré

On appelle *système centré* un système qui possède un *axe optique*, c'est-à-dire un axe particulier tel que le système ne change pas si on le fait tourner autour de cet axe.

Par exemple, la sphère et le dioptre plan simulés précédemment sont des systèmes centrés.

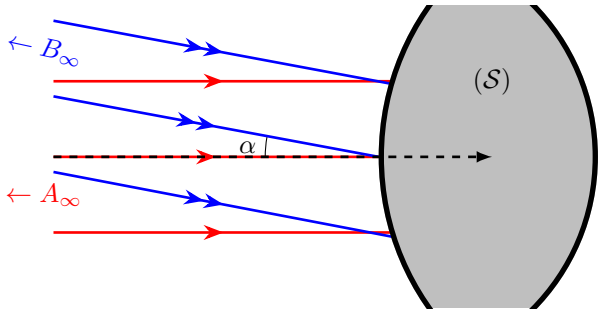
Définition : Objet à l'infini

Un objet est considéré comme étant à l'infini s'il est à une distance très grande devant les dimensions caractéristiques du système. Le faisceau lumineux qu'il émet arrive sur le système sous forme d'un faisceau quasiment collimaté. Si ce faisceau arrive parallèle à l'axe, on dit qu'on a un objet à l'infini sur l'axe ; s'il est incliné, on a un objet à l'infini hors de l'axe, repéré par l'angle que fait son faisceau avec l'axe optique (figure O2.7).

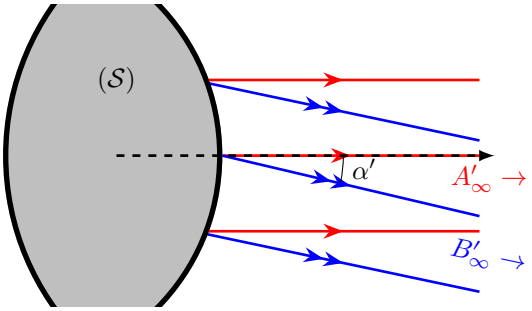
Définition : Image à l'infini

Une image est considérée comme étant à l'infini si elle est à une distance très grande devant les dimensions caractéristiques du système. Le faisceau lumineux émerge du système sous forme d'un faisceau quasiment collimaté. Si ce faisceau part parallèle à l'axe, on dit qu'on a une image à l'infini sur l'axe ; s'il est incliné, on a une image à l'infini hors de l'axe, repéré par l'angle que fait son faisceau avec l'axe optique (figure O2.7).

FIGURE O2.7 : Objets et images à l'infini.



(a) Objets à l'infini : A sur l'axe, B hors de l'axe, incliné d'un angle α par rapport à l'axe.



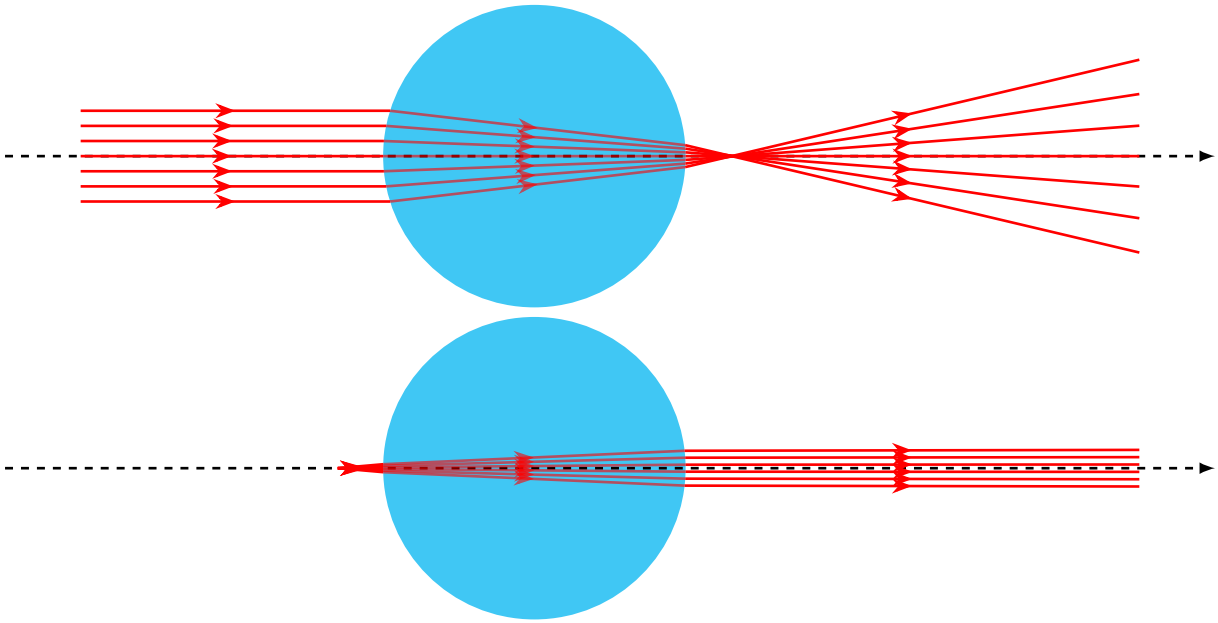
(b) Images à l'infini : A' sur l'axe, B' hors de l'axe, inclinée d'un angle α' par rapport à l'axe.

Remarque : Des rayons parfaitement parallèles ne se couperaient jamais, il n'y aurait pas d'objet/image ; des rayons quasiment parallèles se coupent à très grande distance, quasiment à l'infini.

Remarque : Un objet à distance finie est caractérisé par sa *taille* ; un objet à l'infini est caractérisé par sa *taille angulaire*, c'est-à-dire l'angle entre les faisceaux parallèles provenant de deux points extrêmes. Par exemple, le Soleil a, depuis la Terre, une taille angulaire d'environ ½°.

Comme tout objet, un objet à l'infini peut donner, par un système, une image. La figure O2.8 montre ainsi, sur le tracé du haut, des rayons incidents provenant de l'infini sur l'axe, et les rayons émergents correspondant se coupant en un point particulier. À l'inverse, sur le tracé du bas, on voit qu'il existe un objet particulier tel que les rayons émergents sont parallèles à l'axe.

FIGURE O2.8 : Foyers d'une sphère d'indice 1, 6.



Définition : Foyer image

On appelle foyer image (ou point focal image) d'un système, souvent noté F', l'image par le système d'un objet à l'infini sur l'axe : $\infty \overset{(\mathcal{S})}{\to} F'$. Il peut être réel ou virtuel.
Par conséquent, tout rayon incident parallèle à l'axe ressortira en passant par le foyer image.

Définition : Foyer objet

On appelle foyer objet (ou point focal objet) d'un système, souvent noté F, l'objet dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe : $F \overset{(\mathcal{S})}{\to} \infty$. Il peut être réel ou virtuel.
Par conséquent, tout rayon incident passant par le foyer objet émerge parallèle à l'axe.

Remarque : Un système tel qu'un objet à l'infini donne une image à l'infini est appelé *système afocal*.

A.3. Conditions de Gauss

Jusqu'à présent, on s'est contenté de définir l'image d'un système de façon plus ou moins approchée : si les rayons passent approximativement par le même point, c'est l'image. Mais si on souhaite avoir des images de bonne qualité, il faut que chaque objet ponctuel donne une image la plus ponctuelle possible.

Les simulations de systèmes centrés montrent clairement (figures O2.9 et O2.10) que la qualité de l'image devient mauvaise lorsque les rayons incidents s'écartent trop de l'axe. Pour que le système soit bien stigmatique, il faudra donc utiliser des rayons qui ne s'écartent pas trop de l'axe.

Définition : Conditions de Gauss

Un système centré est utilisé dans les conditions de Gauss si tous les rayons incidents sont *paraxiaux*, c'est-à-dire qu'ils sont *proches de l'axe optique* et *peu inclinés par rapport à l'axe optique*.

Remarque : Dans les conditions de Gauss, les angles sont petits ; pour de tels angles, on peut écrire **en radians** : $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ et $\tan\theta \approx \theta$.

FIGURE O2.9 : Dioptre plan. En haut, on n'est pas dans les conditions de Gauss : les rayons semblent provenir de plusieurs points images (cercles oranges), le stigmatisme est très approximatif ; en bas, on est plus proche des conditions de Gauss, et les rayons proviennent quasiment tous du même point.

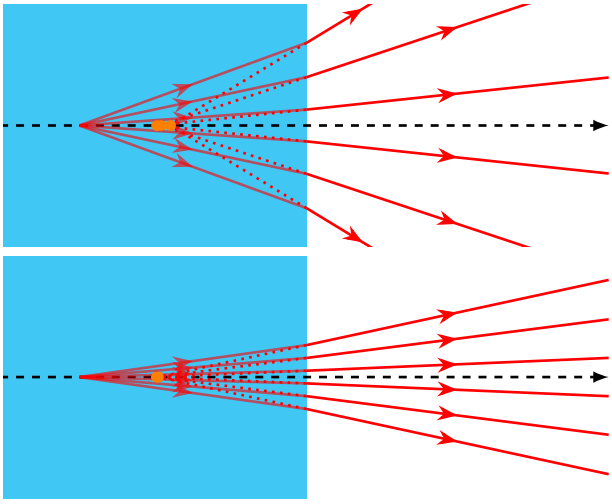
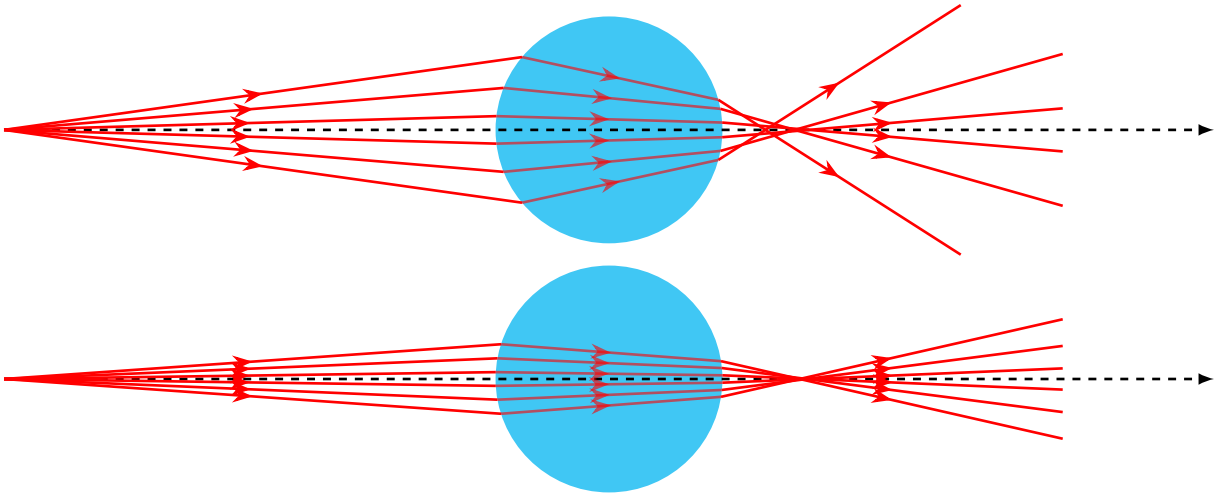


FIGURE O2.10 : Sphère d'indice $1,6$: hors des conditions de Gauss (en haut) les rayons en sortie se coupent dans une zone peu précise : le stigmatisme est très approché, l'image sera une tache floue ; dans les conditions de Gauss (en bas) on obtient une image quasi-ponctuelle.



Cette définition reste vague : pour les angles, on peut donner comme ordre de grandeur $< 15°$, mais qu'est-ce que « proche » ? On peut quantifier cela par rapport aux dimensions caractéristiques du système ; mais il est plus intéressant de se souvenir que les conditions de Gauss sont une limite idéale : plus on s'en approche, meilleure sera la qualité des images ; plus on s'en éloigne, moins belles seront les images. Tout est alors une question de compromis : si on ne prend que des rayons proches de l'axe optique, on captera peu de lumière dans le système ; si on ne prend que des rayons très peu inclinés par rapport à l'axe, on n'observera que des objets très proches de l'axe. Si on veut s'écarter de cet idéal, on a une image de moins bonne qualité, mais on a quand même une image.

Dans les études qu'on va effectuer dans la suite, on supposera toujours qu'on est dans les conditions de Gauss ; mais dans la pratique, la plupart de instruments d'optique ont besoin de dépasser ces limites. Une lunette astronomique a besoin d'une large ouverture pour capter beaucoup de lumière ; un microscope, placé très près de l'objet à observer, a besoin de capter des rayons avec des angles le plus large possible, souvent très proches de $90°$. C'est alors tout le travail des ingénieurs opticiens, de concevoir des systèmes qui donnent de très bonnes qualités d'images même lorsque les conditions de Gauss ne sont pas respectées.

Pour exprimer précisément les conséquences des conditions de Gauss, il faut encore quelques définitions :

Définition : Plan transverse

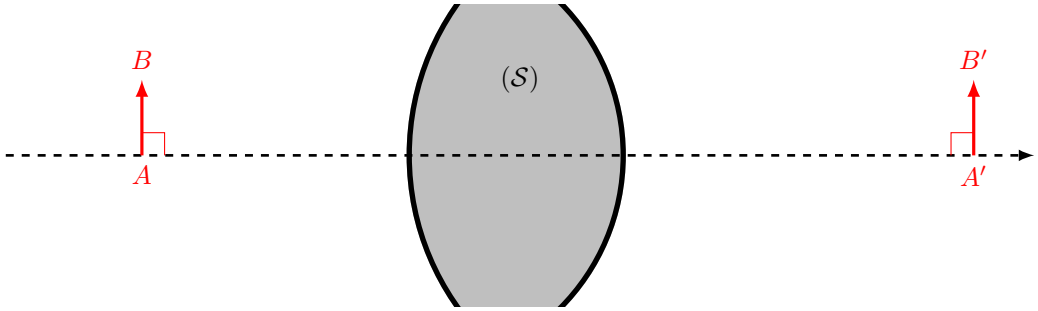
On appelle plan transverse tout plan orthogonal à l'axe optique.

Définition : Aplanétisme

Un système centré est aplanétique, si l'image de tout plan transverse est un plan transverse.

La figure O2.11 illustre cette propriété.

FIGURE O2.11 : Système aplanétique : l'objet est orthogonal à l'axe, donc son image est aussi orthogonale à l'axe.



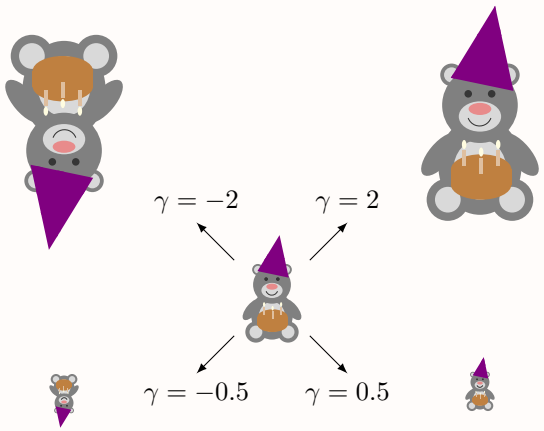
Propriété : Systèmes centrés dans les conditions de Gauss

Dans les conditions de Gauss, les systèmes centrés :

- sont approximativement stigmatiques ;
- sont aplanétiques ;
- donnent, d'un objet étendu orthogonal à l'axe, une image qui s'en déduit par une homothétie.

Un peu de maths : Homothétie

Une homothétie est une opération de dilatation dans le plan. Elle est caractérisée par un centre (ici toujours un point de l'axe optique, on ne le cite jamais) et un rapport (noté γ sur la figure ci-dessous) qui indique de combien est agrandie la figure. Si le rapport est négatif, alors il y a une symétrie centrale en plus.



Définition : Grandissement

Le rapport de l'homothétie s'appelle le grandissement, souvent noté γ.

- si $\gamma > 0$, l'image est *droite* ; si $\gamma < 0$, l'image est *renversée* ;
- si $|\gamma| > 1$, l'image est *agrandie* ; si $|\gamma| < 1$, l'image est *rapetissée/réduite*.

Remarque : Attention à ne pas confondre le *grandissement*, qui est un rapport de distances (taille de l'image / la taille de l'objet) avec le *grossissement* qu'on définira dans certains systèmes optiques particuliers comme un rapport d'angles (taille angulaire de l'image / taille angulaire de l'objet).

Ayant ainsi introduit la notion de grandissement, on voit apparaître un cas particulier : si $|\gamma| = 1$ alors l'image a la même taille que l'objet. De telles situations jouent un rôle important dans les systèmes optiques.

Définition : Plans principaux et antiprincipaux (Hors programme)

On appelle *plans principaux* d'un système optique, deux plans qui sont conjugués avec un grandissement $\gamma = 1$.
On appelle *plans antiprincipaux* d'un système optique, deux plans qui sont conjugués avec un grandissement $\gamma = -1$.

La propriété d'aplanétisme implique une propriété importante pour les plans transverses contenant les foyers :

Définition : Plan focal objet/image

On appelle *plan focal objet* (PFO) le plan transverse contenant le foyer objet.
On appelle *plan focal image* (PFI) le plan transverse contenant le foyer image.

Propriété : Propriété des plans focaux

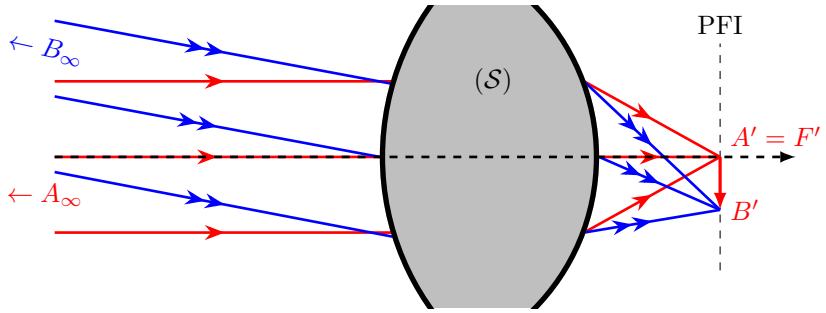
Pour un système aplanétique (cf. figure O2.12) :

— tout objet à l'infini hors de l'axe a son image dans le plan focal image.

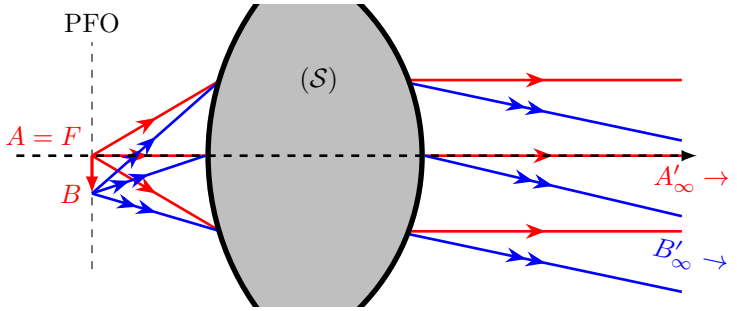
— tout objet dans le plan focal objet a son image à l'infini hors de l'axe.

Les points du plan focal objet (resp. image) hors de l'axe sont parfois appelés *foyers objets (resp. images) secondaires.*

FIGURE O2.12 : Propriété des plan focal objet et image.



(a) Deux objets à l'infini ont leurs images dans le plan focal image : A' est au foyer image principal, et B' en un foyer image secondaire.



(b) Deux objets dans le plan focal objet ont leurs images à l'infini ; A, au foyer objet principal, a son image sur l'axe, et B, en un foyer objet secondaire, a son image hors de l'axe.

O2.B. Les lentilles sphériques minces

On va désormais s'intéresser, cette année, à un type particulier et très courant de systèmes optiques : les lentilles sphériques minces.

B.1. Points spéciaux et types de lentilles

Définition : Lentille mince sphérique

Une lentille sphérique est une portion de verre limitée par deux dioptres sphériques. Elle est mince si son épaisseur au centre est petite devant les rayons des faces (voir figure O2.13 et O2.14).

Propriété : Points particuliers

Toute lentille sphérique mince possède un foyer objet F, un foyer image F', et un centre optique O tel que tout rayon incident passant par O émerge non dévié. O est l'intersection de la lentille mince avec l'axe optique, et F et F' sont symétriques de part et d'autre de O : le centre optique O est le milieu de *[FF']*.

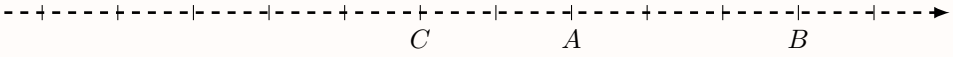
Pour une lentille mince sphérique, il suffit donc de connaître la distance entre O et un des foyers pour savoir où placer tous les points importants.

Définition : Distance focale

On définit la distance focale d'une lentille mince sphérique par : $f' = \overline{OF'}$

Un peu de maths : Distances algébriques

À partir de maintenant, on va commencer à repérer des points sur l'axe optique, et à mesurer des distances. La distance entre deux points est importante, mais aussi leur position : un point à 2 cm de O peut être situé soit à droite, soit à gauche, ce n'est pas pareil.
On oriente donc l'axe optique, le plus souvent de la face d'entrée vers la face de sortie. Si on dispose de deux points A et B, au lieu de donner leur distance AB, on donnera leur *distance algébrique* (ou longueur algébrique) $\overline{AB}$. La barre au-dessus signifie qu'on donne un signe à la distance : positive si on se déplace dans le sens de l'axe en allant de A à B, négative sinon.
Par exemple, dans le dessin ci-dessous gradué en centimètres, $\overline{AB} = +3\,\text{cm}$ et $\overline{AC} = -2\,\text{cm}$.



Les distances algébriques ont l'avantage de vérifier la relation de Chasles : $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$; de plus, $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Remarque : Certains livres appellent f' la *distance focale image* et définissent également la *distance focale objet* $f = \overline{OF}$, avec la relation $f = -f'$.

Attention à ne pas confondre f' qui est une distance, et F' qui est un point.

Définition : Types de lentilles

On appelle *lentilles convergentes* les lentilles pour lesquelles $f' > 0$ et *lentilles divergentes* les lentilles pour lesquelles $f' < 0$.

Propriété : Lentilles minces convergentes

Les lentilles minces convergentes sont celles qui sont plus épaisses au centre qu'au bord (figure O2.13). On les symbolise par une double flèche :

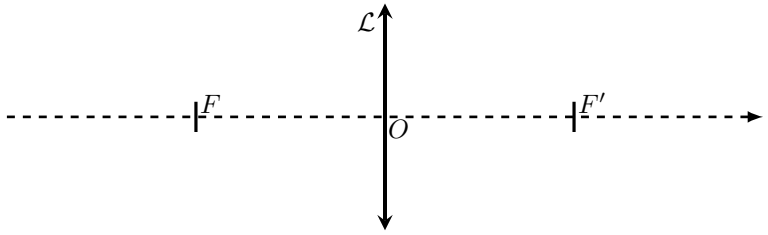
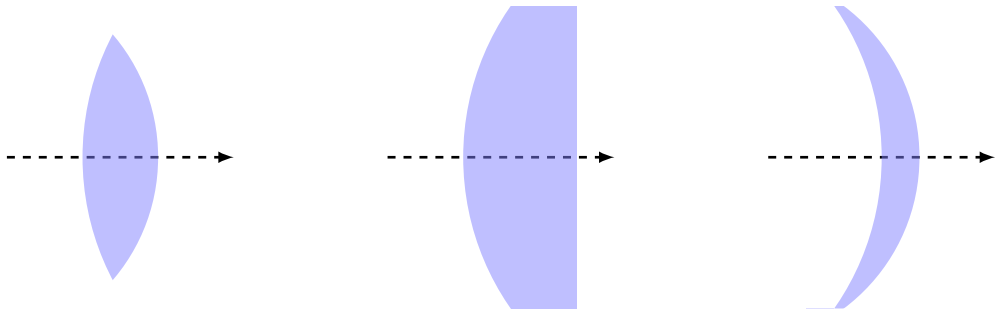


FIGURE O2.13 : Familles de lentilles convergentes.



(a) Lentille convergente biconvexe (b) Lentille convergente plan-convexe (c) Ménisque convergent

Propriété : Lentilles minces divergentes

Les lentilles minces divergentes sont celles qui sont plus épaisses au bord qu'au centre (figure O2.14). On les symbolise par une double flèche inversée :

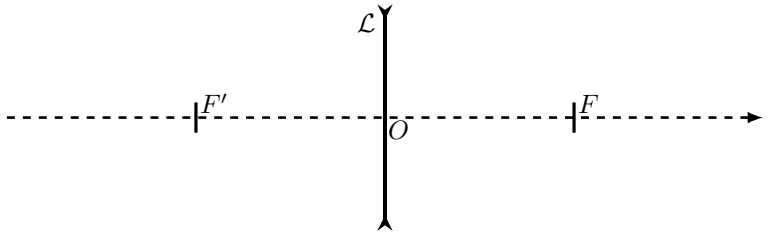
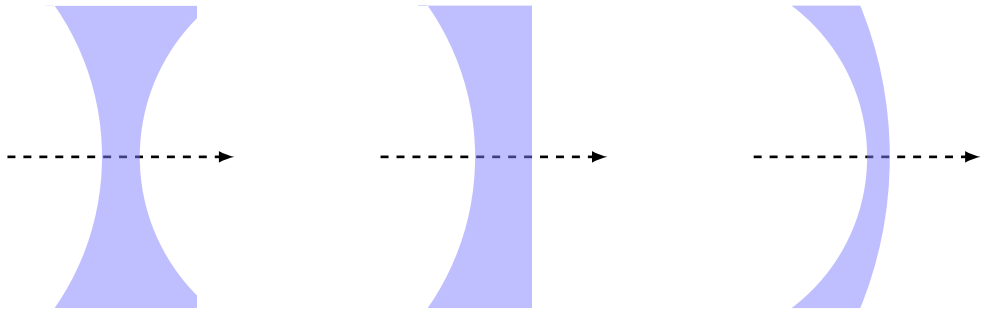


FIGURE O2.14 : Familles de lentilles divergentes.



(a) Lentille divergente biconcave (b) Lentille divergente plan-concave (c) Ménisque divergent

B.2. Tracés géométriques

Méthode : Tracé géométrique de l'image d'un objet par une lentille

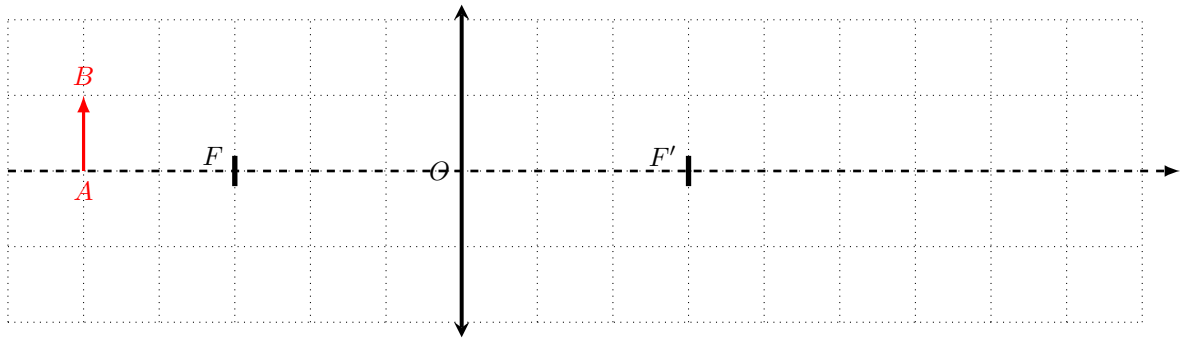
Si on possède un objet AB (le plus souvent A est sur l'axe et B hors de l'axe), on peut trouver son image $A'B'$ par une lentille en traçant deux des trois rayons suivants passant par B :

- le rayon incident parallèle à l'axe ressort en passant par F' ;
- le rayon incident passant par O n'est pas dévié ;
- le rayon incident passant par F ressort parallèle à l'axe.

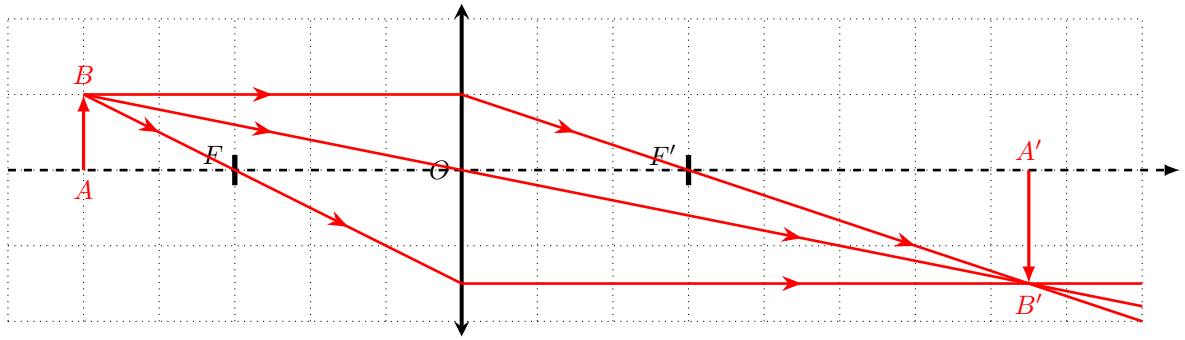
Si les rayons émergents se coupent, le point d'intersection est l'image réelle ; sinon, on les prolonge en pointillés avant la lentille pour localiser l'image virtuelle.
Une fois B' trouvé, on place A' sur l'axe par aplanétisme.

Exemple : Tracé de l'image d'un objet réel par une lentille convergente

Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



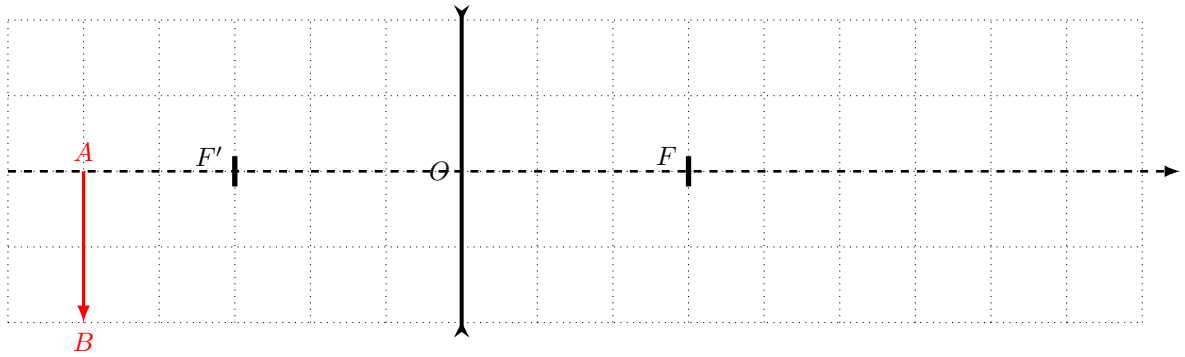
Pour l'exemple on trace les 3 rayons issus de B, mais deux suffisent :



Le rapport des dimensions de l'image sur celle de l'objet vaut 1,5 ; or l'image est de sens opposé à l'objet, donc $\gamma = -1{,}5$.

Exemple : Tracé de l'image d'un objet réel par une lentille divergente

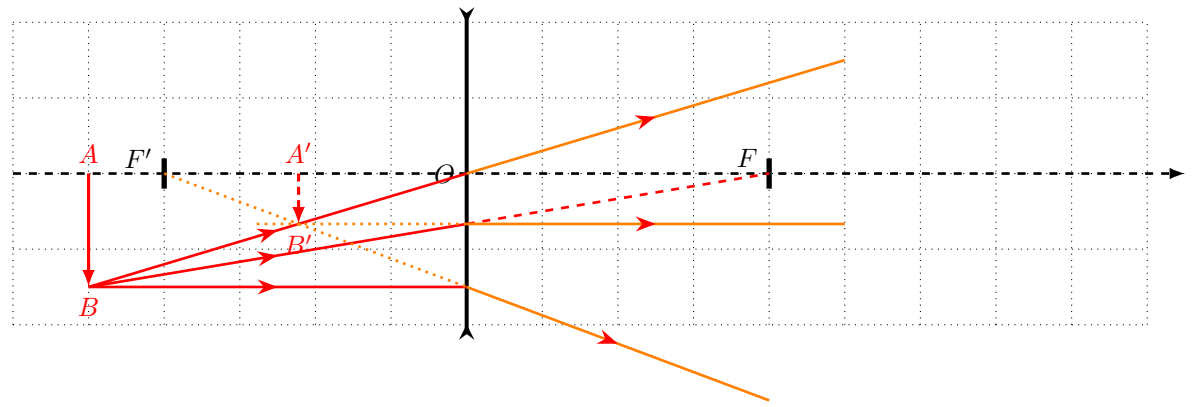
Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



Avec une lentille divergente, il faut faire attention :

- le rayon issu de B et passant par O est normal, il n'est pas dévié.
- le rayon issu de B et allant vers F ne pourra pas passer par F, car il sera dévié avant ; on le prolonge donc en pointillés pour indiquer qu'il passerait par F.
- le rayon incident parallèle à l'axe ne peut pas ressortir vraiment par F', car F' n'est pas du côté de la face de sortie. On le fait donc partir comme s'il provenait de F', en le prolongeant en pointillés.

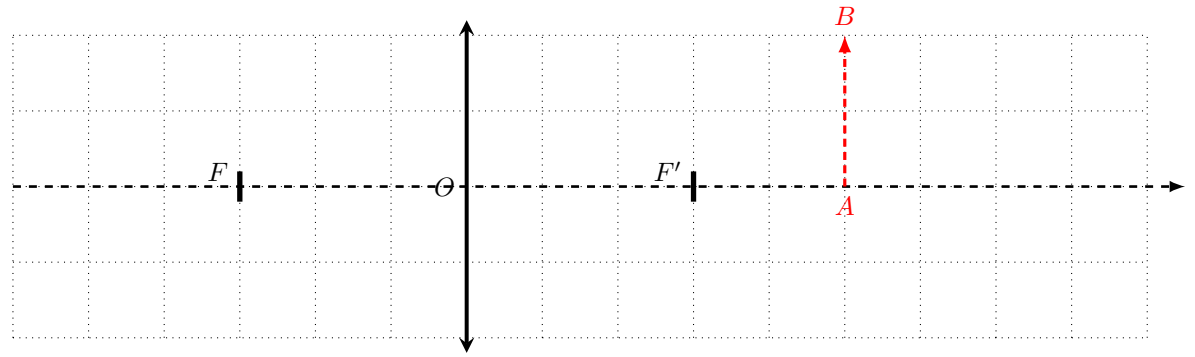
Pour clarifier le schéma ci-dessous, les rayons incidents sont en rouge et les rayons émergents en orange.



On constate que les rayons émergents ne se coupent pas ; on les prolonge donc en pointillé avant la lentille pur trouver l'image virtuelle. On mesure $\gamma = 0{,}44$.

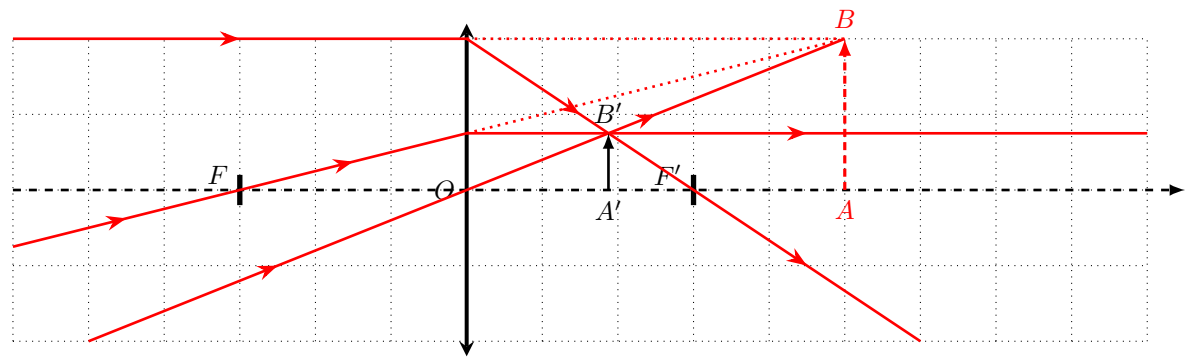
Exemple : Tracé de l'image d'un objet virtuel par une lentille convergente

Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



Les objets virtuels posent souvent problème. L'objet n'émet pas de rayons : il ne faut surtout pas faire partir les rayons de B. Ici, les rayons proviennent comme toujours de la gauche (face d'entrée) et *convergent* vers B. Voilà donc comment on trace les 3 rayons :

- on met la règle entre O et B et on trace un rayon non dévié.
- on met la règle parallèle à l'axe et passant par B ; on fait provenir un rayon de la gauche, en trait plein jusqu'à la lentille, puis prolongé en pointillé pour monter qu'il passerait par B ; mais le rayon émergent repart par F'.
- on met la règle entre F et B ; on fait provenir un rayon de la gauche, en trait plein jusqu'à la lentille, puis prolongé en pointillé pour monter qu'il passerait par B ; le rayon émergent repart parallèle à l'axe.



L'image est réelle, et $\gamma = 0{,}38$.

B.3. Tracé géométrique d'un rayon émergent d'une lentille

Si on dispose d'une lentille, et d'un rayon incident arrivant sur cette lentille, alors on souhaite tracer le rayon émergent avec le moins de traits de construction possible.

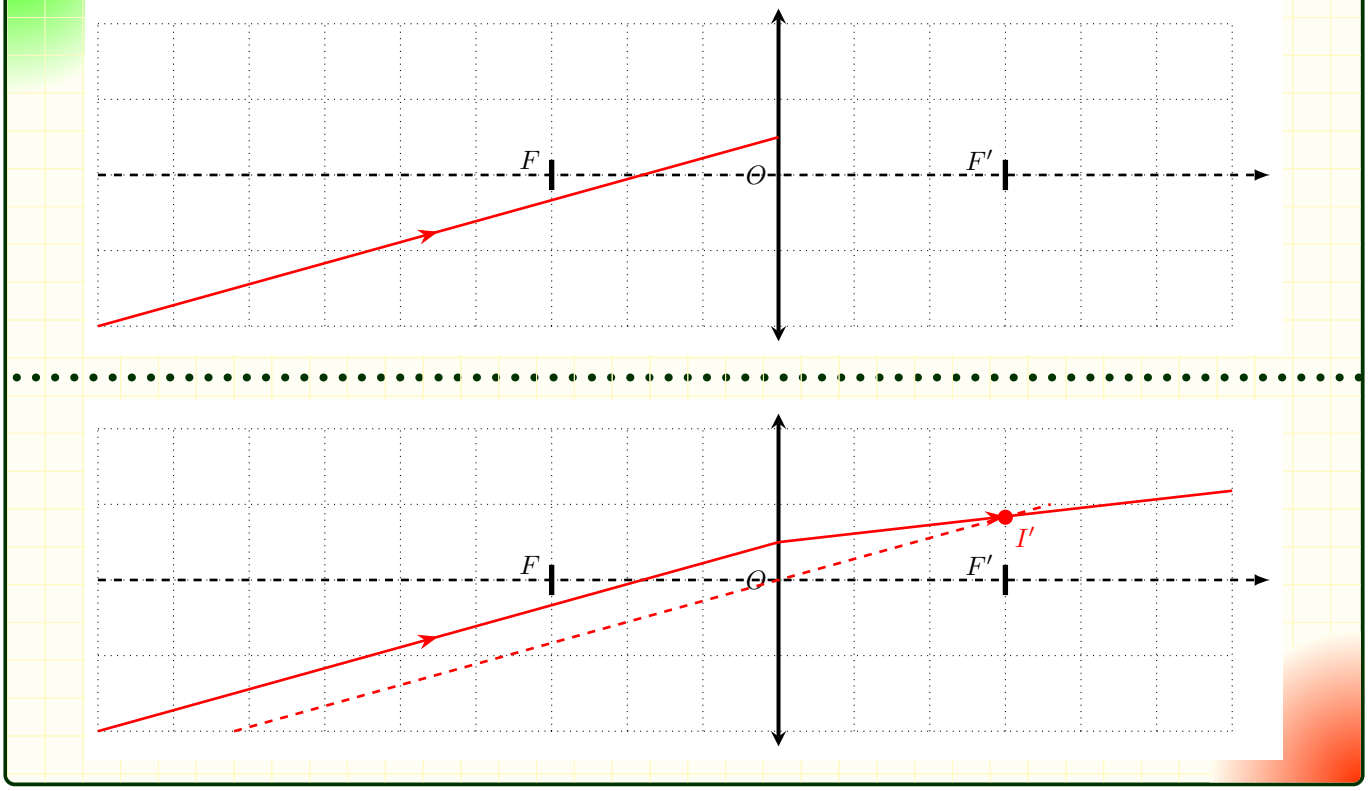
Méthode : Tracé d'un rayon émergent à l'aide d'un un objet à l'infini

Si on imagine que ce rayon a été émis par un objet situé à l'infini, alors l'image de cet objet se trouve dans le plan focal image. La méthode est alors la suivante :

- on trace en pointillés le rayon parallèle au rayon incident passant par O ;
- on note I' le point où ce rayon pointillé coupe le plan focal image ; ce point est l'image de l'objet imaginaire à l'infini qui a émis les deux rayons ;
- alors le rayon émergent passe (lui ou son prolongement) par I'.

Exemple : Tracé d'un rayon émergent

Tracez le rayon émergent.



Il existe une autre méthode possible :

Méthode : Tracé d'un rayon émergent à l'aide d'un un objet dans le PFO

Si on imagine que ce rayon a été émis par un objet situé dans le plan focal objet, alors l'image de cet objet se trouve à l'infini. La méthode est alors la suivante :

- on note I le point où le rayon incident coupe le plan focal objet ;
- on trace en pointillés le rayon passant par I et le centre O de la lentille ; ce rayon donne la direction de l'image de l'objet I qui a émis les deux rayons ;
- alors le rayon émergent ressort parallèle au pointillé précédent.

B.4. Lois de conjugaison et de grandissement

Pour pouvoir étudier des systèmes formés de plusieurs lentilles, il faut aller plus loin que de simples constructions géométriques, et traduire les propriétés des lentilles en lois mathématiques ; on va en établir de deux sortes : des *lois*

de conjugaison, qui relient les positions respectives de l'objet et de l'image, et des *lois de grandissement*, qui relient les dimensions respectives de l'objet et de l'image.

Il existe deux familles de lois : celles qui repèrent l'objet et l'image par rapport aux foyers de la lentille, et celles qui les repèrent par rapport au centre de la lentille.

Lois de conjugaison et de grandissement de Newton (origine aux foyers)

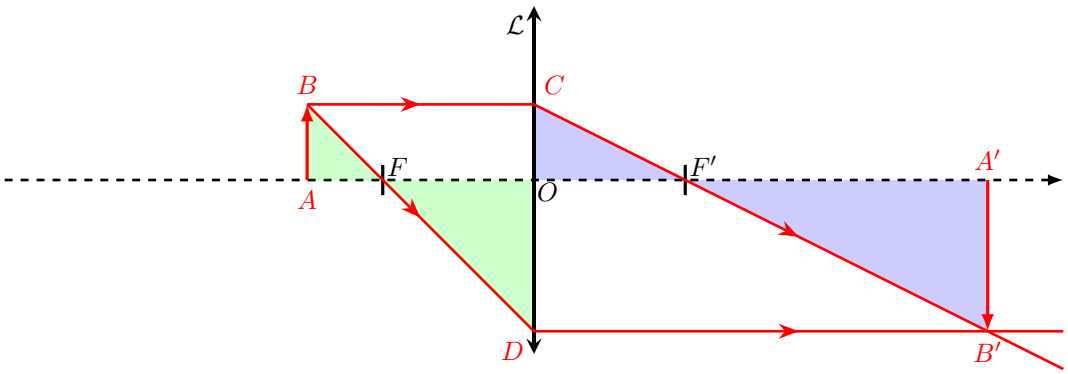
Soit AB un objet avec A sur l'axe optique d'une lentille, et $A'B'$ son image par la lentille ; alors :

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2 \text{ (loi de conjugaison)} \quad \text{(O2.1a)}$$

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \text{ (lois de grandissement)} \quad \text{(O2.1b)}$$

Démonstration

Pour la démonstration, on effectue le dessin dans un cas particulier simple : un objet réel qui donne, par une lentille convergente, une image réelle. On construit l'image à l'aide des deux rayons particuliers qui font intervenir les foyers.



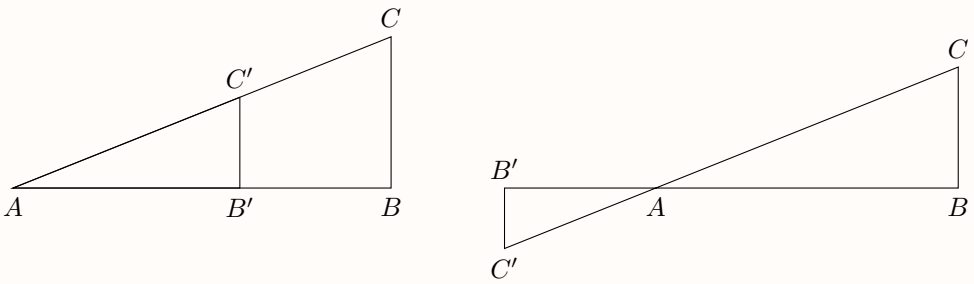
La démonstration repose que l'application du théorème de Thalès dans des triangles semblables. On applique le théorème de Thalès (cf. encadré ci-après) :

- dans les triangles FAB et FOD : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ car $\overline{OD} = \overline{A'B'}$
- dans les triangles $F'A'B'$ et $F'OC$: $\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ car $\overline{OC} = \overline{AB}$

Or le grandissement vaut par définition $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. On a donc déjà établi les relations $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$.
En effectuant le produit en croix des deux fractions, on obtient $\overline{FA}.\overline{F'A'} = \overline{FO}.\overline{F'O}$. Or $\overline{FO} = f'$ et $\overline{F'O} = -f'$.
Donc $\overline{F'A'}.\overline{FA} = -f'^2$

Un peu de maths : Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès s'applique dans deux triangles semblables comme ci-dessous :



Il y a alors deux façons d'écrire le théorème de Thalès dans les triangles ABC et $AB'C'$ (on ne s'intéresse qu'aux côtés verticaux et horizontaux en optique) :

- soit on écrit que les rapports des côtés sont identiques dans les deux triangles : $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$

— soit on écrit que les rapports des côtés parallèles des deux triangles sont les mêmes : $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'}$

En optique, on ne travaille pas avec des longueurs, mais avec des longueurs algébriques. Pour pouvoir écrire des signes justes, il faut absolument écrire la deuxième forme en faisant attention au sens des longueurs : si on écrit le rapport des côtés horizontaux dans le même sens, alors il faut faire de même pour les côtés verticaux : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ par exemple, pour le schéma de gauche, ou bien $\frac{\overline{AB}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{C'B'}}$ pour le schéma de droite. Ou bien on peut écrire les deux rapport en sens opposés, par exemple $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ pour le schéma de droite. Les formules ainsi écrites sont identiques.

Lois de conjugaison et de grandissement de Descartes (origine au centre)

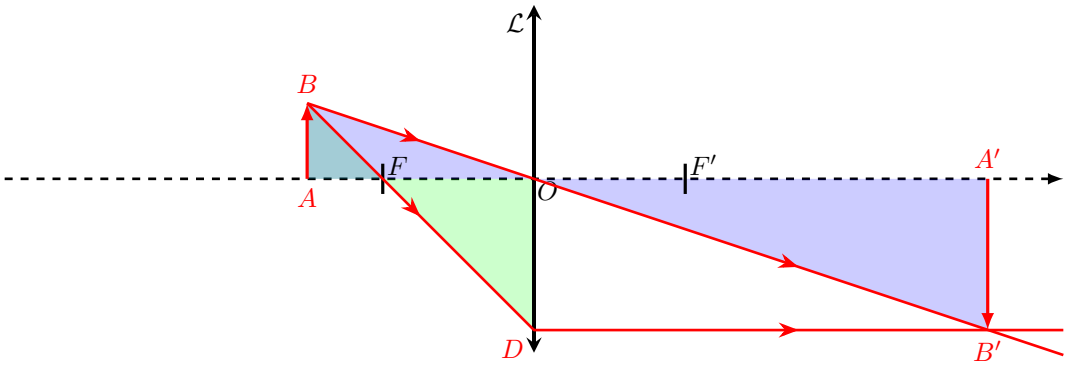
Soit AB un objet avec A sur l'axe optique d'une lentille, et $A'B'$ son image par la lentille ; alors :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \text{ (loi de conjugaison)} \qquad \text{(O2.2a)}$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \text{ (loi de grandissement)} \qquad \text{(O2.2b)}$$

Démonstration

Pour la démonstration, on effectue encore le dessin dans le cas particulier d'un objet réel qui donne, par une lentille convergente, une image réelle ; mais cette fois on utilise le rayon qui passe par le centre, et un autre au choix.



On applique deux fois le théorème de Thalès :

— dans les triangles FAB et FOD : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

— dans les triangles OAB et $OA'B'$: $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

De la deuxième, on tire facilement $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

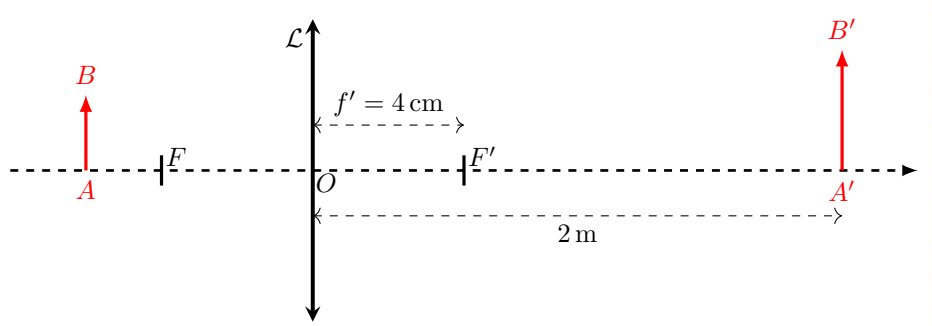
En combinant les deux égalités : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$. Or par la relation de Chasles : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{FO}+\overline{OA}}{\overline{FO}} = 1 + \frac{\overline{OA}}{\overline{FO}}$, donc $1 + \frac{\overline{OA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$. En divisant tous les termes par $\overline{OA}$, on obtient $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{FO}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$ soit $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{FO}} = \frac{1}{f'}$.

Exemple : Calcul de la position et de la taille d'une image

On place une diapositive de dimensions $AB = 24\,\text{mm}$ devant une lentille convergente de focale $f' = 4\,\text{cm}$. L'image doit être nette sur un écran situé 2 m après la lentille.

1. À l'aide des loi de Descartes, calculez la distance à mettre entre la diapositive et la lentille, ainsi que la taille de l'image.
2. Reprendre le même calcul à l'aide des lois de Newton.

Pour ne pas se tromper dans les signes des longueurs algébriques, il peut être utile de faire un schéma.

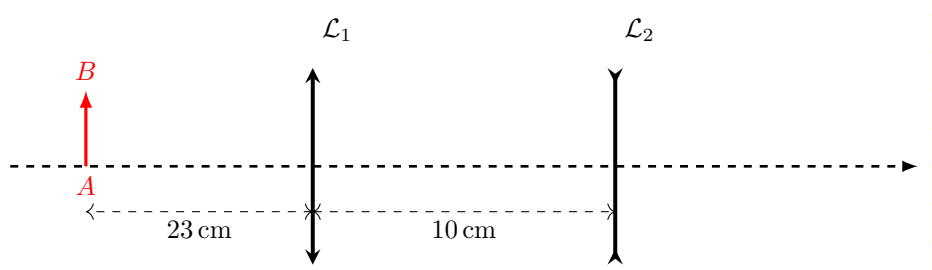


Remarque : le schéma est faux, $A'B'$ est normalement renversé par rapport à AB, mais peu importe pour le moment.

1. On connaît $\overline{OA'} = 2\,\text{m}$ et $f' = 0{,}04\,\text{m}$. Par la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}$ d'où on tire $\overline{OA} = -4{,}08\,\text{cm}$.
   On peut alors calculer le grandissement $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -49$ (il est négatif, donc le schéma est faux, $A'B'$ devrait être à l'envers). Or $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB}$ donc en prenant la valeur absolue : $A'B' = 1176\,\text{mm} = 1{,}2\,\text{m}$.
2. Par la relation de Chasles : $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'} = -0{,}04 + 2 = 1{,}96\,\text{m}$. Par la loi de conjugaison de Newton : $\overline{FA} = -\frac{f'^2}{\overline{F'A'}} = -0{,}8\,\text{mm}$ ce qui redonne bien $\overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -4{,}08\,\text{cm}$.
   Pour le grandissement : $\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{1{,}96}{-0{,}04} = -49$ et on retrouve les mêmes résultats que précédemment.

Exemple : Image d'un objet par un doublet

On dispose deux lentilles, une de focale $f'_1 = 8\,\text{cm}$ et de centre O_1, l'autre de focale $f'_2 = -6\,\text{cm}$ et placée en O_2 situé 10 cm après la première.
On place un objet A à une distance de 23 cm avant la première lentille. Déterminez la position de A'', image de A par l'ensemble des deux lentilles.



Il faut bien comprendre que les rayons lumineux traversent les lentilles l'une après l'autre, chaque lentille donnant d'un objet une image qui servira d'objet à la lentille suivante. Ainsi on peut écrire : $A \overset{\mathcal{L}_1}{\to} A' \overset{\mathcal{L}_2}{\to} A''$.
On applique les lois de conjugaison de Descartes à la lentille 1 qui a pour centre O_1, pour objet A et pour image A' : $\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$ d'où on tire $\overline{O_1A'} = 12{,}3\,\text{cm}$.
On applique les lois de conjugaison de Descartes à la lentille 2 qui a pour centre O_2, pour objet A' et pour image A'' : $\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2}$; on trouve par la relation de Chasles : $\overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'} = -10 + 12{,}3 = 2{,}3\,\text{cm}$; on en déduit alors $\overline{O_2A''} = 3{,}6\,\text{cm}$.

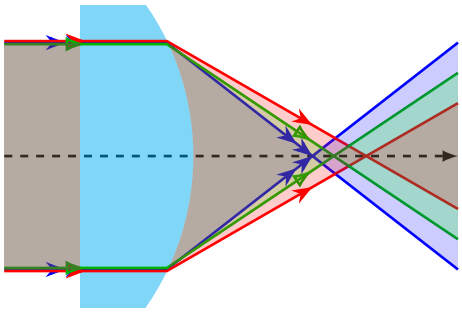
B.5. Défauts des lentilles sphériques

Les lentilles sphériques que nous avons étudiées sont supposées parfaites ; en réalité, ce n'est pas le cas. Elles réalisent donc les tracés que nous avons faits de façon approchée, et divers défauts apparaissent.

Propriété : Aberration chromatique

Une lentille n'a pas la même distance focale pour les différentes longueur d'ondes, ce qui crée des irisations de l'image : c'est l'aberration chromatique (figure O2.15).

FIGURE O2.15 : Aberration chromatique.



(a) Principe



(b) Aberration chromatique sur une photo de la Lune. (Crédit : Wikipedia/B.Inaglory)

Remarque : Ce défaut vient de l'indice optique du matériau de la lentille : il dépend de la longueur d'onde.

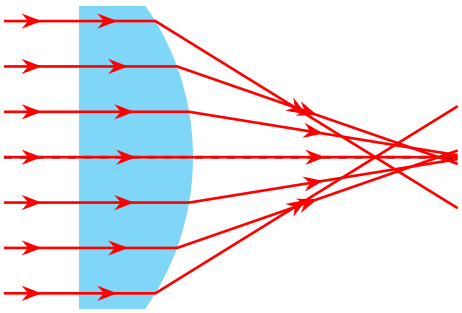
Propriété : Aberration sphérique

Les rayons lumineux qui passent au bord d'une lentille sphérique sont plus déviés que ceux qui passent près du centre. Du coup, si on utilise la totalité de la lentille, l'image est floue : c'est l'aberration sphérique (figure O2.16 à gauche).

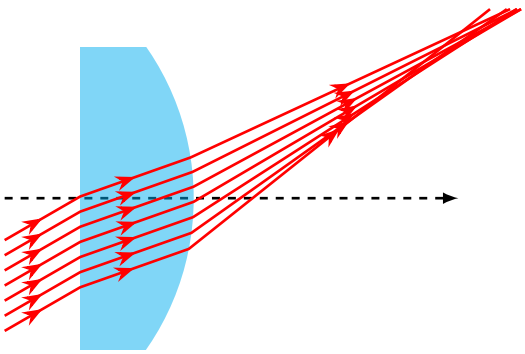
Propriété : Aberration de coma

Les rayons fortement inclinés par rapport à l'axe ne se coupent pas bien en un même point, donnant à limage l'aspect d'une comète : c'est l'aberration de coma (figure O2.16 à droite).

FIGURE O2.16 : Aberrations géométriques.



(a) Aberration de sphéricité



(b) Aberration de coma

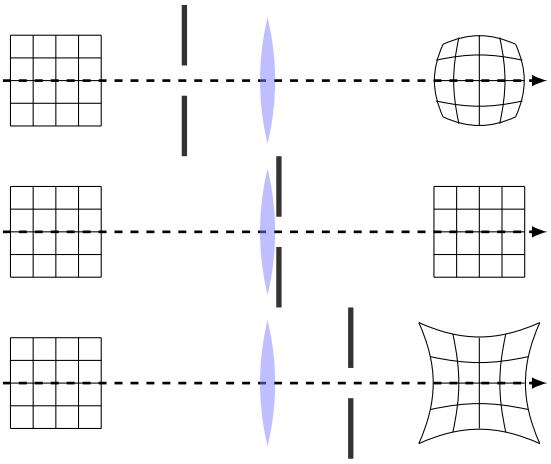
Remarque : l'aberration sphérique et l'aberration de coma forment, à elles deux, les *aberrations géométriques*. Ce sont elles qu'on diminue en travaillant dans les conditions de Gauss ; par contre, les conditions de Gauss n'influent en rien sur les aberrations chromatiques.

Puisqu'il faut travailler dans les conditions de Gauss, il faut limiter la lumière qui passe sur les bords de la lentille, donc on place un diaphragme, c'est-à-dire un trou réglable. Cependant, suivant où se situe ce diaphragme, il va tordre l'image, effet qui est particulièrement visible sur les appareils photographiques et les caméras.

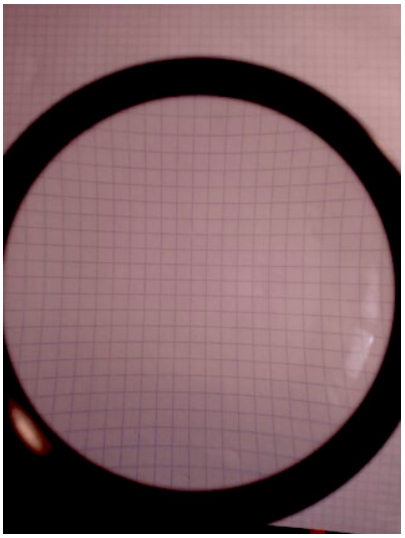
Propriété : Distorsions

La présence d'un diaphragme devant la lentille tend à déformer l'image en coussinet ; un diaphragme après la lentille la déforme en barillet (figure O2.17).

FIGURE O2.17 : Distorsions.



(a) Principe de la distorsion en coussinet ou en barillet



(b) Image d'un quadrillage à travers une loupe : les bords sont déformés et de mauvaise qualité.

O2.C. Notions sur les miroirs sphériques

Les miroirs sphériques ont des propriétés assez proches de lentilles, mais ont l'avantage de ne pas être sujets à l'aberration chromatique (car la loi de la réflexion ne dépend pas de l'indice). Cependant leurs tracés géométriques sont plus compliqués. Cette année, seul les propriétés du miroir plan sont à connaître.

C.1. Miroir plan

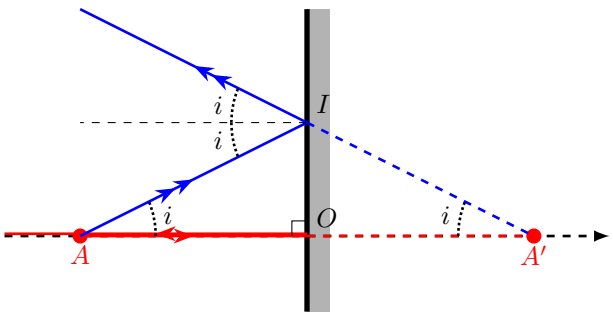
Image par un miroir plan

L'image d'un objet par un miroir plan est le symétrique de ce point par rapport au miroir. On a donc $\overline{OA} = -\overline{OA'}$.

Démonstration

On place un objet A devant un miroir plan, et O le projeté orthogonal de A sur le miroir.

- le rayon issu de A et orthogonal au miroir rebondit et repart parallèle à s direction d'émission.
- on trace un autre rayon quelconque issu de A et frappant le miroir en I avec un angle d'incidence i. On peut tracer le rayon réfléchi avec le même angle i.



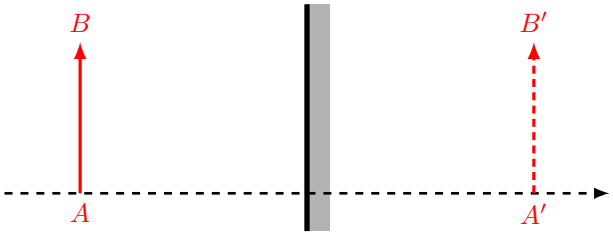
Les rayons émergents ne se coupent pas à gauche ; on les prolonge donc à droite pour faire apparaître l'image A'.
Il est facile de voir, par les lois de la géométrie, que l'angle $\widehat{OA'I}$ vaut i, de même que l'angle $\widehat{OAI}$. Les triangles OAI et $OA'I$, qui ont un côté commun et un angle identique, sont donc identiques ; donc $OA = OA'$.

Propriétés du miroir plan

Le miroir plan réalise le stigmatisme rigoureux entre un objet et son image. Il est aplanétique, et son grandissement vaut 1.

Démonstration

Évident avec un schéma, ou par les propriétés de la symétrie :



C.2. Miroirs sphériques non plans (Hors programme)

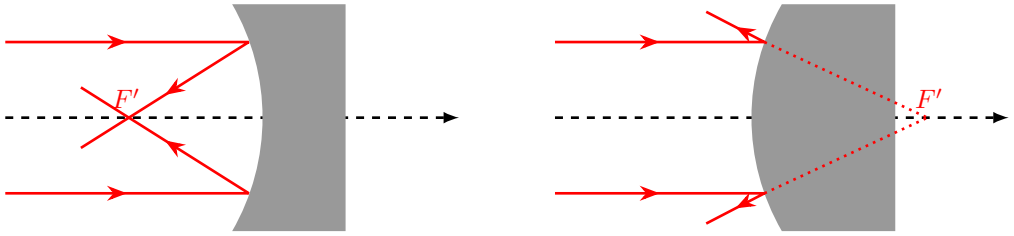
Propriété : Image par un miroir sphérique concave

Un miroir sphérique concave se comporte optiquement comme une lentille convergente, mais l'espace image se trouve du même côté que l'espace objet.

Propriété : Image par un miroir sphérique convexe

Un miroir sphérique convexe se comporte optiquement comme une lentille divergente, mais l'espace image se trouve du même côté que l'espace objet.

FIGURE O2.18 : Miroirs sphériques non plans.



(a) Miroir concave (b) Miroir convexe

O2. Systèmes optiques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Image d'un objet	
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces.	Exploiter les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
Miroir plan. Stigmatisme.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.

O2. Systèmes optiques

Quelques conseils

- ✎ Les notions de stigmatisme approché ou rigoureux sont surtout importantes en TP. Dans les exercices théoriques on supposera toujours que les conditions de Gauss assurent un stigmatisme suffisant ; mais dans les dessins, on choisira des angles plus important afin de bien voir.
- ✎ Si l'énoncé dit qu'on observe l'image sur un écran, on en déduit que l'image est réelle.
- ✎ Il faut maîtriser parfaitement les définitions des foyers objet et image : ce sont des points essentiels en optique. Attention à l'erreur qu'on entend souvent : « si l'objet est au foyer objet, alors l'image est au foyer image » : c'est archi-faux
- ✎ La propriété : « F' est le point situé à une distance f' du centre » n'est vraie que pour **une seule lentille** ; de même que la symétrie de F et F' par rapport à O. Si le système est plus compliqué qu'une seule lentille, il faut revenir aux définitions universelles de F et de F' à partir de l'objet/image à l'infini sur l'axe.
- ✎ Dans les tracés, faites attention aux traits pleins et aux pointillés : les vrais rayons sont en traits pleins, on doit les voir arriver du côté de l'entrée, traverser la lentille et ressortir du côté de la sortie, sans discontinuité ; les pointillés sont pour les prolongements de rayons incidents du côté de la sortie, ou des rayons émergents du côté de l'entrée.
- ✎ Avant d'appliquer les lois de conjugaison ou de grandissement, **faites un schéma du système** en orientant l'axe ; ensuite, faites bien attention aux signes.
- ✎ En appliquant les lois de Descartes, l'erreur classique est de calculer $\frac{1}{\overline{OA'}}$ mais d'oublier ensuite de prendre l'inverse.
- ✎ Dès qu'il y a plusieurs lentilles, nommez clairement les points et faites des schémas de principe sous la forme $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A''$ qui vous aident à savoir qui est l'objet/l'image de chaque lentille.
- ✎ Quand on applique plusieurs fois les lois de conjugaison à travers plusieurs lentilles, on ne peut pas écrire un calcul littéral pour le tout, car cela donne une expression illisible ; on est obligé de passer par des valeurs numériques des images intermédiaires.

O2. Systèmes optiques

QCMs

réponses page 106

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'objet est le point où se coupent les rayons.

(a). Vrai (b). Faux

Q2. Un objet est réel si et seulement si :

(a). Il est situé dans l'espace objet (avant la face d'entrée) (b). Les rayons incidents se coupent vraiment
(c). Le faisceau incident est divergent

Q3. Tout rayon incident parallèle à l'axe ressort du système :

(a). parallèle à l'axe (b). en passant par F'
(c). en passant par F (d). non dévié

Q4. Tout rayon incident passant par le foyer objet F ressort du système :

(a). en passant par F (b). parallèle à l'axe
(c). en passant par F' (d). non dévié

Q5. Comment doivent être les rayons incidents pour qu'on soit dans les conditions de Gauss ?

(a). confondus avec l'axe (b). proches de l'axe
(c). peu inclinés pas rapport à l'axe (d). perpendiculaires à l'axe

Q6. Un objet orthogonal à l'axe a toujours une image orthogonale à l'axe.

(a). Faux (b). Vrai

Q7. L'image d'un système est agrandie si et seulement si :

(a). $\gamma \neq 0$ (b). $\gamma > 1$
(c). $\gamma > 0$ (d). $|\gamma| > 1$

Q8. L'image d'un système est droite si et seulement si :

(a). $\gamma > 1$ (b). $\gamma > 0$
(c). $|\gamma| > 1$ (d). $\gamma \neq 0$

Q9. Tout objet à l'infini a son image par un système centré :

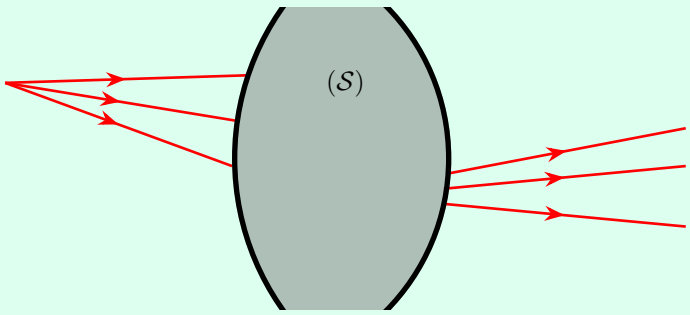
(a). dans le plan focal image (b). à l'infini
(c). au foyer image F' (d). dans le plan focal objet

Q10. Pour que l'image d'un système centré soit à l'infini, l'objet doit être :

(a). à l'infini (b). dans le plan focal objet
(c). dans le plan focal image (d). au foyer objet F

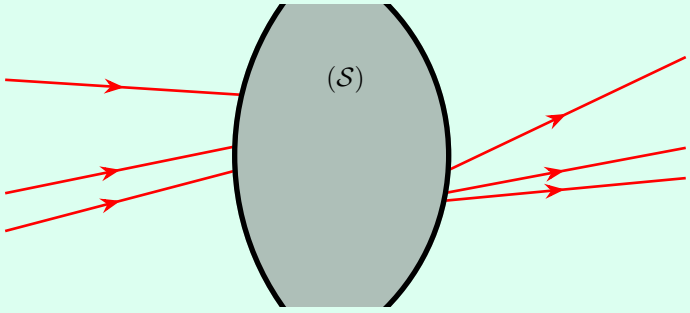
✓ QCM : Réel ou virtuel ? ✗

Q11.



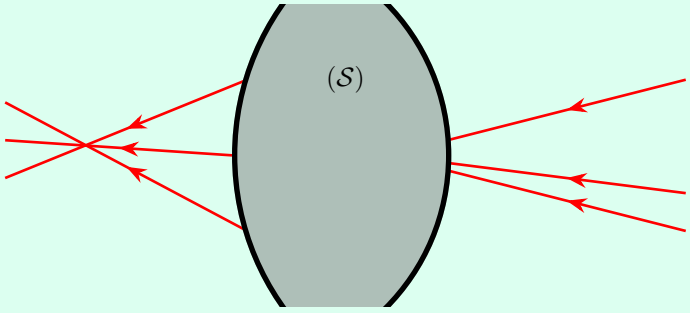
(a). objet virtuel, image réelle
(b). objet réel, image réelle
(c). objet réel, image virtuelle
(d). objet virtuel, image virtuelle

Q12.



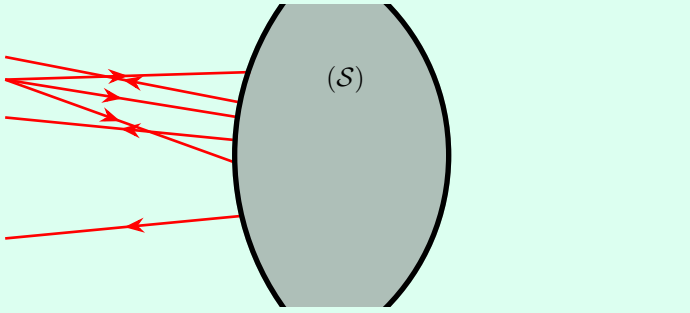
(a). objet virtuel, image virtuelle
(b). objet virtuel, image réelle
(c). objet réel, image réelle
(d). objet réel, image virtuelle

Q13.



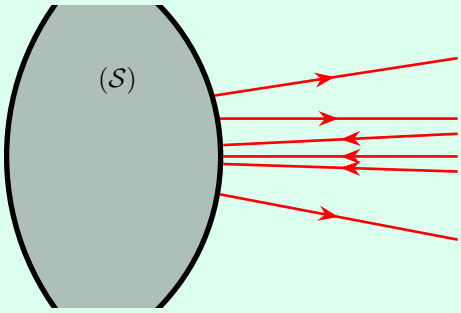
(a). objet virtuel, image virtuelle
(b). objet virtuel, image réelle
(c). objet réel, image réelle
(d). objet réel, image virtuelle

Q14.



(a). objet virtuel, image virtuelle
(b). objet virtuel, image réelle
(c). objet réel, image réelle
(d). objet réel, image virtuelle

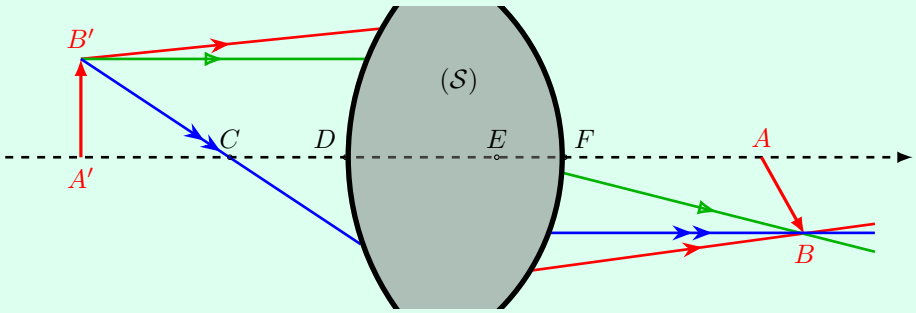
Q15.



(a). objet virtuel, image réelle
(b). objet réel, image virtuelle
(c). objet réel, image réelle
(d). objet virtuel, image virtuelle

✓ QCM : Propriétés des systèmes optiques ✗

On considère le système optique ci-dessous à le trajet de 3 rayons est tracé :



Q16. AB est pour le système :

(a). un objet
(b). une image

Q17. B est conjugué avec B' par le système.

(a). Faux
(b). Vrai

Q18. Le système est aplanétique.

(a). Faux
(b). Vrai

Q19. On nous dit que le système possède un foyer objet. Il s'agit du point

(a). F
(b). E
(c). D
(d). C

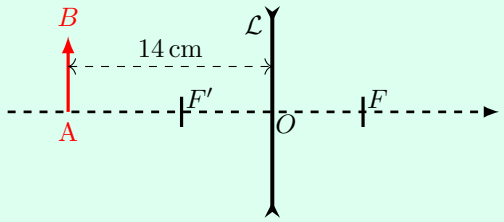
Q20. On nous dit que le système possède un foyer image. Il s'agit du point

(a). F
(b). D
(c). E
(d). C

✓ QCM : Lois de conjugaison et de grandissement ✗

Dans ce QCM, AB désigne un objet et $A'B'$ son image par la lentille.

Q21. Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8\,\text{cm}$, $\overline{OA'} =$

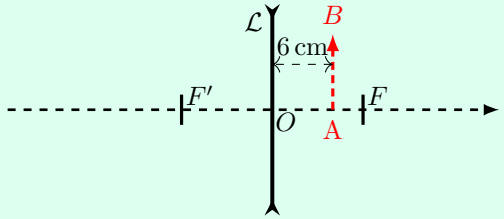


(a). 5,1 cm
(b). −18,7 cm
(c). 18,7 cm
(d). −5,1 cm

Q22. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). 0,36
(b). −1,75
(c). 1,75
(d). 0,57

Q23. Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8\,\text{cm}$, $\overline{F'A'} =$

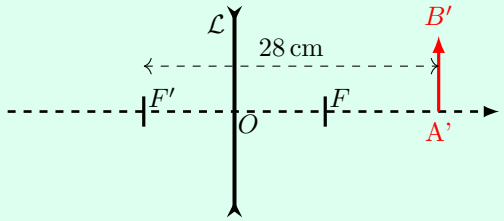


(a). 24 cm
(b). 32 cm
(c). 16 cm
(d). 4,6 cm

Q24. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). −4
(b). −3
(c). 4
(d). 3

Q25. Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8\,\text{cm}$, $\overline{FA} =$

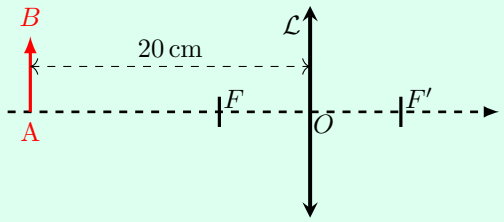


(a). −5,3 cm
(b). 5,3 cm
(c). 2,3 cm
(d). −2,3 cm

Q26. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). −1,5
(b). 1,5
(c). 2,5
(d). 3,5

Q27. Sur le schéma ci-contre avec $f' = +8\,\text{cm}$, $\overline{OA'} =$

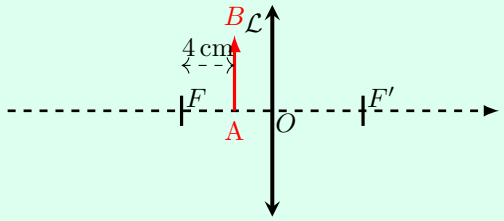


(a). 13,3 cm
(b). 5,7 cm
(c). 8,5 cm
(d). −2,1 cm

Q28. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). −0,67
(b). −0,4
(c). −2,5
(d). −1,5

Q29. Sur le schéma ci-contre avec $f' = +8\,\text{cm}$, $\overline{F'A'} =$

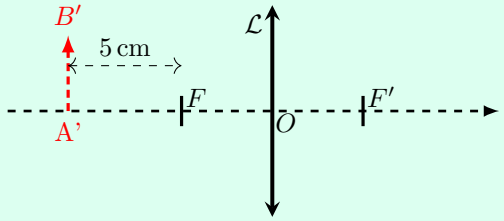


(a). 16 cm
(b). −16 cm
(c). 2 cm
(d). −2 cm

Q30. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). −0,25
(b). 2
(c). −4
(d). −2

Q31. Sur le schéma ci-contre $f' = +8\,\text{cm}$, $\overline{FA} =$



(a). 11 cm
(b). 3 cm
(c). 12,8 cm
(d). −5 cm

Q32. Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

(a). 2,6
(b). 1,7
(c). −1,6
(d). 0,61

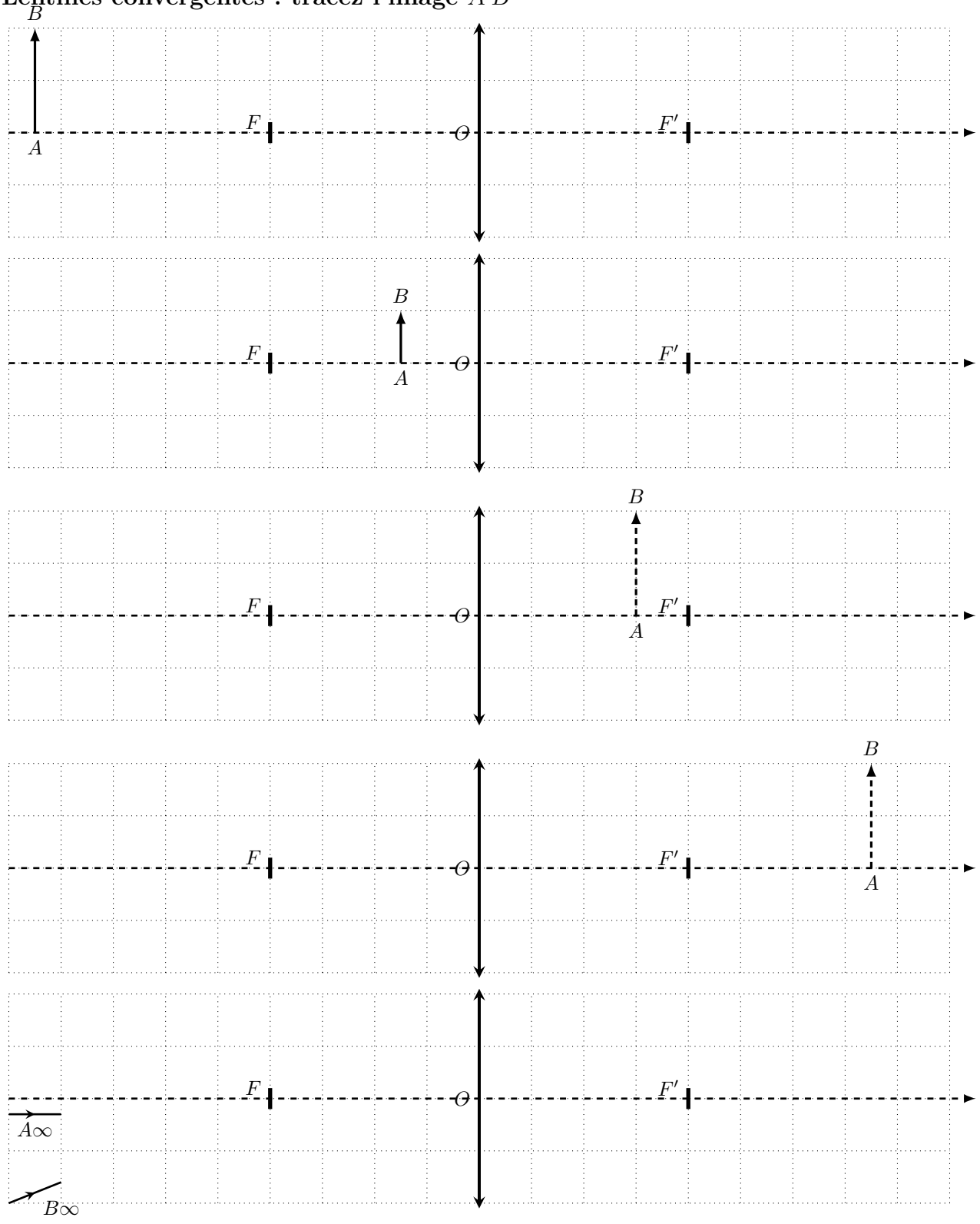
O2. Systèmes optiques

Exercices

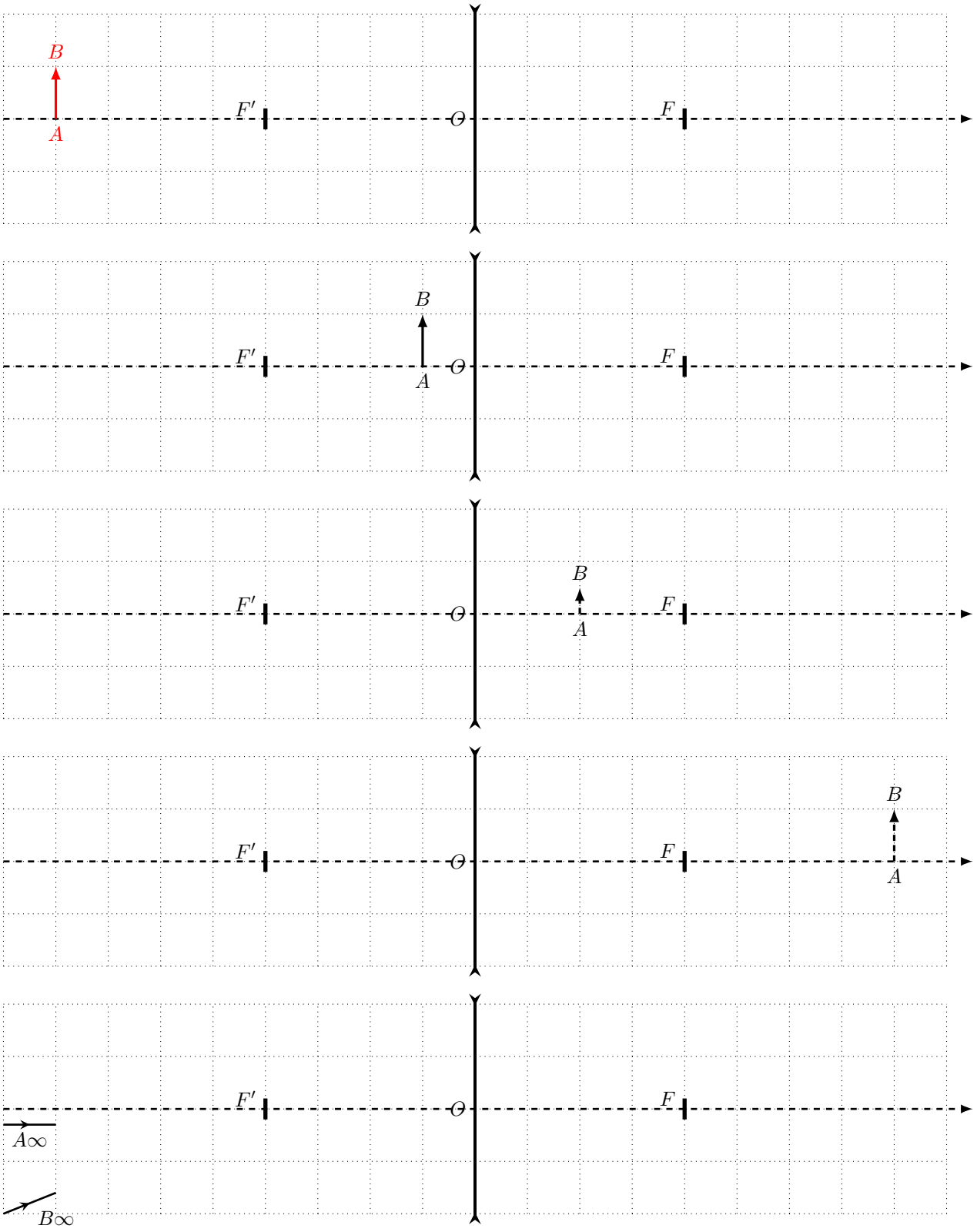
réponses page 108

Exercice O2.1 : Exercices graphiques sur les lentilles [**]

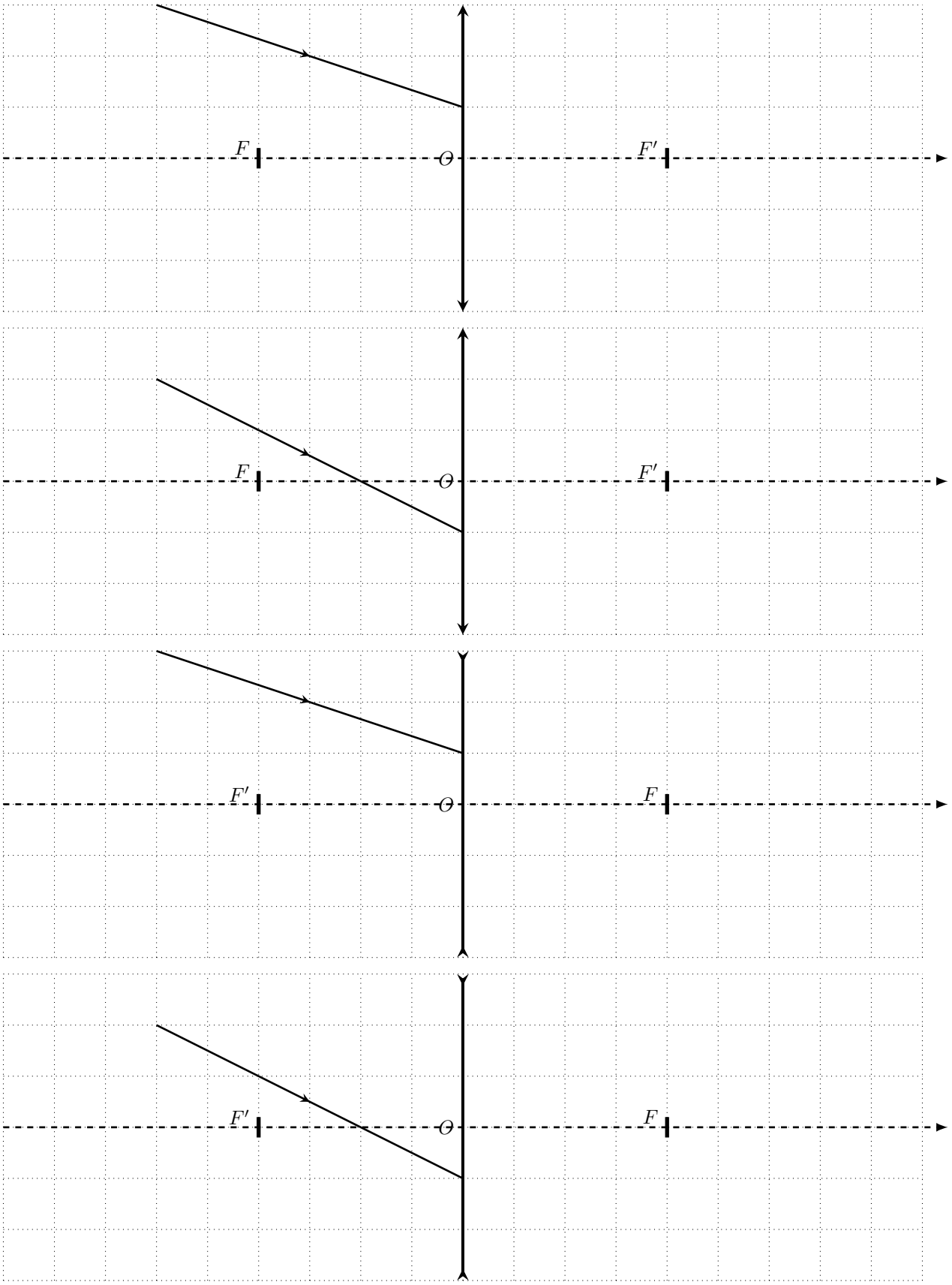
Lentilles convergentes : tracez l'image $A'B'$



Lentilles divergentes : tracez l'image $A'B'$

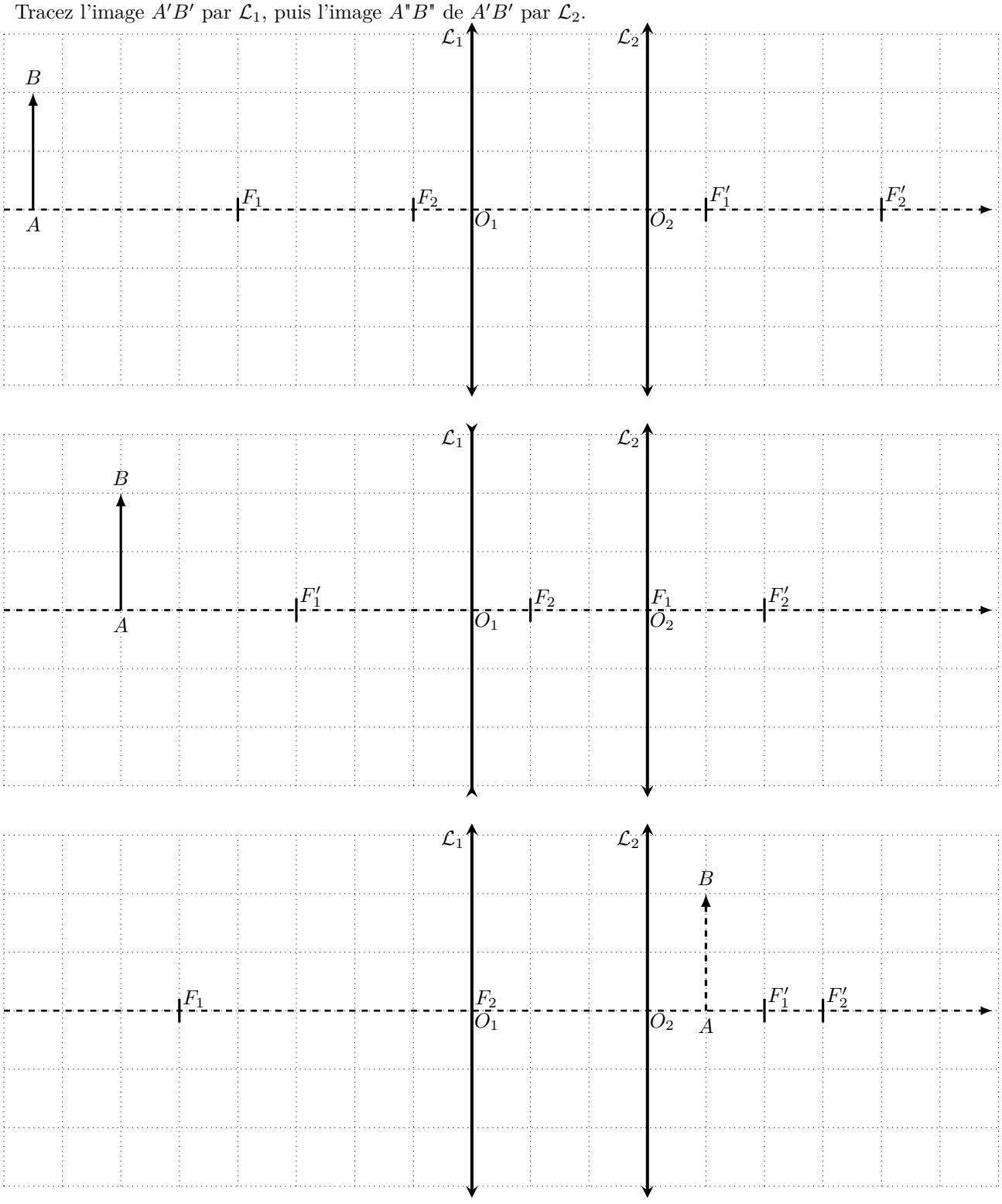


Tracez le rayon émergent



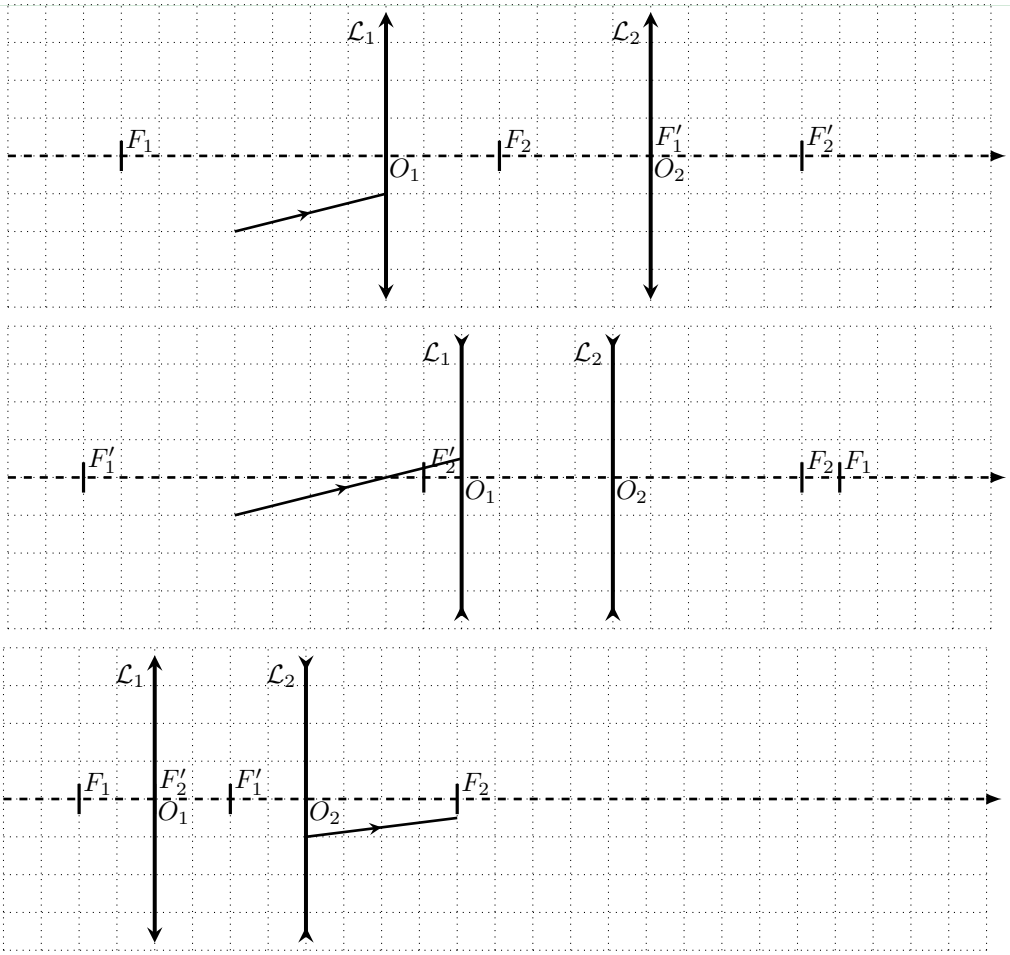
Exercice O2.2 : Image à travers deux lentilles [**]

Tracez l'image $A'B'$ par $\mathcal{L}_1$, puis l'image $A"B"$ de $A'B'$ par $\mathcal{L}_2$.



Exercice O2.3 : Tracés de rayons à travers deux lentilles [***]

Tracez le trajet complet du rayon lumineux à travers chaque système.



Exercice O2.4 : Diamètre apparent du Soleil [*]

Le Soleil a un rayon égal à 696×10^3 km. Calculez son diamètre apparent vu depuis la Terre, soit à une distance égale à 150×10^6 km.
Indication : faites un schéma, puis de la trigo pour trouver le rayon apparent, puis le diamètre.

Exercice O2.5 : Configuration de Silberman [*]

On considère un abjet réel AB dont on veut faire sur un écran une image $A'B'$ de même dimensions.

1. Justifier le signe de γ ; en déduire la valeur de γ.
2. En déduire une relation entre $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$. En la renvoyant dans la loi de conjugaison de Descartes, exprimez $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ en fonction de f'.
3. Faites un dessin de cette configuration.

Exercice O2.6 : Vidéoprojecteur [*]

On dispose d'une lentille de focale $f' = 4\,\text{cm}$. On souhaite projeter sur un écran une image d'un objet avec un grandissement égal à -80.

1. Calculez la distance lentille-écran nécessaire. *Indication* : calculez d'abord $\overline{F'A'}$, puis $\overline{OA'}$.
2. Calculez la distance lentille-objet.

Exercice O2.7 : Obtention d'un grandissement donné [**]

On veut projeter un objet sur un mur ; l'image doit être renversée et 12 fois plus grande.
On dispose d'une lentille de focale $f' = 8\,\text{cm}$. Calculez la distance $\overline{OA}$ nécessaire, puis la distance objet-écran.

Exercice O2.8 : Image par un doublet [**]

On considère un doublet formé de deux lentilles :

— la lentille L_1 de distance focale $f'_1 = -12\,\text{cm}$ placée en O_1

— la lentille L_2 de distance focale $f'_2 = 12\,\text{cm}$ placée en O_2 telle que $\overline{O_2O_1} = +5\,\text{cm}$

Indication : faites un schéma. Dans la suite, quand on demande la position d'un point, vous pouvez la repérer à partir de O_1 ou de O_2 ou de tout autre point fixe.

1. On considère un objet AB de taille 6 cm placé 31 cm **avant** la lentille L_1. Calculez la position et la taille de l'image finale de AB par ce doublet.
2. On considère un objet A situé à l'infini ; calculez la position de son image par le doublet. Que représente ce point ?

Exercice O2.9 : Objet d'un doublet [**]

On considère un doublet formé de deux lentilles :

— la lentille L_1 de distance focale $f'_1 = 10\,\text{cm}$ placée en O_1

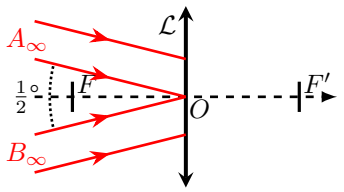
— la lentille L_2 de distance focale $f'_2 = 3\,\text{cm}$ placée en O_2 telle que $\overline{O_2O_1} = 12\,\text{cm}$

Indication : faites un schéma. Dans la suite, quand on demande la position d'un point, vous pouvez la repérer à partir de O_1 ou de O_2 ou de tout autre point fixe.

1. On veut obtenir une image finale $A'B'$ de taille 1,5 mm sur un écran placé 13 mm après la lentille L_2. Calculez la position et la taille de l'objet initial du doublet qui donne cette image.
2. On veut maintenant obtenir une image A' située à l'infini ; calculez la position de l'objet du doublet. Que représente ce point ?

Exercice O2.10 : Projection du soleil [*]

Le soleil est un considéré à l'infini ; son diamètre apparent vaut $\frac{1}{2}°$. On forme l'image du soleil sur un écran à l'aide d'une lentille de distance focale 10 cm.
Calculez le diamètre de l'image.



Exercice O2.11 : Rétroprojecteur [***]

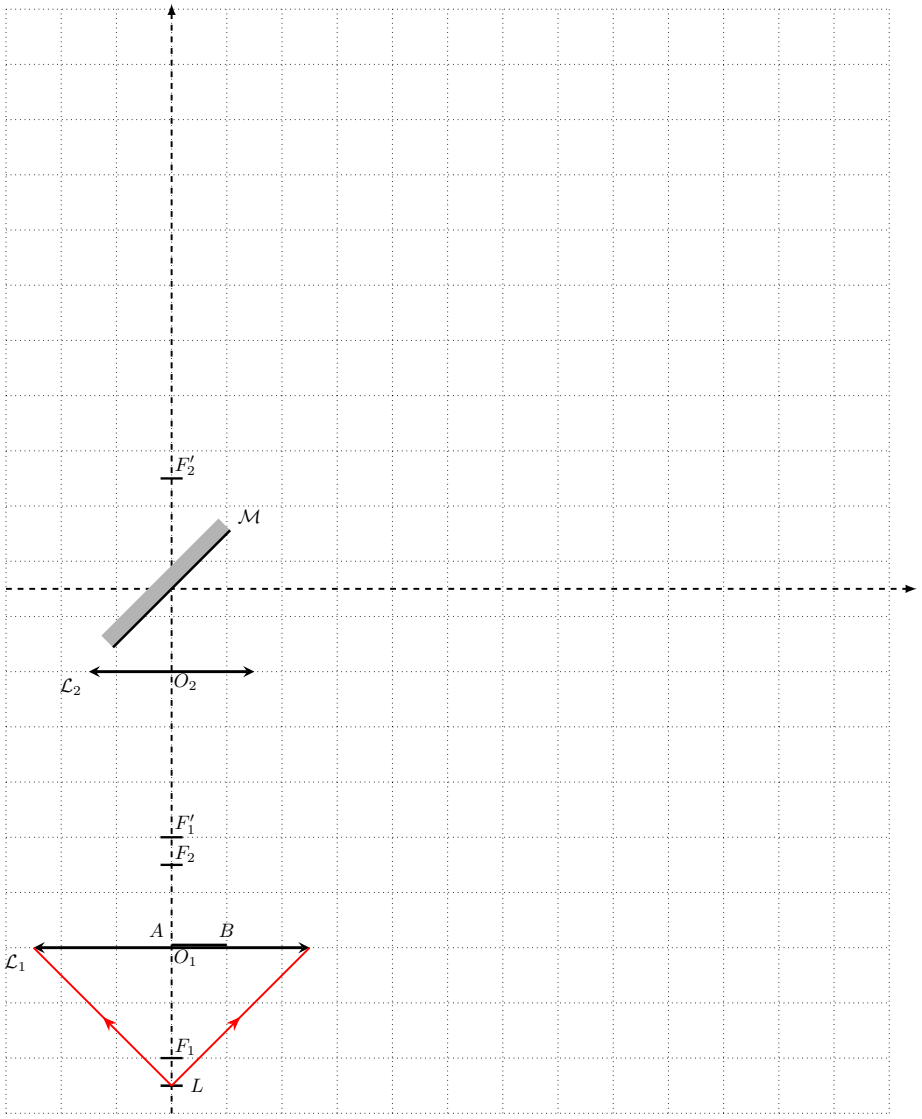
Un rétroprojecteur est constitué de :

— une lampe L

— une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ appelée *condenseur* horizontale, sur laquelle on pose un objet AB (le transparent à projeter)

— une lentille de projection $\mathcal{L}_2$

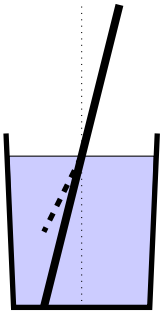
— un miroir $\mathcal{M}$ incliné à 45° qui envoie l'image sur un écran

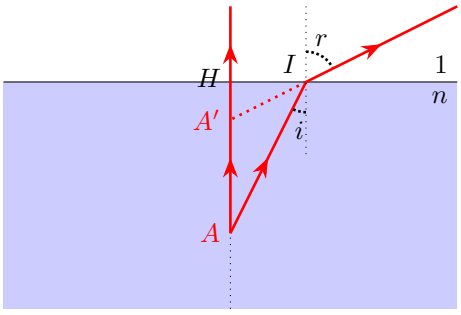


1. Dessinez l'image $A'B'$ de AB par la lentille de projection, puis l'image finale $A''B''$ donnée par le miroir. Déduisez-en où on doit placer l'écran.
2. On a tracé les deux rayons extrêmes issus de la lampe et frappant le condenseur. Tracez le trajet de ces rayons jusqu'à l'écran et déduisez-en la portion de l'écran qui est éclairée.

Exercice O2.12 : La paille dans le verre [***]

Quand on place une paille dans un verre, et qu'on la regarde de dessus, on la voit « cassée » (figure de gauche). Considérons une paille penchée. Au-dessus du dioptre, il y a de l'air d'indice 1 ; au-dessous, il y a de l'eau d'indice $n = 1{,}33$.





On part d'abord d'un point A de la paille (figure de droite). Ce point émet des rayons vers le dioptre : c'est un

objet.

1. Que dire du rayon issu de A et frappant le dioptre orthogonalement ?
2. Soit un rayon issu de A et faisant un angle i avec la normale au dioptre. Soit I le point où il frappe le dioptre ; il ressort avec un angle r.
   On appelle H le projeté orthogonal de A sur le dioptre.
   Par une relation de trigonométrie, relier i, AH et HI.
3. Soit A' le point où le rayon émergent coupe AH. Relier r, $A'H$ et HI.
4. Écrivez la relation de Descartes au point I.
5. On se place dans le cas de petits angles : $\tan\theta \approx \theta$ et $\sin\theta \approx \theta$. À partir des 3 équations précédentes, montrez que $A'H = \frac{AH}{n}$.
6. En déduire pourquoi la paille apparaît cassée.

O2. Systèmes optiques

TDs numériques

réponses page 116

TD numérique : Lentille plan-convexe

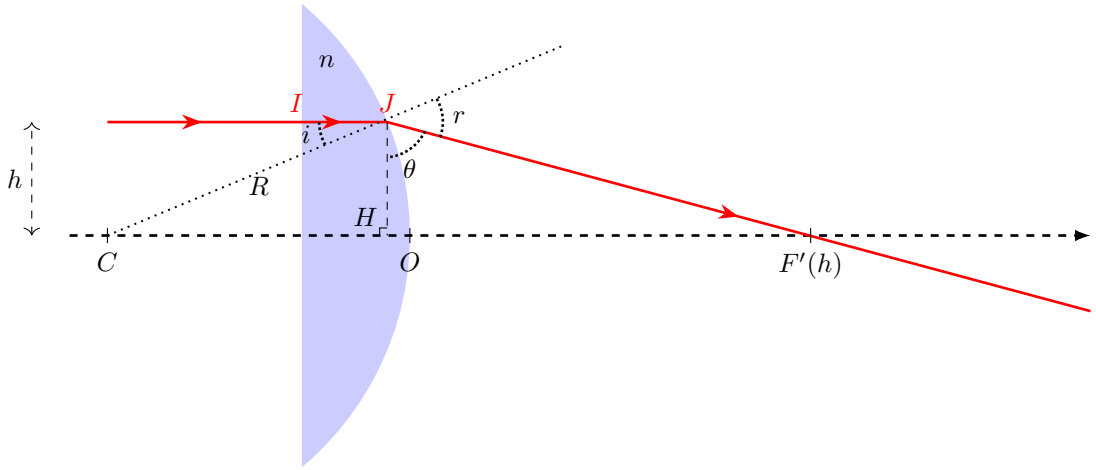
plot

On s'intéresse à une lentille plan-convexe, c'est-à-dire une portion de verre d'indice n comprise entre un plan et une sphère de rayon R. Les notations sont placées ci-dessous :

— l'axe optique est perpendiculaire au plan

— le centre C de la sphère de rayon R est situé sur l'axe optique

— on repère les distances par rapport au sommet O de la sphère



Un rayon incident arrive parallèle à l'axe à une distance h de l'axe, et entre dans la lentille. Après deux réfractions en I puis en J, il ressort et coupe l'axe en un point noté $F'(h)$. Le but de ce TD est de trouver la position de $F'(h)$, plus précisément de déterminer $f'(h) = \overline{OF'(h)}$, afin de voir si elle dépend de h ou pas (condition de stigmatisme).

1. Justifiez l'allure du dessin, en particulier ce qui se passe en I et en J.
2. En faisant de la trigonométrie dans le triangle CHJ, reliez l'angle i à h et R.
3. Reliez l'angle r à i et n.
4. Reliez l'angle θ à r, i et $\frac{\pi}{2}$.
5. Exprimez la distance $\overline{HF'}$ en fonction de h et θ, et la distance $\overline{CH}$ en fonction de R et i. Déduisez-en l'expression de $f' = \overline{OF'}$ en fonction de h, i, θ et R.
6. On considère une lentille telle que $n = 1{,}52$ et $R = 12\,\text{cm}$.
   Dans un fichier Python, importez `numpy` et `matplotlib.pyplot`, et définissez les constantes (en unité SI). Posez alors $h = 1\,\text{cm}$ et calculez successivement i, r, θ et f' à l'aide des formules des questions 2 à 5.
   Indication : la fonction arcsinus se calcule avec `np.arcsin`. De plus, Numpy travaille en radians ; on obtient π avec `np.pi`.
7. À l'aide des questions 3 et 2, justifiez que le rayon réfracté en J n'existe que si $h < h_{max} = \frac{R}{n}$.
   Calculez h_{max} dans le programme Python.
8. On va maintenant reprendre le même principe qu'à la question 6, mais en calculant directement les valeurs de f' correspondant à plein de valeurs de h possibles. Pour cela, au lieu d'initialiser `h` à 1 cm, créez-le comme un tableau de 100 ou 1000 valeurs espacées entre $0.0001 \times h_{max}$ et $0.9999 \times h_{max}$ à l'aide de la fonction `numpy.linspace` (on s'arrête avant h_{max}, car les arrondis risquent de le faire dépasser ; quant à $h = 0$, c'est l'axe, il y a des formes indéterminées).
   Re-calculez alors i, r, θ et f', et observez ce qui se passe : vous obtenez directement pour chacun d'eux un tableau de valeurs correspondant à chaque valeur de h.
9. Tracez alors $f'(h)$, c'est-à-dire un graphique Matplotlib avec h en abscisses et f' en ordonnées.
10. Sur le graphique précédent, mesurez :

— la distance focale de cette lentille dans les conditions de Gauss, notée f'_0
— la valeur maximale de h pour laquelle f' ne diffère de la valeur précédente que par moins de 5 %

Indication : vous pouvez ajouter une grille avec `plt.grid()` pour mieux lire les valeurs.

Quelle aberration a-t-on mis en évidence ici ?

11. En réalité, l'indice du verre dépend de la longueur d'onde selon la relation $n(\lambda) = 1{,}4989 + \frac{4550}{\lambda^2}$ avec λ en nm.

    Créez une fonction `n(l)` qui calcule l'indice à la longueur d'onde donnée en argument en nanomètres.

12. On va alors calculer la distance focale dans les conditions de Gauss (on prendra par exemple $h = 0{,}1$ mm) pour différentes longueurs d'ondes.

    Pour cela, créez un tableau de longueurs d'ondes parcourant tout le spectre visible, puis, par calculs successifs, calculez les distances focales dans les conditions de Gauss correspondantes, notées f'_0. Tracez $f'_0(\lambda)$ et commentez : quelle aberration a-t-on mis en évidence ?

13. En reprenant les équations des questions 2 à 5 et en les simplifiant pour de petits angles, montrez que $f'_0 = \frac{R}{n-1}$.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
C'est le point où se coupent les rayons incidents ; les rayons émergents se coupent sur l'image.
Q2.(a) ET (b) ET (c)
Si l'objet est réel, le faisceau incicent diverge car il provient de ce point.
Q3.(b)
C'est la définition du foyer image.
Q4.(b)
C'est la définition du foyer objet.
Q5.(b) ET (c)
Q6.(a)
Ce n'est vrai que si le système est aplanétique.
Q7.(d)
Q8.(b)
Q9.(a)
Q10.(b)

Réponses au QCM : Réel ou virtuel ?

Q11.(c)
Q12.(a)
Q13.(b)
Attention, les rayons incidents sont à droite et les rayons émergents à gauche, ici.
Q14.(d)
Ici, la face d'entrée et la face de sortie sont du même côté.
Q15.(d)

Réponses au QCM : Propriétés des systèmes optiques

Q16.(b)
C'est l'intersection des rayons émergents…peu importe la notation !
Q17.(b)
B' est l'objet et B l'image.
Q18.(a)
L'objet $A'B'$ est orthogonal à l'axe, l'image AB ne l'est pas.
Q19.(d)
Le rayon émergent bleu est parallèle à l'axe, donc le rayon incident bleu passe par le foyer objet, qui est donc le point C où il coupe l'axe.
Q20.(c)
Le rayon incident vert est parallèle à l'axe, donc le rayon émergent vert passe par le foyer objet, qui est donc le point E où il coupe l'axe (après l'avoir prolongé).

Réponses au QCM : Lois de conjugaison et de grandissement

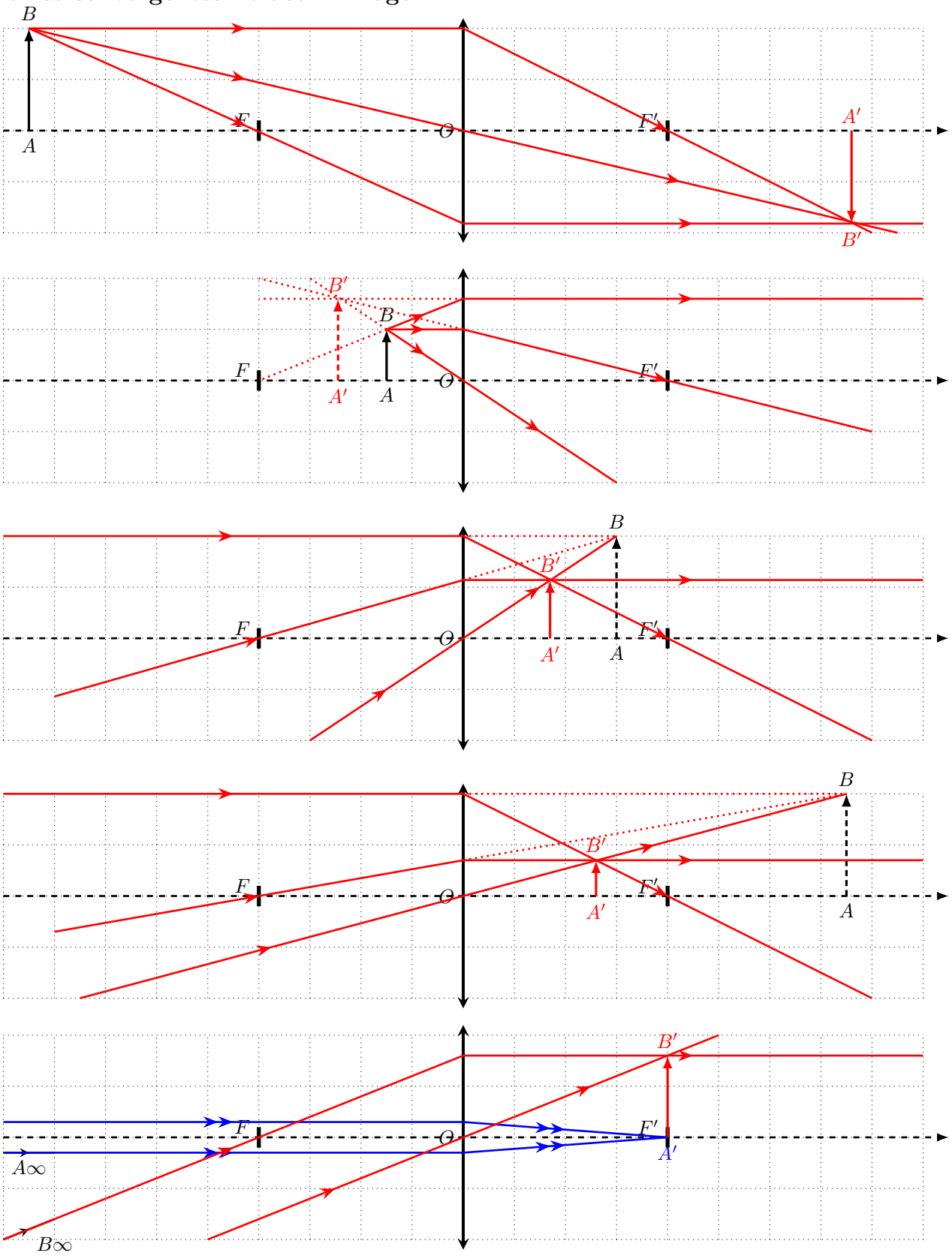
Q21.(d)
Attention aux signes : $\overline{OA} = -14\,\text{cm}$.
Q22.(a)
Q23.(b)
Ici $\overline{FA} = -2\,\text{cm}$ puis on applique la loi de conjugaison de Newton ; ou bien $\overline{OA} = +6\,\text{cm}$ et on trouve $\overline{OA'}$ puis on utilise la relation de Chasles.
Q24.(c)
Q25.(c)
Les lois de Newton sont ici les plus rapides.
Q26.(d)
Q27.(a)

Attention aux signes : $\overline{OA} = -20\,\text{cm}$.
Q28.(a)
Q29.(b)
Ici, lois de Newton.
Q30.(b)
Q31.(b)
Par exemple, $\overline{OA'} = -13\,\text{cm}$ donc $\overline{OA} = -5\,\text{cm}$ donc $\overline{FA} = +3\,\text{cm}$ par la relation de Chasles.
Q32.(a)

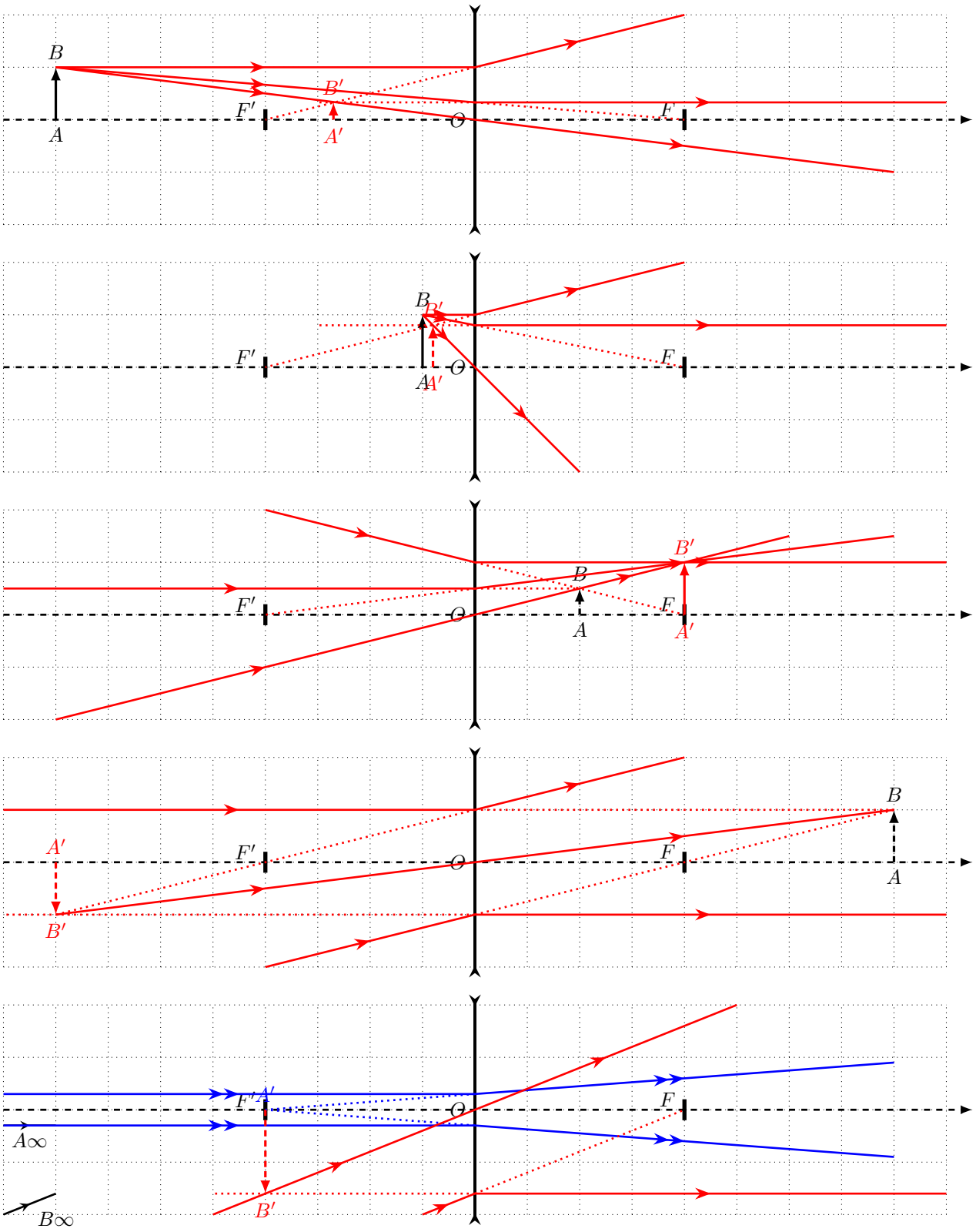
Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice O2.1 : Exercices graphiques sur les lentilles [**]

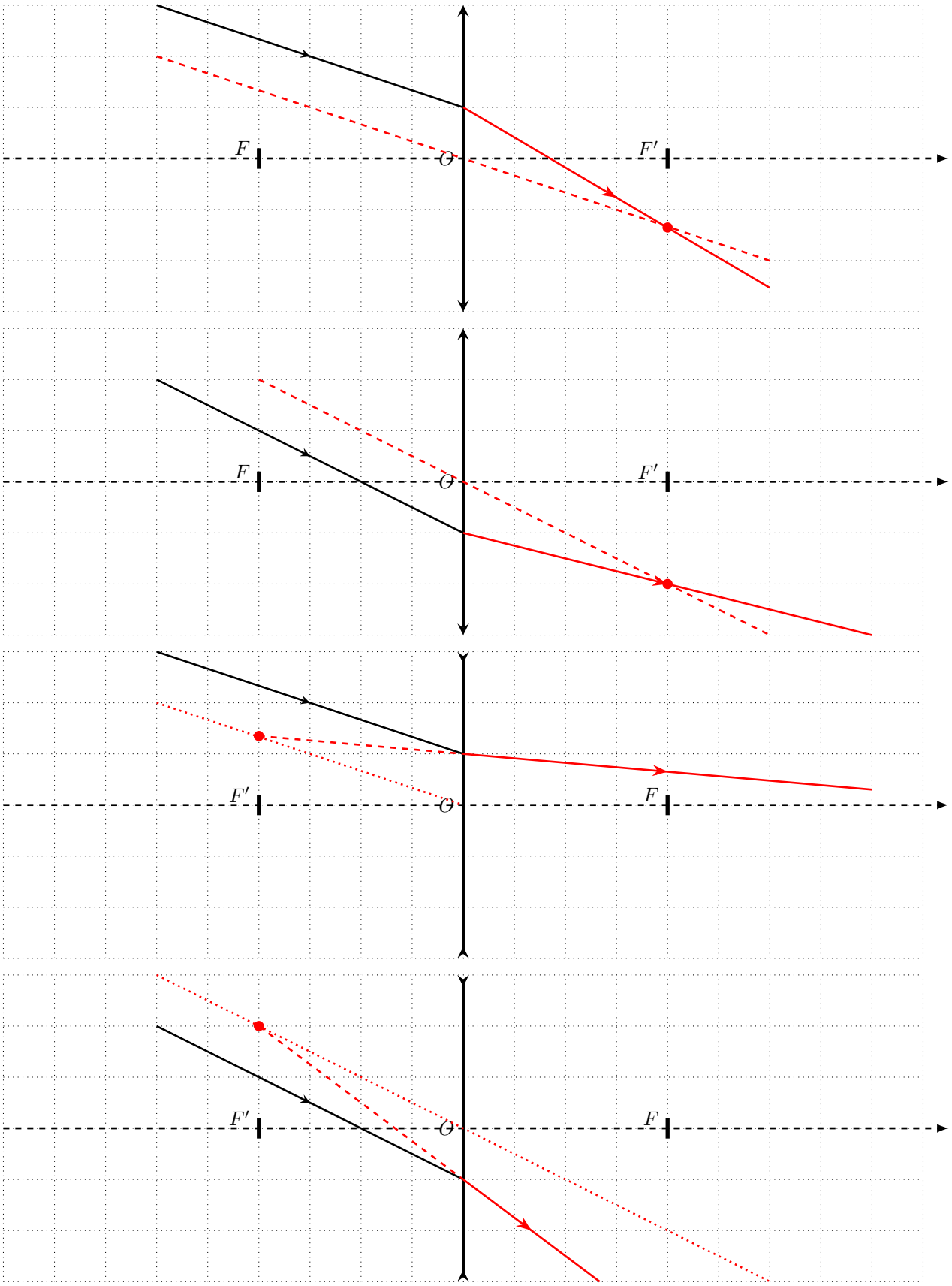
Lentilles convergentes : tracez l'image $A'B'$



Lentilles divergentes : tracez l'image $A'B'$

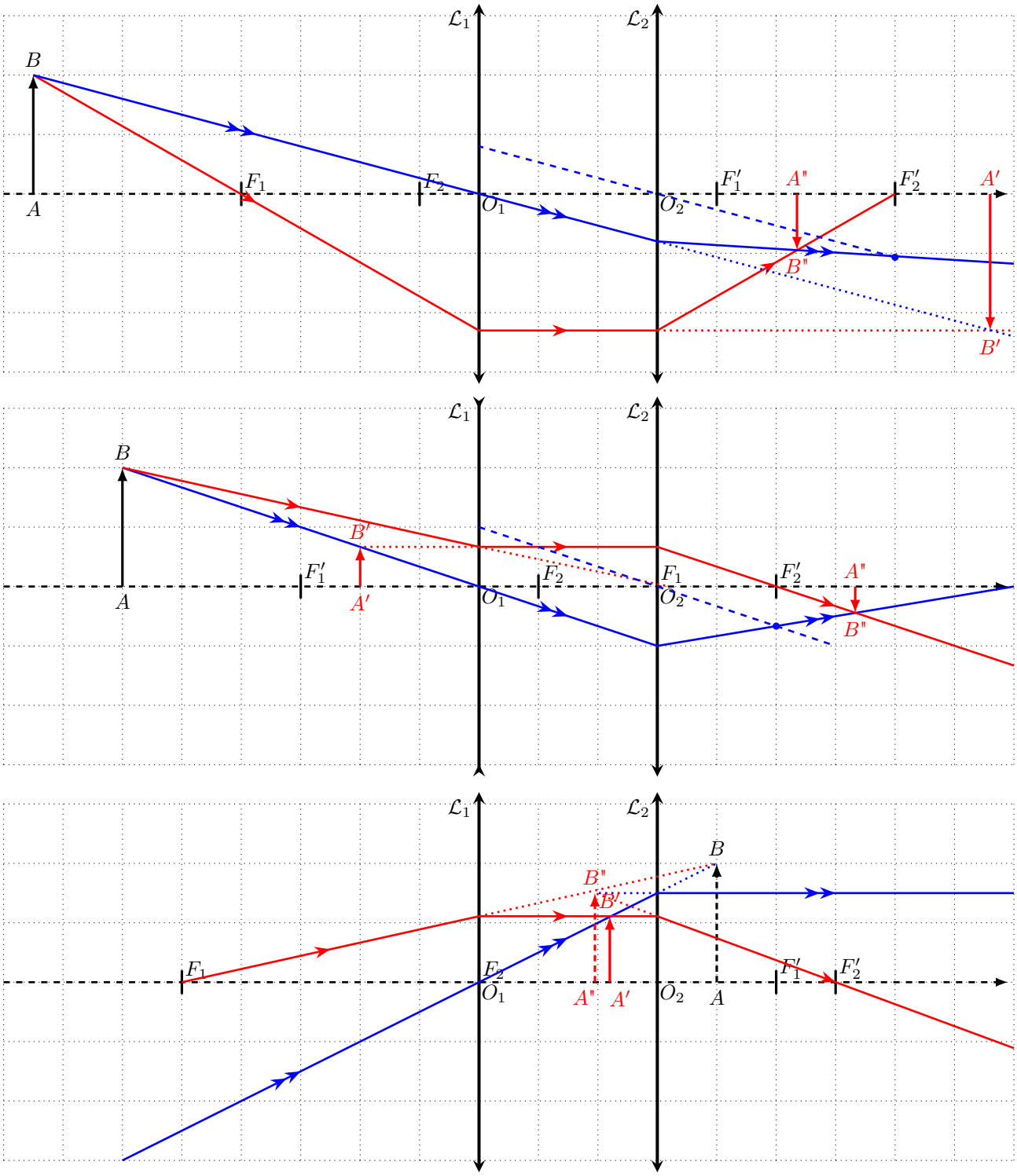


Tracez le rayon émergent

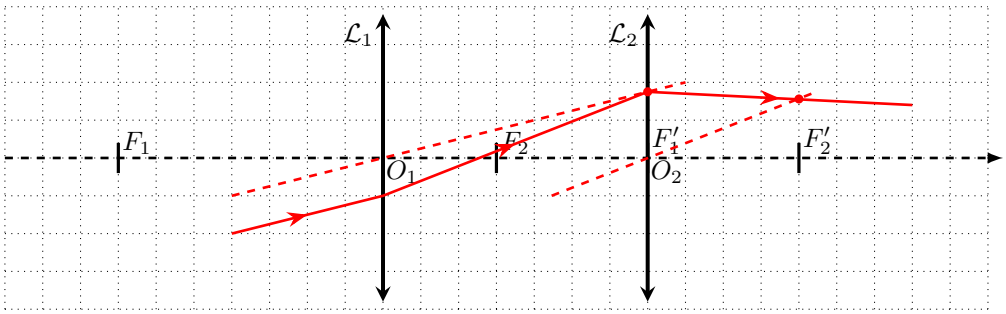


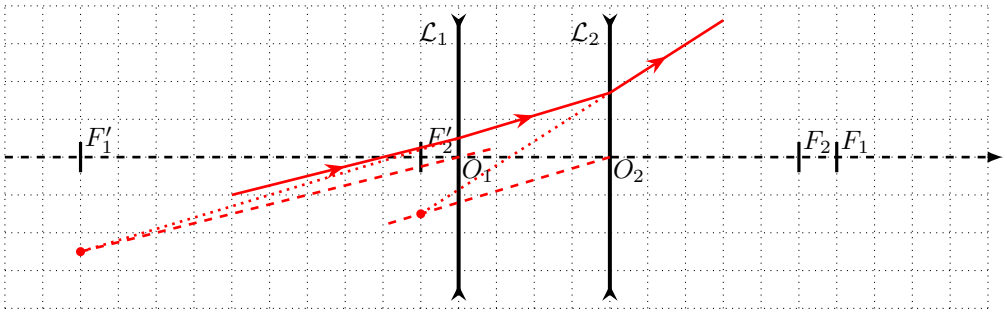
Corrigé de l'exercice O2.2 : Image à travers deux lentilles [**]

J'ai dessiné les deux rayons de couleur différentes pour distinguer à qui appartiennent les traits de construction.

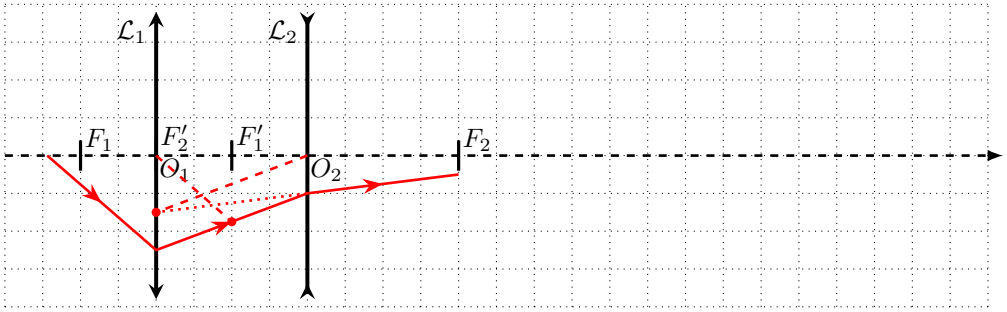


Corrigé de l'exercice O2.3 : Tracés de rayons à travers deux lentilles [***]

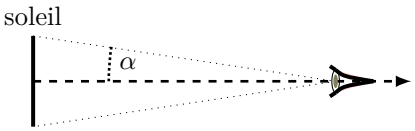




Pour remonter à l'origine d'un rayon, on applique à peu près la même technique, mais à l'envers :



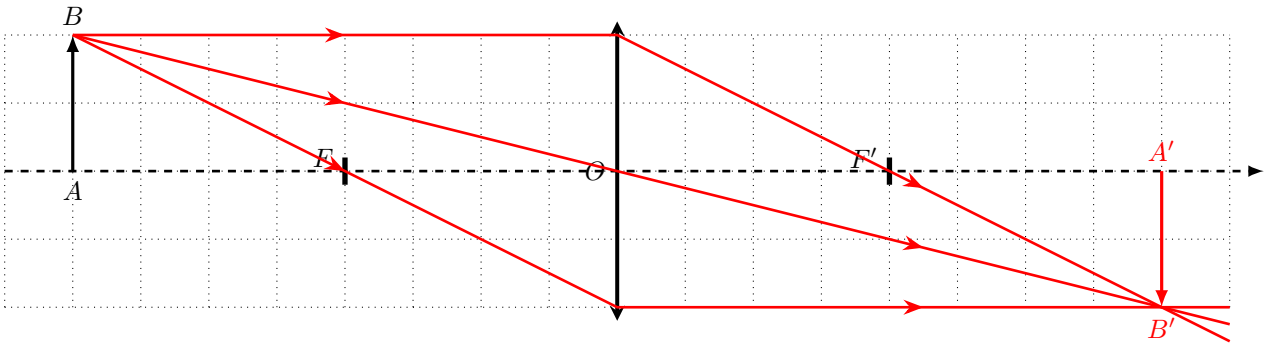
Corrigé de l'exercice O2.4 : Diamètre apparent du Soleil [*]



Par trigonométrie : $\tan\alpha = \frac{696\times10^3}{150\times10^6}$ donc le diamètre apparent vaut $2\alpha = 0{,}53°$.

Corrigé de l'exercice O2.5 : Configuration de Silberman [*]

1. L'objet est réel donc $\overline{OA} < 0$; l'image est réelle (sur un écran) donc $\overline{OA'} > 0$; par la loi de grandissement de Descartes, on en déduit que $\gamma < 0$. Comme l'image a la même taille que l'objet, $|\gamma| = 1$ donc $\gamma = -1$.
2. On en déduit que $\overline{OA'} = -\overline{OA}$ par la loi de grandissement de Descartes. En renvoyant dans la relation de conjugaison : $\frac{1}{-\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ donc $\frac{-2}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ d'où $\overline{OA} = -2f'$ et donc $\overline{OA'} = 2f'$; on a aussi $\overline{AA'} = 4f'$. On constate que la lentille doit être convergente ($f' > 0$).
3.



Corrigé de l'exercice O2.6 : Vidéoprojecteur [*]

1. Par les relations de Newton : $\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{-f'}$ donc $\overline{F'A'} = -\gamma f' = 3{,}2\,\text{m}$ puis $\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = 3{,}24\,\text{m}$
2. Par les relations de grandissement de Descartes on trouve $\overline{OA} = -4{,}05\,\text{cm}$

Corrigé de l'exercice O2.7 : Obtention d'un grandissement donné [**]

Pensez aux lois de Newton ! $\gamma = -12 = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$ donc $\overline{FA} = -\frac{f'}{12} = -0{,}67\,\text{cm}$. On en déduit par Chasles que $\overline{OA} = -8{,}7\,\text{cm}$.

Par la loi du grandissement de Descartes : $\overline{OA'} = 104\,\text{cm}$ donc la distance objet-écran vaut 112,7 cm.

Corrigé de l'exercice O2.8 : Image par un doublet [**]

1. On note $AB \overset{L_1}{\to} A_1B_1 \overset{L_2}{\to} A_2B_2$. Alors $\overline{O_1A} = -31\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_1A_1} = \frac{1}{\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}}} = \frac{1}{\frac{1}{-12} + \frac{1}{-31}} = -8{,}65\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_1 = \frac{-8{,}65}{-31} = 0{,}279$ donc $\overline{A_1B_1} = \gamma_1 \overline{AB} = 1{,}67\,\text{cm}$.

   Par la relation de Chasles : $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -13{,}65\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_2A_2} = \frac{1}{\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{-13{,}65}} = 99{,}2\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_2 = -7{,}27$ donc $\overline{A_2B_2} = -12{,}2\,\text{cm}$.
2. On note encore $A \overset{L_1}{\to} A_1 \overset{L_2}{\to} A_2$. Comme A est à l'infini, A_1 est en F_1' donc $\overline{O_1A_1} = f_1' = -12\,\text{cm}$. Par la relation de Chasles : $\overline{O_2A_1} = -17\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_2A_2} = \frac{1}{\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{-17}} = 40{,}8\,\text{cm}$.

   Ce point est l'image de l'infini par le système $\{L_1 + L_2\}$, c'est donc le foyer image de ce système.

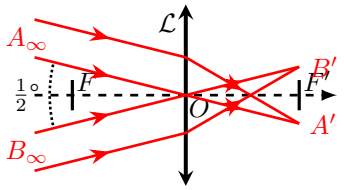
Corrigé de l'exercice O2.9 : Objet d'un doublet [**]

1. On note $EG \overset{L_1}{\to} CD \overset{L_2}{\to} A'B'$. Alors $\overline{O_2A'} = 1{,}3\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_2C} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_2C}} - \frac{1}{f_2'}} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}3} - \frac{1}{3}} = 2{,}29\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_1 = \frac{1{,}3}{2{,}29} = 0{,}57$ donc $\overline{CD} = \frac{\overline{A'B'}}{\gamma_1} = 2{,}65\,\text{mm}$.

   Par la relation de Chasles : $\overline{O_1C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C} = 14{,}29\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_1E} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1C}} - \frac{1}{f_1'}} = \frac{1}{\frac{1}{14{,}29} - \frac{1}{10}} = -33{,}3\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_1 = -0{,}43$ donc $\overline{A_2B_2} = -6{,}2\,\text{mm}$.
2. On note $C \overset{L_1}{\to} B \overset{L_2}{\to} A'$. Comme A' est à l'infini, B est en F_2 donc $\overline{O_2B} = -f_2' = -3\,\text{cm}$. Par la relation de Chasles : $\overline{O_1B} = 9\,\text{cm}$ donc par la loi de conjugaison de Descartes $\overline{O_1C} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1B}} - \frac{1}{f_1'}} = \frac{1}{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}} = 90\,\text{cm}$. Ce point est l'objet donnant par le système $\{L_1 + L_2\}$ une image à l'infini, c'est donc le foyer objet de ce système ; il est virtuel.

Corrigé de l'exercice O2.10 : Projection du soleil [*]

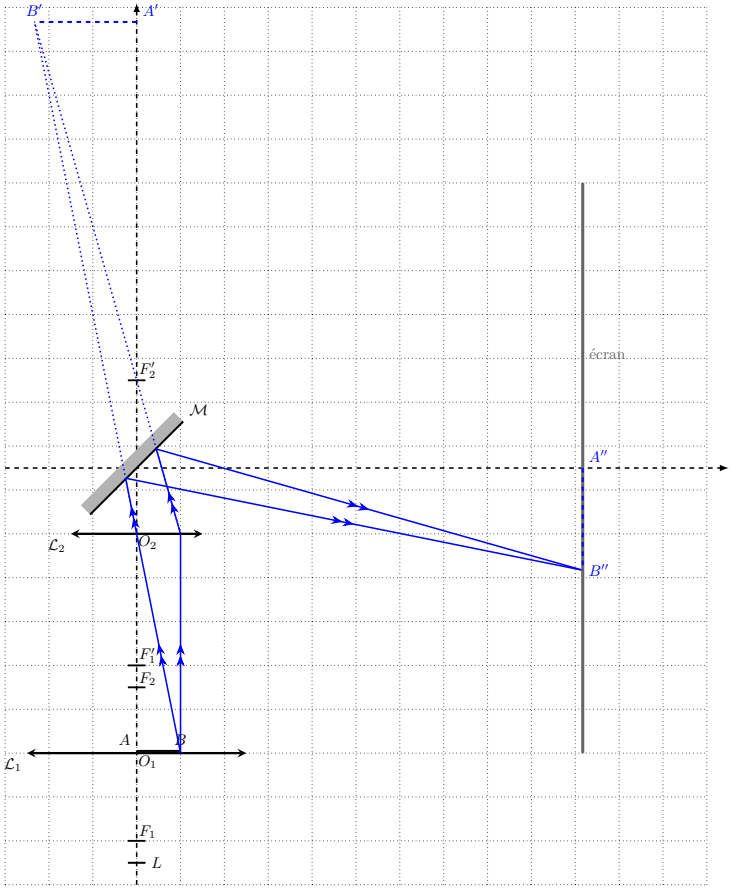
L'image d'un point à l'infini se situe dans le plan focal image ; de plus, tout rayon passant par le centre de la lentille n'est pas dévié.



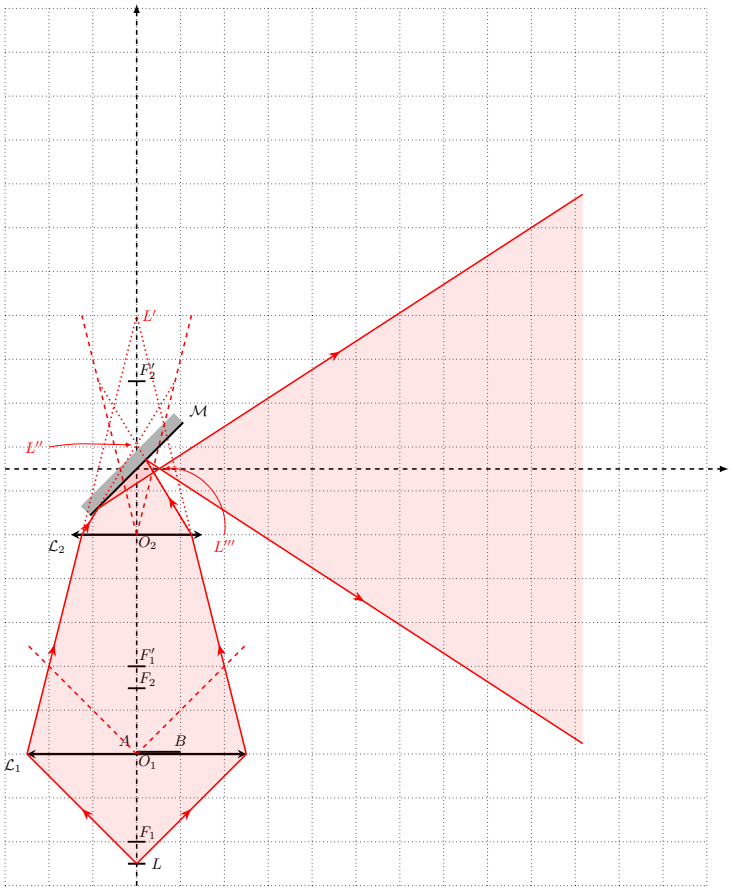
Dans le triangle $OF'A'$: $\tan\frac{1}{4}° = \frac{F'A'}{OF'}$ d'où on tire $F'A' = 0{,}436\,\text{mm}$. De même, on a $F'B' = 0{,}436\,\text{mm}$ donc le diamètre de l'image vaut $A'B' = 0{,}87\,\text{mm}$.

Corrigé de l'exercice O2.11 : Rétroprojecteur [***]

1. Pour l'image $A'B'$ de AB par $\mathcal{L}_2$, c'est un tracé classique ; ensuite, $A''B''$ est le symétrique de $A'B'$ par rapport au miroir.



2. On trace ce que deviennent les deux premiers rayons par la technique du rayon parallèle passant par le centre optique. On trouve ainsi L' image de L par $\mathcal{L}_1$, puis son image L'' par $\mathcal{L}_2$, qui est derrière le miroir. Le miroir en donne une image L''' devant lui, et on fait ressortir les rayons par ce point, jusqu'à l'écran.



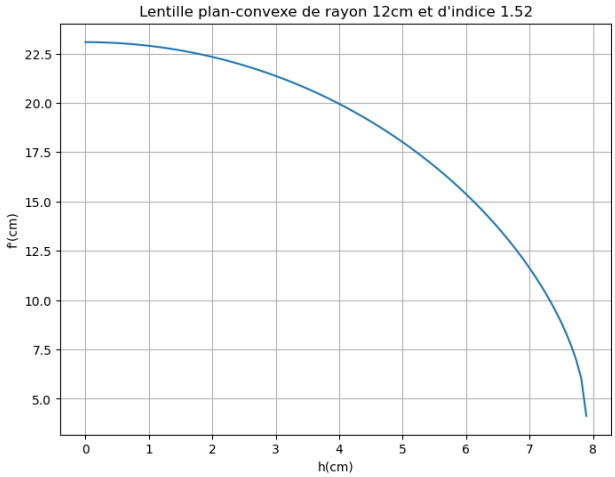
Corrigé de l'exercice O2.12 : La paille dans le verre [***]

1. Il n'est pas dévié.
2. Dans le triangle AHI, l'angle en A vaut i (angles alternes-internes) ; donc $\tan i = \frac{HI}{AH}$
3. C'est le même principe dans le triangle $A'HI$: $\tan r = \frac{HI}{A'H}$
4. $n \sin i = \sin r$
5. On a alors $HI = i.AH = r.A'H$ donc $A'H = \frac{i}{r} AH$ or $n.i = r$ donc $A'H = \frac{AH}{n}$
6. $A'H$ ne dépend pas de i : tous les rayons se coupent en A', qui est l'image de A à travers le dioptre. On verra donc chaque point de la paille à une distance du dioptre divisée par n.

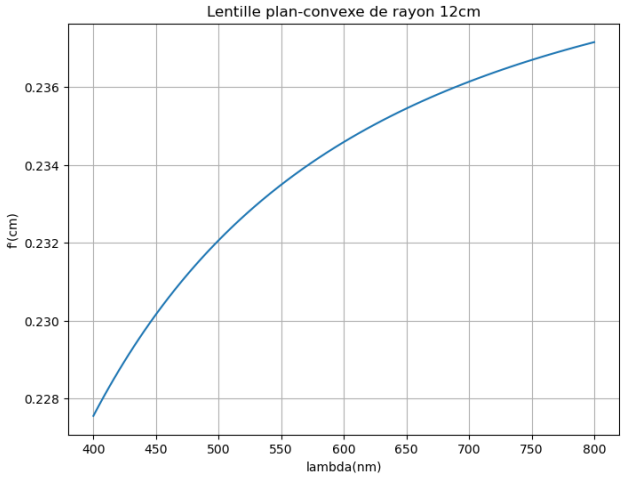
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Lentille plan-convexe

On trouve que $f' = \overline{OF'} = -R + R.\cos i + h.\tan\theta$ pour $0 \leq h \leq h_{max} = \frac{R}{n}$:



La distance focale dans les conditions de Gauss est la limite de f' lorsque h tend vers 0. On voit que quand les rayons sont plus loin de l'axe, la distance focale diminue : c'est l'aberration sphérique.



La distance focale dépend de la longueur d'onde : c'est l'aberration chromatique.

Chapitre 03 Systèmes de lentilles

Programme p.135

Conseils p.136

Cours p.118
- O3.A. Quelques conséquences des lois de conjugaison
- O3.B. La vision humaine
- O3.C. Exemple d'instruments optique

QCMs p.137

Exercices p.139

TDs numériques p.146

O3. Systèmes de lentilles

Cours

Nous avons vu dans le chapitre précédent les caractéristiques des systèmes optiques, et particulièrement des lentilles. Nous allons maintenant pouvoir combiner ces lentilles pour construire des systèmes plus complexes.

Dans tout ce chapitre, on supposera que les lentilles sont idéales, parfaitement stigmatiques, sans défauts. Cela est suffisant pour comprendre le fonctionnement général des systèmes étudiés ; mais dans la réalité, quand on voudra réaliser un système optique de qualité, il faudra tenir compte de ces défauts, sans que cela n'en change le principe général. Pour cela, on va le plus souvent remplacer une lentille par un ensemble de lentilles dont les défauts se compensent dans la configuration choisie, de manière à obtenir une image de bonne qualité. Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas de combinaison idéale de lentilles : chaque cas est différent et nécessite une étude particulière.

O3.A. Quelques conséquences des lois de conjugaison

Avant d'étudier des combinaisons de lentilles pour obtenir des instruments d'optique avancés, nous allons étudier un peu plus en détail quelques implications des lois de conjugaison et de grandissement pour une lentille.

A.1. Projection d'un objet sur un écran

Pour projeter un objet sur un écran, il faut en donner une image réelle, avec des caractéristiques qui dépendent de l'application recherchée. Nous allons donc commencer par étudier la position et la taille de l'image en fonction de la position de l'objet, pour les deux familles de lentilles.

Calcul : Place et taille de l'image d'une lentille convergente

Considérons une lentille convergente de centre O et de focale $f' > 0$; on va s'intéresser à la position et à la taille de l'image en fonction de la position où on place l'objet A de la lentille.
Pour cela : on va exprimer $\overline{OA'}$ et γ en fonction de la variable $\overline{OA}$. À l'aide des lois avec origine au centre :

- $\dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{f'} = \dfrac{f' + \overline{OA}}{f'.\overline{OA}}$ donc $\overline{OA'} = \dfrac{f'.\overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$
- $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, ce qui donne d'après l'égalité ci-dessus : $\gamma = \dfrac{f'}{f' + \overline{OA}}$

Pour tracer le tableau de variation de $\overline{OA'}$ et γ, il faut étudier le signe de leur dérivée :

- $\dfrac{\mathrm{d}\overline{OA'}}{\mathrm{d}\overline{OA}} = \dfrac{f'\left(f' + \overline{OA}\right) - f'.\overline{OA}.1}{(f' + \overline{OA})^2} = \dfrac{f'^2}{(f' + \overline{OA})^2} > 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\overline{OA}} = \dfrac{-f'}{(f' + \overline{OA})^2} < 0$ car $f' > 0$

On peut alors tracer le tableau de variations suivant, en ajoutant les valeurs particulières :

$\overline{OA}$	$-\infty$	$-2f'$	$-f'$	0	$+\infty$
$\overline{OA'}$	f' ↗	$2f'$ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	0 ↗ f'
γ	0 ↘	-1 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	1 ↘ 0
image	réelle agrandie renversée		réelle réduite renversée	virtuelle agrandie droite	virtuelle réduite droite
application	vidéoprojecteur,...		*appareil photo,...*	*loupe,...*	

Il est alors facile d'analyser ce tableau à l'aide de trois règles simples :

— l'image est réelle si et seulement si $\overline{OA'} > 0$

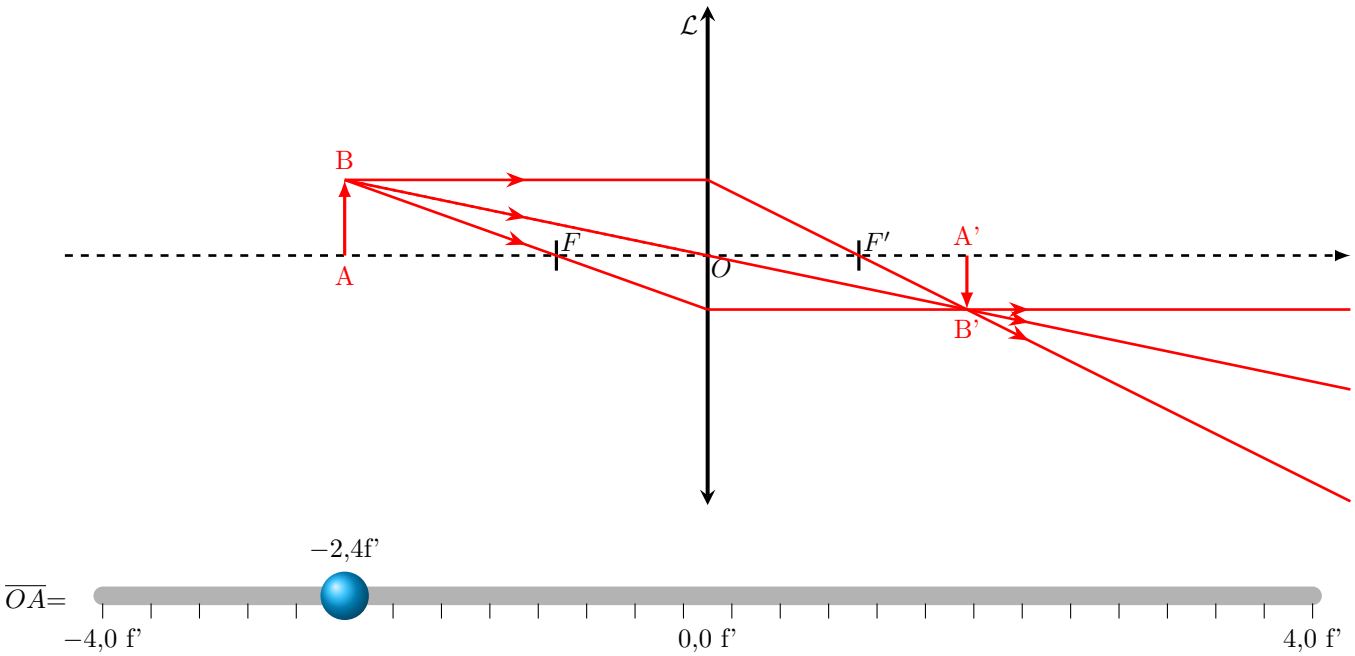
— l'image est droite si et seulement si $\gamma > 0$

— l'image est agrandie si et seulement si $|\gamma| > 1$

On peut repérer alors les domaines correspondant à un appareil photo, un vidéoprojecteur, une loupe,...

La figure O3.1 permet de tester ces différents cas.

FIGURE O3.1 : Image par une lentille convergente (cliquez sur le curseur pour déplacer l'objet).



La configuration : objet à $-2f'$ → image à $+2f'$ s'appelle la *configuration de Silberman.*

Calcul : Place et taille de l'image d'une lentille divergente

Dans le cas d'une lentille divergente, les calculs sont identiques, mais cette fois $f' < 0$, donc : $\frac{\mathrm{d}\overline{OA'}}{\mathrm{d}\overline{OA}} = \frac{f'^2}{(f'+\overline{OA})^2} > 0$ et $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\overline{OA}} = -\frac{f'}{(f'+\overline{OA})^2} > 0$. Le tableau de variations est donc le suivant :

$\overline{OA}$	$-\infty$		0		$-f'$		$-2f'$		$+\infty$
$\overline{OA'}$	f'	↗	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$2f'$	↗ f'
γ	0	↗	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↗ 0

On constate en particulier cette propriété importante : si l'objet est réel ($\overline{OA} < 0$) alors l'image par une lentille divergente est toujours virtuelle ($\overline{OA'} < 0$).

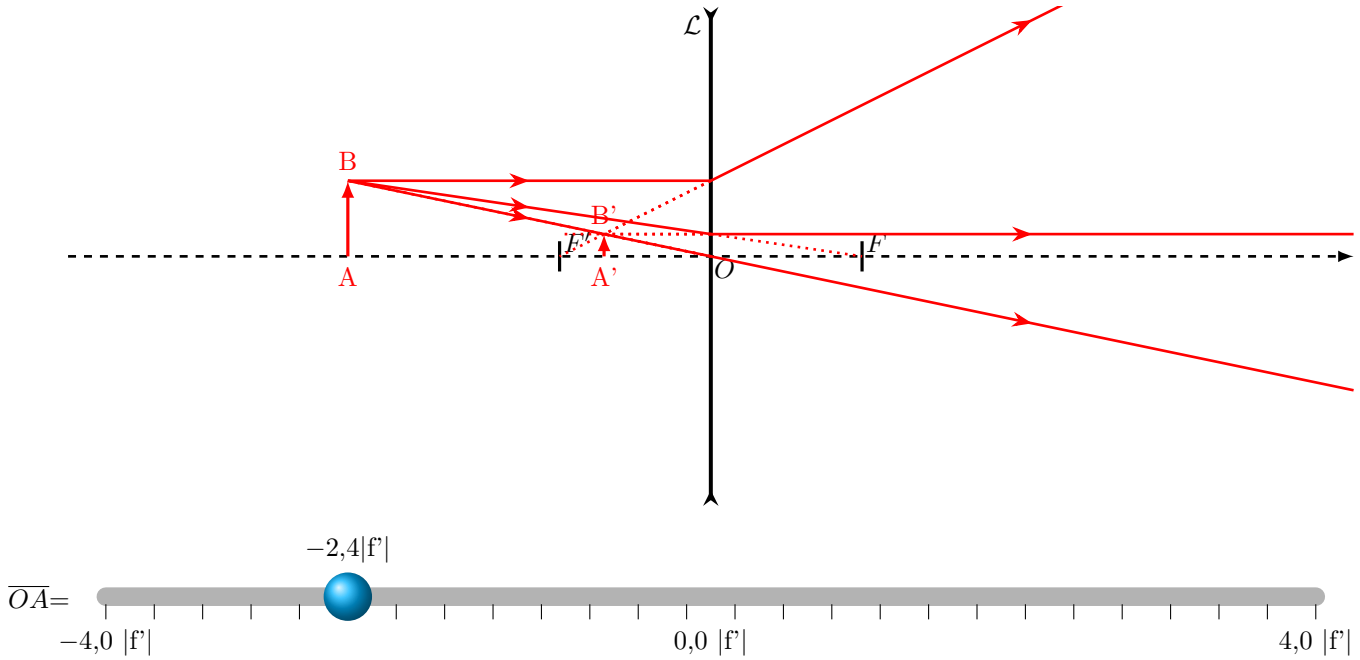
La figure O3.2 permet de tester ces différents cas.

Remarque : (Hors programme) On déduit de ces résultats que :

— les plans principaux d'une lentille mince sont le plan de la lentille compté deux fois (conjugué avec lui-même)

— les plans antiprincipaux d'une lentille mince sont situé de part et d'autres de celle-ci à une distance $2f'$.

FIGURE O3.2 : Image par une lentille divergente (cliquez sur le curseur pour déplacer l'objet).



Si on s'intéresse à la projection d'un objet réel sur un écran, on retient les résultats suivants :

Propriété : Projection d'un objet réel sur un écran

Supposons qu'on dispose d'un objet réel, et qu'on veuille en faire son image sur un écran ; l'image doit donc être réelle. Pour ce faire, il faut :

- choisir une lentille **convergente** ($f' > 0$)
- placer l'objet devant la lentille à une distance **supérieure à** f'

L'image sera **renversée** ; de plus elle sera **agrandie si l'écran est à plus de** $2f'$ **de distance de la lentille** (l'objet est alors à une distance inférieure à $2f'$ de la lentille) et **réduite** dans le cas contraire.

Démonstration

On peut retrouver certains de ces résultats rapidement sans refaire toute l'étude précédente. D'abord, on veut un objet réel, donc $\overline{OA} < 0$, et l'image sur un écran, donc réelle, donc $\overline{OA'} > 0$. D'après la loi de conjugaison de Descartes, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} > 0$ donc $f' > 0$: il faut une lentille convergente.

De plus $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}+f'}{\overline{OA}.f'}$ doit être positif, or $\overline{OA} < 0$, ce qui implique que $\overline{OA}+f' < 0$ donc $\overline{OA} < -f'$: la distance objet-lentille doit être supérieure à f'.

Enfin, puisque $\overline{OA} < 0$ (objet réel) et $\overline{OA'} > 0$ (image réelle), on a $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} < 0$: l'image est renversée.

Exemple : Choix d'une lentille pour une projection

On veut projeter un objet sur un écran situé à une distance $d = 6\,\text{m}$ avec un grandissement $|\gamma| = 120$.

1. Calculez les distances objet-lentille et objet-écran qu'il faut prendre.
2. Déduisez-en la distance focale de la lentille à choisir.

1. On sait que $\overline{AO} + \overline{OA'} = d = 6\,\text{m}$ et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -120$ d'où on tire après quelques manipulations $\overline{AO} = \frac{d}{|\gamma|+1} = 5{,}0\,\text{cm}$ et $\overline{OA'} = 5{,}95\,\text{m}$.
2. Par la relation de conjugaison de Descartes, on trouve $f' = 4{,}9\,\text{cm}$.

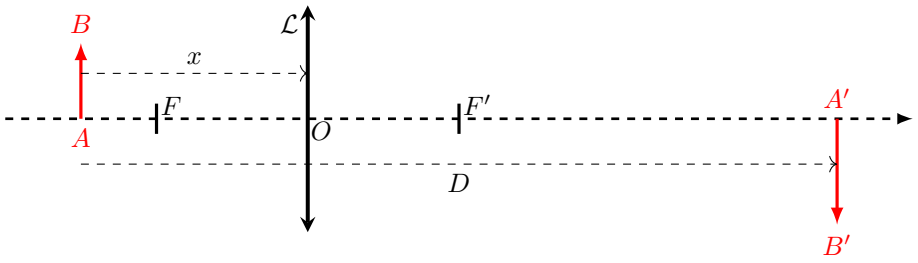
Néanmoins, les propriétés précédentes ne disent rien sur la distance focale f' à choisir dans le cas général. Nous allons néanmoins établir une propriété importante quand au choix de f' :

Propriété : Choix de la distance focale pour projeter un objet sur un écran

Si on dispose d'un objet réel et qu'on veuille le projeter sur un écran situé à une distance D de l'objet, alors il faut choisir une lentille telle que $D \geq 4f'$.

Démonstration

Pour cette démonstration, il suffit de mettre en équation le problème à l'aide d'une des lois de conjugaison. Commençons par un dessin : on place l'objet A, l'image A' à une distance $\overline{AA'} = D$; et la question est : où doit-on placer la lentille de distance focale f' pour que A' soit l'image de A par la lentille ?



On va donc poser comme inconnue $x = \overline{AO}$. Pour établir l'équation que doit résoudre x, on peut utiliser :

- ou bien la loi de conjugaison avec origine au centre : avec $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = -x + D$, la relation s'écrit $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ soit $\frac{x+D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'}$ donc $\frac{D}{D.x-x^2} = \frac{1}{f'}$; on en tire $D.f' = x.D - x^2$
- ou bien la loi de conjugaison avec origine aux foyers : avec $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = f' - x$ et $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA} + \overline{AA'} = -f' - x + D$. La relation s'écrit alors $(f' - x).(D - f' - x) = -f'^2$ soit $D.f' - D.x - f'^2 + x.f' - x.f' + x^2 = 0$; on simplifie : $D.f' - D.x + x^2 = 0$

Les deux méthodes aboutissent à la même équation : $x^2 - D.x + D.f' = 0$ de discriminant $\Delta = D^2 - 4D.f' = D(D - 4f')$. Donc :

- si $D > 4f'$ alors l'équation a 2 solutions : il existe 2 positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran ; on pourrait montrer qu'elles sont symétriques par rapport au milieu de $[AA']$, que la position de la lentille la plus proche de l'objet donne une image agrandie, et l'autre une image réduite ;
- si $D = 4f'$ alors l'équation a une solution : il existe une seule position de la lentille qui donne une image nette sur l'écran ; on pourrait montrer qu'elle se trouve au milieu, et que le grandissement vaut -1 (image de même taille que l'objet) ;
- si $D < 4f'$ alors l'équation n'a aucune solution : il est impossible d'obtenir une image nette sur l'écran.

Cette démonstration est importante, car elle permet de résoudre des exercices dans lesquels on demande de trouver explicitement la position de la lentille.

Exemple : Position d'une lentille pour une projection

On dispose d'une diapositive qu'on veut projeter sur un écran situé à une distance $D = 70\,\text{cm}$ à l'aide d'une lentille de distance focale $f' = 8\,\text{cm}$. Déterminez la position de la lentille pour obtenir une image nette et agrandie.

On pose $x = \overline{AO}$; on sait que $\overline{AA'} = D$. On en déduit que $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = D - x$. La loi de conjugaison de Descartes indique alors que $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ soit $\frac{x+D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'}$. On en déduit que $D.f' = D.x - x^2$ donc x est solution de l'équation du second degré : $x^2 - D.x + D.f' = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = D^2 - 4.D.f' = 2660 > 0$ donc on trouve deux solutions : $x_1 = 9{,}2\,\text{cm}$ et $x_2 = 60{,}8\,\text{cm}$.
Dans le premier cas, $\overline{OA} = -9{,}2\,\text{cm}$ et $\overline{OA'} = +60{,}8\,\text{cm}$ donc $\gamma = -6{,}6$; dans le second cas, $\overline{OA} = -60{,}8\,\text{cm}$ et $\overline{OA'} = +9{,}2\,\text{cm}$ donc $\gamma = -0{,}15$. On choisit donc la première : on place la lentille 9,2 cm après l'objet.

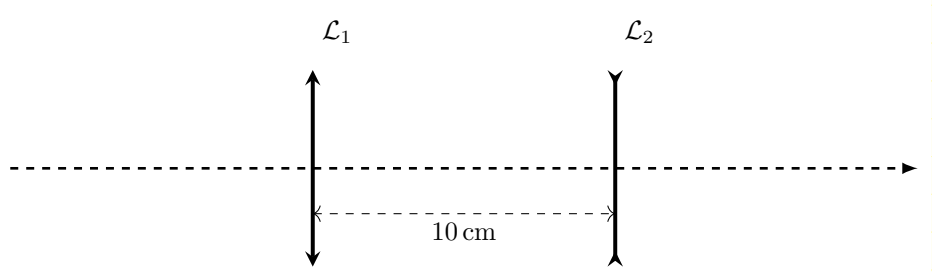
A.2. Lentilles accolées

On a vu dans le chapitre précédent des exemples de doublets, c'est-à-dire de systèmes constitués de 2 lentilles. Il existe de nombreuses combinaisons de 2 lentilles permettant de faire différents instruments d'optique : lunette

astronomique, microscope,...Dans le cas général, il faut donc toujours prendre l'objet, puis chercher l'image de l'objet par la première lentille, et ensuite l'image de cette image intermédiaire par la seconde lentille. Cet ensemble de plusieurs lentilles n'a en effet a priori aucune propriété particulière ; en particulier, si on veut trouver ses foyers, il faut revenir à la définition.

Exemple : Foyers d'un doublet

On dispose deux lentilles, une de focale $f_1' = 8\,\text{cm}$ et de centre O_1, l'autre de focale $f_2' = -6\,\text{cm}$ et placée en O_2 situé 10 cm après la première.



1. Déterminez par le calcul la position du foyer image F' de ce système.
2. Déterminez par le calcul la position du foyer objet F de ce système.

1. Le foyer image du système $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}$ est l'image par ce système d'un objet à l'infini sur l'axe : $\infty \overset{\mathcal{S}}{\to} F'$.
   Comme le système est constitué de deux lentilles, on peut écrire $\infty \overset{\mathcal{L}_1}{\to} X \overset{\mathcal{L}_2}{\to} F'$.
   On part de la gauche : si l'objet de $\mathcal{L}_1$ est à l'infini, alors son image est le foyer image de cette lentille, donc $X = F_1'$.
   Pour la seconde lentille, l'objet $X = F_1'$ ne joue aucun rôle particulier ; on applique donc la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2X}} = \frac{1}{f_2'}$ avec $f_2' = -6\,\text{cm}$ et $\overline{O_2X} = \overline{O_2F_1'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} = -2\,\text{cm}$.
   On en tire que $\overline{O_2F'} = -1{,}5\,\text{cm}$: le foyer image du système est donc situé 1,5 cm avant la seconde lentille, ou encore 8,5 cm après la première lentille.
2. On procède de la même manière : par définition, $F \overset{\mathcal{S}}{\to} \infty$ donc $F \overset{\mathcal{L}_1}{\to} Y \overset{\mathcal{L}_2}{\to} \infty$.
   Cette fois on part de la droite : par définition, $Y = F_2$ donc la loi de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille $\mathcal{L}_1$ indique que $\frac{1}{\overline{O_1Y}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$ avec $\overline{O_1Y} = \overline{O_1F_2} = 16\,\text{cm}$ d'où on tire $\overline{O_1F} = -16\,\text{cm}$.

On constate que les foyer ne sont pas du tout symétriques par rapport à un éventuel centre optique.

Il existe cependant un cas particulier à connaître : le cas où les deux lentilles sont très proches ; idéalement, parfaitement collées.

Propriété : Théorème des lentilles accolées

Deux lentilles de distances focales f_1' et f_2' collées l'une à l'autre sont équivalentes à une seule lentille de focale f' telle que

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \qquad \text{(O3.1)}$$

Démonstration

Considérons deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, de focales f_1' et f_2', de centres optiques O_1 et O_2 tellement proches qu'on peut les confondre : on les notera O. Soit A un objet ; alors $A \overset{\mathcal{L}_1}{\to} A' \overset{\mathcal{L}_2}{\to} A''$. On peut donc écrire les relations de conjugaison de Descartes :

- pour la lentille 1 : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'}$ car $O_1 = O$
- pour la lentille 2 : $\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f_2'}$ car $O_2 = O$

On somme les deux relations : les termes $\frac{1}{\overline{OA'}}$ se simplifient et on obtient $\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$.

Si on considère le système $\mathcal{S}$ formé de $\{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}$, alors on peut écrire $A \overset{\mathcal{S}}{\to} A''$ et on constate que $\mathcal{S}$ vérifie une loi de conjugaison équivalente à une relation de Descartes avec une distance focale f' telle que $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$.

Remarque : On constate que ce sont les inverses des distances focales qui s'ajoutent. On leur donne on nom :

Définition : Vergence d'une lentille

La vergence d'une lentille de distance focale f' est définie par

$$V = \frac{1}{f'} \tag{O3.2}$$

Elle se mesure en *dioptries* : $1\,\delta = 1\,\mathrm{m}^{-1}$.

Pour des lentilles accolées, on a alors : $V = V_1 + V_2$.

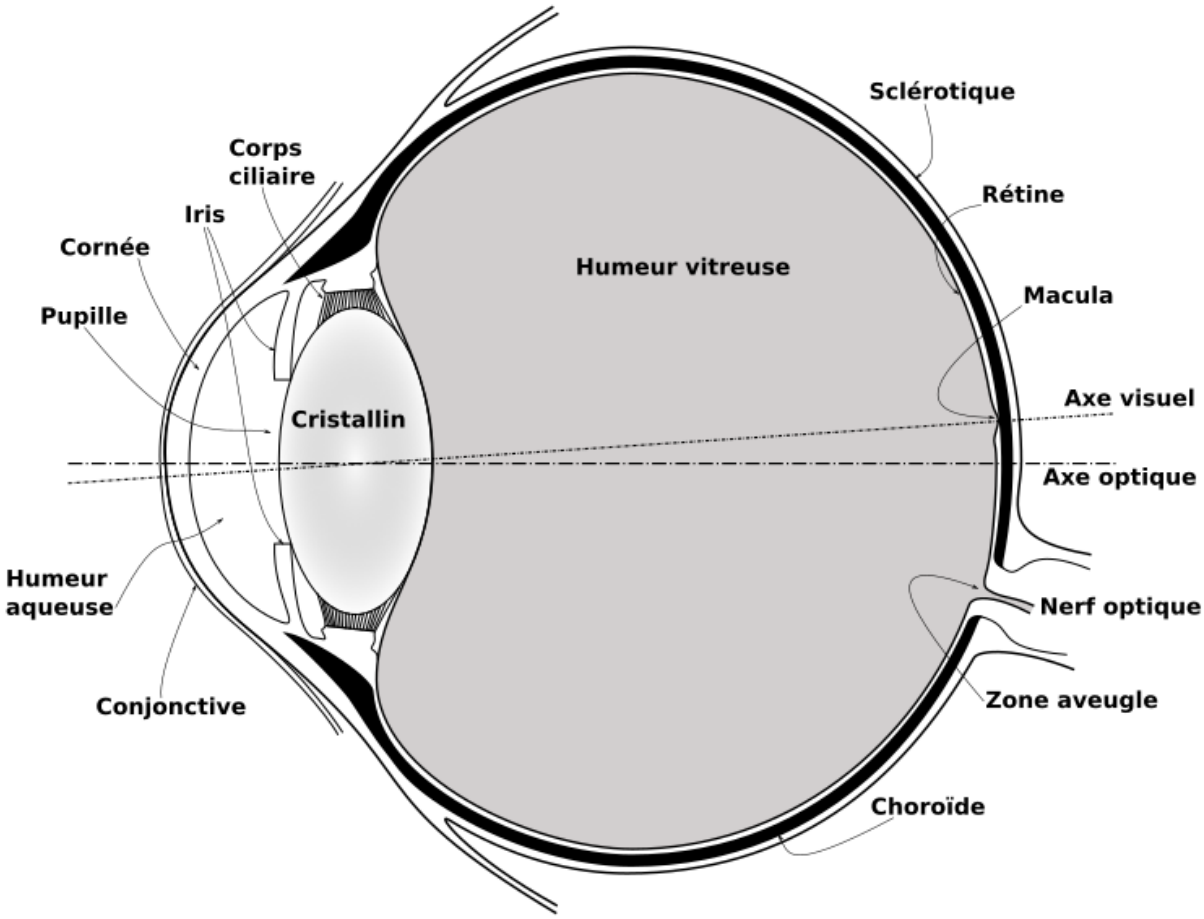
Remarque : On peut aussi écrire $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}}$ et $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \gamma_2 = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}}$ donc par multiplication $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \gamma_1.\gamma_2 = \frac{\overline{O_1A'}.\overline{O_2A''}}{\overline{O_1A}.\overline{O_2A'}}$. Si les lentilles sont accolées ($O_1 = O_2 = O$), deux termes se simplifient et on obtient $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \gamma = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}$

O3.B. La vision humaine

Avant de comprendre le fonctionnement de systèmes plus complexes, nous allons analyser l'œil humain comme un système optique et en comprendre ses principaux défauts.

L'œil humain est représenté schématiquement sur la figure O3.3. Il est constitué essentiellement comme un appareil photo : une lentille convergente (constituée de l'humeur vitreuse ou vitrée, du cristallin et de l'humeur aqueuse) projette une image sur un écran (la rétine).

FIGURE O3.3 : Anatomie de l'œil.



B.1. Accommodation de l'œil

Parmi les 3 parties qui constituent la lentille convergente de l'œil, le cristallin est très particulier : il est déformable, au moyen de muscles situés sur les côtés qui peuvent le rendre plus ou moins bombé, et modifier sa distance focale : c'est *l'accommodation*.

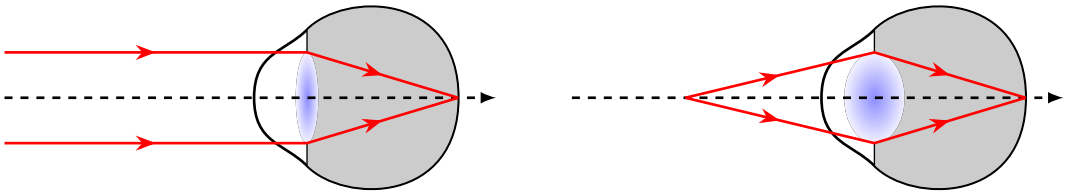
Définition : Punctum remotum

Lorsque le cristallin est le plus fin, l'œil donne sur la rétine une image nette pour un objet situé au *punctum remotum* (figure O3.4) ; pour un œil normal, ce point est à l'infini.
Lorsque l'œil accommode sur le punctum remotum, les muscles du cristallin sont au repos.

Définition : Punctum proximum

Lorsque le cristallin est le plus gros, l'œil donne sur la rétine une image nette pour un objet situé au *punctum proximum* (figure O3.4) ; pour un œil normal, ce point est à une distance moyenne de 25 cm (qui augmente avec l'âge : c'est la presbytie).
Lorsque l'œil accommode sur le punctum proximum, les muscles du cristallin font des efforts et se fatiguent.

FIGURE O3.4 : Accommodation d'un œil normal.



(a) Punctum Remotum (b) Punctum Proximum

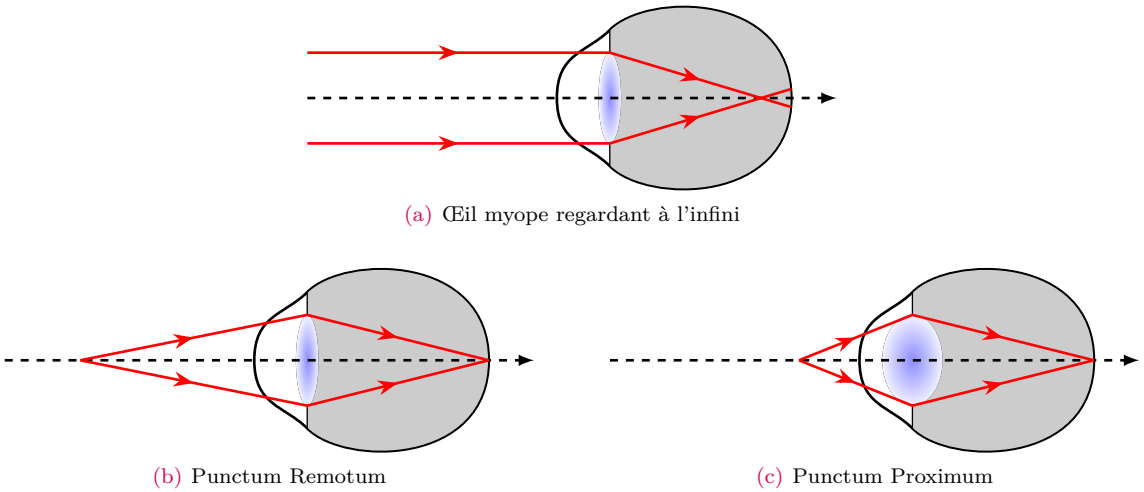
Cependant, l'œil, au cours de sa croissance, ne prend pas toujours la forme idéale. Le défaut le plus courant est celui d'un œil trop convergent, ou bien trop allongé (figure O3.5). L'image a alors tendance à se former avant la rétine par rapport à un œil normal.

Définition : Œil myope

Un œil myope est trop convergent ; son punctum remotum est située à une distance de quelques mètres, et son punctum proximum est situé à une distance très faible (figure O3.5).
Pour corriger ce défaut et rendre une vue normale, on place une lentille divergente devant l'œil (figure O3.6).



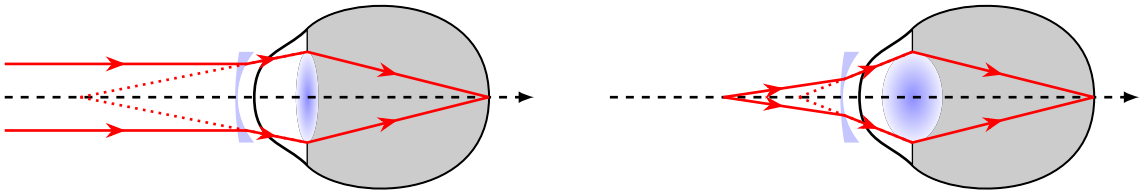
FIGURE O3.5 : Accommodation d'un œil myope.



(a) Œil myope regardant à l'infini

(b) Punctum Remotum (c) Punctum Proximum

FIGURE O3.6 : Correction d'un œil myope.



(a) Punctum Remotum (b) Punctum Proximum

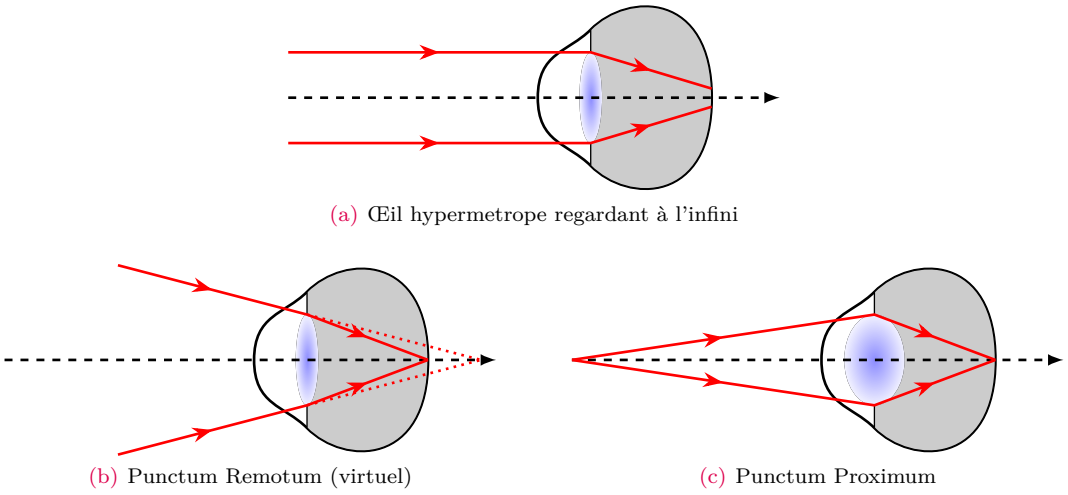
À l'inverse, l'œil peut être trop peu convergent, ou trop court. L'image se forme alors en arrière de la rétine.

Définition : Œil hypermétrope

Un œil hypermétrope est trop peu convergent ; son punctum remotum est située à l'infini (voire virtuel dans le dos de l'observateur), et son punctum proximum est situé à quelques mètres (figure O3.7).
Pour corriger ce défaut et rendre une vue normale, on place une lentille convergente devant l'œil (figure O3.8).

Le principal problème d'un œil hypermétrope est le fait qu'il voit mal de près, par exemple pour lire ; à grande distance, peu de choses changent.

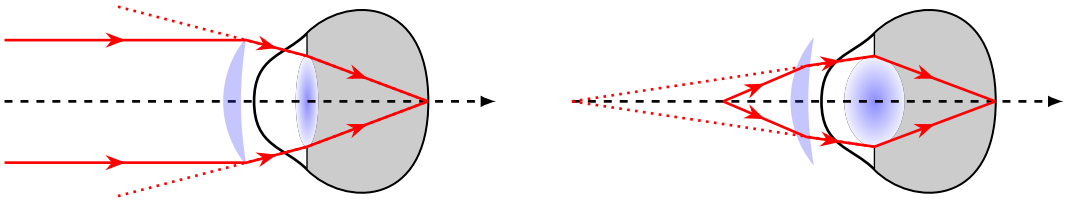
FIGURE O3.7 : Accommodation d'un œil hypermétrope.



(a) Œil hypermetrope regardant à l'infini

(b) Punctum Remotum (virtuel) (c) Punctum Proximum

FIGURE O3.8 : Correction d'un œil hypermétrope.



(a) Punctum Remotum (b) Punctum Proximum

B.2. Acquisition de l'image

La rétine est tapissée de capteurs sensibles à la lumière. Il en existe deux types :

— les bâtonnets : ils sont environ 120 millions par œil, et captent l'intensité de la lumière sans distinguer les couleurs. Ils sont très sensibles à la lumière.

— les cônes : ils sont environ 5 millions par œil, et distinguent les couleurs de la lumière visible. Ils sont situés essentiellement au centre de la rétine, dans une zone appelée *macula* (figure O3.9), et sont moins sensibles que les bâtonnets.

FIGURE O3.9 : Photographie de la rétine d'un œil humain ; on distingue la macula (tache noire à gauche du centre) et le départ du nerf optique (tache blanche). (Crédit : Wikipedia/Ske)



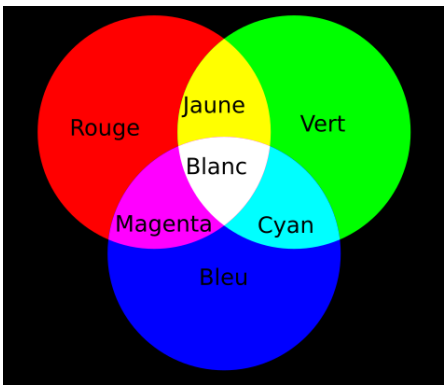
La macula correspond à ce qui est au centre de notre champ de vision, c'est une zone où on perçoit beaucoup de détails avec toutes les couleurs. La vision périphérique est plus floue, peu colorée, et possède même un trou (au niveau du départ du nerf optique) mais notre cerveau agit comme un logiciel de traitement d'image et recompose une image complète et en couleur.

Définition : Pouvoir séparateur de l'œil

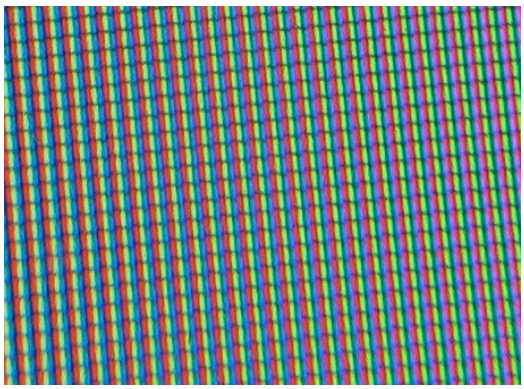
Le pouvoir séparateur est l'angle entre deux points que l'œil est capable de distinguer. Il est environ égal à une minute d'arc : $1' = \frac{1}{60}° = 3 \times 10^{-4}$ rad

Pour capter la couleur de la lumière, l'œil utilise une technique simple : il existe 3 types de cônes, les premiers sensibles au rouge, les seconds au vert, les troisièmes au bleu. Ensuite, le cerveau recompose les couleurs à partir du schéma de la figure O3.10. C'est ainsi qu'un écran peut générer un grand nombre de couleurs (mais pas toutes) à partir simplement de pixels rouges, verts et bleus.

FIGURE O3.10 : Synthèse des couleurs par le cerveau humain.



(a) Principe de la synthèse additive



(b) Pixels colorés d'un écran d'ordinateur

O3.C. Exemple d'instruments optique

En combinant deux lentilles, il existe toute une variété d'instruments qu'on peut fabriquer. Nous allons en présenter quelques-uns.

C.1. Lunette astronomique et télescope

Définition : Lunette astronomique

Une lunette astronomique est un doublet de lentilles *afocal* :

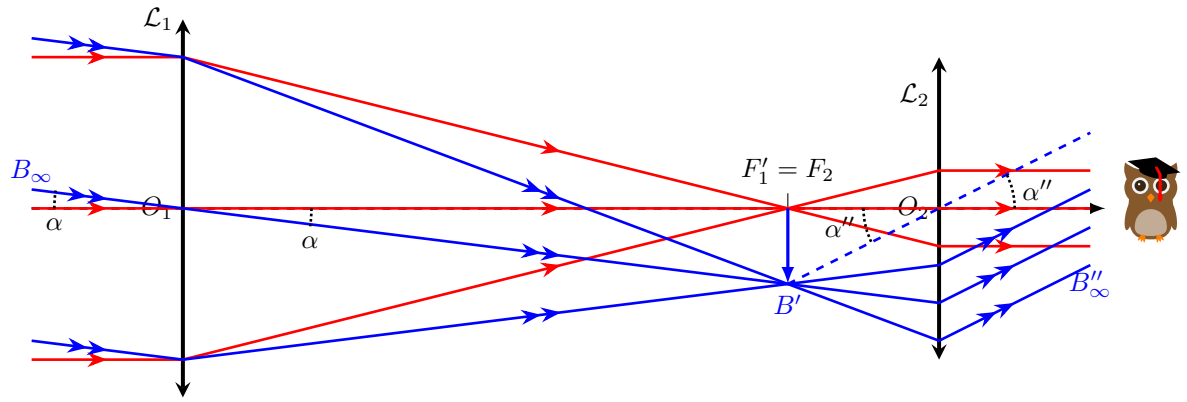
- la première lentille $\mathcal{L}_1$, de grande distance focale, est appelée *objectif*
- la deuxième lentille $\mathcal{L}_2$, de courte distance focale, est appelée *oculaire*
- elles sont placées à une distance égale à la somme de leurs distances focales, de sorte que $F_1' = F_2$

Alors tout faisceau collimaté entrant dans l'objectif ressort collimaté de l'oculaire (figure O3.11).

Démonstration

Le caractère afocal (collimaté → collimaté) de la lunette astronomique se justifie facilement : $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$ par définition de F_1' et de F_2.

FIGURE O3.11 : Trajet de 2 faisceaux incidents provenant de l'infini, à travers une lunette astronomique.



Propriété : Grossissement d'une lentille astronomique

Soit un faisceau collimaté entrant dans la lentille en faisant un angle α avec l'axe optique ; il ressort collimaté en faisant un angle α'' avec l'axe optique. On définit le *grossissement* de la lunette par

$$G = \frac{\alpha''}{\alpha}$$

Si f_1' est la distance focale de l'objectif et f_2' celle de l'oculaire, alors, dans les conditions de Gauss :

$$G = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

Il est négatif, ce qui signifie que l'image finale est renversée.

Démonstration

Considérons le schéma de la figure O3.11. L'angle α en entrée de l'objectif se retrouve aussi de l'autre côté de l'objectif (angles opposés par le sommet). Si on considère le triangle $O_1F_1'B'$, il est rectangle en F_1', donc on peut écrire $\tan\alpha = \frac{F_1'B'}{O_1F_1'} = \frac{F_1'B'}{f_1'}$ sans tenir compte des signes pour le moment (angles non orientés).
De même, l'angle α'' en sortie se retrouve dans le triangle O_2F_2B' rectangle en F_2, et on peut écrire $\tan\alpha'' = \frac{F_2B'}{O_2F_2} = \frac{F_1'B'}{f_2'}$.

Dans les conditions de Gauss, les angles sont petits, donc $\alpha \approx \tan\alpha$ et $\alpha'' = \tan\alpha''$ donc $|G| = \frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\frac{F_1'B'}{f_2'}}{\frac{F_1'B'}{f_1'}} = \frac{f_1'}{f_2'}$.

En regardant le schéma, on voit que le faisceau bleu incident va vers le bas, et le faisceau bleu émergent va vers le haut, donc l'image est inversée, le grossissement est donc négatif. On a donc bien finalement $G = -\frac{f_1'}{f_2'}$.

La lunette astronomique inverse les images, elle est donc peu adaptée pour l'observation terrestre. La lunette de

Galilée, qui utilise un oculaire divergent, permet d'avoir un grossissement positif, donc une image droite.

La modélisation de la lunette par deux lentilles est évidemment un peu simpliste. Pour corriger les défauts des lentilles, il va falloir utiliser des groupes de lentilles dont les défauts se corrigent l'une l'autre. Le premier de ces systèmes est le doublet achromatique, inventé en 1729 par C.M.Hall, qui combine deux lentilles accolées, une convergente en verre léger, l'autre divergente en verre lourd, de sorte que les aberrations chromatiques de l'une sont compensées par celles de l'autre. Avec un tel doublet achromatique comme objectif et comme oculaire, on peut grandement améliorer la qualité des images.

Cependant, cela n'est pas suffisant pour l'oculaire. En effet, celui-ci reçoit des rayons fortement inclinés par rapport à l'axe optique, donc pas du tout dans les conditions de Gauss. On va donc combiner encore plus de lentilles pour compenser non seulement les aberrations chromatiques, mais aussi les aberrations géométriques. La figure O3.12 montre ainsi 3 types d'oculaires de lunettes, contenant de plus en plus de lentilles, et pouvant ainsi observer des champs de plus en plus grands.

FIGURE O3.12 : Quelques oculaires.



(a) Oculaire de type Kellner, à 3 lentilles (champ max : 30°). (Crédit : MatP/Wikipedia)



(b) Oculaire de type orthoscopique, à 4 lentilles (champ max : 50°). (Crédit : MatP/Wikipedia)



(c) Oculaire de type Vixen à champ large, à 8 lentilles (champ max : 65°). (Crédit : MatP/Wikipedia)

Cependant, quand on veut obtenir des instruments de plus en plus performant, il faut des instruments de plus en plus grands. En effet, d'une part, pour grossir et voir des détails sur les planètes par exemple, il faut augmenter f_1', donc la longueur totale de la lunette, conduisant à des instruments de longueur peu pratique (figure O3.13) ; d'autre part, pour observer des objets lointains et donc peu lumineux, il faut une lunette de grand diamètre qui capte beaucoup de lumière, conduisant à des objectifs de grande taille et donc extrêmement lourds. Ainsi, l'objectif le plus grand jamais construit ne mesurait que 1,25 m de diamètre.

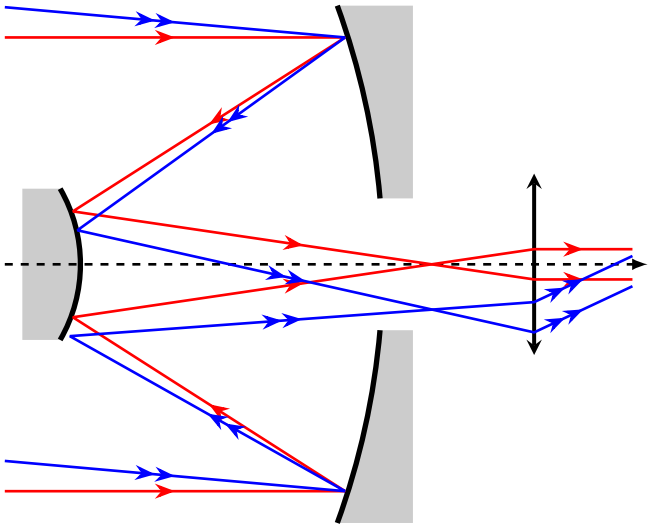
FIGURE O3.13 : Grande lunette de l'Observatoire de Nice, de 76 cm de diamètre. (Crédit : Ericd/Wikipedia)



La solution à ces deux problèmes se trouve dans le télescope, qui remplace l'objectif par deux miroirs sphériques. Un grand miroir primaire collecte la lumière et la concentre sur un miroir secondaire, qui la renvoie dans un trou percé au centre du miroir primaire. Là, un oculaire classique collecte la lumière. Avec un tel dispositif, on peut atteindre de très grands diamètres, et de grands grossissements pour un encombrement raisonnable (figure O3.14).

Aujourd'hui, les télescopes terrestres les plus grands font de l'ordre de 10 m de diamètre, tandis que dans l'espace se trouve le télescope spatial James Webb de 6,5 m de diamètre. De plus, en combinant la lumière provenant de plusieurs télescopes proches, on arrive à avoir des images de très grande qualité.

FIGURE O3.14 : Télescopes.



(a) Principe d'un télecsope Schmidt-Cassegrain.



(b) Miroir primaire d'un des télescopes de 8 m de diamètre du VLT. (Crédit : Wikipedia)

C.2. Appareil photographique

Le but d'un appareil photo est de donner, d'un objet réel situé à grande distance, une image à courte distance et plus petite, qui se formera sur un capteur de lumière. Pour cela, il utilise un objectif qui est un groupe de lentilles globalement convergent. L'objet de l'appareil est réel, l'image est réelle, donc l'image sera renversée, mais cela a peu d'importance.

FIGURE O3.15



(a) Appareil photo à soufflet.(Crédit : Wikipedia)



(b) Différents types d'objectifs d'appareil photo.(Crédit : Wikipedia/R.Roletschek)

Nous allons rapidement étudier quelques caractéristiques d'un appareil photographique en le modélisant très simplement (figure O3.16) : un objectif modélisé par une simple lentille mince convergente de centre O et de focale f', et un écran placé en E ; on note $t = \overline{OE}$ la distance objectif-écran, appelé *tirage*. Pour un objet A donné qu'on veut photographier, la *mise au point* consiste à régler le tirage pour que l'image se forme exactement sur l'écran. À partir de la relation de conjugaison de Descartes, on montre facilement que

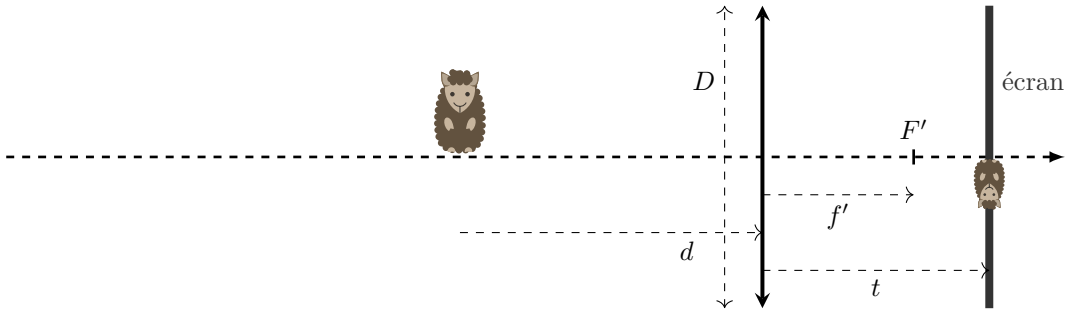
$$t = \overline{OA'} = \frac{d.f'}{d - f'} \tag{O3.3a}$$

$$|\gamma| = \frac{f'}{d - f'} \tag{O3.3b}$$

avec $d = \left|\overline{OA}\right|$, c'est-à-dire la distance objectif-objet comptée positivement.

Le diamètre D de l'objectif a une influence sur la luminosité de l'image : plus D est grand, plus il y a de la lumière qui rentre dans l'appareil photo ; cela donnera une image plus lumineuse, ou bien, si on préfère, permettra un temps

FIGURE O3.16 : Schéma des données de l'appareil photo.



de pose plus court (pour des photos de phénomènes rapides) ou une moindre amplification de la lumière (ISO) donc une meilleure qualité de photographie. C'est pour cela que les appareils photo de petit diamètre, comme ceux des téléphones portables, ne peuvent pas donner des photos de bonne qualité hormis en plein soleil.

La distance focale a une influence sur la taille de l'image (figure O3.17). En dérivant l'équation (O3.3b), on trouve facilement que $\frac{\mathrm{d}|\gamma|}{\mathrm{d}f'} = \frac{1\times(d-f')-f'\times(-1)}{(d-f')^2} = \frac{d}{(d-f')^2} > 0$ donc le grandissement augmente (en valeur absolue) avec la distance focale f' ; la taille de l'écran ou du capteur ne changeant pas, plus le grandissement augmente, plus cela donne une photo avec moins de champ de vision mais où les détails semblent agrandis (on dit couramment qu'on « zoome »). Mais sur les photos de la figure O3.17, on voit apparaître un autre phénomène.

FIGURE O3.17 : Massif du Mont Rose, pris à différentes focales.



(a) $f' = 4{,}1\,\mathrm{mm}$



(b) $f' = 14{,}5\,\mathrm{mm}$



(c) $f' = 19{,}7\,\mathrm{mm}$

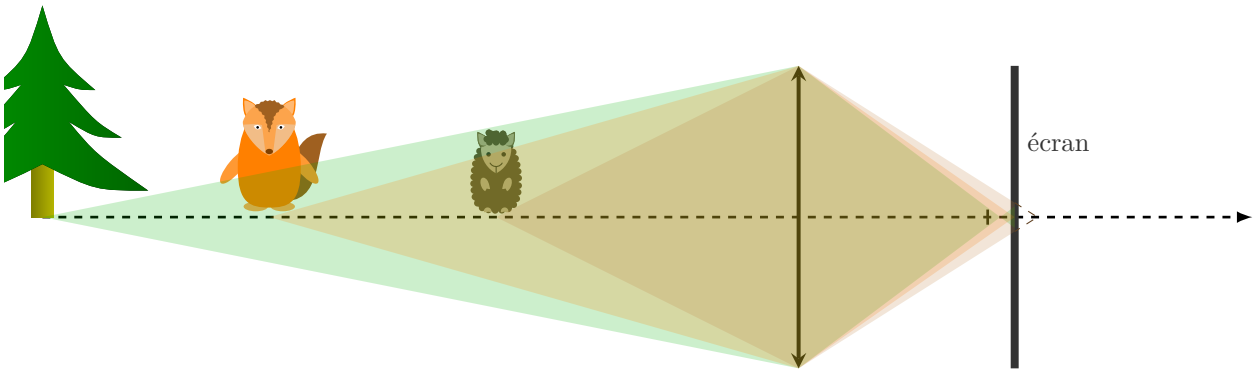


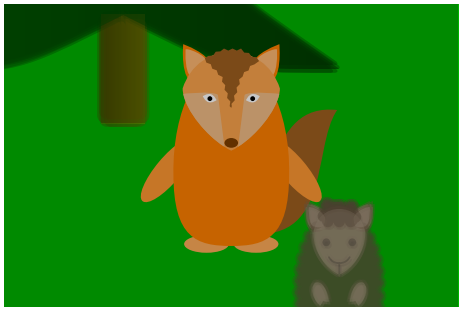
(d) $f' = 40{,}9\,\mathrm{mm}$

En regardant attentivement la série de photos prises avec une focale de plus en plus grande, tout en faisant la mise au point sur les montagnes (qu'on peut considérer à l'infini), on voit en bas à droite une pierre dont l'aspect change : à courte focale, elle est nette en même temps que les montagnes ; mais à partir de la troisième photo, la pierre commence à devenir floue ; à la dernière, elle est complètement floue. En fait, dès la première photo, la pierre est floue, puisque la netteté est faite sur l'infini ; mais ce flou est suffisamment léger pour qu'on ne le remarque pas. On appelle *profondeur*

de champ la plage de distance comprenant tous les objets qu'on verra nets sur l'écran ; cette profondeur de champ diminue lorsqu'on zoome (figure O3.18), et également lorsqu'on ouvre le diamètre de l'objectif (figure O3.19).

FIGURE O3.18 : Illustration de l'influence de la focale de l'objectif sur la profondeur de champ. Un promeneur observe une forêt et en voit sortir un loup déguisé en renard qui s'approche d'un mouton. Il saisit alors son appareil photo et fait la mise au point sur le loup (qui est toujours net). Pour de faibles grossissements, l'arbre situé derrière, et le mouton situé devant, apparaissent nets ; si la focale augmente, la taille de la tache formée par l'image d'un point de l'arbre ou du mouton sur l'écran augmente, et leurs images deviennent floues : la profondeur de champ diminue.





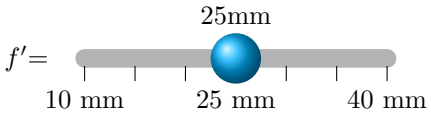
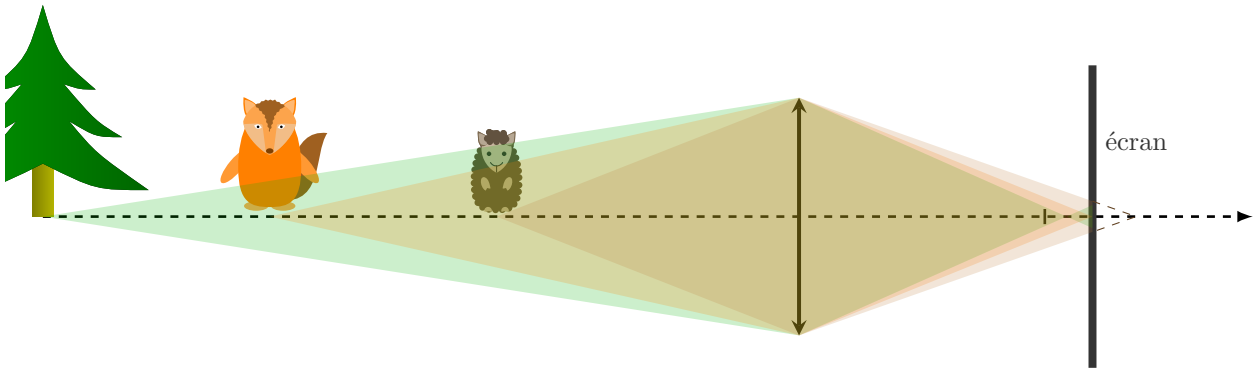
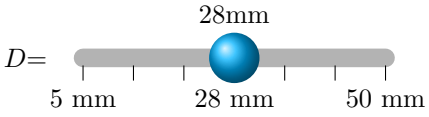


FIGURE O3.19 : Illustration de l'influence du diamètre de l'objectif sur la profondeur de champ. C'est la même scène qu'à la figure O3.18, mais cette fois c'est le diamètre de l'objectif qui varie. Plus il est grand, plus l'image est lumineuse, mais plus la profondeur de champ diminue.



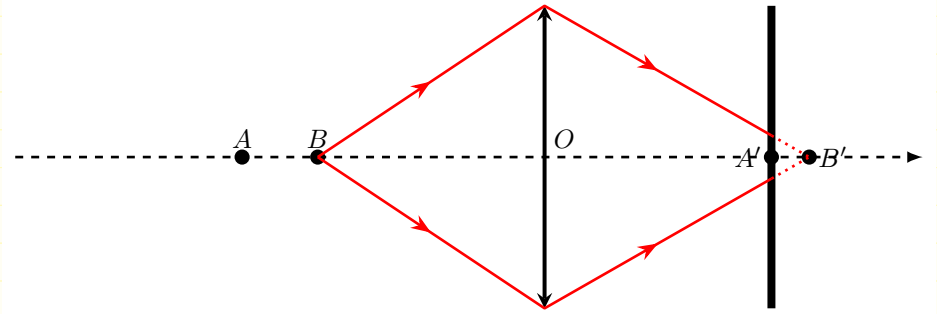




Exemple : Calcul de la profondeur de champ d'un appareil photo

Un appareil photo est modélisé par une lentille convergence de distance focale $f' = 72\,\text{mm}$ et de diamètre $D = 28\,\text{mm}$. On souhaite photographier un objet réel A situé à $\ell_A = 8{,}2\,\text{m}$ de l'objectif.

1. Calculez le tirage, c'est-à-dire la distance objectif-écran à choisir pour que l'image soit nette.
2. On considère un autre objet B situé à $\ell_B < \ell_A$. Son image ponctuelle se forme alors en arrière de l'écran et, sur l'écran, on observe une tache de diamètre d_B.

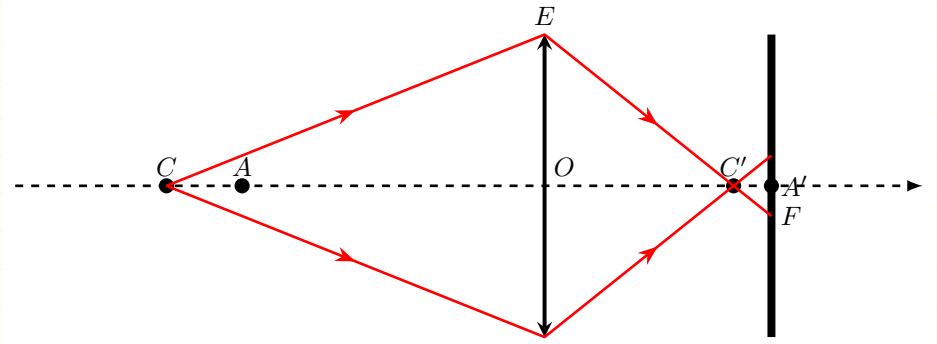


Reliez d_B à $\ell'_A = \overline{OA'}$, $\ell'_B = \overline{OB'}$ et D.

3. L'écran contient des pixels de taille $p = 1{,}4\,\mu\text{m}$. Calculer numériquement la distance ℓ_B pour laquelle la tache d_B a la taille d'un pixel.
4. Reprendre les mêmes questions pour un objet C situé à une distance $\ell_C > \ell_A$. En déduire la profondeur de champ.

---

1. Par la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell_A}$ d'où on tire $\overline{OA'} = 72{,}638\,\text{mm}$.
2. Sur le schéma, notons D le point en haut de la tache qui se forme sur l'écran et E le point en haut de la lentille ; alors par le théorème de Thalès appliqué dans OEB' et $A'DB'$: $\frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{A'D}}$ soit $\frac{\ell'_B}{\ell'_B - \ell'_A} = \frac{D/2}{d_A/2} = \frac{D}{d_A}$.
3. $$d_B = p \Leftrightarrow \ell'_B = \frac{D}{D-p}\ell'_A = 72{,}641\,\text{mm}$$
$$\Leftrightarrow \ell_B = \frac{1}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell'_B}} = 8{,}15\,\text{m}$$
Il est important, dans ce calcul, de garder tous les chiffres significatifs des calculs intermédiaires.
4. On a ce schéma :



Par Thalès dans OEC' et $C'A'F$: $\frac{\ell'_C}{\ell'_A - \ell'_C} = \frac{D}{d_C}$ (où d_C est la taille de la tache sur l'écran) donc

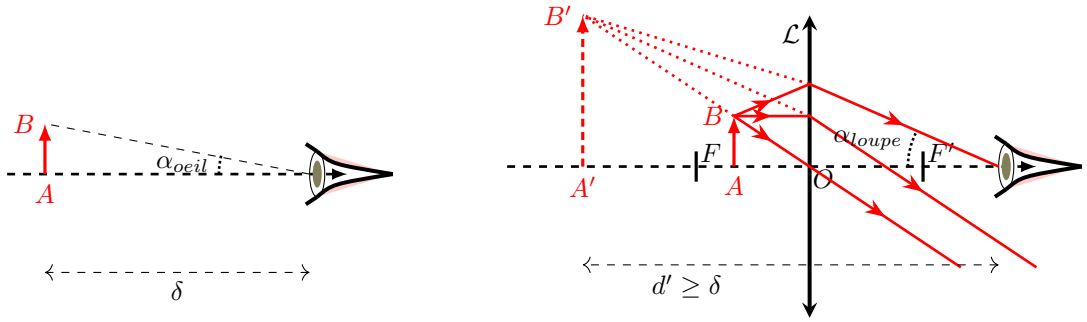
$$d_C = p \Leftrightarrow \ell'_C = \frac{D}{D+p}\ell'_A = 72{,}634\,\text{mm}$$
$$\Leftrightarrow \ell_C = \frac{1}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell'_C}} = 8{,}25\,\text{m}$$

Ainsi, la profondeur de champ est l'intervalle $[8{,}15\,\text{m} ; 8{,}25\,\text{m}]$ de taille $10\,\text{cm}$: c'est assez faible.

C.3. Loupe et microscope

La loupe et le microscope ont pour but d'observer des objets proches mais petits. Si on observe un tel objet à l'œil nu, on essaye de le voir au mieux en l'approchant de notre œil à la plus petite distance possible, savoir $\delta = 25\,\text{cm}$. Ainsi, le plus grand angle sous lequel on peut observer un objet AB à l'œil nu vaudra $\alpha_{oeil} = \arctan\frac{AB}{\delta}$ (cf. figure O3.20(a)) ; dans le cas de petits angles on pourra faire l'approximation $\alpha_{oeil} \approx \frac{AB}{\delta}$.

FIGURE O3.20 : Principe d'utilisation de la loupe.

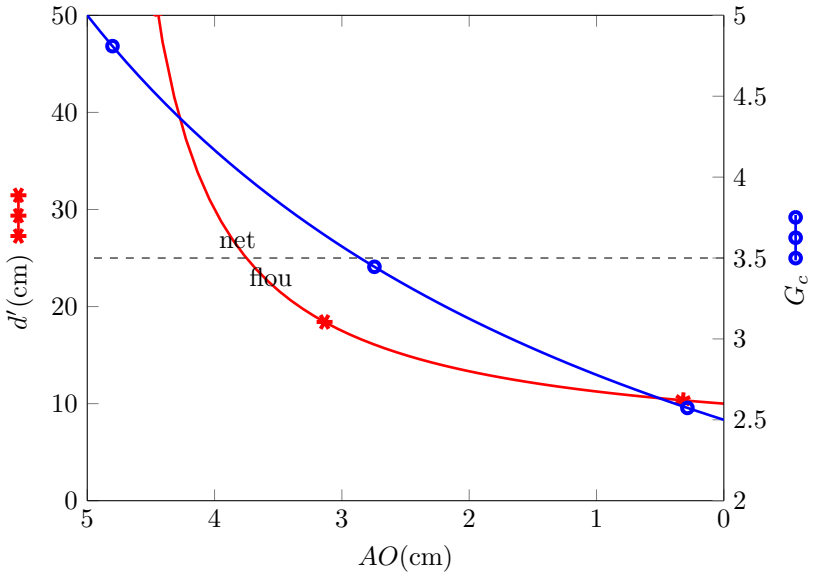


(a) Observation à l'œil nu

(b) Observation à travers la loupe

La loupe est une lentille convergente qui va donner de l'objet une image agrandie et placée plus loin (figure O3.20(b)). Pour cela l'objet doit être placé entre le foyer objet et la loupe. Si $d' > \delta$, l'œil voit alors l'image nette et agrandie, sous un angle $\alpha_{loupe} = \arctan\frac{A'B'}{d'}$. On définit le grossissement commercial (ou puissance) de la loupe comme le rapport $G_c = \frac{\alpha_{loupe}}{\alpha_{oeil}}$. La figure O3.21 trace un exemple de grossissement commercial d'une loupe en fonction de la position de l'objet : on voit que le grossissement idéal est obtenu pour un objet proche du plan focal objet. De plus, si l'objet est trop proche de la loupe, l'image sera à moins de 25 cm de l'œil et sera donc vue floue.

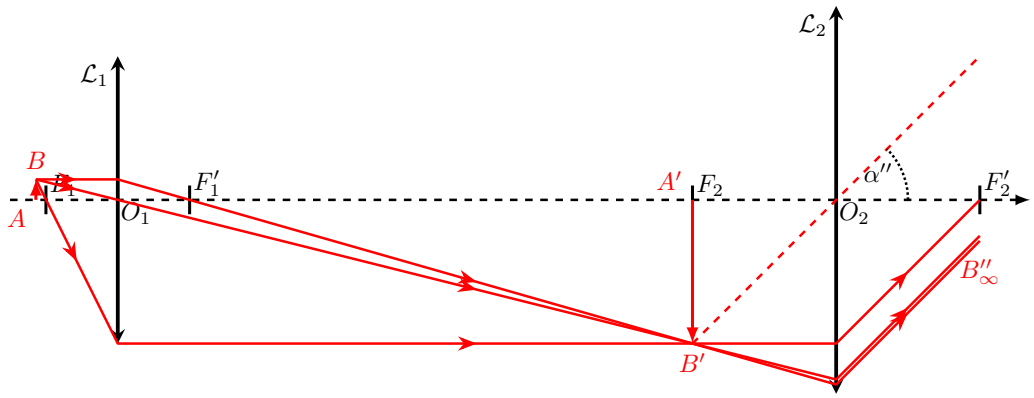
FIGURE O3.21 : Position de l'image et grossissement d'une loupe de vergence $V = +20\,\delta$ avec un œil placé à 10 cm de la loupe, en fonction de la place de l'objet.



Pour grossir plus, on utilise un microscope, formé de deux lentilles : la première, l'objectif, de très courte distance focale, forme de l'objet une image intermédiaire $A'B'$ fortement grandie, située dans le plan focal objet d'une seconde lentille, l'oculaire, jouant le rôle d'une loupe, et donnant, dans le cas idéal, une image finale située à l'infini (figure O3.22).

Comme dans le cas des lunettes astronomiques, les oculaires des microscopes sont composés de plusieurs lentilles pour corriger les aberrations diverses. C'est encore plus vrai des objectifs de microscopes, qui travaillent très près de leur objet et reçoivent des rayons avec des angles d'incidence très proches de 90°. Un moicroscope optique permet d'obtenir un grossissement commercial allant jusqu'à 2500×. Pour des grossissements plus élevés, les phénomènes

FIGURE O3.22 : Principe d'un microscope.



de diffraction vont limiter la résolution du microscope. On se tourne alors vers des microscopes très différents, les microscopes électroniques, qui fonctionnent avec des électrons et non pas avec de la lumière.

O3. Systèmes de lentilles

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèles de quelques dispositifs optiques	
Lentilles minces.	Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné.
Système optique à plusieurs lentilles.	

O3. Systèmes de lentilles

Quelques conseils

✎ Il faut connaître les propriétés générales de la projection d'un objet réel sur un écran, et savoir les retrouver.

✎ Il faut connaître le théorème des lentilles accolées, mais aussi connaître sa démonstration, car les énoncés la demandent souvent.

✎ L'expression du grossissement de la lunette en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire est à redémontrer systématiquement en devoir. Pour cela, il faut faire le bon schéma : la construction du faisceau émergent parallèle se fait en reliant en pointillés l'image intermédiaire au centre de la deuxième lentille.

De manière générale, pour la lunette astronomique, l'appareil photographique, la loupe ou le microscope, il ne faut pas apprendre par cœur les résultats, mais travailler les raisonnements sur des exercices.

O3. Systèmes de lentilles

QCMs

réponses page 149

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Les lois de conjugaison de Descartes et de Newton disent la même chose, mais en repérant les points objets/image par rapport à des références différentes.

(a). Faux (b). Vrai

Q2. Seule une lentille convergente peut avoir une image réelle.

(a). Faux (b). Vrai

Q3. Pour projeter un objet réel sur un écran, il faut le placer devant une lentille convergente à une distance :

(a). inférieure à f' (b). supérieure à f'

Q4. Peut-on projeter un objet réel sur un écran situé à 2 m à l'aide d'une lentille de focale $f' = 14\,\text{cm}$?

(a). Non (b). Oui

Q5. Si on accole deux lentilles de distances focales $f'_1 = 8\,\text{cm}$ et $f'_2 = 12\,\text{cm}$, on obtient une lentille de distance focale :

(a). 4,8 cm (b). 10 cm
(c). 20 cm (d). 0,21 cm

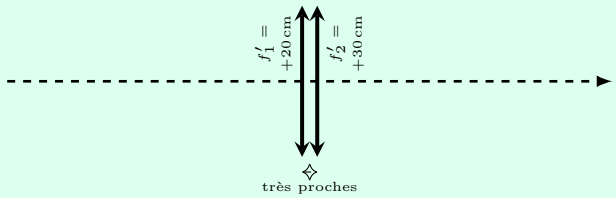
Q6. Une lentille de vergence $+5\,\delta$ a pour distance focale :

(a). +5 m (b). +20 cm
(c). +5 cm (d). −5 cm

✓ QCM : Doublets de lentilles ✗

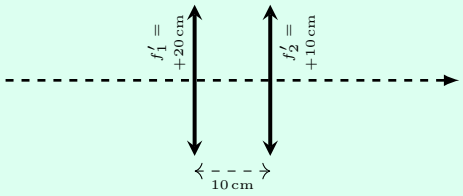
Quelques questions pour reconnaître certains cas vus en cours.

Q7. Le système ci-contre est équivalent à :



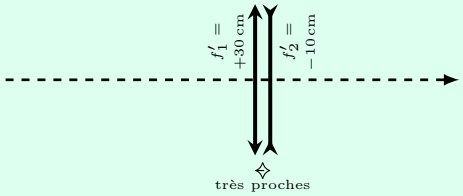
(a). Rien de spécial (b). Un système afocal
(c). Une lentille de focale $f' = +12\,\text{cm}$ (d). Une lentille de focale $f' = +50\,\text{cm}$
(e). Une lentille de focale $f' = +8{,}3\,\text{cm}$

Q8. Le système ci-dessous est équivalent à :



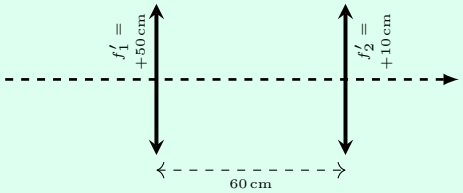
(a). Une lentille de focale $f' = +6{,}7\,\text{cm}$
(b). Rien de spécial
(c). Une lentille de focale $f' = +15\,\text{cm}$
(d). Un système afocal
(e). Une lentille de focale $f' = +30\,\text{cm}$

Q9. Le système ci-dessous est équivalent à :



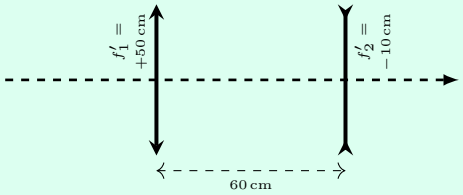
(a). Une lentille de focale $f' = -6{,}7\,\text{cm}$
(b). Une lentille de focale $f' = +20\,\text{cm}$
(c). Un système afocal
(d). Une lentille de focale $f' = -15\,\text{cm}$
(e). Rien de spécial

Q10. Le système ci-dessous est équivalent à :



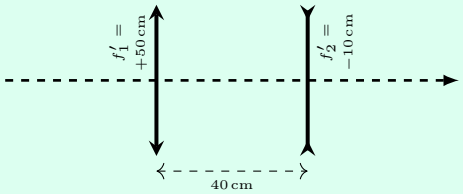
(a). Rien de spécial
(b). Une lentille de focale $f' = +40\,\text{cm}$
(c). Une lentille de focale $f' = +60\,\text{cm}$
(d). Un système afocal
(e). Une lentille de focale $f' = +8{,}3\,\text{cm}$

Q11. Le système ci-dessous est équivalent à :



(a). Rien de spécial
(b). Un système afocal
(c). Une lentille de focale $f' = +12{,}5\,\text{cm}$
(d). Une lentille de focale $f' = +40\,\text{cm}$
(e). Une lentille de focale $f' = -12{,}5\,\text{cm}$

Q12. Le système ci-dessous est équivalent à :



(a). Une lentille de focale $f' = +40\,\text{cm}$
(b). Une lentille de focale $f' = -12{,}5\,\text{cm}$
(c). Une lentille de focale $f' = +12{,}5\,\text{cm}$
(d). Un système afocal
(e). Rien de spécial

O3. Systèmes de lentilles

Exercices

réponses page 150

Exercice O3.1 : Distance entre un objet réel et l'écran [**]

On désire projeter un objet réel de hauteur $AB = 3\,\text{cm}$ sur un écran ditué à une distance $D = 2{,}8\,\text{m}$, à l'aide d'une lentille convergente de distance focale $f' = 7\,\text{cm}$. L'objet est orthogonal à l'axe. On note $A'B'$ l'image.

1. Comment doit être l'image (réelle/virtuelle) pour être visible sur l'écran ? Où doit se trouver AB par rapport au plan focal objet de la lentille ?
2. Calculez la distance $\overline{AO}$ entre l'objet et le centre de la lentille. On prendra la plus petite des deux solutions.
3. Calculez la taille de l'image sur l'écran. Est-elle droite ou renversée ?

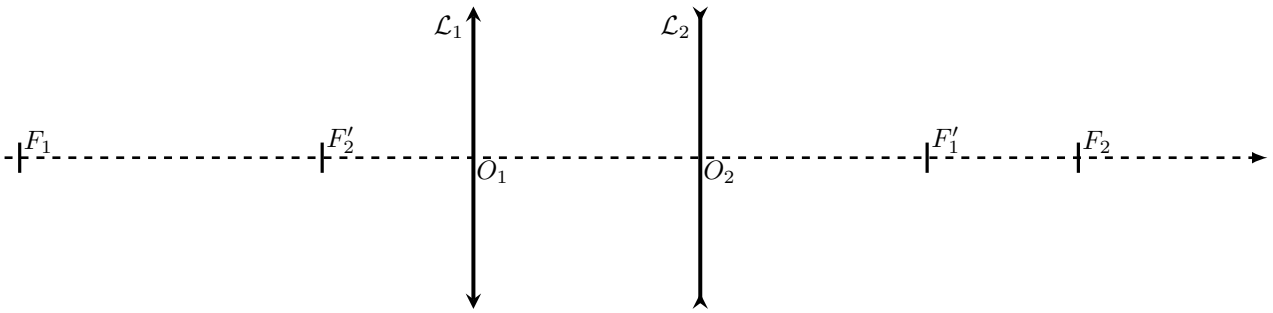
Exercice O3.2 : Projecteur de cinéma [**]

Dans une salle de cinéma, chaque photo de taille $AB = 35\,\text{mm}$ est projetée sur un écran situé à une distance $L = 28\,\text{m}$ de l'objet.
On choisit de projeter avec une lentille convergente de focale $f' = 7\,\text{cm}$

1. Calculez la distance à mettre entre l'objet et la lentille ; on prendra la plus petite des deux solutions.
   Remarque : gardez beaucoup de chiffres significatifs en vue de la question suivante.
2. Calculez la taille de l'image sur l'écran.

Exercice O3.3 : Foyers d'un téléobjectif [***]

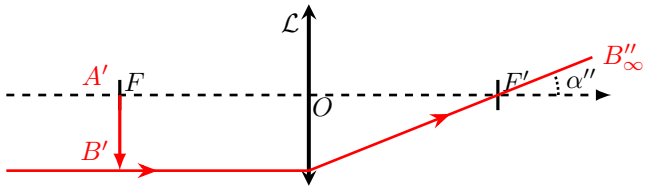
On considère un doublet optique formé d'une lentille convergent de focale $f_1' = 6\,\text{cm}$ et d'une lentille divergente de focale $f_2' = -5\,\text{cm}$ placée 3 cm après la première.



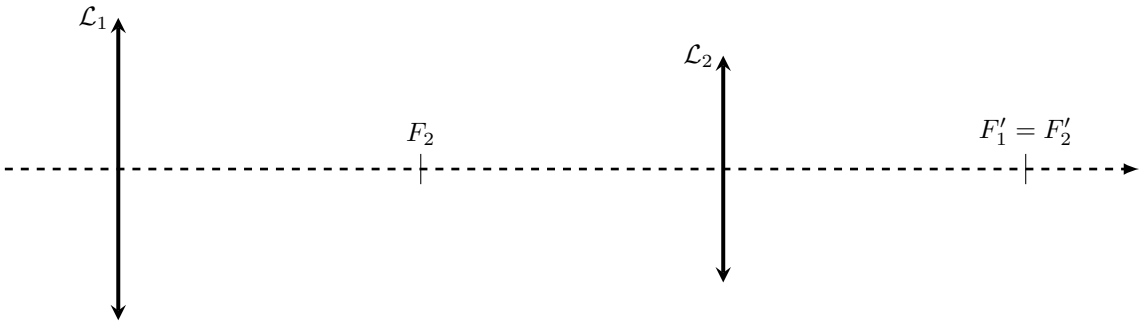
1. On prend en photo un objet $AB = 8\,\text{m}$ situé à une distance $AO_1 = 160\,\text{m}$ avant la lentille ; calculez la position et la taille de l'image.
2. Déterminez, par le calcul puis par le dessin, la position du foyer image de ce doublet.
3. Déterminez, par le calcul puis par le dessin, la position du foyer objet de ce doublet.

Exercice O3.4 : Oculaire de Huygens [**]

Le but d'un oculaire est de donner de l'image intermédiaire d'un système optique, tel qu'un microscope ou un télescope, une image finale à l'infini. Dans tout cet exercice, $A'B'$ désignera l'image intermédiaire formée par l'objectif ; ce sera l'objet de l'oculaire.
Un oculaire classique est constitué d'une seule lentille convergente de focale f_s'. On place $A'B'$ au foyer objet, et l'image finale est à l'infini.



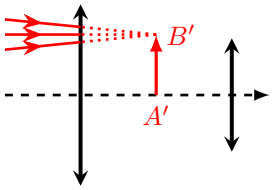
Oculaire simple



Oculaire de Huygens

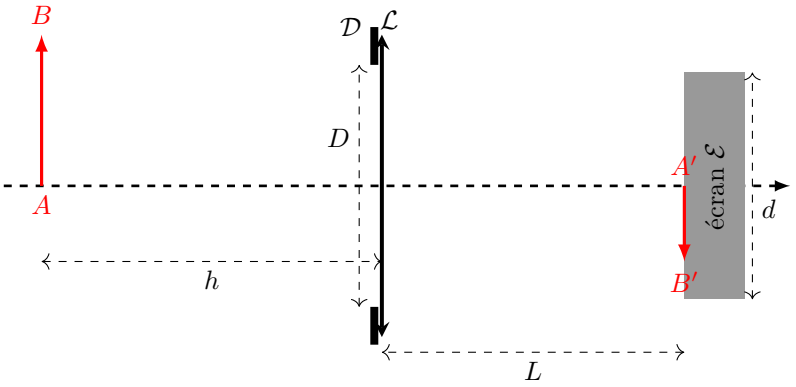
L'oculaire de Huygens est composé simplement de deux lentilles convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ placées comme sur la figure : la première a pour focale $3f'$, la seconde f', et la distance entre les deux vaut $2f'$. On notera D le diamètre de $\mathcal{L}_1$.

1. Déterminez par le dessin et par le calcul la position du foyer image F' de ce système.
2. Déterminez par le dessin et par le calcul la position du foyer objet F de ce système.
3. [***] L'oculaire de Huygens est utilisé dans des lunettes astronomiques et les télescopes, dans des conditions telles que les rayons qui convergent sur $A'B'$ (objet de la lentille $\mathcal{L}_1$, placé dans le plan focal objet) font tous un angle très faible avec l'axe optique.
L'image de l'objet $A'B'$ est vue à travers l'oculaire à l'infini, et avec un angle apparent (α'' sur le premier schéma) qui dépend de $A'B'$ et des caractéristiques des lentilles. On assimilera les angles à leur tangente.
Exprimez cet angle pour l'oculaire simple (en fonction de $A'B'$ et f'_s), puis pour l'oculaire de Huygens (en fonction de $A'B'$ et f') et déduisez-en comment choisir f' pour que l'oculaire de Huygens donne le même grossissement qu'un oculaire simple de focale f'_s.



Exercice O3.5 : L'appareil photo [**]

Le principe d'un appareil photographique est représenté sur la figure ci-dessous.



Une lentille $\mathcal{L}$ appelée *objectif*, de focale $f' > 0$, donne d'un objet réel placé à une distance h une image réelle. Un écran $\mathcal{E}$ sert à projeter cette image ; c'est sur cet écran qu'on met le capteur, à savoir la pellicule photo ou la matrice CCD. Au niveau de la lentille se trouve un cache avec une ouverture circulaire $\mathcal{D}$ appelé *diaphragme*. On supposera que le diaphragme est quasiment collé à l'objectif.

On note L la distance objectif-écran, D le diamètre du diaphragme, et d la taille du capteur (lequel est en réalité rectangulaire, mais ça ne change pas grand chose). La distance h dépend de l'objet ; L et D sont réglables par l'utilisateur.
Pour les AN : $f' = 50\,\text{mm}$ et $d = 24\,\text{mm}$.

1. *Mise au point*
   La mise au point consiste à changer la distance L pour que l'image se forme bien sur l'écran. Exprimez la distance L à mettre pour voir net un objet situé à h.
   AN pour $h = 5\,\text{m}$ et $h = \infty$.
2. *Largeur de champ de l'image*
   Exprimez le grandissement. AN pour $h = 5\,\text{m}$.
   Déduisez-en la largeur de champ à 5 m, c'est-à-dire la taille du plus gros objet situé à $5m$ dont on peut voir l'image entière sur le capteur.
3. *Profondeur de champ*
   Le premier calcul montre que L est très proche pour $h = \infty$ ou $h = 5\,\text{m}$. Si l'appareil est mis au point sur l'infini, un objet ponctuel situé à $5m$ aura son image après l'écran : il apparaîtra donc comme une tache floue.
   (a) Faites un schéma d'un appareil mis au point sur l'infini, placez un objet A à distance finie sur l'axe, et tracez le rayon issu de A et qui frappe la lentille en son bord supérieur (point C). Tracez, par la construction géométrique, le rayon émergent ; on notera E le point où ce rayon frappe l'écran. Tracez aussi la même chose symétrique en-dessous de l'axe.
   (b) On cherche à exprimer la taille a de la tache lumineuse sur l'écran. À l'aide du théorème de Thalès appliqué aux triangles AOC et $OF'E$, exprimez a en fonction de h, D et f'.
   (c) Le capteur est formé de petits détecteurs de taille b. Si la tache est plus petite qu'un détecteur, l'image restera nette ; si elle s'étale sur plusieurs détecteurs, elle apparaîtra floue.
   Déduisez-en la condition sur h pour que l'image soit nette (en fonction de b, f' et D).
   AN pour $b = 10\,\mu\text{m}$ et $D = 10\,\text{mm}$.
   (d) On appelle *profondeur de champ* la plage de valeurs de h pour lesquelles l'image reste nette, la mise au point étant faite sur l'infini.
   Comment modifier D pour avoir une grande profondeur de champ ? Quelle inconvénient cela amène-t-il ?

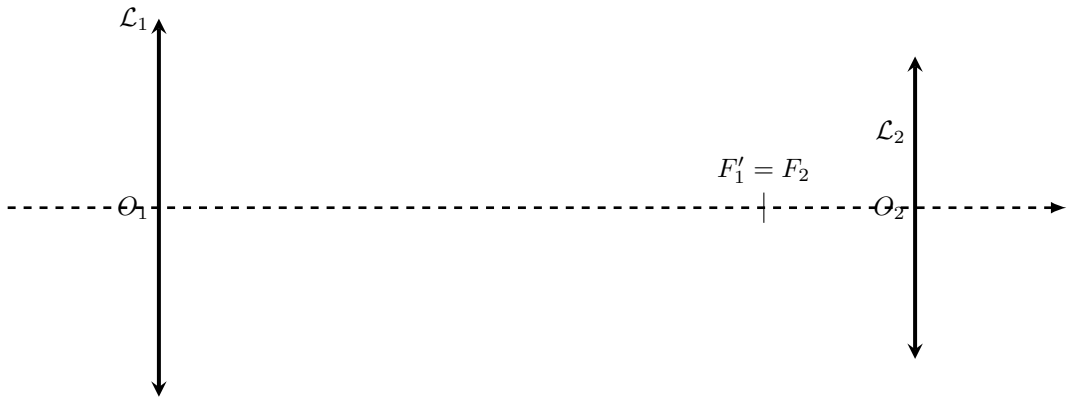
Exercice O3.6 : Latitude de mise au point d'un appareil photo [**]

Un appareil photographique est constitué d'un objectif de focale $f' = 42\,\text{mm}$ et de diamètre $D = 24\,\text{mm}$ et d'un écran contenant des pixels de taille $p = 1{,}5\,\mu\text{m}$.

1. On vise un objet situé à une distance $\ell = 3{,}2\,\text{m}$ de l'objectif. Déterminer la distance d à régler entre l'écran et l'objectif pour avoir une image nette (on gardera 6 chiffres significatifs pour la suite).
2. On suppose que l'écran est placé un peu trop près de l'objectif, à une distance $d_1 < d$; l'image formée sur l'écran est alors une tache. Exprimer et calculer la valeur de d_1 pour laquelle la tache a pour diamètre p.
3. Même question si l'écran est trop loin, à une distance $d_2 > d$.
4. Commentez la *latitude de mise au point*, c'est-à-dire la précision avec laquelle on doit faire la mise au point (placement de l'écran).

Exercice O3.7 : La lunette astronomique [**] py plot

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes, l'une notée $\mathcal{L}_1$ et appelée *objectif*, de focale $f'_1 = 50\,\text{cm}$, et l'autre notée $\mathcal{L}_2$ et appelée *oculaire*, de focale $f'_2 = 2\,\text{cm}$. Le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ est confondu avec le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$.

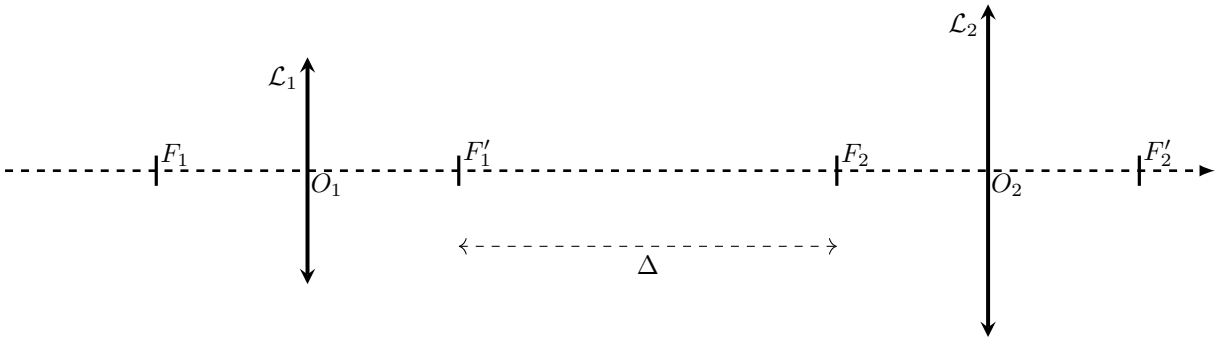


La lunette est utilisée dans les conditions de Gauss. Les angles sont orientés.

1. Soit A un objet à l'infini sur l'axe. Où se trouve son image A'' par la lunette ?
   Un tel système optique est dit *afocal*.
2. Représentez le trajet des rayons émergents associés à un faisceau incident parallèle à l'axe optique.
3. Représentez le trajet des rayons émergents associés à un faisceau incident parallèle qui fait un angle orienté α avec l'axe optique. On notera B_1 le point d'intersection de ce rayon avec le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ et α' l'angle que fait le rayon émergent de $\mathcal{L}_2$ avec l'axe optique.
4. Déterminez le grossissement (angulaire) : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction de f_1' et f_2'. Faire l'AN.
5. La lunette est en fait mal réglée : $\overline{F_1'F_2} = -1\,\text{mm}$. Calculez la position de l'image finale A''. L'œil collé à l'oculaire la voit-elle nette ?
6. Écrivez un programme en Python qui trace $\overline{O_2A''}$ en fonction de $\overline{F_1'F_2}$ variant entre $-5\,\text{mm}$ et $+5\,\text{mm}$. Commentez.

Exercice O3.8 : Le microscope [***]

Le principe d'un microscope est représenté sur la figure ci-dessous.



Deux lentilles convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, appelées *objectif* et *oculaire*, sont alignées ; on appelle *intervalle optique* la distance Δ qui sépare les foyers F_1' et F_2.
Un objet AB situé avant le foyer F_1 donne par $\mathcal{L}_1$ une image intermédiaire $A'B'$; $\mathcal{L}_2$ donne alors de $A'B'$ une image $A''B''$ située à l'infini lorsque le microscope est bien réglé.
Pour les AN : $\Delta = 16\,\text{cm}$.

1. Où doit se trouver $A'B'$ pour que $A''B''$ soit à l'infini ?
   Placez alors $A'B'$ dans ce plan, puis déduisez-en l'objet AB qui donne une telle image par $\mathcal{L}_1$.
   Tracez le **trajet complet** à travers le microscope de deux rayons issus de B.
2. Sur l'objectif, on peut lire : grandissement $60\times$. Il s'agit de l'opposé du grandissement γ de cette lentille lorsque l'intervalle optique vaut la valeur standard $\Delta = 16\,\text{cm}$ et que le microscope est bien réglé.
   Calculez f_1' à l'aide d'une formule de Newton.
   Déduisez-en $\overline{F_1A}$.

3. Sur l'oculaire, on peut lire ; grossisssement 8×. Il s'agit du *grossissement commercial* G_o de cet oculaire, qui est défini comme le rapport entre :
   — l'angle α_a sous lequel on voit l'image $A''B''$ lorsque le microscope est bien réglé, et
   — l'angle α_s sous lequel on verrait $A'B'$ à l'œil nu à une distance égale à $\delta = 25\,\text{cm}$.

   On suppose dans tous ces calculs qu'on est dans les conditions de Gauss.
   Montrez que $G_o = \frac{\delta}{f_2'}$. Déduisez-en f_2'.
4. Montrez que le grossissement commercial du microscope complet (défini comme précédemment) est donné par $G_m = \gamma G_o$. AN pour G_m.
5. *Cercle oculaire*
   Montrez par un raisonnement que tous les rayons lumineux qui passent par $\mathcal{L}_1$ puis $\mathcal{L}_2$ passent ensuite par l'image de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_2$. Cette image est appelée *cercle oculaire* ; c'est l'endroit où il faut placer son œil pour optimiser la luminosité et le champ de vision.
6. *Latitude de mise au point*
   L'œil peut voir net l'image $A''B''$ si elle est située entre l'infini et une distance de 25 cm environ. Calculez la plage de positions de l'objet AB pour lesquelles l'œil (placé en F_2') peut voir nette l'image $A''B''$. Que peut-on en conclure sur la mise au point du microscope ?

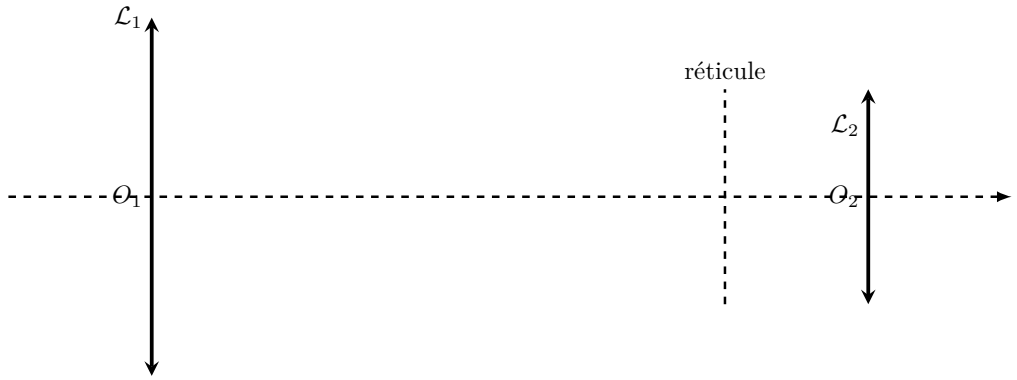
Exercice O3.9 : Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est un système optique constitué d'une lentille convergente L_1 (l'objectif) suivi d'une lentille divergente L_2 (l'oculaire), de focales respectives f_1' et f_2', placées de manière à ce que le foyer image de L_1 soit confondu avec le foyer objet de L_2.

1. Dessinez le système à l'échelle 1/2 avec $f_1' = 16\,\text{cm}$ et $f_2' = -4\,\text{cm}$.
   Faites arriver un faisceau incident parallèle à l'axe (source A à l'infini sur l'axe), et tracez son trajet jusqu'à la sortie. Comment peut-on qualifier ce système ?
2. Faites arriver un faisceau incident parallèle légèrement incliné par rapport à l'axe optique (source B à l'infini hors de l'axe). Tracez son trajet jusqu'à la sortie.
3. On note α l'angle entre les faisceaux issus de A et de B ; on note α'' l'angle en sortie entre les faisceaux allant vers A'' et B''. On se place dans les conditions de Gauss.
   Par de la trigonométrie, reliez α et α'' à $A'B'$, f_1' et f_2'. Déduisez-en l'expression du grossissement $G = \frac{\alpha''}{\alpha}$. Faites l'AN. Précisez son signe.
4. L'intérêt de la lunette de Galilée est que l'image est droite. On peut donc s'en servir pour une observation terrestre.
   Supposons que l'objet A soit maintenant situé à 20 m de l'objectif. Calculez la position de l'image intermédiaire A' puis de l'image finale A''.
   Indication : gardez bien tous les chiffres indiqués par la calculatrice pour la position de A'.
   L'œil de l'observateur est placé 0,5 cm après l'oculaire. Peut-il voir cette image A'' nette ?

Exercice O3.10 : Lunette et viseur à frontale fixe (d'après une vieille annale) [***]

On étudie un viseur à frontale fixe. Il s'agit d'un système optique permettant de pointer un objet, c'est-à-dire de déterminer sa position par rapport au viseur. Ce système est dérivé d'une lunette qui est étudiée dans la partie 1.



1. **Caractéristiques de la lunette**

   Une lunette est constituée d'un objectif, d'un réticule (croix servant d'objet pour les réglages), et d'un oculaire, dans cet ordre. On admettra, pour simplifier, que l'objectif et l'oculaire sont des lentilles minces de centres respectifs O_1 et O_2 et de focales respectives f_1' et f_2'. L'axe optique est orienté de l'objectif vers l'oculaire.

   (a) L'utilisateur veut observer sans effort le réticule à travers l'oculaire ; pour cela, il faut que son image soit à l'infini. Quelle est alors la position du plan du réticule par rapport à l'oculaire ?

   (b) Le réglage de la lunette doit permettre l'observation sans fatigue de l'image d'un objet situé à grande distance (infini) à travers le système {objectif+oculaire} ; pour cela, il faut que l'image soit à l'infini. Quelle est la distance $\overline{O_1O_2}$ dans ce cas ? Comment qualifie-t-on le système ainsi réalisée ?

   (c) Représentez sur un schéma, *sans respecter les échelles*, le devenir d'un faisceau parallèle incident faisant un angle α avec l'axe optique, et émergeant sous un angle α'.

   Etablissez l'expression du grossissement G de la lunette dans les conditions de Gauss, défini par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

   A.N. : calculez $\overline{O_1O_2}$ et G pour $f_1' = 8{,}0\,\text{cm}$ et $f_2' = 3{,}0\,\text{cm}$.

   (d) Lorsqu'on observe une étoile à l'œil, elle paraît ponctuelle ; à l'aide de la lunette, l'image paraît encore ponctuelle. Quel est alors l'intérêt de la lunette ?

   (e) *Limite de résolution* : le pouvoir séparateur est l'angle minimal que doivent avoir deux faisceaux parallèles entrant dans l'objectif pour qu'on puisse les distinguer en sortie. On admet qu'il est donné théoriquement par $\theta = 1,22\frac{\lambda}{D}$, où λ est la longueur d'onde et D le diamètre de l'objectif.

      i. Quel est le phénomène responsable de cette limite ?

      ii. Quelles sont les autres causes de limitation du pouvoir séparateur réel ?

   (f) *Cercle oculaire* : on appelle cercle oculaire l'image de l'objectif (supposé de forme circulaire) par l'oculaire.

      i. Justifiez soigneusement que tout rayon qui entre par l'objectif et qui passe par l'oculaire passe ensuite par le cercle oculaire.

      ii. Etablissez la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif, et le grossissement G (conseil : utilisez l'expression du grandissement par les relations de Newton).

      iii. Exprimez et calculez la position du centre C du cercle oculaire par rapport au foyer image de l'oculaire.

2. **Transformation en viseur à frontale fixe par déplacement de l'objectif**

   Le but d'un viseur est de viser des objets à distance finie, c'est-à-dire de donner d'un objet à une distance finie de l'objectif, une image à l'infini en sortie de l'oculaire. On gardera les mêmes distances focales qu'à la question 1c.

   Pour cela, on éloigne l'objectif de l'oculaire, de telle sorte qu'un objet situé à une distance $H > 0$ en avant de l'objectif, donne à travers le viseur une image que l'observateur observe sans effort.

   (a) Exprimer la nouvelle distance $\Delta = \overline{O_1O_2}$ en fonction de H.

   A.N. : $H = 24\,\text{cm}$

   (b) *Latitude de mise au point* : on admet que l'observateur peut voir nettes des images situées entre l'infini et $d_m = 25\,\text{cm}$. Les positions respectives des lentilles ne sont pas modifiées (Δ garde la valeur précédente).

L'œil est placé au foyer image de l'oculaire. Quelles sont les positions extrêmes de l'objet réel A pour lesquelles l'observateur voit nette l'image donnée par le viseur ? En déduire la taille de la plage de positions de l'objet pour lesquelles on voit net.

Ne pas chercher pas une expression littérale complète, mais des valeurs numériques.

O3. Systèmes de lentilles

TDs numériques

réponses page 157

TD numérique : Doublet achromatique

plot

Dans ce TD, on considérer comment la combinaison de deux lentilles bien choisies permet de diminuer considérablement l'aberration chromatique.

1. **Aberration chromatique d'une lentille simple**

   (a) On admet que la distance focale d'une lentille varie proportionnellement à $\frac{1}{n-1}$ où n est l'indice du verre qui la compose. Si on prend une référence à la longueur d'onde $\lambda_D = 589\,\text{nm}$, et si on note f'_D la distance focale à cette longueur d'onde, alors la distance focale f' à la longueur d'onde λ vaut

   $$f'(\lambda) = f'_D \frac{n(\lambda_D) - 1}{n(\lambda) - 1} \tag{1}$$

   Écrivez une fonction `fprime(fpD,nD,n)` qui calcule cette distance focale, où `n` représente $n(\lambda)$ et `nD` représente $n(\lambda_D)$.

   (b) L'indice d'un verre est donné par la relation de Cauchy :

   $$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{2}$$

   avec λ en nm et A et B deux constantes qui dépendent du type de verre. Pour un verre Crown, $A = 1{,}46$ et $B = 5200\,\text{nm}^{-2}$; pour un verre Flint, $A = 1{,}62$ et $B = 18\,000\,\text{nm}^{-2}$.

   Écrivez deux fonctions `nC(lam)` et `nF(lam)` qui renvoient les indices optiques de ces deux verres à la longueur d'onde `lam` en nm.

   (c) On considère une lentille convergente de distance focale $f'_D = 11\,\text{cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown.

   — Générez un tableau de longueurs d'ondes couvrant tout le visible (en nm) ; ne l'appelez pas `lambda`, ce terme est réservé par Python ; appelez-le plutôt `tab_lambda` ou `tab_l`.

   — Calculez le tableau des indices du verre Crown pour ces longueurs d'onde, puis le tableau des distances focales de la lentille.

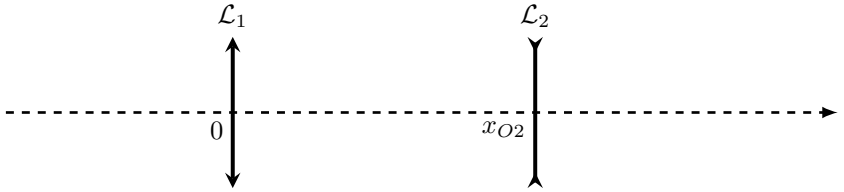
   — Tracez la distance focale en fonction de la longueur d'onde. Mesurez l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale ; commentez.

2. **Doublet achromatique**

   Pour diminuer l'aberration chromatique, on remplace cette lentille par un doublet constitué :

   — d'une lentille convergente de focale $f'_{1D} = 6\,\text{cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown, placée en $x_{O_1} = 0\,\text{cm}$

   — d'une lentille divergente de focale $f'_{2D} = -12\,\text{cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Flint, placée en $x_{O_2} = 0{,}5\,\text{cm}$



   (a) À partir du tableau des longueurs d'ondes, calculez les tableaux des indices des verres Crown et Flint, et les tableaux des distances focales des deux lentilles aux longueurs d'ondes correspondantes.

   (b) Pour trouver la position du foyer image de ce doublet, on va partir d'un objet à l'infini :

   $$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$$

   Où se trouve le point A_1 ? Construisez le tableau `tab_x1` des positions correspondantes.

(c) On sait par la loi de conjugaison de Descartes que $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}$. Si on note x_1 l'abscisse de A_1, x_{O2} l'abscisse de la lentille et x_2 l'abscisse de l'image, alors on peut écrire que $\overline{O_2A_1} = x_1 - x_{O2}$ et $\overline{O_2A_2} = x_2 - x_{O2}$; la relation de Descartes devient alors $\frac{1}{x_2 - x_{O2}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{x_1 - x_{O2}}$. Après quelques calculs (admis), on en déduit que

$$x_2 = x_{O2} + \frac{(x_1 - x_{O2}).f'_2}{x_1 - x_{O2} + f'_2} \tag{3}$$

Calculez alors le tableau `tab_x2` des positions de A_2. Que représente ce point pour le doublet ?

(d) Tracez la position de A_2 en fonction de la longueur d'onde ; commentez.

3. **Objet à distance finie**

Pour les deux systèmes étudiés (lentille seule puis doublet), tracez, pour une distance objet-lentille variant entre 100 m et 15 cm, l'écart Δ entre la position de l'image à 400 nm et la position de l'image à 800 nm.

Remarque : les valeurs d'abscisses variant sur plusieurs ordres de grandeur, on verra mieux en traçant $\log(AO)$ en abscisses.

TD numérique : Zoom

Un zoom est un assemblage lentilles dont on peut faire bouger une des lentilles, de manière à modifier la taille de l'image finale. On va, dans ce TD, étudier deux zooms simples. Comme ils contiennent plusieurs lentilles, on va utiliser Python pour calculer les positions et les dimensions des images successives. Pour cela, en repartant des lois de Descartes $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, et en écrivant que $\overline{OA} = x_A - x_O$ et $\overline{OA'} = x_{A'} - x_O$ pour une lentille de focale f' placée en x_O donnant d'un objet à l'abscisse x_A une image à l'abscisse $x_{A'}$, alors on obtient les relations suivantes ;

$$x_{A'} = x_O + \frac{(x_A - x_O).f'}{x_A - x_O + f'} \tag{1}$$

$$\gamma = \frac{x_{A'} - x_O}{x_A - x_O} \tag{2}$$

1. **Préliminaires**

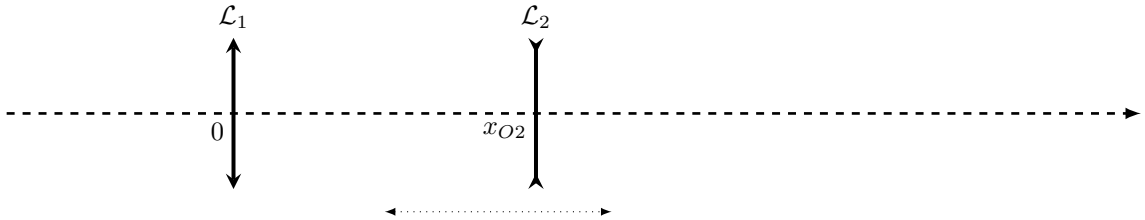
(a) Définissez une fonction `xImg(xObj,xLen,fp)` qui renvoie la position de l'image en fonction de la position de l'objet et celle de la lentille, en utilisant la formule (1).

(b) Écrivez une fonction `gamma(xObj,xLen,xImg)` qui renvoie le grandissement à l'aide de la formule (2).

2. **Zoom à deux lentilles**

Ce zoom n'est pas utilisé tel quel, mais il montre le principe de base de tout zoom.

On considère un système de deux lentilles : la lentille 1 à l'abscisse $x_{O1} = 0$ mm de focale $f'_1 = 36$ mm, et une lentille 2 à une abscisse x_{O2} variable, de focale $f'_2 = -60$ mm.



On observe un arbre de taille $A_0B_0 = 16$ m situé à une distance de 400 m **avant** la lentille. Cet objet donne image par la lentille 1, puis par la lentille 2, selon le schéma :

$$A_0B_0 \overset{\mathcal{L}_1}{\to} A_1B_1 \overset{\mathcal{L}_2}{\to} A_2B_2$$

(a) Que vaut x_{A0} ? Calculez, à l'aide des deux fonctions préliminaires, la position `xA1` et la taille `h1`$= \overline{A_1B_1}$ de cette image.

Rappel : par définition, $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}}$.

(b) Créez un tableau `tab_xO2` représentant les différentes positions possibles de la lentille 2, qu'on fera varier entre 2 mm et 34 mm.

(c) La lentille 2 donne de A_1B_1 une image A_2B_2 ; chaque position de la lentille 2 donne une image différente.

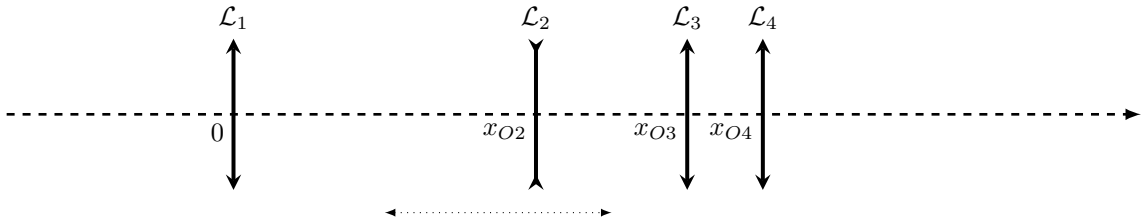
Créez deux tableaux `tab_xA2` et `tab_h2` contenant la position et la taille de l'image finale pour chaque valeur de x_{O2}.

(d) Tracez ces deux tableaux en fonction de la position de la lentille. A-t-on bien réalisé un zoom à grandissement variable ? La mise au point est-elle faisable ?

3. **Zoom à 4 lentilles**

Le zoom le plus simple qui soit utilisable est constitué de 4 lentilles ; on considère ici :

— une lentille 1 en $x_{O1} = 0\,\text{mm}$ de focale $f'_1 = 72\,\text{mm}$
— une lentille 2 en x_{O2} variant entre 4 mm et 32 mm de focale $f'_2 = -27\,\text{mm}$
— une lentille 3 en $x_{O3} = 36\,\text{mm}$ de focale $f'_3 = 72\,\text{mm}$
— une lentille 4 en $x_{O4} = 40\,\text{mm}$ de focale $f'_4 = 36\,\text{mm}$



Reprenez la même étude, jusqu'à l'image finale de la lentille 4.

4. *Question supplémentaire* : tracez la dispersion chromatique du zoom à 4 lentilles en utilisant les données du TD précédent, les 3 lentilles convergentes étant en verre Crown et la divergente en verre Flint.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(a)
Une lentille divergente peut avoir une image réelle si son objet est virtuel et situé pas trop loin ; mais si l'objet est réel, alors seule la lentille convergente peut en donner une image réelle.
Q3.(b)
Q4.(b)
Oui car $D > 4f'$.
Q5.(a)
$f' = \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}\right)^{-1}$
Q6.(b)

Réponses au QCM : Doublets de lentilles

Q7.(c)
Les lentilles sont accolées, donc $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.
Q8.(b)
Q9.(d)
Les lentilles sont accolées.
Q10.(d)
Il est facile de voir que la distance entre les deux lentilles est égale à la somme des distances focales, de sorte que $F'_1 = F_2$.
Q11.(a)
Q12.(d)
La distance entre les deux lentilles est égale à la somme des distances focales, de sorte que $F'_1 = F_2$; et cela même si la seconde lentille est divergente. Il s'agit, non pas d'une lunette astronomique, mais d'une lunette de Galilée.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice O3.1 : Distance entre un objet réel et l'écran [**]

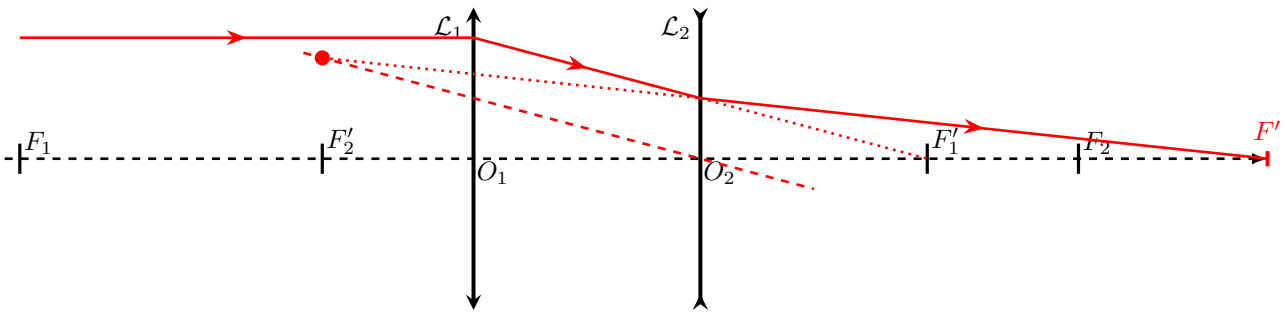
1. Une image visible sur un écran est une image réelle. Cela signifie que AB doit être situé avant le foyer objet de la lentille.
2. Posons $x = \overline{AO}$ pour simplifier. On sait que $AA' = D$. On peut trouver par la relation de Chasles : $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = f' - x$ et de même $\overline{F'A'} = -f' - x + D$. La relation de conjugausin de Newton s'écrit donc $(f' - x)(D - f' - x) = -f'^2$ soit $f'.D - f'^2 - f'.x - D.x + f'.x + x^2 = -f'^2$ soit $x^2 - D.x + f'.D = 0$. On trouve comme solutions $x = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4.D.f'}}{2}$ et on garde la plus petite, ce qui donne $\overline{AO} = x = 7{,}18\,\text{cm}$
3. Par Descartes, on sait que $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D-x}{-x} = -38$ donc l'image a pour hauteur 1,14 m.

Corrigé de l'exercice O3.2 : Projecteur de cinéma [**]

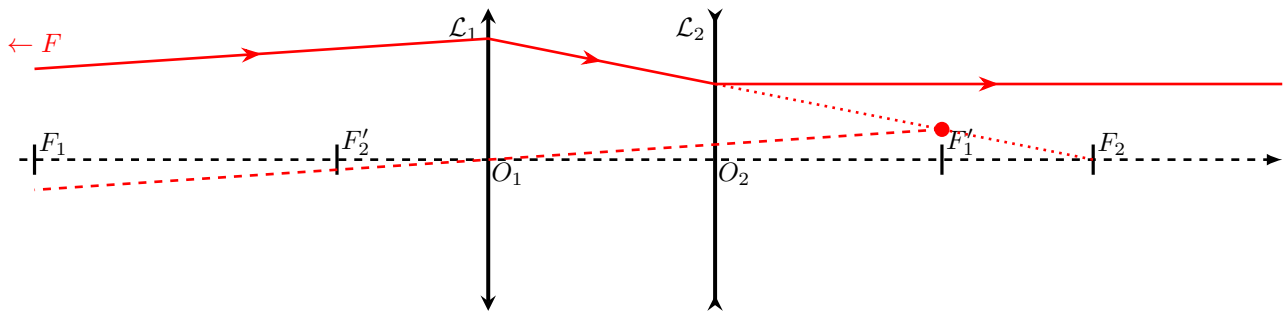
1. C'est toujours le même calcul (cf. exercice précédent) qui aboutit à l'équation $x^2 - L.x + L.f' = 0$ avec $x = \overline{AO}$. On trouve donc $x = 7{,}0176\,\text{cm}$
2. Il y a diverses solutions, en fonction de la formule de grandissement qu'on utilise. Le plus rapide ici : $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = -0{,}0176\,\text{cm}$ d'où $\gamma = \frac{7}{-0{,}0176} = -398$. On en déduit que l'image aura comme taille $A'B' = 398 \times 0{,}035 = 13{,}9\,\text{m}$.

Corrigé de l'exercice O3.3 : Foyers d'un téléobjectif [***]

1. L'objet est en $\overline{O_1A} = -160\,\text{m}$. Par les lois de conjugaison de Descartes, on calcule $\overline{O_1A'} = 6{,}0023\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_1 = -0{,}000\,375$ donc $A'B' = 3\,\text{mm}$.
   On a alors $\overline{O_2A'} = 3{,}0023\,\text{cm}$ d'où on tire, par les lois de conjugaison de la lentille 2 : $\overline{O_2A''} = 7{,}5\,\text{cm}$. On en déduit que $\gamma_2 = 2{,}5$ donc l'image finale a pour taille $A''B'' = 7{,}5\,\text{mm}$.
2. Par définition de F' : $\infty \overset{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{\to} F'$. En décomposant, on trouve $\infty \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_1' \overset{\mathcal{L}_2}{\to} F'$. En appliquant les relations de conjugaison à la lentille 2, on trouve donc $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'}$ donc $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{3} = \frac{1}{-5}$; on en tire $\overline{O_2F'} = 7{,}5\,\text{cm}$.

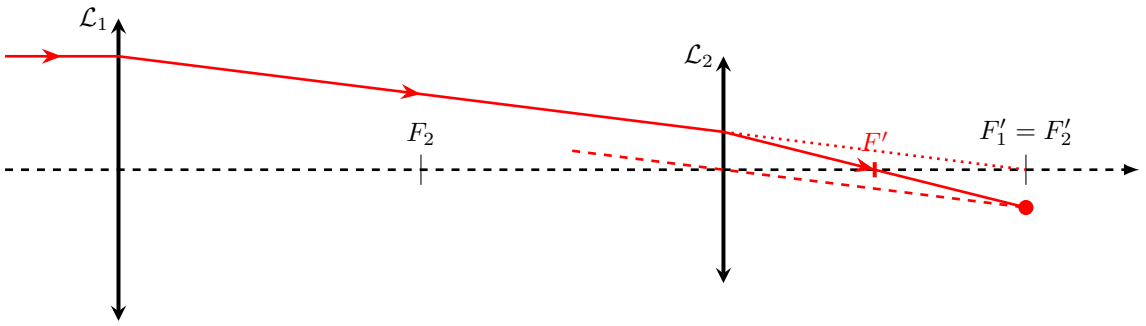


3. Par définition de F : $F \overset{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{\to} \infty$. En décomposant, on trouve $F \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_2 \overset{\mathcal{L}_2}{\to} \infty$. En appliquant les relations de conjugaison à la lentille 1, on trouve donc $\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$ donc $\frac{1}{8} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{6}$; on en tire $\overline{O_1F} = -24\,\text{cm}$.

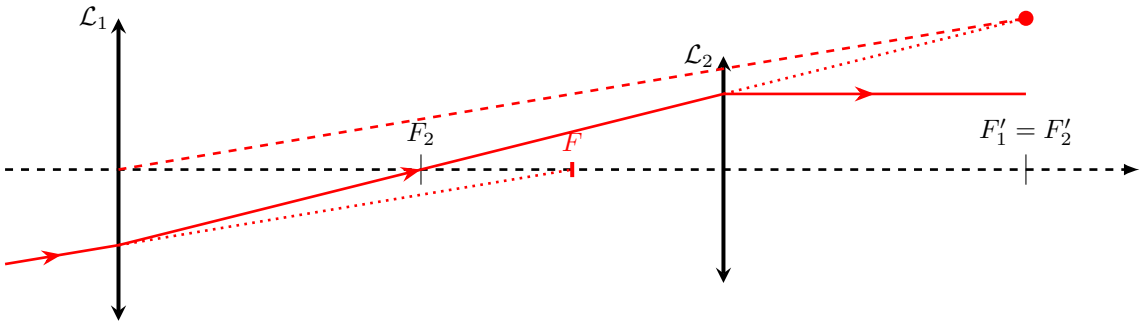


Corrigé de l'exercice O3.4 : Oculaire de Huygens [**]

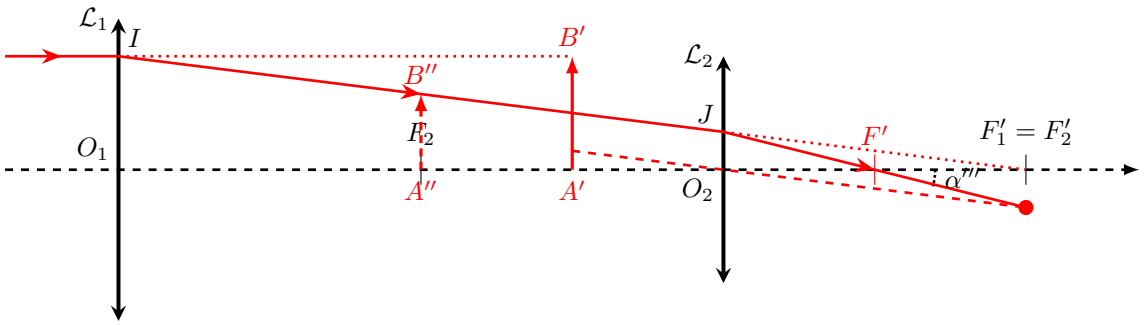
1. Par définition de F' : $\infty \overset{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{\to} F'$. En décomposant, on trouve $\infty \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_1' \overset{\mathcal{L}_2}{\to} F'$. En appliquant les relations de conjugaison à la lentille 2, on trouve donc $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f'}$ donc $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'}$; on en tire $\overline{O_2F'} = \frac{f'}{2}$.
   Par le dessin :



2. Par définition de F : $F \overset{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{\to} \infty$. En décomposant, on trouve $F \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_2 \overset{\mathcal{L}_2}{\to} \infty$. En appliquant les relations de conjugaison à la lentille 1, on trouve donc $\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{3f'}$ donc $\frac{1}{f'} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{3f'}$; on en tire $\overline{O_1F} = \frac{3f'}{2}$.
   Par le dessin :



3. Pour l'oculaire simple, il est facile de voir que $\alpha'' \approx \tan\alpha'' = \frac{A'B'}{f_s'}$.
   Pour l'oculaire de Huygens, on refait un dessin, sachant que $A'B'$ est dans le plan de F donc $A''B''$ sera dans le plan de F_2.

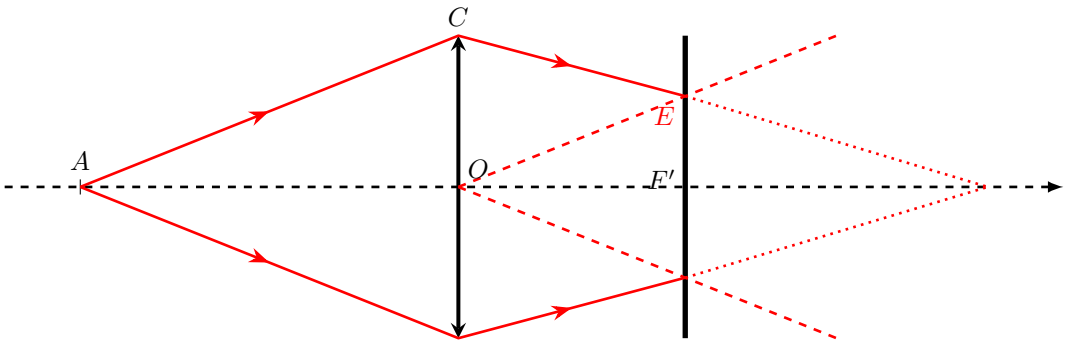


   Par Thalès dans $F_1'O_1I$ et $F_1'O_2J$: $\frac{O_2J}{O_1I} = \frac{F_1'O_2}{F_1'O_1}$ soit $\frac{O_2J}{A'B'} = \frac{f'}{3f'}$ d'où on tire $O_2J = \frac{A'B'}{3}$.
   Dans le triangle $F'O_2J$: $\alpha''' = \tan\alpha''' = \frac{O_2J}{O_2F'} = \frac{A'B'/3}{f'/2} = \frac{2}{3}\frac{A'B'}{f'}$.
   On voit qu'on aura le même angle en sortie si on choisit $f' = \frac{2}{3}f_s'$.

Corrigé de l'exercice O3.5 : L'appareil photo [**]

1. Il faut faire attention que h est la distance non algébrique AO ; ici on a donc $\overline{OA} = -h$ donc par la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{L} - \frac{1}{-h} = \frac{1}{f'}$ donc $\frac{1}{L} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{h} = \frac{h-f'}{h.f'}$. On en tire $L = \frac{h.f'}{h-f'}$.
   AN : si $h = \infty$ alors $L = f' = 50\,\text{mm}$; si $h = 5\,\text{m}$ alors $L = 50{,}5\,\text{mm}$

2. $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{L}{-h} = -\frac{f'}{h-f'} = -0{,}01$. Si on veut que l'image entre dans le capteur, il faut que $A'B' < d$, or $AB = \frac{A'B'}{|\gamma|}$ donc il faut que $AB < \frac{d}{|\gamma|} = 2{,}4\,\text{m}$
3. (a)



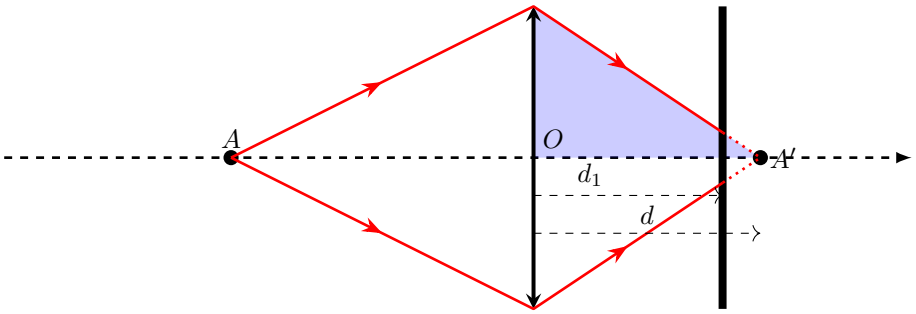
(b) $(AC) /\!/ (OD)$ donc par le théorème de Thalès : $\frac{D/2}{a/2} = \frac{h}{f'}$ d'où $a = \frac{D.f'}{h}$.

(c) L'image est nette si $a < b$ soit $h > \frac{D.f'}{b} = 50\,\text{m}$.

(d) La profondeur de champ augmente si l'intervalle $[h;\infty[$ augmente, donc si h diminue. Pour cela, il faut diminuer D, mais alors on perd en luminosité.

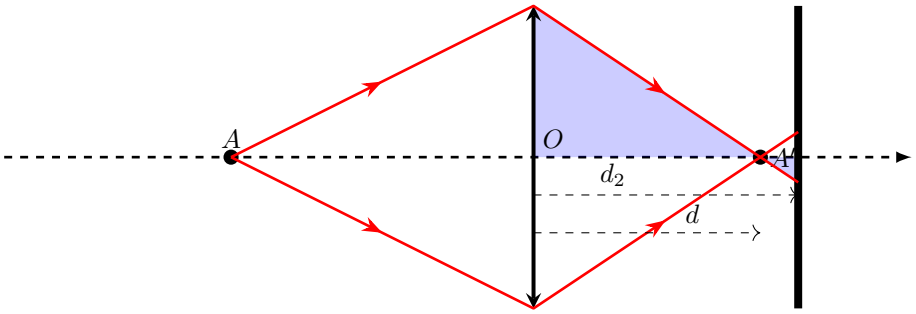
Corrigé de l'exercice O3.6 : Latitude de mise au point d'un appareil photo [**]

1. Par les lois de conjugaison de Descartes : $d = \frac{1}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{\ell}} = 42{,}5586\,\text{mm}$.
2. La lumière converge à d mais l'écran est en $d_1 < d$:



En appliquant Thalès dans les deux triangles coloriés, on trouve que $\frac{d_1}{d-d_1} = \frac{D/2}{p/2} = \frac{D}{p}$ donc $d_1 = \frac{D}{D+p}d = 42{,}5559\,\text{mm}$.

3. En faisant un schéma dans l'autre position :

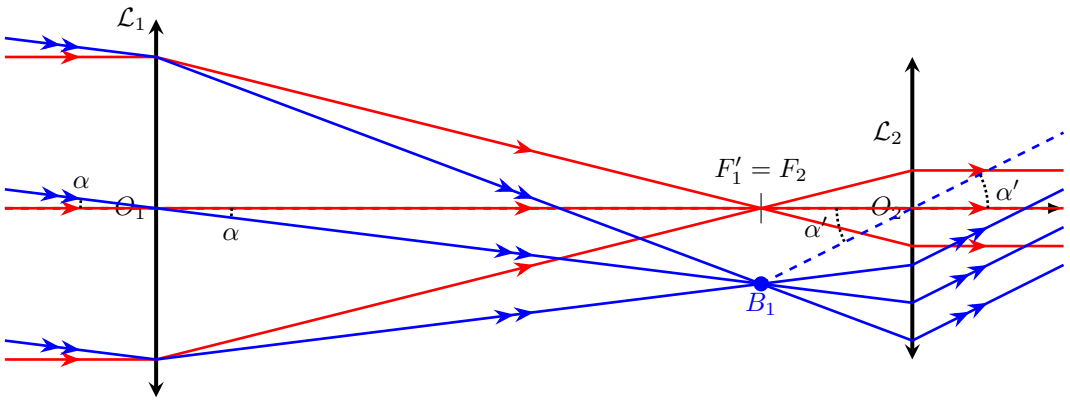


on trouve par Thalès $\frac{d_2}{d_2-d} = \frac{D/2}{p/2} = \frac{D}{p}$ donc $d_2 = \frac{D}{D-p}d = 42{,}5612\,\text{mm}$.

4. La latitude de mise au point vaut donc $d_2 - d_1 = 5{,}3\,\mu\text{m}$: il faut des actionneurs micrométriques et une mécanique très précise.

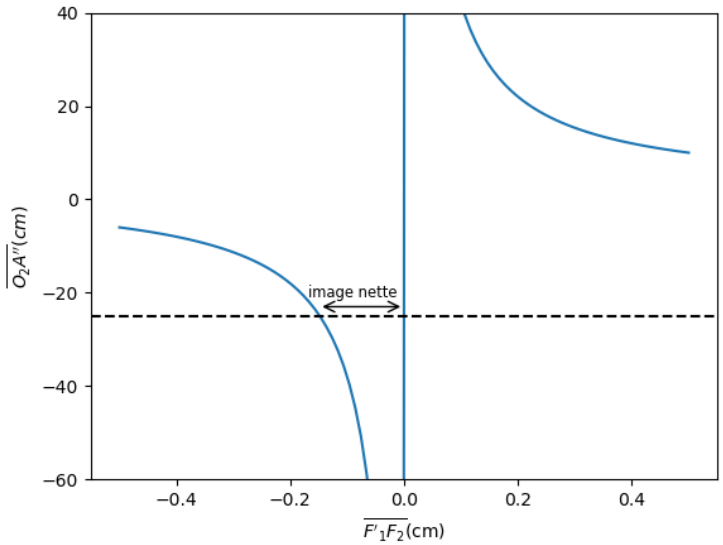
Corrigé de l'exercice O3.7 : La lunette astronomique [**]

1. $\infty \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_1' = F_2 \overset{\mathcal{L}_2}{\to} \infty$.
2. Faisceau rouge



3. Faisceau bleu
4. Dans le triangle $B_1F_1'O_1$: $\alpha = \tan\alpha = \frac{F_1'B_1}{F_1'O_1} = \frac{F_1'B_1}{f_1'}$
   Dans le triangle $B_1F_1'O_2$: $\alpha' = \tan\alpha' = \frac{F_1'B_1}{F_1'O_2} = \frac{F_1'B_1}{f_2'}$
   Donc $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{F_1'B_1}{f_2'}\frac{f_1'}{F_1'B_1} = \frac{f_1'}{f_2'}$. On n'a pas tenu compte des signes, mais d'après le schéma on voit que l'image est inversée, donc au final $G = -\frac{f_1'}{f_2'}$. AN : $G = -25$
5. On a $\infty \overset{\mathcal{L}_1}{\to} F_1' \overset{\mathcal{L}_2}{\to} A''$ donc par les lois de conjugaison de Newton à la lentille 2 : $\overline{F_2'A''} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2F_1'}} = -40\,\text{cm}$ d'où $\overline{O_2A''} = -38\,\text{cm}$: l'œil la verra nette puisqu'elle est virtuelle et située à plus de 25 cm.
6.

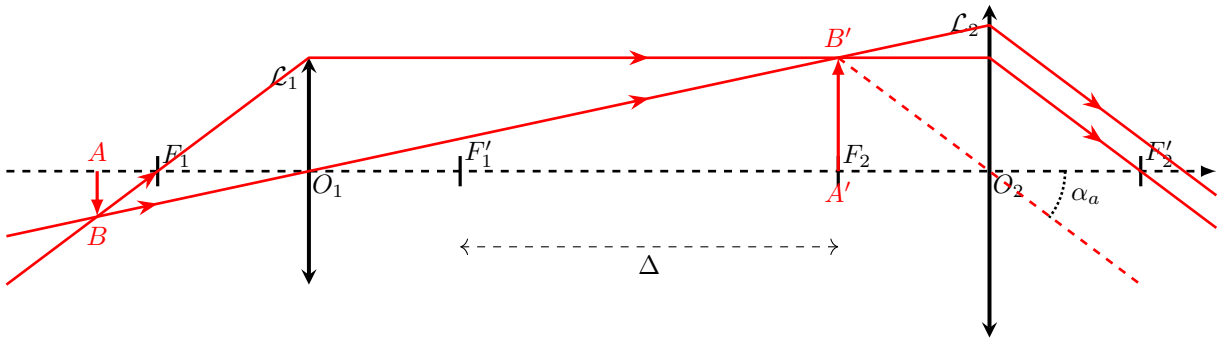
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
fp1,fp2=50,2 # en cm
tab_Fp1F2=np.linspace(-0.5,0.5,100)
tab_Fp2App=-fp2**2/(-tab_Fp1F2)
tab_O2App=-fp2+tab_Fp2App
plt.figure()
plt.plot(tab_Fp1F2,tab_O2App)
plt.xlabel(r"$\overline{F'_1F_2}$(cm)")
plt.ylabel(r"$\overline{O_2A''}$(cm)")
plt.ylim([-50,50])
plt.axhline(-25,linestyle="--",color="black")
plt.show()
```



L'œil voit net si $\overline{O_2A''} < -25\,\text{cm}$ soit $\overline{F_1'F_2} \in [-1{,}5\,\text{mm}; 0\,\text{mm}]$: la précision du réglage est importante.

Corrigé de l'exercice O3.8 : Le microscope [***]

1. Pour que A'' soit à l'infini, il faut que A' soit au foyer objet de la seconde lentille. On place donc $A'B'$ dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$, on en déduit $A''B''$, et AB en revenant en arrière.



2. $\gamma = -60$ or $\gamma = \frac{\overline{F'_1A'}}{\overline{F'_1O}} = -\frac{\Delta}{f'_1}$ d'où on tire $f'_1 = \frac{-\Delta}{\gamma} = 2{,}67\,\text{mm}$

   Alors $\overline{F_1A} = \frac{-f'^2_1}{\Delta} = -44{,}4\,\mu\text{m}$

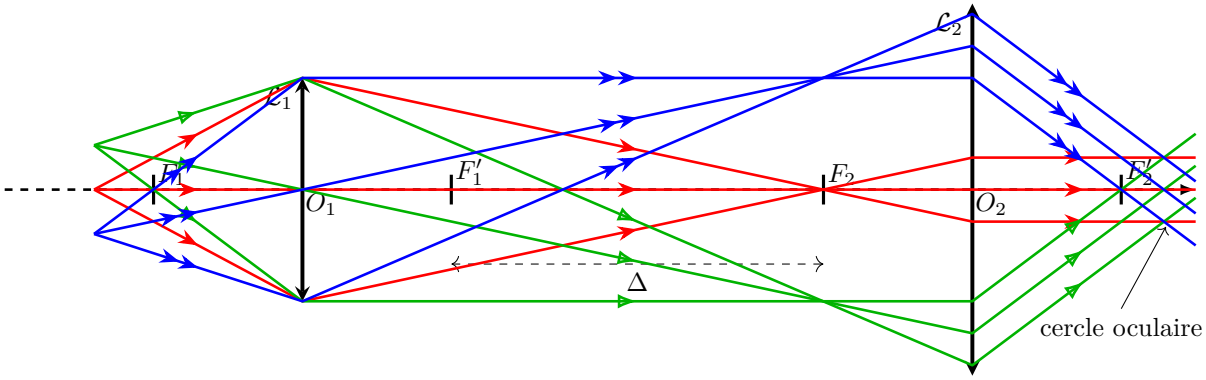
3. Un simple schéma avec un objet $A'B'$ situé à une distance δ de l'œil permet d'écrire $\alpha_s = \tan\alpha_s = \frac{A'B'}{\delta}$.

   D'après la figure précédente, dans le triangle $A'B'O_2$: $\alpha_a = \tan\alpha_a = \frac{A'B'}{f'_2}$.

   Donc $G_o = \frac{A'B'}{f'_2}\frac{\delta}{A'B'} = \frac{\delta}{f'_2}$. On en tire $f'_2 = 31{,}3\,\text{mm}$

4. Dans cette question, $\alpha_s = \frac{AB}{\delta}$ car l'objet du microscope est AB, donc $G_m = \frac{A'B'}{f'_2}\frac{\delta}{AB} = \gamma.G_o = 480\times$

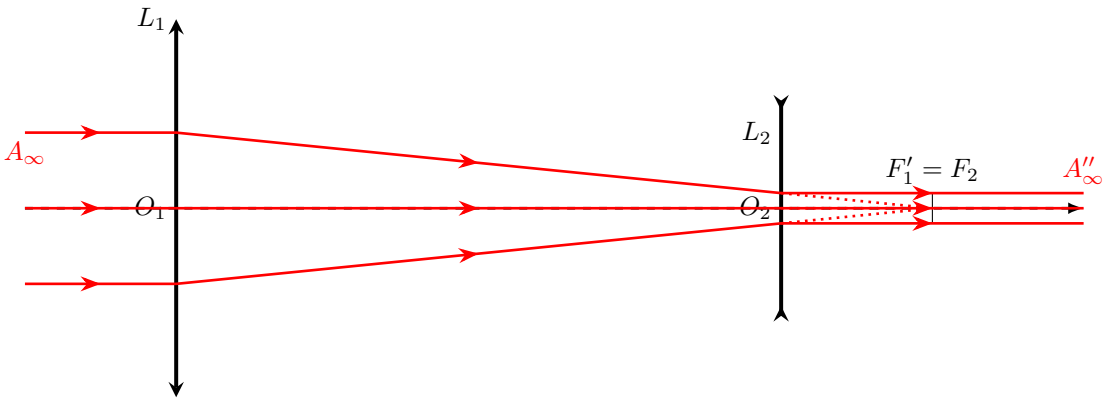
5. Tout rayon qui entre dans le microscope passe par l'objectif. Donc tous les rayons qui arrivent sur l'oculaire semblent provenir d'un point de l'objectif, donc les rayons émergents passeront par l'image de l'objectif par l'oculaire : c'est ce qu'on appelle le cercle oculaire.

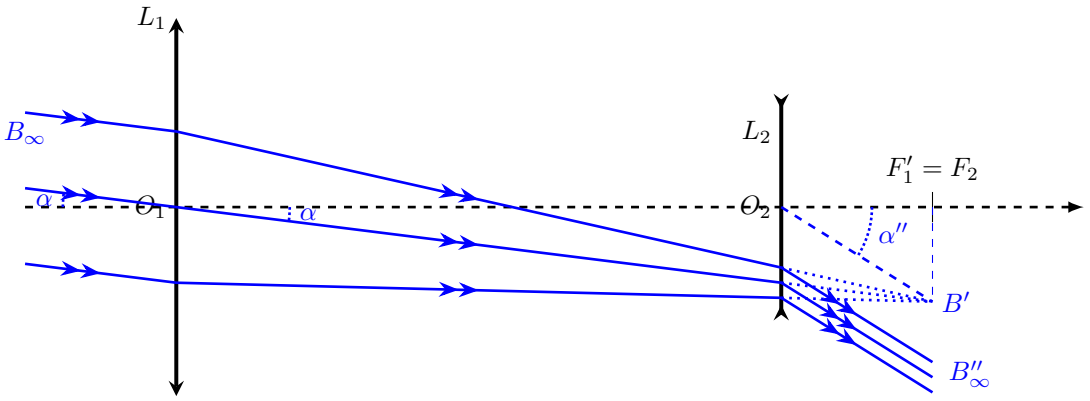


6. On a déjà montré que si $\overline{F_1A} = -44{,}4\,\mu\text{m}$ alors l'image finale est à l'infini.

   Considérons l'autre cas : l'œil est en F'_2 et l'image est située à 25 cm, à sa gauche bien sûr (l'œil regarde vers le microscope). On a donc $F'_2A'' = -25\,\text{cm}$. Par les lois de conjugaison de Newton, on trouve facilement que $F_2A' = 0{,}39\,\text{cm}$ (positif : l'objet est situé après le foyer objet, donc l'image est bien virtuelle). Par la relation de Chasles : $\overline{F'_1A'} = 16{,}39\,\text{cm}$. Par les lois de Newton : $\overline{F_1A} = -43{,}4\,\mu\text{m}$. Il y a donc une tranche de 1 µm à peine qui est vue nette en sortie.

Corrigé de l'exercice O3.9 : Lunette de Galilée

1.


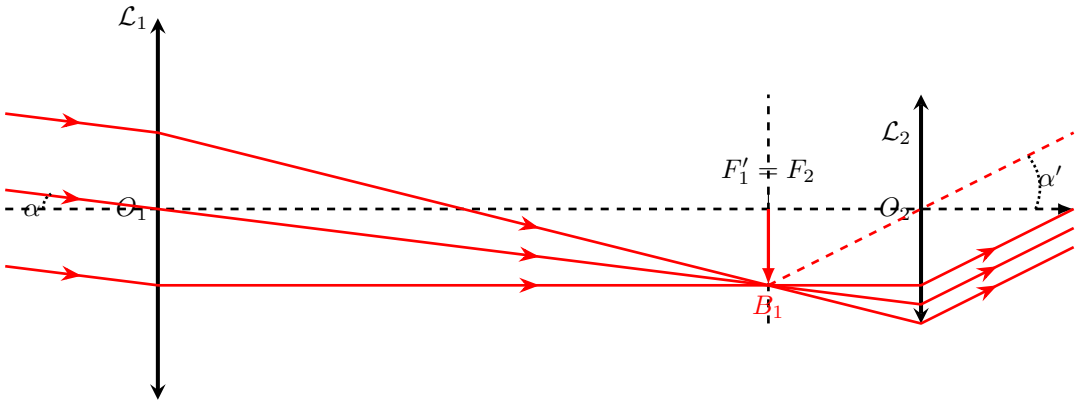
2.


3. Dans $O_1A'B'$: $\alpha \approx \tan\alpha = \frac{A'B'}{f_1'}$; dans $O_2A'B'$: $\alpha'' \approx \tan\alpha'' = \frac{A'B'}{|f_2'|}$. On en déduit que $G = \frac{f_1'}{|f_2'|}$; pour le signe, on voit que c'est bien positif, car les rayons incidents se dirigeant vers le bas émergent en se dirigeant encore vers le bas.

4. Au départ $\overline{O_1A} = -20\,\text{m}$ ou $\overline{F_1A} = -19{,}84\,\text{cm}$
On en déduit par les lois de Newton que $\overline{F_1'A'} = 1{,}3\,\text{mm} = \overline{F_2A'}$ donc $\overline{F_2'A''} = -1{,}24\,\text{m}$
L'œil de l'observateur voit A'' nette (car située à plus de 25 cm)

Corrigé de l'exercice O3.10 : Lunette et viseur à frontale fixe (d'après une vieille annale) [***]

1. **Caractéristiques de la lunette**
   (a) L'observateur observe sans effort si l'image est à l'infini ; pour qu'il en soit ainsi, le réticule doit être dans le plan focal objet de l'oculaire. L'image étant à l'infini, la place de l'œil de l'observateur est sans importance.
   (b) Un objet lointain donne par l'objectif une image située dans le plan focal image de l'objectif. L'oculaire donne de cette image intermédiaire une image, qui est à l'infini lorsque la lunette est bien réglée. Donc lorsque la lunette est bien réglée, le point focal image de l'objectif est confondu avec le point focal objet de l'oculaire : $F_1' = F_2$, ce qui donne $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} = f_1' + f_2'$
   La lunette donne alors d'un objet à l'infini une image à l'infini : un tel système optique est dit afocal.
   (c) Notons



A_1 l'image intermédiaire ; elle est dans le plan focal image de l'objectif, et dans le plan focal objet de l'oculaire (donc dans le même plan que le réticule). Alors, dans les conditions de Gauss, $\alpha \approx \tan\alpha = -\dfrac{\overline{F_1'A_1}}{f_1'}$, $\alpha' = \tan\alpha' = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{f_2'}$, et $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f_1'}{f_2'}$ $AN : \overline{O_1O_2} = 11{,}0\,\text{cm}$; $G = -2{,}7$

(d) Les étoiles sont tellement lointaines que, même si on les grossit à travers une lunette, on voit encore un point. L'intérêt de la lunette réside plutôt dans l'observation de deux étoiles. Si elles sont séparées d'un angle β quand on les regarde à l'œil, elle le seront d'un angle $G\beta$ après passage dans la lunette. Elles paraissent donc plus écartées. Dans le cas de deux étoiles proches, on ne voit qu'un seul point à l'œil nu, alors qu'à travers la lunette, on peut arriver à voir deux points (on « résout » le système double).

(e)

i. C'est la diffraction par l'ouverture de l'objectif qui est responsable de cette limite (plus ce diamètre est grand, plus la diffraction est faible, plus la limite de résolution est petite).

ii. Dans la pratique, la résolution limite est souvent bien plus grande, à cause des aberrations (géométriques et/ou chromatiques) des lentilles.

De plus, si on regarde une étoile à travers une lunette, un autre phénomène gênant apparaît : la turbulence. En effet, la lumière en provenance d'une étoile traverse l'atmosphère. Or l'atmosphère est un milieu turbulent, où la pression et la température ne sont pas uniforme ; du coup, l'indice de l'air n'est pas uniforme, et même, il ne fait que varier. Ces variations d'indice provoquent des réfractions qui dévient les rayons lumineux : l'image d'une étoile bouge dans tous les sens. Ce phénomène est responsable du scintillement des étoiles lorsqu'on les regarde la nuit ; et il gêne considérablement l'observation astronomique. On sait cependant le corriger sur les téléscopes, à l'aide d'un système qui déforme en temps réels les miroirs pour compenser la turbulence.

(f)

i. Considérons un rayon entrant par l'objectif. Alors on peut considérer ce rayon comme ayant été émis par un point de l'objectif. Après être passé par l'oculaire, il passera donc forcément par l'image par l'oculaire du point de l'objectif d'où il est issu ; cette image appartient par définition au cercle oculaire. Donc tout rayon entrant par l'objectif ressort en passant par l'image d'un point de l'objectif par l'oculaire ; ce qui prouve que tous ces rayons passent par l'image de l'objectif par l'oculaire.

ii. L'objectif, de centre O_1 et de taille D, est conjugué par l'oculaire avec le cercle oculaire de centre C et de taille d. Les relations de grandissement de l'oculaire fournissent alors $\gamma = \dfrac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_2O_1}}$ (faites une figure pour le retrouver). On en déduit que $|\gamma| = \dfrac{d}{D} = \dfrac{f_2'}{f_1'}$, donc $d = \dfrac{D}{|G|}$

iii. Par la relation de Newton : $\overline{F_2O_1}.\overline{F_2'.C} = -\overline{O_2F_2'}^2$ donc $\overline{F_2'C} = \dfrac{(f_2')^2}{f_1'}$ AN : $\overline{F_2'C} = 1,1cm$

L'intérêt de placer son œil au cercle oculaire, c'est de capter le maximum de rayons. L'image est alors plus lumineuse, et le champ de vision plus vaste.

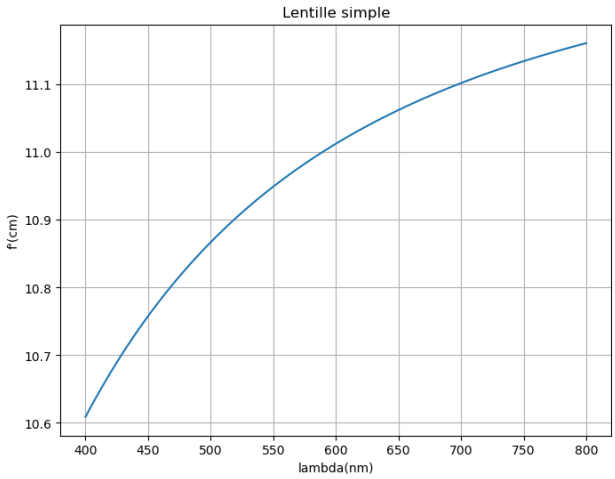
2. **Transformation en viseur par déplacement de l'objectif**

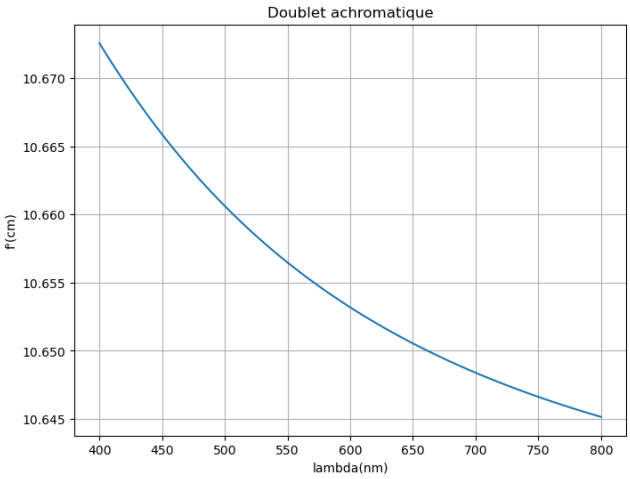
(a) L'objectif conjugue un objet situé à $\overline{O_1A} = -H$ avec une image située en F_2, donc à une distance $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = \Delta - f_2'$. Les relations de conjugaison de la lentille fournissent $\dfrac{1}{\Delta - f_2'} - \dfrac{1}{-H} = \dfrac{1}{f_1'}$, soit $\Delta = f_2' + \dfrac{Hf_1'}{H - f_1'}$ AN : $\Delta = 15{,}0\,\text{cm}$

(b) On sait déjà que, lorsque l'objet est en $\overline{O_1A} = -H$, l'image finale est à l'infini. On va donc chercher l'autre position extrême, où l'image finale est à d_m de l'œil. On note A_P la position de l'objet à ce moment-là, A_P' l'image intermédiaire par l'objectif, et A_P'' l'image finale. On sait que l'œil est placé en F_2', donc $\overline{F_2'A_P''} = -d_m$. Les relations de Newton fournissent alors $\overline{F_2A_P'} = \dfrac{(f_2')^2}{d_m}$, donc $\overline{O_1A_P'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} + \overline{F_2A_P'} = \Delta - f_2' + \dfrac{(f_2')^2}{d_m}$ et finalement $\overline{O_1A_P} = \dfrac{f_1'\overline{O_1A_P'}}{f_1' - \overline{O_1A_P'}}$, ce qui donne numériquement : $\overline{O_1A_P'} = 12{,}4\,\text{cm}$ et $\overline{O_1A_P} = -22{,}7\,\text{cm}$. Donc lorsque $\overline{O_1A_P} = -22{,}7\,\text{cm}$, l'image est à une distance d_m de l'œil.
Donc la plage de positions de l'objet pour lesquelles l'image est vue nette s'étend entre 22,7 cm et 24 cm en avant de l'objectif, soit un intervalle de 1,3 cm.

Réponses aux TDs numériques

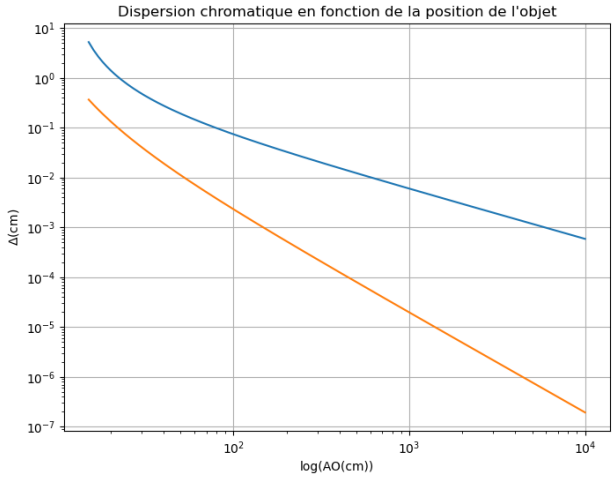
Réponses au TD d'info : Doublet achromatique





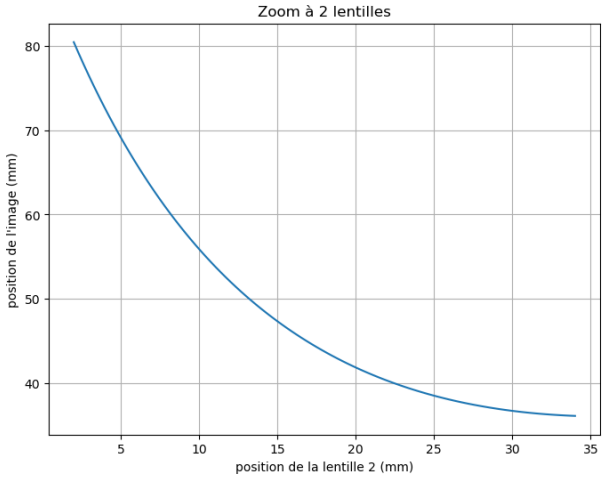
On voit que ces 2 systèmes ont à peu près la même distance focale à 589 nm ($f'_D = 11$ cm), mais l'écart de distances focales sur la plage du visible vaut :

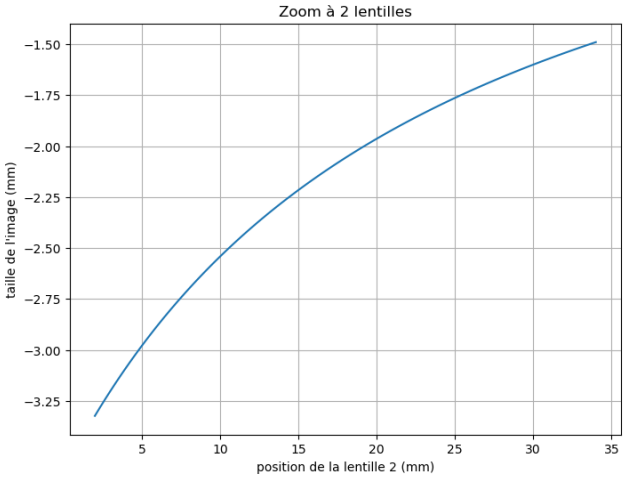
- 5,5 mm pour la lentille simple
- 0,27 mm pour le doublet achromatique



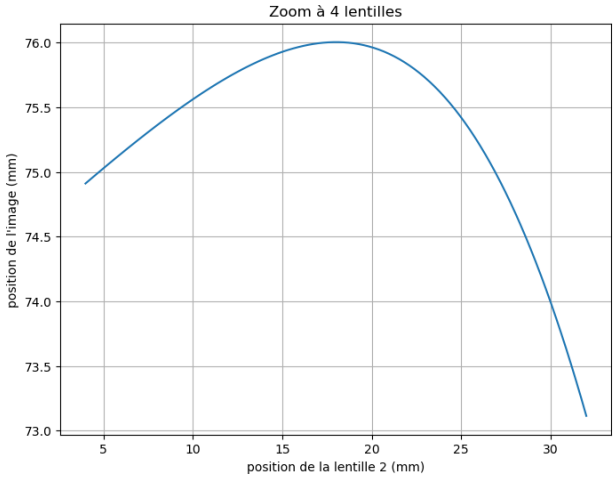
Néanmoins, on constate que l'aberration chromatique augmente beaucoup si l'objet se rapproche de la lentille.

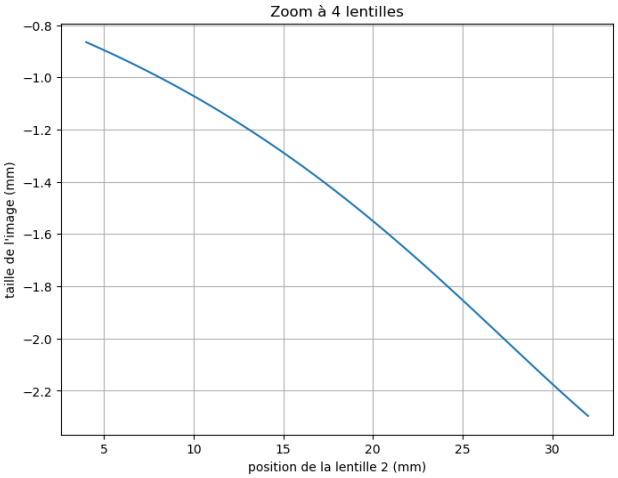
Réponses au TD d'info : Zoom



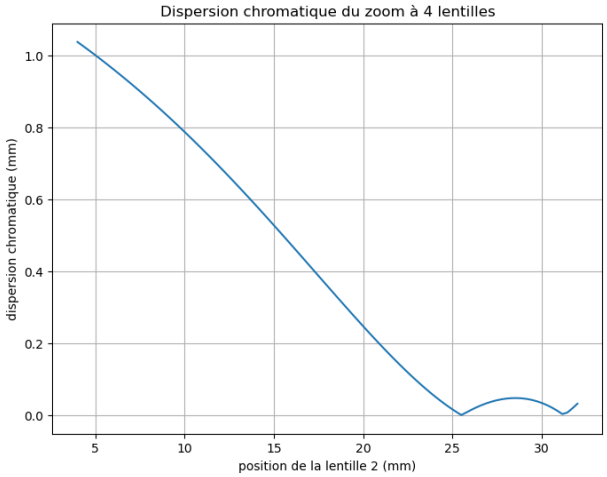


On a bien un dispositif qui fait varier la taille de l'image, mais la variation de positions de l'image (plus de 40 mm) rend la mise au point difficile.





Ce dispositif permet de faire varier la taille de l'image pour une amplitude de mise au point beaucoup plus faible (environ 3 mm).



La dispersion chromatique est assez forte (1 mm environ au maximum).

Chapitre 04 Propagation des ondes

Programme p.180

Conseils p.181

Cours p.160
- O4.A. Ondes progressives
- O4.B. Interférences de deux ondes
- O4.C. Paquets d'ondes

QCMs p.182

Exercices p.183

TDs numériques p.188

O4. Propagation des ondes

Cours

L'optique géométrique, en traitant la lumière comme des rayons lumineux, laisse de côté certains phénomènes caractéristiques de la nature ondulatoire de la lumière. Dans ce chapitre, nous allons effleurer certaines de ces caractéristiques, qui se généralisent à d'autres types d'ondes.

O4.A. Ondes progressives

A.1. Exemples d'ondes

Une onde est un signal dépendant du temps qui se propage dans l'espace. Il en existe de différents types.

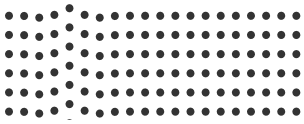
Au chapitre précédent, nous avons vu la lumière, qui est en réalité une *onde électromagnétique* : deux signaux, le champ électrique et le champ magnétique, avancent ensemble. Le champ électrique est responsable de la mise en mouvement de particules chargées, c'est pour cela qu'on verra plus tard que ce sont aussi ces ondes électromagnétiques qui se propagent dans les fils des circuits électriques.

Mais nos sens sont aussi sensibles aux *ondes sonores*, autrement dit au son : il s'agit d'une onde de surpression, c'est-à-dire qu'une zone de pression plus forte se déplace dans l'air. De telles ondes se propagent aussi dans les liquides et les solides, mais dans ce dernier cas, il existe d'autres types d'ondes mécaniques (figure O4.1), qui se manifestent en particulier lors des tremblements de terre, lorsque les ondes transportent l'énergie du mouvement des plaques tectoniques jusqu'au sol et secouent les constructions existantes.

Figure O4.1 : Exemples d'ondes mécaniques.



(a) Ondes de compression (ou onde sonore) dans les solides et les fluides.



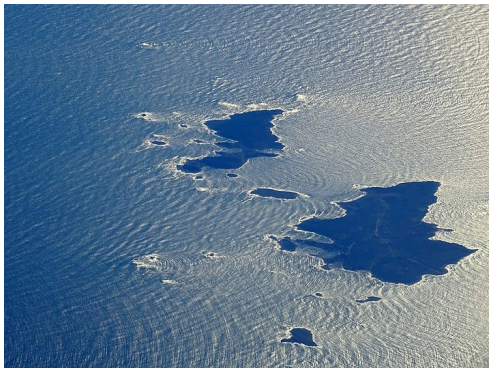
(b) Ondes de cisaillement dans les solides.

Ces ondes mécaniques se manifestent aussi sur d'autres systèmes, par exemples les cordes des instruments à cordes. Il existe encore d'autres ondes mécaniques, par exemple les *ondes de gravité* à la surface d'un fluide (les vagues).

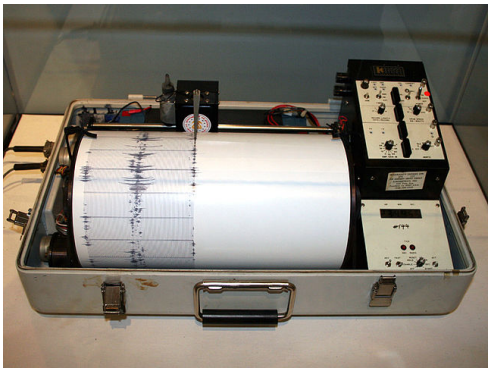
A.2. Forme mathématique d'une onde progressive

Une onde est donc un signal qui dépend du temps et de la position ; on la notera $s(x,t)$ de façon générique dans la suite, en se limitant à une seule dimension x. Pour observer cette onde, il existe deux points de vue (figure O4.2) :

Figure O4.2 : Deux observations possibles d'une onde : à un instant fixé (à gauche) ou en un point fixé (à droite).



(a) Vagues sur l'océan. (Crédit : Wikipedia/S.Beobachtery)



(b) Sismographe (Crédit : Wikipedia/Yamaguchi)

— soit on prend une photographie de l'onde à un instant t fixée ; on voit alors la dépendance de l'onde par rapport à la position ;

— soit on se place en un point fixe et on enregistre l'onde qui arrive en ce point ; on voit alors la dépendance de l'onde par rapport au temps.

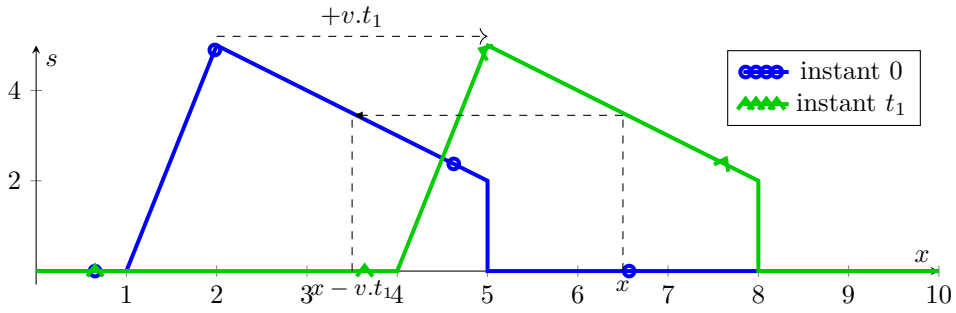
Lorsqu'une onde se propage, il peut lui arriver différents phénomènes qui la modifient. Les ondes qu'on va étudier cette année sont les plus simples : celles qui se déplacent (*ondes progressives*) sans se déformer (figure O4.3).

Propriété : Forme mathématique d'une onde progressive

Une onde progressive se déplaçant sans déformation à la vitesse v vers les x croissants peut s'écrire sous la forme $s(x,t) = g(x - v.t)$ où g est la fonction représentant le profil de l'onde.
Une onde progressive se déplaçant sans déformation à la vitesse v vers les x décroissants peut s'écrire sous la forme $s(x,t) = g(x + v.t)$ où g est la fonction représentant le profil de l'onde.

Démonstration

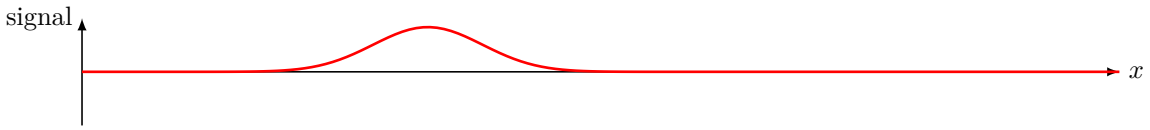
Considérons le schéma ci-dessous sur lequel on a représenté une onde de profil quelconque qui se déplace entre deux instants vers $+x$ à la vitesse v :



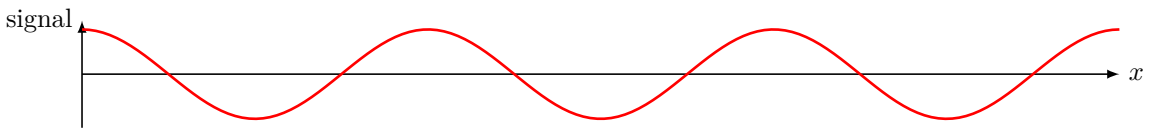
Prenons l'instant $t = 0$ comme référence. Si on fixe le temps à cette valeur, l'onde ne dépend plus que de la position x. Posons $g(x) = s(x,0)$ la fonction qui décrit l'onde à $t = 0$, c'est une fonction d'une seule variable.
Regardons maintenant ce qui se passe à l'instant $t_1 > 0$: l'onde s'est déplacée de $v.t_1$, donc au point d'abscisse x, à l'instant t_1, la valeur de l'onde est la même que celle qu'elle avait à l'instant 0 à une distance $v.t_1$ plus à gauche, c'est-à-dire à l'abscisse $x - v.t_1$; on a donc bien $s(x,t_1) = g(x - v.t_1)$.
Si l'onde se déplace dans l'autre sens, il suffit de changer v et $-v$.

Remarque : Par un simple changement de variable, on peut aussi écrire ces ondes sous la forme $f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$.

FIGURE O4.3 : Ondes progressives.



(a) Onde progressive quelconque



(b) Onde progressive harmonique

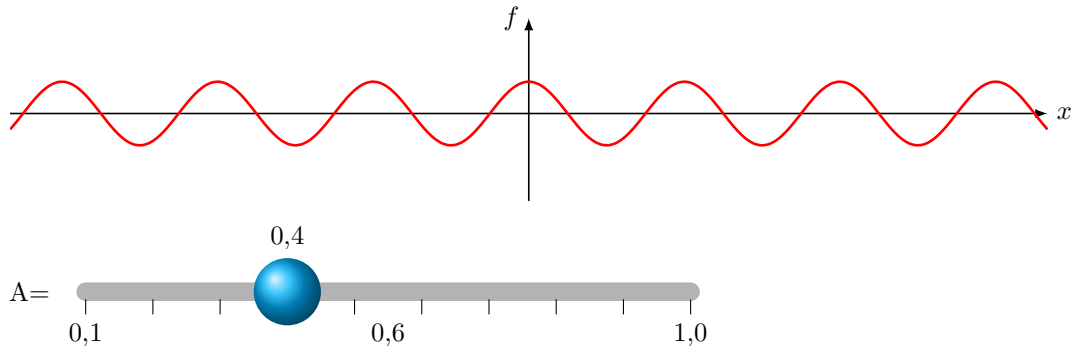
Parmi toutes les formes d'ondes progressives possibles, les ondes sinusoïdales jouent un rôle particulier.
Une fonction sinusoïdale a pour forme générale $g(x) = A\cos(k.x + \varphi_0)$ ou $g(x) = A\sin(k.x + \varphi_0)$; on a plutôt l'habitude d'utiliser des cosinus. Ce cosinus est modifié par 3 paramètres (cf. figure O4.4) :

— le facteur A devant le cosinus est l'*amplitude* : la fonction oscillera entre $+A$ et $-A$

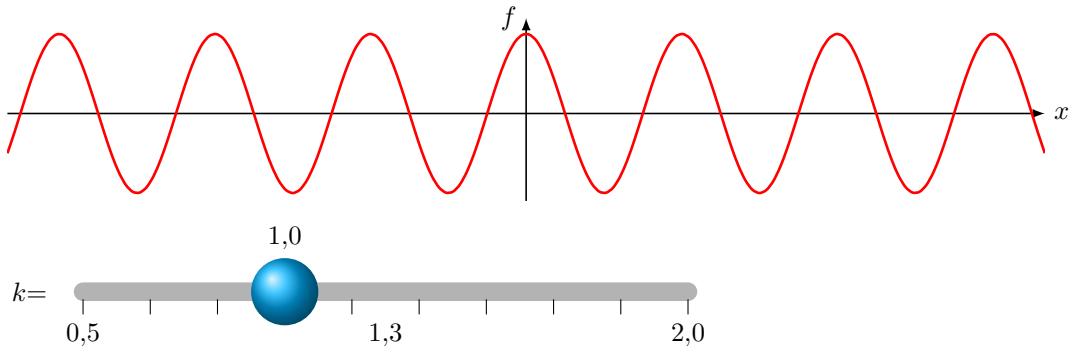
— le facteur k qui multiplie x est la *pulsation spatiale* : si $x \mapsto \cos(x)$ est 2π-périodique, alors $x \mapsto \cos(k.x)$ est $\frac{2\pi}{k}$-périodique. La pulsation spatiale est donc reliée à la période spatiale λ par la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

— le facteur φ_0 qui s'ajoute dans le cosinus est la *phase à l'origine*. Il traduit un décalage horizontal de la courbe : plus φ_0 est grand, plus la courbe est en avance (décalée à gauche).

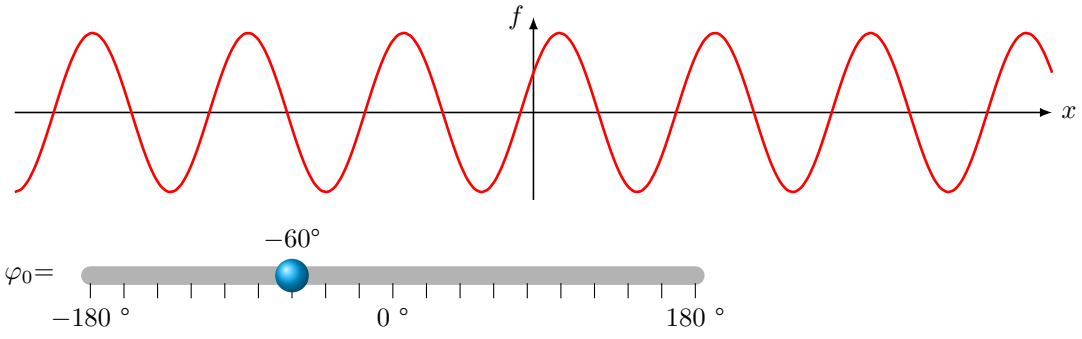
FIGURE O4.4 : Fonction sinusoïdale de la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.



(a) Influence de l'amplitude



(b) Influence de la pulsation



(c) Influence de la phase à l'origine

Propriété : Onde progressive harmonique (1D)

Une onde progressive harmonique (OPH) (ou sinusoïdale) est une onde progressive dont le profil est sinusoïdal. Une OPH se dirigeant vers les x croissants à la vitesse v s'écrira sous la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ où A représente son *amplitude*, ω sa *pulsation*, k sa *pulsation spatiale* et φ_0 sa *phase à l'origine*. De même, une OPH se dirigeant vers les x décroissants à la vitesse v s'écrira sous la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$. De plus :

— ω (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) est relié à la fréquence f et à la période T par la relation $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ (O4.1a)

— k (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) est relié à la longueur d'onde par la relation $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (O4.1b)

— k et ω sont reliés par la relation $\omega = v.k$ donc $f = \dfrac{v}{\lambda}$ (O4.1c)

Démonstration

Une onde sinusoïdale correspond à une onde de profil (co)sinusoïdal, donc pour une onde progressive allant vers $+x$, elle sera de la forme $s(x,t) = A.\cos(-k.(x-vt)+\varphi_0)$ (on prend ici comme convention $-k$ pour que le coefficient devant t soit positif, ce n'est qu'un choix). On a donc $s(x,t) = A.\cos(-k.x+k.v.t+\varphi_0)$ ce qui correspond bien à la forme proposée avec $\omega = v.k$.
On sait que la fonction cosinus est 2π-périodique, donc :

- si x augmente de $\frac{2\pi}{k}$ alors ce qui est dans la parenthèse augmente de $-k.\frac{2\pi}{k} = -2\pi$ ce qui correspond à la période du cosinus ; la période spatiale de cette onde vaut donc bien $\frac{2\pi}{k}$
- si t augmente de $\frac{2\pi}{\omega}$ alors ce qui est dans la parenthèse augmente de $\omega.\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ ce qui correspond à la période du cosinus ; la période temporelle de cette onde vaut donc bien $\frac{2\pi}{\omega}$

On peut alors réécrire la relation $\omega = v.k$ sous la forme $2\pi f = c\frac{2\pi}{\lambda}$ donc $f = \frac{v}{\lambda}$.

Remarque : En réalité, la vitesse introduite ici (parfois appelée célérité de l'onde) est ce qu'on appellera plus tard la *vitesse de phase* par opposition à la *vitesse de groupe*.

Les fréquences des ondes ($f = \frac{\omega}{2\pi}$) varient selon les ondes considérées :

- les ondes lumineuses visibles ont des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz
- les ondes sonores audibles ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz
- les ondes mécaniques sont souvent lentes, quelques Hz au maximum

Les milieux les plus simples sont ceux où la vitesse v est constante ; mais ce n'est pas toujours le cas :

Définition : Milieu dispersif

On dit qu'un milieu est dispersif si la vitesse varie en fonction de la pulsation ω ou de la pulsation spatiale k. On appelle *relation de dispersion* la relation qui relie ω et k. Si elle est linéaire, le milieu est non dispersif, sinon il est dispersif.

Démonstration

On a toujours $\omega = v.k$. Si le milieu est non dispersif, alors $v = \text{cst}$ donc cette relation est linéaire.

Lorsque le milieu est non dispersif, on note souvent c la vitesse des ondes. Par exemple, le vide est un milieu non dispersif pour les ondes lumineuses, avec $c = 3\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dans les milieux matériels, la vitesse vaut $v = \frac{c}{n}$ et le milieu est dispersif si n dépend de la longueur d'onde, donc de k.

L'air est un milieu peu dispersif pour les ondes sonores aux fréquences audibles ; dans le domaine des ultrasons il devient plus dispersif.

Les ondes à la surface de l'eau sont très dispersives ; leur relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma.k^3}{\rho}\right).\tanh(h.k)$ avec g la pesanteur, h la hauteur d'eau, γ la tension superficielle de l'eau et ρ sa masse volumique.

On pratique, on peut montrer que la dispersion s'accompagne toujours d'un autre phénomène : l'absorption.

Enfin, on n'a pour le moment parlé que d'ondes scalaires. Pour des ondes vectorielles, il existe deux familles :

Définition : Ondes transverses et longitudinales

Une onde vectorielle est *longitudinale* si le vecteur qui oscille est parallèle à la direction de propagation, et *transverse* si le vecteur qui oscille est perpendiculaire à la direction de propagation.

Par exemple, dans une onde sonore, il y a un déplacement d'air parallèlement à la direction de propagation de l'onde, c'est une onde longitudinale (cf. figure O4.1(a)) ; tandis qu'une onde sismique peut être transverse comme sur la figure O4.1(b), avec un déplacement orthogonal à la propagation de l'onde. Les ondes à la surface de l'eau sont transverses. Vous verrez l'année prochaine que la lumière est une onde transverse.

A.3. Diffraction des ondes

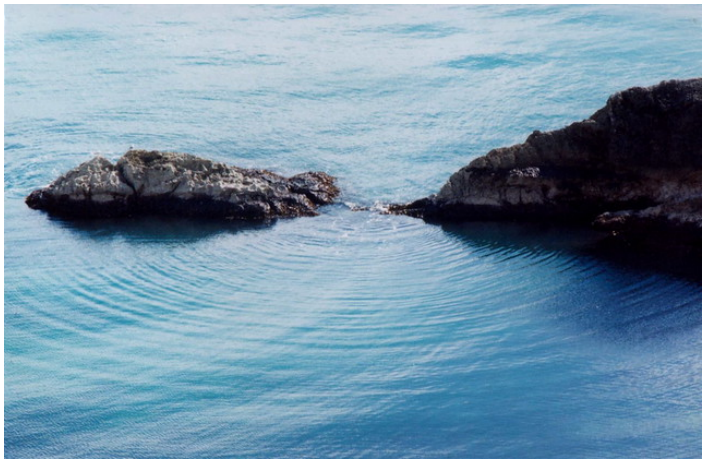
La forme $A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ que nous avons proposé pour une onde progressive harmonique est valable uniquement dans le cas unidimensionnel ; par exemple une onde sur une corde, un fil électrique,…. En 2D ou en 3D, les choses se compliquent, car les ondes progressives harmoniques peuvent prendre diverses formes. On rencontrera notamment plus tard :

- les *ondes planes* qui se dirigent en tout point dans la même direction, comme les vagues sur la plage ;

— les *ondes circulaires* (en 2D, comme les ronds créés par un caillou à la surface de l'eau) ou *sphériques* (en 3D).

Si on considère une onde plane, elle a une certaine extension latérale, une certaine largeur. Si on cherche à limiter cette largeur, on voit apparaître le phénomène de diffraction, comme illustré par exemple sur la figure O4.5 : une fois le trou passé, les vagues s'écartent à nouveau et occupent une largeur plus grande que le trou initial.

FIGURE O4.5 : Diffraction des vagues au passage d'un trou. *(Crédit : Inconnu)*



C'est Huygens qui s'est penché le premier sur ce problème, en observant les vagues dans le port d'Amsterdam. Il a alors imaginé le principe suivant :

Principe de Huygens

Si une onde traverse une ouverture, chaque point de cette ouverture émet vers l'avant une onde circulaire (ou sphérique) appelée *ondelette* qui se propage dans toutes les directions vers l'avant.

Ce principe est plus connu sous le nom de « principe de Huygens-Fresnel, » car Fresnel l'a légèrement corrigé en ajoutant un terme indiquant que l'ondelette n'a pas la même intensité dans toutes les directions.

Ainsi, chaque point du trou émet une ondelette, et toutes ces ondelettes se mélangent de façon un peu compliquée pour nous pour le moment. On se contentera donc, pour cette année, d'observations expérimentales. On procède donc ainsi : on éclaire une fente de largeur a par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ ; on place un écran à une distance D derrière la fente, et on observe l'éclairement lumineux sur l'écran. On peut alors faire varier deux types de paramètres.

Les observations expérimentales montrent qu'il existe deux comportements limites suivant les conditions d'observation :

Propriété : Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Il existe deux régimes de diffraction par une fente :

— la *diffraction de Fresnel* ou *diffraction à courte distance* s'observe pour des fentes larges et/ou des écrans placés à courte distance ; dans ce régime, la largeur de la tache est à peu près égale à la largeur de la fente et ne dépend pas de la distance de l'écran ; la diffraction fait apparaître des franges sur les bords.

— la *diffraction de Fraunhofer* ou *diffraction à l'infini* s'observe pour des fentes étroites et/ou des écrans placés à grande distance ; dans ce régime, la largeur de la tache est inversement proportionnelle à celle de la fente, et proportionnelle à la distance de l'écran ; la forme des taches ne dépend que de la forme de la fente.

Ces résultats sont illustré par les simulations des figures O4.6 et O4.7.

La figure O4.6 montre ce qu'on observe lorsque l'écran est fixe, et qu'on diminue la largeur de la fente ; on observe deux comportements différents :

— au début (a), la fente est large, et la zone éclairée sur l'écran est quasiment de largeur égale à la fente. On observe cependant, sur les bords, une ou deux alternances de franges sombres/brillantes ;

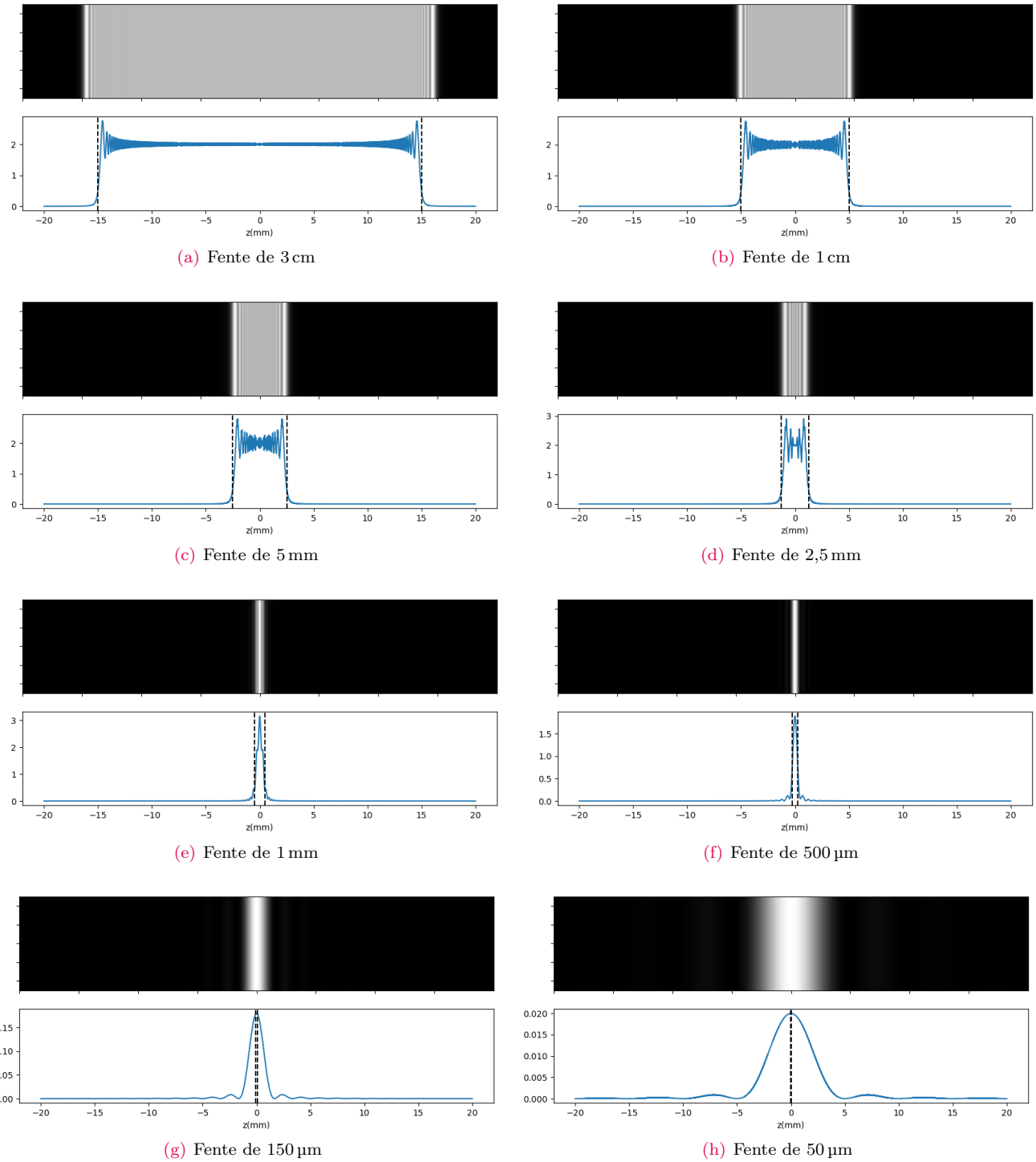
— quand on réduit la largeur de la fente (b-d), la largeur de la zone éclairée sur l'écran diminue aussi. Les franges persistent sur les bords ;

— en continuant de rétrécir, il arrive un moment où le franges de chaque côté se rejoignent (e) ; on observe alors une zone éclairée étroite avec une structuration compliquée de franges à l'intérieur ;

— si on continue à rétrécir la fente (f), la tache sur l'écran se met à grandir et prend une forme plus simple : une grande tache centrale éclairée, et des taches d'éclairage plus faibles sur les côtés ;

— à partir de là, si on rétrécit encore la fente (g-h), les taches se dilatent et sont de plus en plus larges, mais leur forme générale ne varie plus.

FIGURE O4.6 : Observation de la figure de diffraction d'une fente de largeur variable éclairée à $\lambda = 500\,\text{nm}$ et observée à une distance de 50 cm. Les pointillés représentent les bords de la fente.



(a) Fente de 3 cm

(b) Fente de 1 cm

(c) Fente de 5 mm

(d) Fente de 2,5 mm

(e) Fente de 1 mm

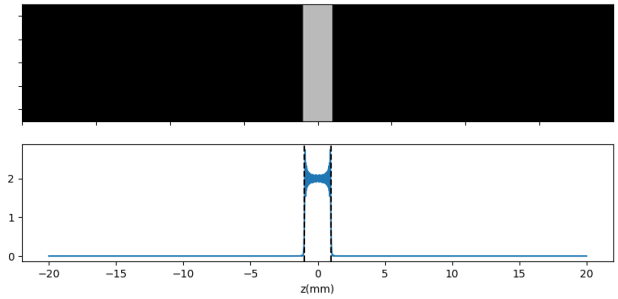
(f) Fente de 500 µm

(g) Fente de 150 µm

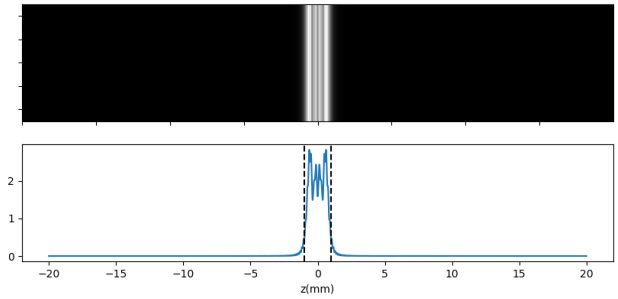
(h) Fente de 50 µm

La figure O4.7 montre la même chose pour une fente de largeur fixée, quand on fait varier la distance de l'écran. On y observe de nouveau les deux régimes de diffraction (Fresnel et Fraunhofer).

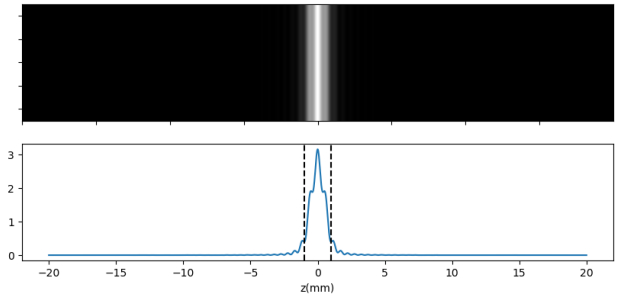
FIGURE O4.7 : Observation de la figure de diffraction d'une fente de 2 mm de large éclairée à $\lambda = 500\,\text{nm}$, à différentes distances. Les pointillés représentent les bords de la fente.



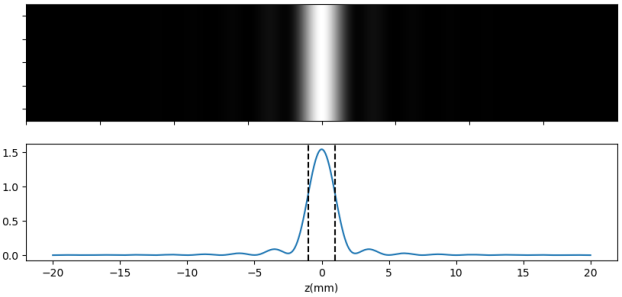
(a) Observation à une distance de 1 cm



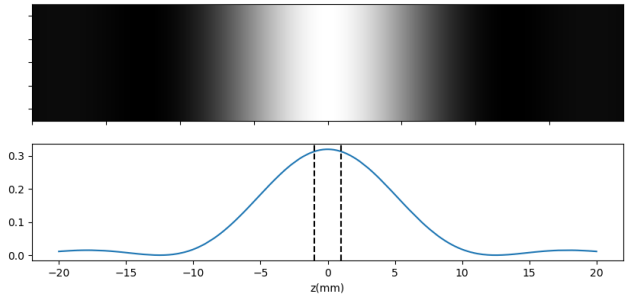
(b) Observation à une distance de 50 cm



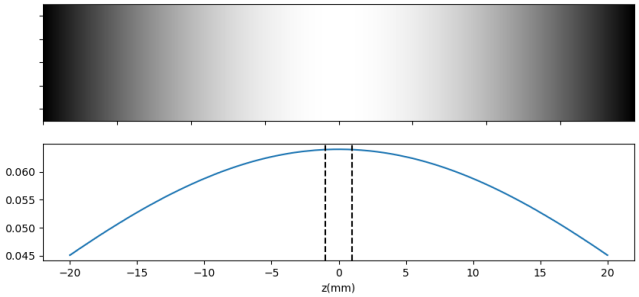
(c) Observation à une distance de 2 m



(d) Observation à une distance de 10 m



(e) Observation à une distance de 50 m



(f) Observation à une distance de 250 m

Pour cette année, il n'y a aucun calcul à connaître concernant la diffraction, simplement les caractéristiques de la diffraction à l'infini (ou diffraction de Fraunhofer) :

Diffraction à l'infini par une fente

La diffraction à l'infini par une fente de largeur a fait apparaître des annulation d'intensité aux angles θ_p tels que

$$\sin\theta_p = p\frac{\lambda}{a}, p \in \mathbb{Z}^* \tag{O4.2a}$$

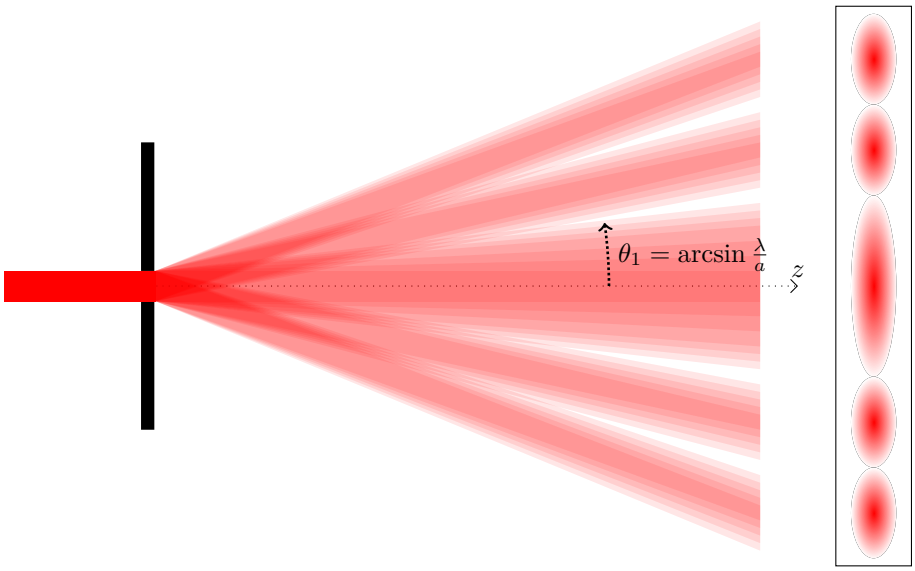
Par conséquent, on observe une tache centrale ayant pour demi-angle au sommet

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a} \tag{O4.2b}$$

et des taches secondaires sur les côté de largeur égale à la moitié de la tache centrale (figure O4.8).

Remarque : Le plus souvent, $\lambda \ll a$ et alors $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$ en radians.

FIGURE O4.8 : Figure de diffraction par une fente à grande distance.



On peut alors donner un critère quantitatif pour savoir si on est en régime de diffraction à l'infini :

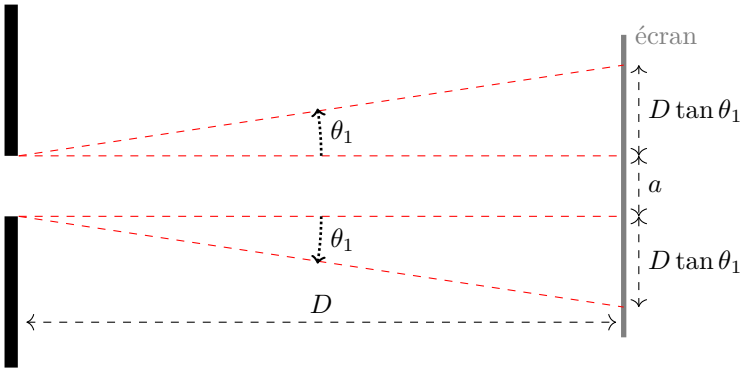
Propriété : Diffraction à l'infini

On peut considérer qu'on est dans le régime de diffraction à l'infini si on observe sur un écran situé à une distance D telle que

$$D \gg \frac{a^2}{\lambda} \tag{O4.3}$$

Démonstration

La fente a pour largeur a. La diffraction fait diverger la lumière d'un angle $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$, ce qui donne au bout d'une distance D une tache de taille $a + 2D\tan\theta_1 \approx a + 2D\frac{\lambda}{a}$:



On considère qu'on est en régime de diffraction à l'infini lorsque la taille de la tache de diffraction devient grande devant la taille de la fente : $2D\frac{\lambda}{a} \gg a$ soit $D \gg \frac{a^2}{2\lambda}$; le facteur 2 peut être négligé en ordre de grandeur.

Par exemple, pour une fente de 1 mm éclairée à $\lambda = 500$ nm, on observera la diffraction à l'infini à partir de 2 m environ.

En 2D, les calculs sont plus compliqués ; deux cas sont représentés sur la figure O4.9 :

— pour un trou rectangulaire, on observe les taches rectangulaires, la largeur de la tache dans la direction x/y étant donnée par la relation $\sin\theta = p\frac{\lambda}{a_{x,y}}$ où a_x/a_y sont les dimensions du trou ;

— pour un trou circulaire, on observe une figure avec une tache centrale circulaire et des anneaux autour, appelée *tache d'Airy*. Le rayon de la tache centrale vaut $r_1 = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$ où d est le diamètre du trou.

FIGURE O4.9 : Diffraction par un trou.



(a) Diffraction par un trou rectangulaire

(b) Diffraction par un trou circulaire

O4.B. Interférences de deux ondes

B.1. Principe de superposition des ondes

Lorsque deux faisceaux lumineux se croisent, chacun continue son chemin en ignorant l'autre. De même, les sons se croisent le plus souvent sans interagir. Par contre, quand plusieurs vagues se croisent, leurs hauteurs s'ajoutent localement et cela peut modifier les propriétés des vagues, donnant lieu par exemple à une vague qui déferle. Ainsi dans certains cas l'ajout de plusieurs ondes ne donne pas seulement la somme des deux ondes initiales, mais modifie les caractéristiques des deux ondes.

Principe de superposition

Si deux émetteurs envoient deux ondes dans une zone *linéaire* de l'espace, les *signaux* dus à chaque onde s'ajoutent.

Dans le milieux non-linéaires, cette propriété n'est pas vérifiée, mais nous n'en étudierons pas. On peut se souvenir que les effets non-linéaires apparaissent à haute intensité : quand deux lasers très puissants se croisent dans de la matière ; ou deux ondes de choc sonores,...

B.2. Énergie d'une onde

Une onde transporte un signal ; elle transporte aussi de l'énergie. On peut définir deux grandeurs relative à cette énergie en fonction du point de vue :

— si on prend une « photo » de l'onde à un instant t, on observe une répartition d'énergie en fonction de la position. On peut alors définir une énergie par unité de longueur, ou *énergie linéique*, en Joule par mètre ($\mathrm{J \cdot m^{-1}}$), en 1D (en 3D cela devient une *énergie volumique* en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$).

— si on se place en un point fixe et qu'on observe l'onde qui arrive, celle-ci apporte une énergie par unité de temps, c'est-à-dire une *puissance* en Watt (W), en 1D ; en 3D, la puissance est répartie sur une surface, donc on parle de *puissance surfacique* en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

Énergie d'une onde progressive

Toute onde progressive transporte de l'énergie. L'énergie linéique moyenne $\langle e \rangle$ de l'onde, et la puissance moyenne rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle$, sont proportionnelle à la moyenne du carré du signal de l'onde.
Pour un système non dispersif, $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle e \rangle . c$.

Ainsi, pour une onde sonore, l'intensité est proportionnelle à la vitesse de déplacement des molécules au carré, ou encore à la surpression au carré ; pour une onde sur une corde, au déplacement transverse au carré ; pour la lumière, au champ électrique au carré ;...

Quand nous observons une vague, qui oscille lentement, nous voyons de nos yeux l'amplitude de l'onde. Par contre, pour des signaux plus rapides, comme les sons ou la lumière, nos capteurs ne sont pas assez rapides pour les fréquences de ces ondes : ils se contentent donc d'en mesurer la moyenne. Mais le signal étant sinusoïdal, sa moyenne est nulle ; par conséquent, nos capteurs sont sensibles à la valeur moyenne de la puissance reçue.

Définition : Détecteur quadratique

On appelle détecteur quadratique un détecteur qui capte la moyenne de la puissance ou de l'énergie de l'onde. Dans la suite, on considérera de façon générale qu'il mesure l'*intensité* de l'onde, proportionnelle à la valeur moyenne du carré du signal, notée $\langle s(x,t)^2 \rangle$.

Remarque : L'intensité sera parfois nommée *éclairement* dans le cas des ondes lumineuses.

Donc pour une onde $s(x,t)$, le détecteur captera $I(x) = K.\langle s(x,t)^2 \rangle$ où K est une constante.

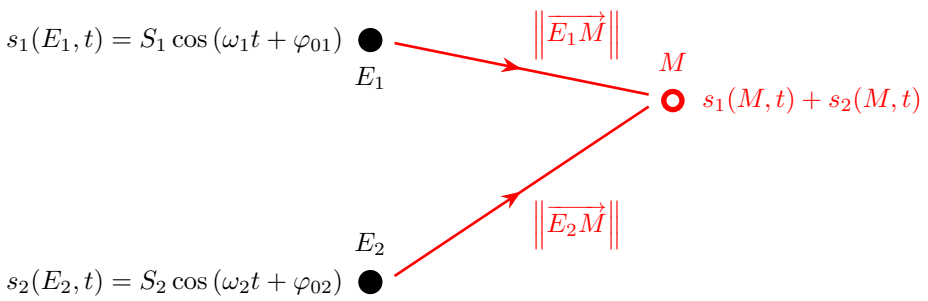
B.3. Interférences à 2 ondes

Considérons donc un détecteur quadratique placé en un point M où deux ondes se superposent (figure O4.10) :

— une onde 1 émise par un émetteur E_1, de pulsation ω_1

— une onde 2 émise par un émetteur E_2, de pulsation ω_2

FIGURE O4.10 : Interférences à 2 ondes.



En E_1, la première onde s'écrit $s_1(E_1,t) = S_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$ où S_1 est son amplitude et φ_{01} sa phase à l'origine. Cette onde avance jusqu'à M. Supposons pour simplifier qu'elle aille en ligne droite ; plaçons un axe x selon la droite E_1M avec $x(E_1) = 0$; l'onde se propage alors selon la loi $s_1(x,t) = S_1\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_{01})$ avec k_1 sa pulsation spatiale, si on néglige l'atténuation. En M, on aura donc $s_1(M,t) = S_1\cos(\omega_1 t - k_1 x(M) + \varphi_{01})$. Comme on a pris $x(E_1) = 0$, on peut dire que $x(M)$ est égal à la longueur $\|\overrightarrow{E_1M}\|$. Finalement :

$$s_1(M,t) = S_1\cos(\omega_1 t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + \varphi_{01})$$

Propriété : Déphasage d'une onde progressive

Une onde $s(E,t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ émise au point E acquiert, en se propageant jusqu'à un point M, une phase supplémentaire $-k.\|\overrightarrow{EM}\| = -\frac{2\pi}{\lambda}\|\overrightarrow{EM}\|$, de sorte que $s(M,t) = S\cos(\omega t - k.\|\overrightarrow{EM}\| + \varphi)$

De même, la seconde onde s'écrit

$$s_2(M,t) = S_2\cos(\omega_2 t - k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{02})$$

Au point M on capte donc un signal $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$; calculons l'intensité captée en M.

Un peu de maths : Valeurs moyennes de fonctions sinusoïdales

— une fonction de la forme $\cos(\omega t + \text{cst})$ (ou sinus) a une valeur moyenne nulle sauf si $\omega = 0$

— $\cos^2(\omega t + \text{cst}) = \frac{1+\cos(2\omega t+2\text{cst})}{2}$ donc la valeur moyenne d'un cosinus au carré est $\frac{1}{2}$ sauf si $\omega = 0$

— $\sin^2(\omega t + \text{cst}) = \frac{1-\cos(2\omega t+2\text{cst})}{2}$ donc la valeur moyenne d'un sinus au carré est $\frac{1}{2}$ sauf si $\omega = 0$

Condition d'interférences

Soit I_1 l'intensité captée au point M si seule l'onde émise par E_1 est présente, et I_2 l'intensité si seule l'onde émise par E_2 est présente. On dit que les deux ondes interfèrent au point M si l'intensité I lorsque ces deux ondes sont présente est différente de la somme des intensités I_1 et I_2 ; pour cela, la condition est la suivante :

— si les deux ondes ont des pulsations différentes, il n'y a pas d'interférences : $I = I_1 + I_2$

— si les deux ondes ont des pulsations rigoureusement égales, il y a des interférences : $I \neq I_1 + I_2$

Démonstration

Considérons d'abord le cas où il n'y a que l'onde 1 ; alors l'intensité en M vaut $I_1 = K.\langle s_1(M,t)^2\rangle = K.\left\langle S_1^2\cos^2(\omega_1 t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + \varphi_{01})\right\rangle$ et comme la moyenne d'un cosinus au carré vaut $\frac{1}{2}$, on trouve $I_1 = \frac{KS_1^2}{2}$ (K est un coefficient caractéristique du détecteur).
De même, $I_2 = \frac{K.S_2^2}{2}$.
Avec les deux ondes, par le principe de superposition, $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$ donc

$$\begin{aligned} I &= K.\left\langle (s_1(M,t)+s_2(M,t))^2\right\rangle \\ &= K\left\langle s_1(M,t)^2\right\rangle + K\left\langle s_2(M,t)^2\right\rangle + K\left\langle 2s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle \\ &= I_1 + I_2 + K\left\langle 2S_1S_2\cos(\omega_1 t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + \varphi_{01})\cos(\omega_2 t - k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{02})\right\rangle \\ &= I_1 + I_2 + KS_1S_2\left\langle \cos\left((\omega_1+\omega_2)t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| - k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{01} + \varphi_{02}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \cos\left((\omega_1-\omega_2)t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{01} - \varphi_{02}\right)\right\rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$. Or la moyenne d'un cosinus dépendant du temps est nulle. Donc $\left\langle \cos\left((\omega_1+\omega_2)t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| - k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{01} + \varphi_{02}\right)\right\rangle = 0$; pour l'autre terme, cela dépend : $\left\langle \cos\left((\omega_1-\omega_2)t - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| + \varphi_{01} - \varphi_{02}\right)\right\rangle$ est nulle si ce cosinus dépend du temps, donc si $\omega_1 \neq \omega_2$; dans le cas contraire, ce terme est constant donc sa moyenne est non nulle.
Si la moyenne de ce terme est nulle, alors $I = I_1 + I_2$.

Remarque : En pratique, deux sources différentes n'ont aucune chance d'avoir exactement la même pulsation. Les interférences ne sont donc possibles, que lorsqu'une même source est séparée en plusieurs sources secondaires de même pulsation.

Formule de Fresnel d'interférences à 2 ondes

Si deux émetteurs E_1 et E_2 émettent deux ondes d'intensités respectives I_1 et I_2, **de même pulsation**, de pulsations spatiales k_1 et k_2, et de phases à l'origine φ_{01} et φ_{02}, alors l'intensité en un point M vaut

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

$$\text{où } \Delta\varphi = (\varphi_{01} - k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\|) - (\varphi_{02} - k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\|) = (\varphi_{01}-\varphi_{02}) - \frac{2\pi}{\lambda_1}\|\overrightarrow{E_1M}\| + \frac{2\pi}{\lambda_2}\|\overrightarrow{E_2M}\| \quad \text{(O4.4)}$$

$\Delta\varphi$ représente le déphasage entre les deux ondes en M, qui prend en compte les déphasages à l'origine, et les déphasages $-k\times$ distance accumulés par les ondes lors de leur propagation.
Le terme $2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi)$ s'appelle le *terme d'interférences*.

Démonstration

On repart de la démonstration précédente dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$; on a alors

$$I = I_1 + I_2 + KS_1S_2\cos(-k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + \varphi_{01} + k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| - \varphi_{02})$$

Or $I_1I_2 = K\frac{S_1^2}{2}K\frac{S_2^2}{2} = \frac{K^2S_1^2S_2^2}{4}$ donc $2\sqrt{I_1I_2} = KS_1S_2$ ce qui donne bien la formule recherchée.

Remarque : Souvent, on travaillera avec une seule source déparée en deux, ou bien deux sources de même intensité. Dans ce cas, si $I_1 = I_2 = I_0$, la formule de Fresnel devient

$$I = 2I_0 + 2I_0\cos\Delta\varphi$$

Remarque : Le plus souvent, les deux sources sont en phase, ou bien les deux ondes ont la même source, ce qui revient au même ; de sorte que $\Delta\varphi = -k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\|$

Définition : Différence de marche

On appelle différence de marche la différence des distances parcourues par les deux ondes : $\delta = \|\overrightarrow{E_2M}\| - \|\overrightarrow{E_1M}\|$. Si les deux ondes traversent des milieux ayant des vitesses de phase identiques, alors le déphasage vaut

$$\Delta\varphi = k.\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \qquad \text{(O4.5)}$$

plus éventuellement un déphasage à l'origine.

Démonstration

Si les ondes interfèrent, c'est qu'elles ont la même pulsation ω. Si en plus elles ont la même vitesse de phase, alors leurs pulsations spatiales k sont identiques, donc $-k_1.\|\overrightarrow{E_1M}\| + k_2.\|\overrightarrow{E_2M}\| = k(\|\overrightarrow{E_2M}\| - \|\overrightarrow{E_1M}\|) = k.\delta$.

Définition : Différence de chemin optique

Dans le cas des ondes lumineuses, on remplace la notion de *différence de marche*, par celle de *différence de chemin optique* : $\delta = (E_2M) - (E_1M)$ où les chemins optiques (A_iM) sont définis comme le produit de la longueur $\|\overrightarrow{E_iM}\|$ par l'indice optique du milieu traversé entre A_i et M. Le déphasage vaut alors $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

Démonstration

On sait que dans un milieu d'indice n, on a $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{n.f} = \frac{\lambda_0}{n}$. Donc on peut écrire, en notant n_1 et n_2 les milieux traversés par les deux ondes, que $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_2}\|\overrightarrow{E_2M}\| - \frac{2\pi}{\lambda_1}\|\overrightarrow{E_1M}\| = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_2\|\overrightarrow{E_2M}\| - \frac{2\pi}{\lambda_0}n_1\|\overrightarrow{E_1M}\| = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(n_2\|\overrightarrow{E_2M}\| - n_1\|\overrightarrow{E_1M}\|\right)$

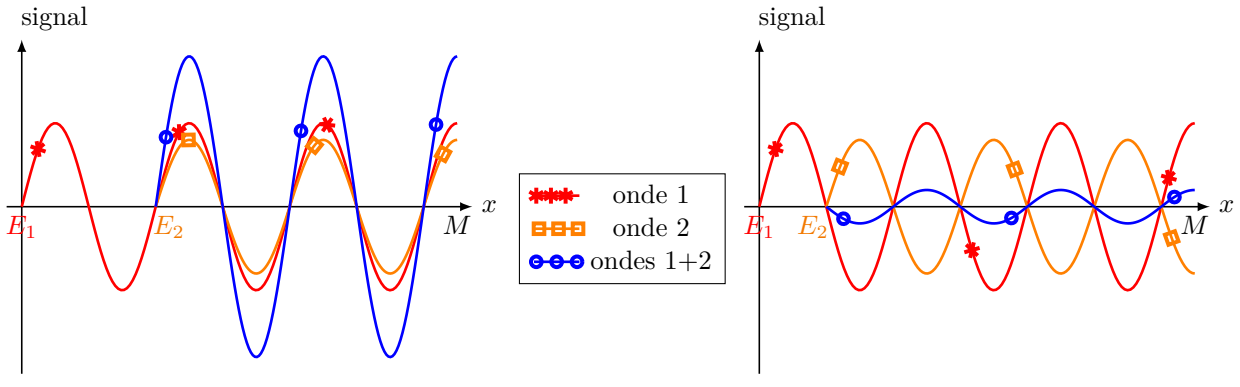
Définition : Interférence constructive/destructive

On dit que l'interférence en un point M est constructive si le terme d'interférences est maximum, donc lorsque $\cos\Delta\varphi = 1$ soit $\Delta\varphi = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où les ondes traversent le même milieu et n'ont pas de déphasage initial, cela correspond à $\delta = p\lambda, p \in \mathbb{Z}$.
On dit que l'interférence en un point M est destructive si le terme d'interférences est minimum, donc lorsque $\cos\Delta\varphi = -1$ soit $\Delta\varphi = \pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où les ondes traversent le même milieu et n'ont pas de déphasage initial, cela correspond à $\delta = \frac{\lambda}{2} + p.\lambda, p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

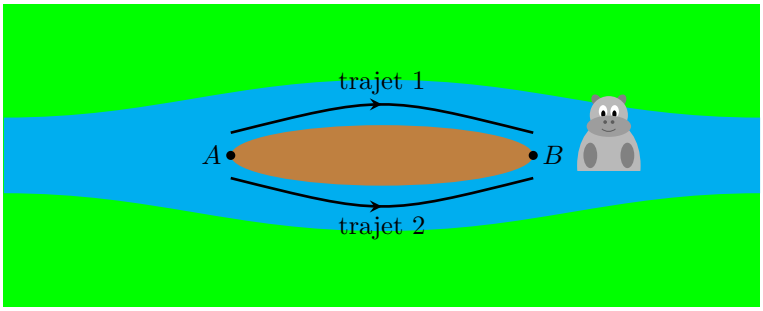
Dans le cas d'ondes dans le même milieu et sans déphasage initial, la condition d'interférences constructives s'écrit $\frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2p\pi$ soit $\delta = p.\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$; c'est le raisonnement équivalent pour les interférences destructives.

FIGURE O4.11 : Addition constructive ou desctructive de deux ondes.



(a) Interférence constructive de deux ondes décalées de 2π. (b) Interférence destructive de deux ondes décalées de π.

Exemple : Interférence de vagues de part et d'autre d'une île



Une vague se propage sur un fleuve ; sa relation de dispersion s'écrit $c = \sqrt{gh}$ où $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et h est la profondeur du fleuve. Au départ, là où le fleuve a pour profondeur $h_0 = 6{,}2\,\mathrm{m}$, elle a pour longueur d'onde $\lambda_0 = 12\,\mathrm{m}$. Elle arrive alors au niveau d'une île (point A) qui la sépare en deux : d'un côté le fleuve a pour profondeur $h_1 = 4{,}3\,\mathrm{m}$, de l'autre $h_2 = 4{,}9\,\mathrm{m}$.
Au bout de l'île de longueur $L = 312\,\mathrm{m}$, les deux ondes se retrouvent au point B et interfèrent.

1. À partir de la relation de dispersion, reliez la longueur d'onde λ_1 dans le côté de profondeur h_1, à λ_0, h_0 et h_2.
   Reliez de même λ_2 à λ_0, h_0 et h_2.
2. Exprimez puis calculez le déphasage en B entre les deux ondes. Commentez.
3. Pour quelles longueurs de l'île y a-t-il interférence destructive en B ?

1. $c_1 = \sqrt{gh_1} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega\lambda_1}{2\pi}$ et de même $\sqrt{gh_0} = \frac{\omega\lambda_0}{2\pi}$.
   En faisant le quotient des deux équations : $\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ (car c'est **la même pulsation** ω) donc $\lambda_1 = \lambda_0\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$.
   De même $\lambda_2 = \lambda_0\sqrt{\frac{h_2}{h_0}}$
2. $\Delta\varphi = 2\pi L\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{2\pi L\sqrt{h_0}}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_2}}\right) = 12{,}4\,\mathrm{rad} \approx 2\pi$ donc l'interférence est constructive.
3. $\Delta\varphi = (2p+1)\pi$ donc $\lambda = 79 + 158.p, p \in \mathbb{N}$ mètres (79 m, 237 m, 395 m, 553 m, …)

Définition : Champ d'interférences

On appelle champ d'interférences la zone de l'espace où les ondes émises par les deux sources se superposent, et interfèrent.

Pour deux source données, il y aura donc des points de cette zone où l'interférence sera constructive (intensité maximale), d'autres où elle sera destructive (intensité minimale).

Définition : Franges et interfrange

Par analogie avec l'optique, on appelle *frange brillante* une courbe reliant des points où l'interférence est constructive, et *frange sombre* une courbe reliant des points où l'interférence est destructive.
La distance entre deux franges brillantes consécutives s'appelle l'*interfrange*.

Définition : Ordre d'interférence

En un point M où le déphasage vaut $\Delta\varphi$, l'ordre d'interférence est défini par $p = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}$ (ou $p = \dfrac{\delta}{\lambda}$ si les 2 ondes traversent le même milieu). S'il est entier, l'interférence est constructive ; s'il est égal à un entier plus 0,5, l'interférence est destructive. Une frange relie des points ayant le même ordre d'interférence.

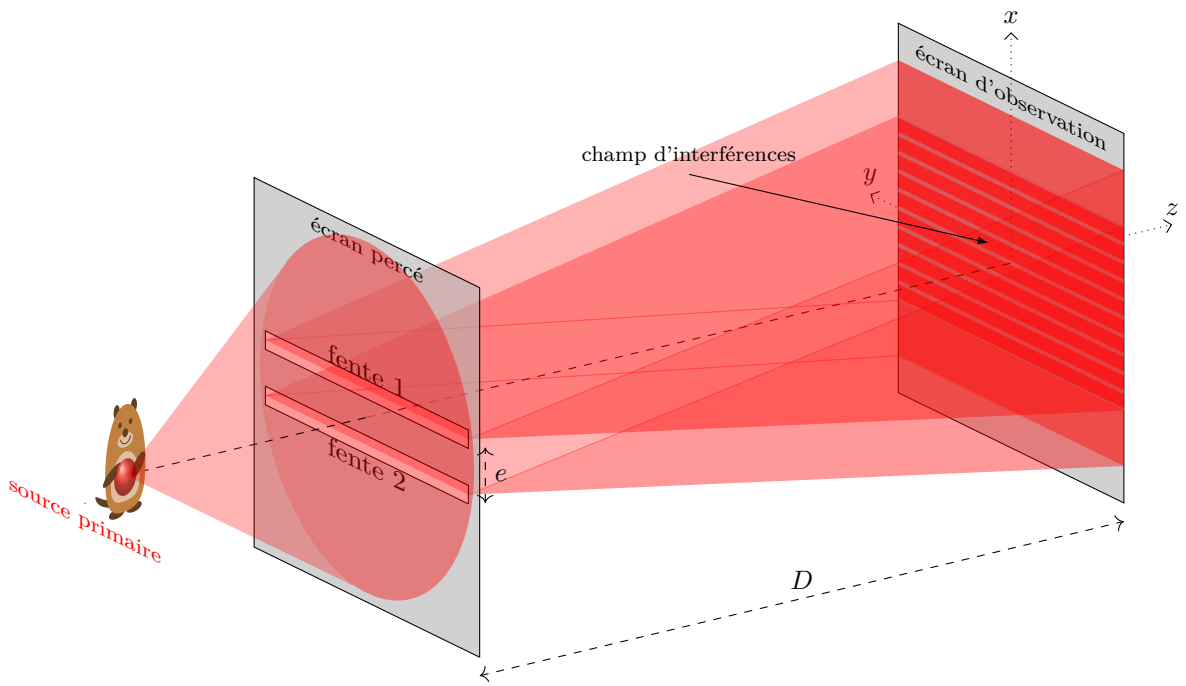
B.4. Exemple d'interférences : les fentes d'Young

Il existe deux dispositifs modèles pour étudier les interférences : les fentes d'Young [1], et l'interféromètre de Michelson. Cette année, nous allons juste voir le premier.

1. Les fentes d'Young sont de simples fentes. C'est Young qui a étudié les interférences produites par ces fentes, ce qui a donné le nom d'« expérience des fentes d'Young » ; au cours du temps, le complément du nom « d'Young », qui s'appliquait à l'expérience, s'est mis à s'appliquer aux fentes, même si ça n'a aucun sens de parler des « fentes d'Young ».

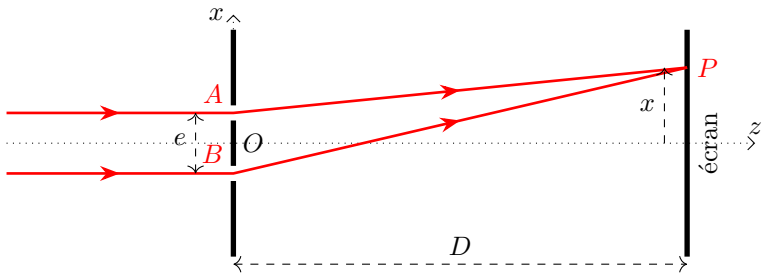
Dans l'expérience des fentes d'Young, on considère un écran percé de deux fentes très fines (de taille a) séparées d'une distance e (figure O4.12) selon l'axe x. Ces fentes sont très longues dans la direction y.

FIGURE O4.12 : Double fente dans l'expérience d'Young.



Cette double fente, placée dans l'air d'indice 1, est éclairée par une onde progressive monochromatique (une seule longueur d'onde λ) arrivant perpendiculairement à l'écran. La lumière passe à travers les deux fentes, et diffracte largement selon x, car ces fentes sont fines (de largeur $a \ll e$) ; là où la lumière diffractée par chacune des fentes se recouvre, il y a des interférences. Pour le calcul, on va considérer la figure O4.13 dans laquelle on ne considère que les deux ondes qui arrivent en un point P de l'écran repéré par sa hauteur x ; l'écran est situé à une distance D après les fentes.

FIGURE O4.13 : Schéma de la diffraction à travers les fentes d'Young.



Propriété : Figure d'interférence des fentes d'Young

La figure de diffraction des fentes d'Young fait apparaître des franges rectilignes parallèles à la direction des fentes. Si l'écran est situé à une distance $D \gg e$, alors l'interfrange au centre vaut

$$i = \frac{\lambda D}{e} \qquad \text{(O4.6)}$$

Démonstration

On part des notations de la figure O4.13. Tout se passe comme si les deux points A et B émettaient deux ondes lumineuses en phases, de même pulsation et se propageant dans le même milieu. On peut donc écrire que le déphasage vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ avec $\delta = BP - AP$ la différence de marche.
Pour calculer AP, notons O le centre de $[AB]$, et prenons-le comme origine des coordonnées. Alors le point A a pour coordonnées $\left(\frac{e}{2}, 0, 0\right)$ et le point P a pour coordonnées $(x, 0, D)$. D'après le théorème de Pythagore, on

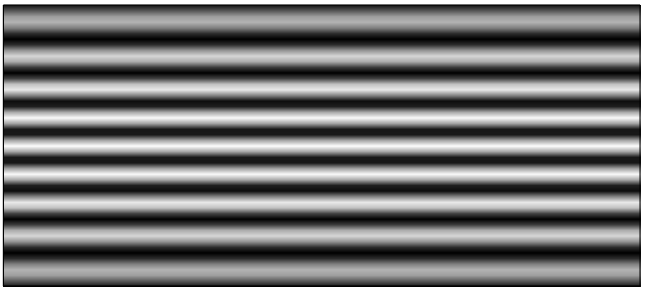
a donc $AP = \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}$. De même, on peut montrer que $BP = \sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}$ (on change e en $-e$).
On a donc $\delta = \sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}$ qui ne dépend que de x ; il en va de même pour $\Delta\varphi$. Les franges étant des courbes le long desquelles le déphasage est constant, ce sont des courbes $x = \text{cst}$, donc des droites parallèles aux fentes.
En multipliant au numérateur et au dénominateur par la somme des racines carrées, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\left(\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}\right)\left(\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}} \\ &= \frac{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2 - \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 - D^2}{\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}} = \frac{x^2 + e.x + \frac{e^2}{4} - x^2 + e.x - \frac{e^2}{4}}{\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}} \\ &= \frac{2.e.x}{\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}}\end{aligned}$$

Dans le cas où $D \gg e$ et en restant proche de l'axe ($x \ll D$), les deux racines du dénominateur sont quasiment égales à D, donc le dénominateur égal à $2D$. On peut alors écrire $\delta \approx \frac{e.x}{D}$ donc $\Delta\varphi = \frac{2\pi e.x}{\lambda.D}$.
Les franges brillantes sont celles vérifiant $\Delta\varphi = 2\pi.p$ avec p un entier, donc la position x_p de la p-ième frange brillante vérifie $\frac{2\pi e.x_p}{\lambda.D} = 2\pi.p$ soit $x_p = p\frac{\lambda D}{e}$. L'interfrange (distance entre deux franges brillantes consécutives) vaut donc bien $i = \frac{\lambda D}{e}$.

Si on veut tracer l'intensité lumineuse sur l'écran, on applique la formule de Fresnel : $I = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi e.x}{\lambda D}\right)$ avec I_0 l'intensité émise par une seule fente (figure O4.14). En réalité, cette intensité n'est pas constante, mais varie comme l'intensité diffractée par la fente. De plus, quand on s'éloigne du centre de la figure, l'interfrange change légèrement.

FIGURE O4.14 : Figure d'interférence des fentes d'Young sur l'écran.





Le modèle d'interférences qu'on a étudié ici peut sembler très artificiel. En réalité, il existe de nombreux phénomènes naturels qui sont explicables par les interférences, et de nombreuses inventions qui sont basées sur ce même phénomène (figures O4.15 et O4.16).

FIGURE O4.15 : Exemples de manifestations naturelles des interférences lumineuses.



(a) Les couleurs changeantes des ailes de papillons et de nombreux insectes.

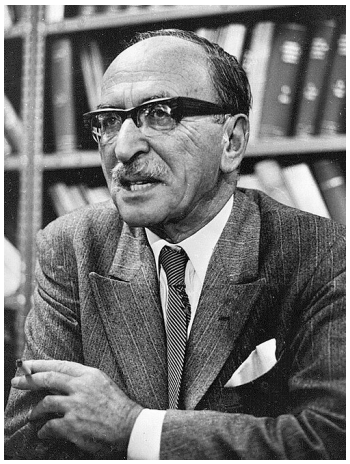


(b) Les franges de couleurs sur les bulles de savon.

FIGURE O4.16 : Quelques physiciens et physiciennes ayant trouvé des inventions majeures basées sur le principe des interférences d'ondes lumineuses.



(a) Katharine Burr Blodgett, inventrice de la couche anti-reflet. *(Crédit : ?)*



(b) Dennis Gabor, inventeur de l'holographie. (Crédit : Wikipedia)

On trouve aussi des interférences dans d'autres domaines de la physique que l'optique :

— en acoustique : dans les salles de concert, les atténuateurs sonores à opposition de phase,...

— en mécanique quantique : les électrons interfèrent comme des ondes, conduisant à des phénomènes étranges (effet Aharonov-Bohm,...) lors de la conduction électrique dans des conducteurs quantiques

— en mécanique : amplification des marées dans certaines baies, interférences d'ondes sismiques,...

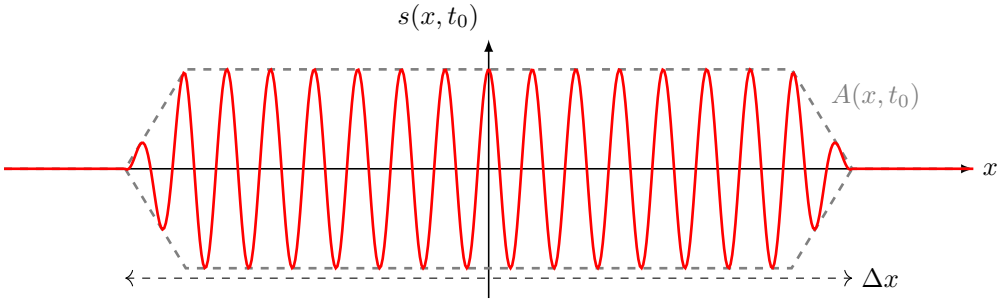
O4.C. Paquets d'ondes

Les ondes progressives harmoniques étudiées jusqu'à présent dans ce chapitre sont des ondes théoriques qui n'existent pas : en effet, elles s'étendent à l'infini selon la direction de propagation. Or toute onde, émise par un émetteur, a un début et une fin : elle est *localisée* dans l'espace selon l'axe de propagation : c'est la *localisation longitudinale*, que nous allons étudier maintenant (par opposition à la *localisation transversale*, orthogonale à l'axe de propagation, qui entraîne le phénomène de diffraction vu plus haut).

C.1. Propriété générales des paquets d'ondes

Quand une lampe émet un flash lumineux, l'onde lumineuse émise peut être vue comme une onde sinusoïdale harmonique ayant un début et une fin. On pourrait la modéliser à l'aide d'une enveloppe : $s(x,t) = A(x,t)\cos(\omega t - kx)$ où $A(x,t)$ est une fonction enveloppe, qui est non nulle uniquement dans la zone où l'onde existe vraiment (figure O4.17). La fonction complète est le produit de l'enveloppe par un cosinus oscillant entre -1 et 1 ; elle oscille donc entre $+A(x,t)$ et $-A(x,t)$. On peut définir la largeur de l'onde Δx comme la largeur de l'intervalle où $A(x,t)$ est non nulle.

FIGURE O4.17 : Onde localisée longitudinalement.



Cette modélisation pose un problème : comment se passe l'interférence de 2 paquets d'onde ? Dans les interférences vues plus haut, on a besoin de connaître la longueur d'onde λ du signal ; mais que vaut-elle pour un paquet d'onde ?

Les mathématiques viennent à notre secours à l'aide d'une théorie : celle de la *transformée de Fourier*. Elle est trop compliquée pour vous, donc on va se contenter de l'illustrer sur des exemples simples, et d'en retenir ses principaux résultats.

Commençons par étudier une onde formée de deux ondes progressives harmoniques (OPH) de pulsation proche. Commençons par ajouter deux signaux temporels sinusoïdaux de pulsations proches :

Propriété : Battements

Si on ajoute deux signaux sinusoïdaux dépendant du temps, de même amplitude et de pulsations proches, on obtient un signal sinusoïdal de même pulsation et dont l'amplitude s'annule périodiquement tous les $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ où $\Delta\omega$ représente la différence des deux pulsations.

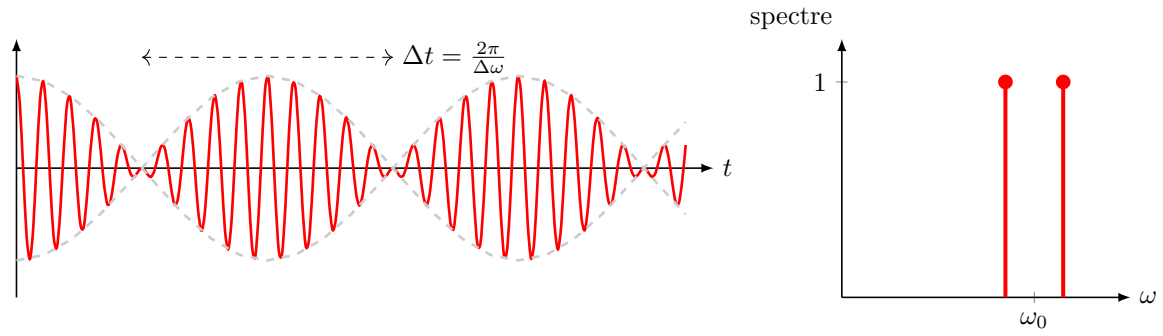
Démonstration

Soient deux signaux temporels $s_1(t) = S_0\cos(\omega_1 t)$ et $s_2(t) = S_0\cos(\omega_2 t)$. On les somme et on utilise la formule de trigonométrie $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$:

$$s(t) = S_0\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right) = 2S_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

On obtient donc un cosinus de pulsation $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ multiplié par une enveloppe de pulsation $\frac{\Delta\omega}{2}$ qui s'annule tous les $\Delta t = \frac{\pi}{\Delta\omega/2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

FIGURE O4.18 : Battements de deux ondes.



De même, si on ajoute deux signaux sinusoïdaux dépendant de la position, de même amplitude et de pulsations spatiales proches, on obtient un signal sinusoïdal de même pulsation spatiale et dont l'amplitude s'annule périodiquement tous les $\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$ où Δk représente la différence des deux pulsations spatiales.

Que se passe-t-il maintenant avec deux ondes, possédant chacune une pulsation temporelle et une pulsation spatiale ? Encore des battements, mais en plus, ceux-ci vont avancer ; et, nouveauté, la vitesse à laquelle avancent les battements n'est pas la même que la vitesse à laquelle avance l'onde sinusoïdale !

Définition : Vitesse de phase et de groupe

Lorsqu'un paquet d'onde se déplace, on appelle *vitesse de phase* v_φ la vitesse à laquelle se déplace l'oscillation sinusoïdale, et *vitesse de groupe* v_g la vitesse à laquelle se déplace l'enveloppe.

La figure O4.18 représente ce phénomène en fonction du temps. Considérons deux ondes progressives harmoniques de pulsations proches, et écrivons leur somme :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= S_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) + S_0\cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2S_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right) \\ &= 2S_0\cos\left(\langle\omega\rangle\, t - \langle k\rangle\, x\right)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \end{aligned}$$

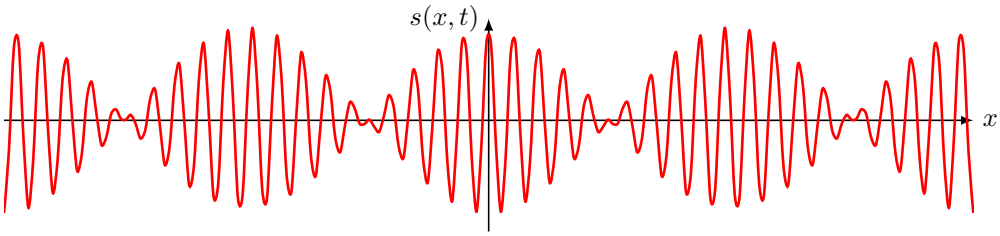
Le premier cosinus est de pulsation $\langle\omega\rangle$ (pulsation moyenne) et de pulsation spatiale $\langle k\rangle$ (pulsation spatiale moyenne) et se déplace à la vitesse de phase $v = \frac{\langle\omega\rangle}{\langle k\rangle}$; le second cosinus, qui représente l'enveloppe, a pour pul-

sation $\frac{\Delta\omega}{2}$ et pour pulsation spatiale $\frac{\Delta k}{2}$; il se déplace donc à la vitesse $\frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$: sa vitesse est la dérivée de ω par rapport à k, différente (a priori) de la vitesse de phase.

Propriété : Déplacement de l'enveloppe des battements

Deux ondes progressives harmoniques de pulsations proches donnent lieu à une seule onde progressive dont l'enveloppe présente des battements qui se déplacent à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ (figure O4.19).

FIGURE O4.19 : Évolution temporelle d'une onde présentant des battements, pour laquelle la vitesse de groupe vaut la moitié de la vitesse de phase.



Que se passe-t-il maintenant si on met plus de deux ondes progressives sinusoïdales ? On va tracer le résultat de la somme de N ondes de pulsations réparties autour de la pulsation ω dans un intervalle $\Delta\omega$. On peut tracer deux types de simulations :

— si on fait varier N à $\Delta\omega$ constant, on constate qu'on obtient toujours une enveloppe qui s'annule tous les $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, mais on a désormais un battement de grande amplitude suivi de $N-2$ battements de faible amplitude (figure O4.20).

— si on fait varier $\Delta\omega$ à N constant, on constate que la largeur temporelle Δt du battement important varie comme $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$, donc plus la largeur spectrale $\Delta\omega$ est grande, plus la largeur temporelle est faible (figure O4.21).

FIGURE O4.20 : Battements de N ondes sinusoïdales, à largeur spectrale fixe.

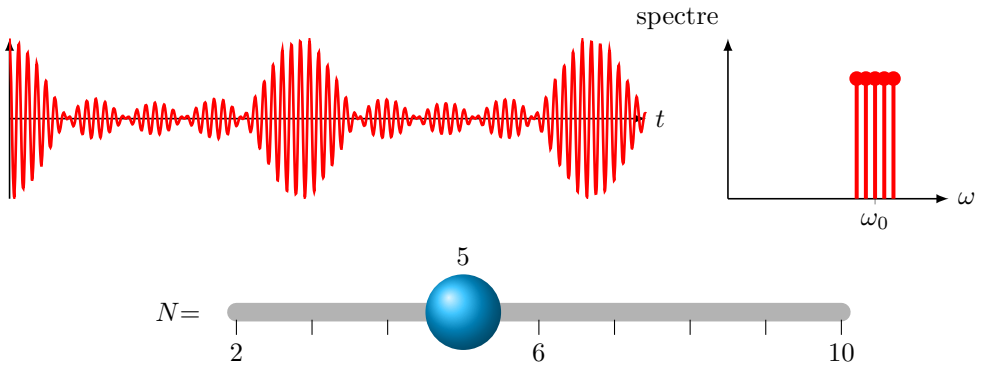
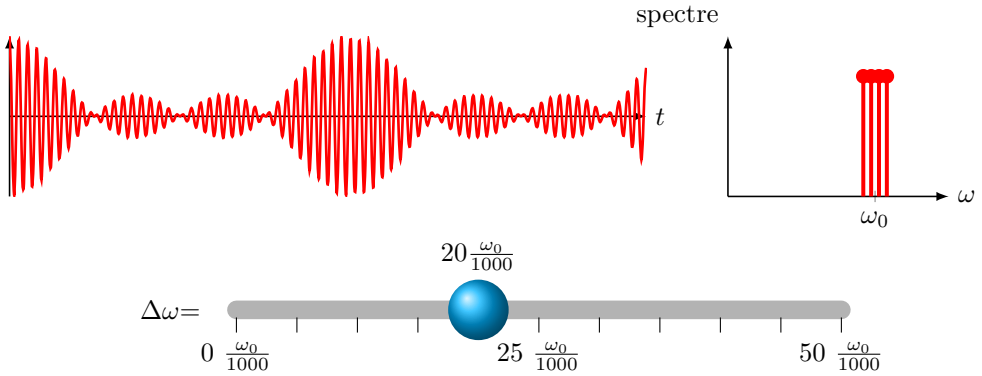
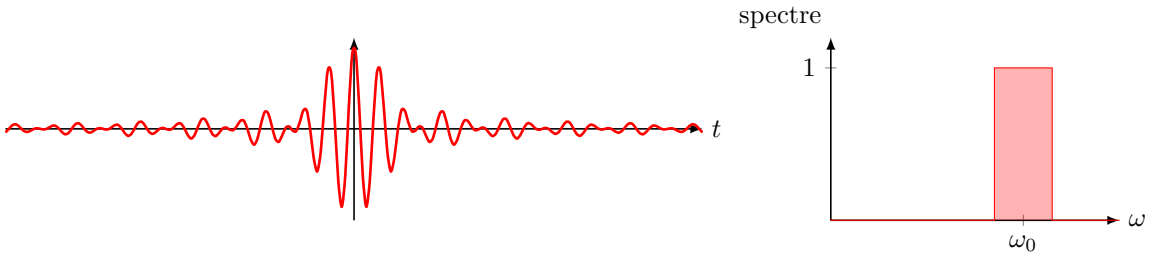


FIGURE O4.21 : Battements de 4 ondes sinusoïdales, à largeur spectrale variable.

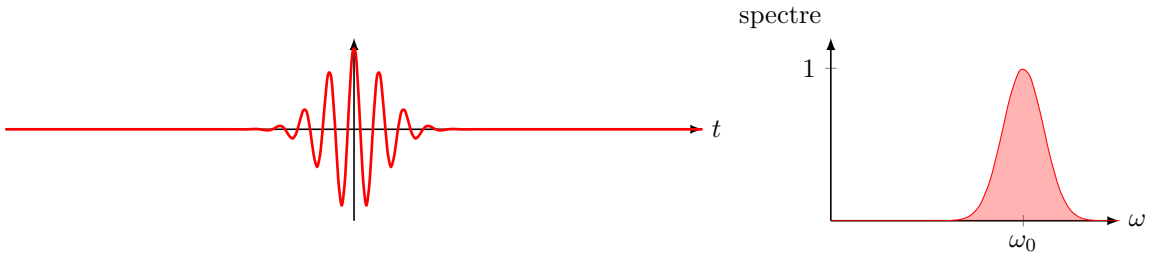


Si on fait tendre $N \to \infty$, on obtient une seule bosse de grande amplitude, la bosse suivante étant à l'infini, donc on ne la verra jamais : un paquet d'onde unique correspond donc à un spectre continu sur un intervalle. La figure O4.22 montre les simulations, d'abord avec une répartition spectrale «en carré», puis avec une répartition plus réaliste en forme de courbe en cloche (gaussienne).

FIGURE O4.22 : Paquet d'onde à spectre continu.



(a) Spectre carré



(b) Spectre gaussien

On admet alors le résultat suivant, dont la démonstration exacte nécessite le théorie de la transformée de Fourier :

Propriété : Paquet d'onde

Un paquet d'onde de pulsation ω_0 et de largeur temporelle Δt correspond à la superposition d'une infinité continue d'ondes harmoniques de pulsations centrée sur ω_0 et réparties avec une *largeur spectrale* $\Delta\omega$ telle que

$$\Delta t.\Delta\omega \approx 2\pi \qquad \text{(O4.7a)}$$

ou encore en fréquence : $\Delta t.\Delta f \approx 1$. Dans le domaine spatial, on a aussi une largeur spectrale Δk reliée à une largeur spatiale Δx par la relation

$$\Delta x.\Delta k \approx 2\pi \qquad \text{(O4.7b)}$$

L'enveloppe du paquet d'onde se déplace à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$, tandis que les oscillations se déplacent à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

Remarque : Dans un milieu non dispersif, $\omega = c.k$ avec c une constante, donc $v_\varphi = v_g$: l'onde et son enveloppe se déplacent à la même vitesse. Au contraire, dans un milieu dispersif, $v_g \neq v_\varphi$.

La figure O4.23 montre l'évolution temporelle d'un paquet d'onde dans divers milieux.

La différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe est très importante. La vitesse de phase est une donnée théorique intéressante mais qui ne correspond à rien de réel ; la vraie vitesse de l'information transportée par l'onde est la vitesse de groupe.

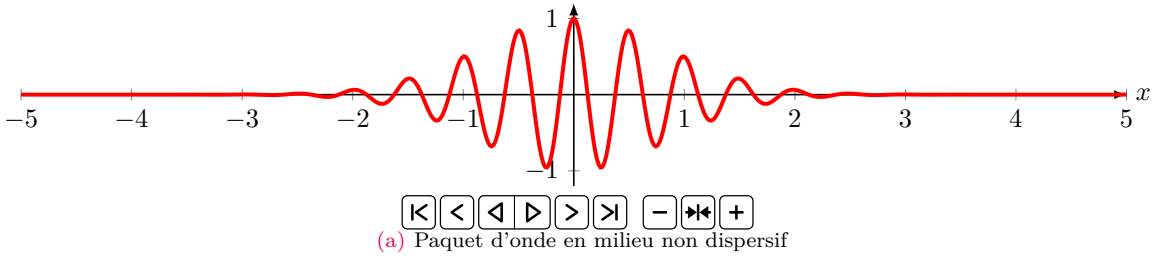
La théorie de la relativité indique qu'aucun signal ne peut se déplacer plus vite que $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; mais cela ne concerne pas la vitesse de phase, qui peut être plus grande, ce qui implique que l'indice n d'un milieu peut très bien être inférieur à 1, à condition de ne pas être constant.

Considérons un milieu optique d'indice $n(\lambda) = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}$. Exprimons sa vitesse de groupe : $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{ck}{n}\right) = c\frac{n-k\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k}}{n^2} = c\frac{n-k\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}{n^2} = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}v_g$ $v_g\left(1+\frac{\omega}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right) = \frac{c}{n}$ d'où on tire

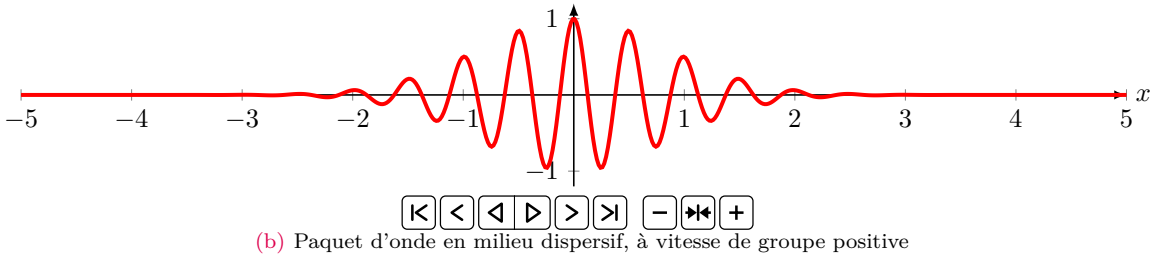
$$v_g = \frac{c}{n + \frac{\omega}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$$

On voit que la vitesse de groupe dépend de $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$. Des chercheurs ont ainsi créé des milieux où l'indice n passe très brusquement d'une valeur à une autre au voisinage d'une certaine longueur d'onde. La vitesse de groupe de la lumière

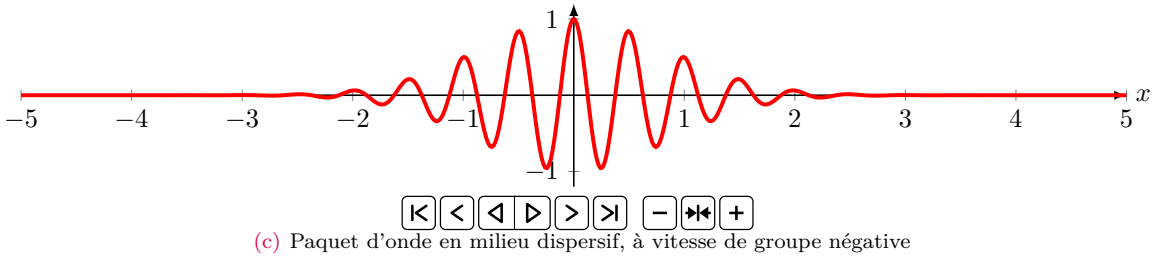
FIGURE O4.23 : Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu non dispersif ou dispersif.



(a) Paquet d'onde en milieu non dispersif



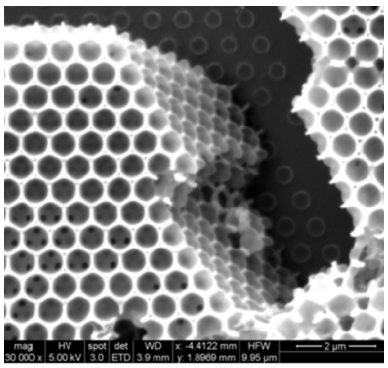
(b) Paquet d'onde en milieu dispersif, à vitesse de groupe positive



(c) Paquet d'onde en milieu dispersif, à vitesse de groupe négative

au voisinage de cette longueur d'onde peut alors être abaissée à quelques mètres par seconde. On a aussi créé des « cristaux photoniques » où la vitesse de groupe peut être négative ! Voir par exemple cet article un peu ancien : Slow Light : From Basics to Future Prospects.

FIGURE O4.24 : Cristal photonique de type « opale inverse ». *(Crédit : F.Royer, D.Jamon).*



Enfin, on peut montrer que la dispersion entraîne toujours deux autres phénomènes : l'absorption, et la déformation du paquet d'onde, qui a tendance à s'élargir avec le temps.

O4. Propagation des ondes

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Approche qualitative de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines. Battements.	
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent	
Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$. Écrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$. Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation.
Milieux dispersifs et non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences	
Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse.

O4. Propagation des ondes

Quelques conseils

✎ Apprenez tout de suite les relations des OPH, en particulier celles entre ω, f et T, ça vous servira toute l'année.

✎ Concernant la diffraction, la seule chose à retenir est l'expression des angles d'annulation de la figure de diffraction à l'infini.

✎ Pour calculer des distances entre 2 points, le plus simple est d'exprimer les coordonnées des deux points et d'appliquer le théorème de Pythagore.

✎ Il faut toujours redémontrer l'expression de l'interfrange des trous d'Young. Pour cela, on exprime la différence de marche δ, puis l'ordre d'interférence p, puis on cherche la position de la p-ième frange brillante.

O4. Propagation des ondes

QCMs

réponses page 191

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Une onde progressive harmonique se dirigeant vers $+x$ peut s'écrire sous la forme :

(a). $B.\cos(-\omega t + kx)$ (b). $A.\cos(\omega t - kx)$
(c). $D.\cos(\omega t)\cos(kx)$ (d). $C.\cos(\omega t + kx)$

Q2. La vitesse (de phase) d'une onde de pulsation $\omega = 2\pi f$ et de pulsation spatiale $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ vérifie :

(a). $v = \frac{\omega}{k}$ (b). $v = \frac{\lambda}{f}$
(c). $v = \frac{k}{\omega}$ (d). $v = \lambda.f$

Q3. Une onde qui vibre perpendiculairement à sa direction de propagation est une onde :

(a). transverse (b). longitudinale

Q4. La tache centrale de diffraction après passage dans une fente de largeur a a pour demi-ouverture angulaire :

(a). $\frac{\lambda}{a}$ (b). $\arcsin a$
(c). $\arcsin \frac{a}{\lambda}$ (d). $\arcsin \frac{\lambda}{a}$

Q5. Les taches de diffraction autour de la tache centrale on une largeur égale :

(a). à celle de la tache centrale (b). à la moitié de la tache centrale
(c). au double de la tache centrale

Q6. On observe des interférenes lorsqu'on mélange des ondes issues :

(a). de deux sources de même intensité (b). de deux sources quelconques
(c). de deux sources de même pulsation (d). d'une seule source, séparée en deux

Q7. Deux ondes 1 et 2 issues de la même source et qui se superposent après avoir accumulé un déphasage $\Delta\phi$ donnent une onde d'intensité :

(a). $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi)$ (b). $I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2\cos(\Delta\phi)$
(c). $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\Delta\phi$ (d). $I = I_1 I_2\cos(\Delta\phi)$

Q8. Si deux ondes issues d'une même source se retrouvent en M après avoir parcouru deux chemins de différence de marche δ dans un milieu où leur longueur d'onde est λ, alors le déphasage $\Delta\phi =$

(a). δ (b). $\frac{\delta\omega}{\lambda}$
(c). $\frac{\lambda}{\delta}$ (d). $\frac{2\pi}{\lambda}\delta$

Q9. Après passage de la lumière à travers deux fentes séparées de a, on observe sur l'écran à une grande distance D :

(a). des franges circulaires (b). des franges rectilignes
(c). d'interfrange $i = \frac{\lambda a}{D}$ (d). d'interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$

O4. Propagation des ondes

Exercices

réponses page 192

Exercice O4.1 : Diffraction des ondes sonores [*]

On prendra $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pour la vitesse du son dans l'air.

1. Une onde sonore de fréquence 440 Hz passe à travers une porte de largeur $\ell = 80\,\mathrm{cm}$. Calculez l'angle sous lequel l'onde va être diffractée à grande distance.
2. Un émetteur à ultrasons de largeur 1 cm envoie des ondes à 40 kHz. Calculez l'angle de diffraction à grande distance.

Exercice O4.2 : Émission par une sonde spatiale [*]

La sonde Juice a été lancée le 14 avril 2023 en direction de Jupiter ; elle va étudier pendant plusieurs années certains satellites de cette planète. Pour transmettre les données vers la Terre, elle dispose d'une antenne parabolique de $d = 2{,}54\,\mathrm{m}$ de diamètre.
Données :

— distance Soleil-Terre : 1 u.a. $= 1{,}5 \times 10^8\,\mathrm{km}$; distance Soleil-Jupiter : 5,2 u.a.

— angle de diffraction à grande distance par une ouverture circulaire : $\arcsin \frac{1{,}22\lambda}{d}$

— fréquences d'émission : $f_1 = 10\,\mathrm{GHz}$ et $f_2 = 30\,\mathrm{GHz}$

1. Calculez la distance maximale possible entre la sonde Juice et la Terre lorsque la sonde sera en orbite autour de Jupiter.
2. La sonde émet un signal via son antenne parabolique. Pour les deux fréquences d'émission, calculez l'angle de diffraction.
3. Déduisez-en la taille maximale du faisceau lorsqu'il atteindra la Terre (pour chaque fréquence).
4. Calculez la fraction de signal qui sera captée par une antenne réceptrice de diamètre 8 m.

Exercice O4.3 : Mesure de la distance Terre-Lune par un laser [**]

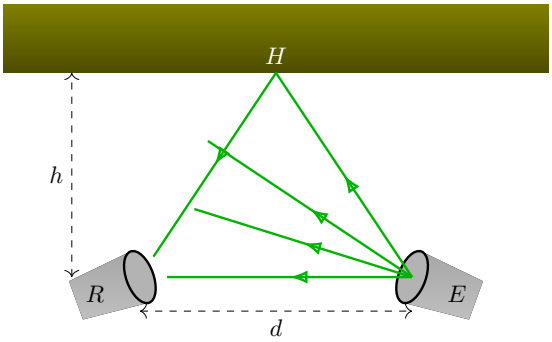
Pour mesurer la distance Terre-Lune, les missions Apollo ont disposé à sa surface des réflecteurs. Un laser situé sur Terre envoie une impulsion qui se réfléchit et revient. La mesure du temps d'aller-retour permet de connaître la distance Terre-Lune.

1. Un jour, on trouve que le temps mis par la lumière pour faire un aller-retour vaut 2,588 s. Sachant que la vitesse de la lumière vaut $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, calculez la distance Terre-Lune à ce moment-là.
2. Le faisceau laser ($\lambda = 532\,\mathrm{nm}$) a initialement une section circulaire de diamètre 60 mm. Calculez l'angle de diffraction correspondant, en radians.
   Indication : pour une ouverture *circulaire* de diamètre a, l'angle de diffraction vaut $\arcsin\left(1{,}22\frac{\lambda}{a}\right)$. Déduisez-en le diamètre du faisceau laser lorsqu'il atteint la Lune.
3. Le réflecteur déposé par Lunokhod 1 a un diamètre égal à 11 cm. Supposons que N photons soient partis de la Terre, combien vont atteindre le détecteur ?
4. Le signal réfléchi a pour diamètre initial 11 cm ; calculez de la même manière son angle de diffraction, la taille de la tache en retour sur la Terre, puis le nombre de photons captés par le télescope d'observation qui fait 1,54 m de diamètre. Commentez.

Exercice O4.4 : Interférence d'une onde avec son onde réfléchie [*]

Un émetteur sonore placé en E émet une onde progressive monochromatique de longueur d'onde λ. Cette onde est directement captée par un récepteur R placé à une distance d. L'onde sonore atteint également le récepteur

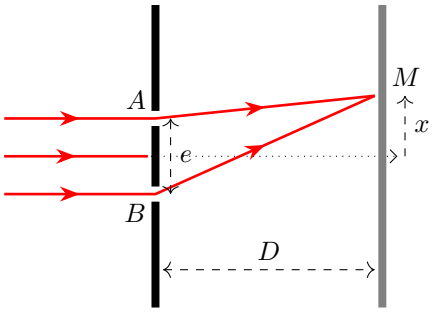
après avoir été réfléchie sur une paroi située à une distance h de la droite ER.



1. Soit d' la distance EHR avec H le point de réflexion, situé sur la médiatrice de $[ER]$. Exprimez d' en fonction de h et d.
2. On suppose que d et h sont fixés ; on fait varier λ. Pour quelles valeurs de λ y a-t-il interférence constructive en R ? et destructive ?
3. On suppose que $d = 40\,\text{m}$ et $h = 30\,\text{m}$. Calculez les 5 premières longueurs d'ondes correspondant à des interférences constructives, et les fréquences correspondantes (on prendra $c = 340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour la vitesse du son dans l'air).
4. On suppose maintenant que d est connu, mais pas h ; on mesure les fréquences f pour lesquelles on a interférence destructive. Montrer comment, à partir de l'écart entre deux fréquences, on peut déterminer h.

Exercice O4.5 : Fentes d'Young [*]

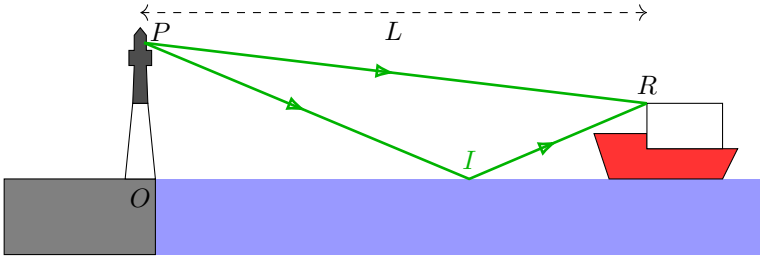
On envoie de la lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 613\,\text{nm}$ sur une plaque percée de deux fentes séparés d'une distance $e = 0{,}6\,\text{mm}$. On observe les interférences sur un écran situé à une distance $D = 80\,\text{cm}$.



1. Soit M un point de l'écran repéré par x. Exprimez les distances AM et BM.
2. Déduisez-en l'intensité $I(M)$ en supposant que la même intensité I_0 passe par les deux trous.
3. En $x = 0$, a-t-on une frange brillante ou sombre ?
   Établissez l'expression de l'interfrange dans l'hypothèse $D \gg e, x$, et calculez-le.

Exercice O4.6 : Émission radio par un phare [**]

Certains phares, en plus d'émettre de la lumière visible, émettent aussi des ondes radios permettant d'être localisés depuis de grandes distances et même par temps de brouillard. On considère ici le premier grand phare de l'île de Sein, de hauteur $h = 43\,\text{m}$ émettant des ondes de fréquence $f = 2\,\text{MHz}$ se déplaçant à $c = 3\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Le phare émet dans toutes les direction depuis le point P. Un bateau, à une distance L, possède un récepteur R qui capte ces ondes à une altitude z au-dessus du niveau de l'océan. Ce récepteur reçoit deux ondes :

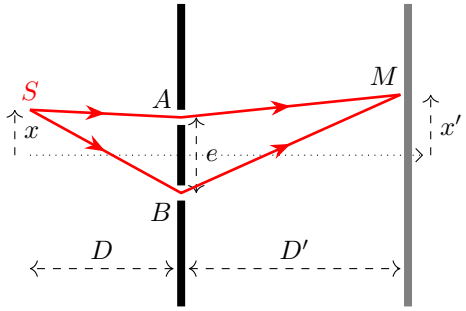
— l'onde qui est allée directement en ligne droite de P à R

— l'onde qui atteint R après une réflexion à la surface de la mer en I

1. Calculez la longueur d'onde dans l'air (indice 1) des ondes émises par le phare.
2. On considère le rayon PIR. Montrez par une construction simple que, pour calculer la distance parcourue par ce rayon, on peut faire comme s'il s'était propagé en ligne droite jusqu'à R depuis une source secondaire P' se déduisant de P.
3. Exprimez alors la différence de marche entre les deux rayons, en fonction de z et des constantes.
4. Comment est l'interférence si $z = 0$? Quelle est l'altitude de la première interférence destructive si $L = 6\,\text{km}$ (on simplifiera l'équation avant de la résoudre en tenant compte du fait que $L \gg h, z$) ? Commentez.

Exercice O4.7 : Trous d'Young avec un émetteur à distance finie [**]

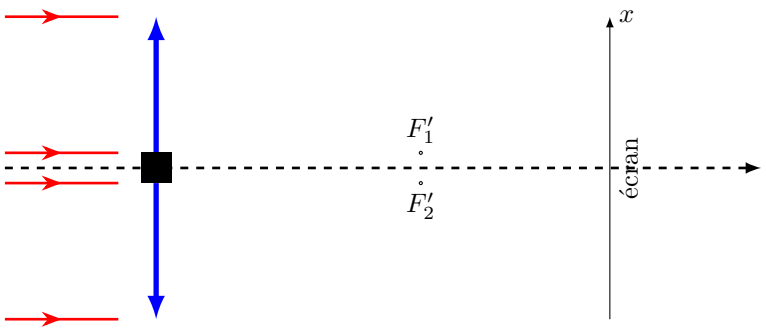
Une source ponctuelle S de luminère monochromatique de longueur d'onde λ envoie de la lumière sur une plaque percée de deux trous séparés d'une distance e. La source est située à une distance D avant les fentes, à une distance x de l'axe ; on observe les interférences sur un écran situé à une distance D', en un point situé à une distance x' de l'axe. On se place dans des conditions telles que x, x' et e sont petits devant D et D'.



1. Exprimez les longueurs SA, SB, AM et BM.
2. Déduisez-en la différence de marche entre les deux rayons.
3. Déduisez-en l'intensité $I(M)$ en supposant que la même intensité I_0 passe par les deux trous.
4. Exprimez l'interfrange ; est-il le même que pour une source sur l'axe ?
5. Exprimez la valeur de x' correspondant à une différence de chemin optique nulle. Commentez.
6. Que se passe-t-il si on ajoute une deuxième source S_2 située dans le même plan transverse que S, mais à un x différent ?

Exercice O4.8 : Bilentilles de Billet [**]

Le dispositif d'interférences proposé par Billet consiste à prendre une lentille convergente de distance focale f', de la scier en 2, et d'écarter les deux moitiés d'une petite distance e.



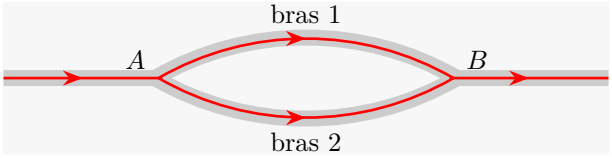
Chaque demi-lentille agit comme la lentille initiale, mais les deux foyers images sont décalés de e (on les note F_1' et F_2').

1. On envoie sur le système un faisceau monochromatique parallèle à l'axe. Desinez le trajet des rayons en sortie de chaque lentille, en allant plus loin que les foyers.
   On place un écran à une distance d après les foyers ; quelle est la zone de l'écran où on peut observer des interférences ?
2. Les deux foyers agissent comme des sources secondaires qui émettent de la lumière. Déterminez l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran, en fonction de x ; on supposera que $e, x \ll d$.

3. Combien de franges brillantes sont visibles ? AN pour $\lambda = 600\,\text{nm}$, $d = 1\,\text{m}$ et $e = 2\,\text{mm}$.
4. [***] Considérez ce qui change si, au lieu d'écarter les deux demi-lentilles, on en avance une de e.

Exercice O4.9 : Interféromètre de Mach-Zehnder [**]

En introduisant des impuretés à la surface d'un matériau comme le silicium, on peut fabriquer des canaux qui guident la lumière comme des fibres optiques.
On considère un composant dans lequel la lumière est séparée en deux voies (en A), puis parcourt deux bras différents de même longueur $L = 500\mu m$ avant de se recombiner en B.



Dans le bras 1, la lumière se propage dans un indice $n_1 = 1{,}532$ tandis que dans le bras 2 l'indice vaut $n_2 = 1{,}534$.

1. On note λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide, et λ_1 dans un milieu d'indice n_1. Reliez λ_0, λ_1 et n_1. Faites de même pour λ_2.
2. Exprimez le déphasage $\Delta\phi$ des deux ondes en B.
3. Calculez les longueurs d'onde λ_0 du domaine visible qui donnent une interférence destructive en B.

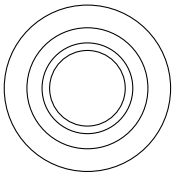
Exercice O4.10 : Des ronds dans la mare [***]

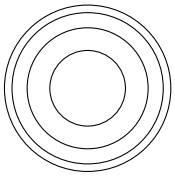
Les ondes se déplaçant à la surface de l'eau obéissent à l'équation de dispersion

$$\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right).\tanh\left(k.h\right)$$

où $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur ; $\gamma = 76\times10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ est la tension superficielle de l'eau ; $\rho = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau ; tanh est la fonction tangente hyperbolique définie par $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. **Eau profonde**
   On est en régime d'eau profonde lorsque la longueur d'onde λ est très inférieure à la profondeur h.
   (a) Que peut-on dire de $h.k$ dans ce régime ? Sachant que $\tanh x \underset{x\to\infty}{\to} 1$ (ce que vous pouvez montrer facilement), simplifiez la relation de dispersion.
   (b) Exprimez alors la vitesse des ondes en fonction de k. Étudiez ses variations et tracez son tableau de variations.
   (c) Calculez numériquement la vitesse minimale et la longueur d'onde associée.
   (d) Quand on jette un caillou (de plusieurs centimètres) dans une mare, on crée des ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre grandeur de la taille du caillou. Dans quelle partie de la courbe est-on ? Expliquez pourquoi, si on observe les distances entre les cercles créés, elle augmente quand on part du centre vers les bords (figure de gauche).
   (e) Dans le cas d'une goutte d'eau, c'est l'inverse : la distance diminue du centre vers les bords (figure de droite). Expliquez.


Ondes circulaires dans le cas d'un caillou

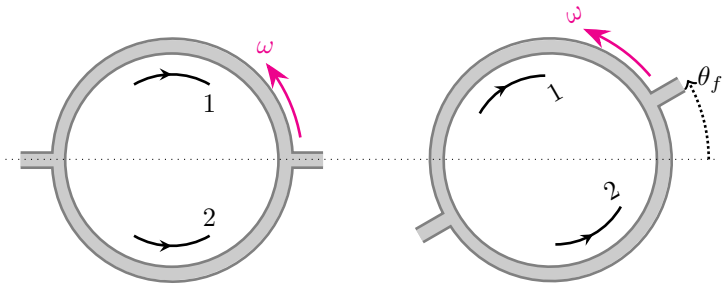

Ondes circulaires dans le cas d'une goutte

2. **Eau peu profonde**
   On est dans ce régime lorsque $\lambda \gg h$.

(a) Sachant que $\tanh x \approx x$ pour $x \ll 1$, simplifiez la relation de dispersion.
(b) Étudiez les variations de v en fonction de k.
(c) Pour une longueur d'onde fixée, comment varie v avec la profondeur ?
(d) Quand une vague se déplace en eau très peu profonde, le centre de la vague (bosse) voit une profondeur plus grande ; va-t-il plus ou moins vite ? Quelle conséquence cela a-t-il ?

Exercice O4.11 : Effet Sagnac [***]

Un interféromètre de Sagnac est constitué de deux chemins différents pour la lumière, ayant chacun la forme d'un demi-cercle de rayon R. De la lumière monochromatique de fréquence f arrive de la droite ; elle est séparée en deux, une partie va dans le demi-cercle supérieur (chemin 1), une autre dans le demi-cercle inférieur (chemin 2), puis les deux sont mélangées dans la sortie.



Instant d'entrée Instant de sortie

1. Calculez la phase accumulée par la lumière dans chaque bras lorsque l'interféromètre est immobile (imaginer la figure de gauche immobile) et que la lumière circule dans du vide.
   L'interférence est-elle constructive ou destructive ?
2. On met en rotation l'interféromètre à la vitesse angulaire ω. À l'instant $t = 0$, la lumière entre dans l'interféromètre (à gauche). On suppose pour le moment que le deux branches de l'interféomètre sont constituées de vide (vitesse de la lumière : c).
   Soit t_1 le temps mis par la lumière passant par le bras 1 pour arriver à la sortie ; pendant ce temps l'interféromètre a tourné de $\theta_f = \omega t_1$. Quelle distance a donc parcouru la lumière dans le bras 1 ? déduisez-en la phase de l'onde 1 (en fonction aussi de λ_0, longueur d'onde dans le vide).
3. Même question avec l'onde 2.
4. Montrez que, pour de vitesses de rotation faibles ($R\omega \ll c$), le déphasage entre les deux bras est proportionnel à la vitesse de rotation ω. Pour un rayon $R = 5\,\text{cm}$, et une lumière de longueur d'onde 614 nm dans le vide, calculez la vitesse ω donnant lieu à la première interférence destructive en sortie. Commentez.
5. Souvent le lumière circule dans un milieu matériel d'indice n. Dans ce cas, le mouvement du milieu entraîne la lumière avec lui. La loi de l'entraînement de Fresnel-Fizeau indique que la vitesse de la lumière devient $\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_e$ où v_e est la vitesse du matériau, comptée algébriquement dans le sens de propagation. Ici, $v_e = \pm R\omega$ suivant la branche.
   Recalculez le déphasage entre les deux bras, et montrez qu'il est indépendant de n.
6. Ce système est peu sensible. Comment peut-on le modifier pour augmenter sa sensibilité ?

O4. Propagation des ondes

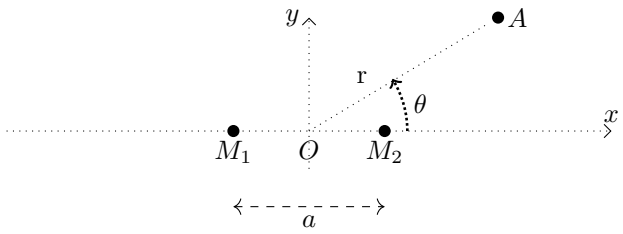
TDs numériques

réponses page 196

TD numérique : Émission par deux antennes

.py plot(polaire)

On considère deux antennes qui émettent des ondes (radio, ou de téléphone). Ces deux antennes sont séparées d'une distance a. On prend les notations de la figure ci-dessous, où M_1 et M_2 sont les deux antennes qui émettent deux signaux identiques $s(M_i,t) = S_0\cos(\omega t)$; le point A est celui où on capte les deux ondes, il est repéré par la longueur $r = OA$ (avec O le milieu de $[M_1M_2]$) et l'angle θ entre l'axe Ox et OA.



1. Écrivez les coordonnées des points M_1, M_2 et A en fonction de a, r et θ.
2. Exprimez les longueurs M_1A et M_2A, puis la différence de marche.
3. Exprimez alors l'intensité captée au point A, en notant I_0 l'intensité captée si une seule des deux antennes émet.
4. On fait émettre par ces antennes des ondes de fréquence $f = 96\,\text{MHz}$; elles se déplacent à la vitesse $c = 3\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculez longueur d'onde dans le vide λ de ce signal.
5. Numériquement, générez un tableau `tab_theta` d'angles compris entre 0 et 2π, et calculez la tableau `tab_I` des intensités correspondantes avec les valeurs suivantes : $I_0 = 1$ (unités arbitraires), $a = 5\lambda$ et $r = 300\,\text{m}$.
   Tracez alors la **courbe polaire** d'émission avec le programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.polar()
plt.plot(tab_theta,tab_I)
plt.show()
```

   Interprétez la courbe obtenue (pensez aux trous d'Young).
6. On prend maintenant $a = \frac{\lambda}{2}$. Tracez la courbe ; quel est l'intérêt de cette configuration ?
7. Que devient la courbe si on ajoute à l'émetteur 2 un déphasage à l'origine égal à π ?
8. On admet que la formule de Fresnel pour 2 ondes se généralise pour 3 ondes : en notant $\Delta\phi_{ij}$ le déphasage entre l'onde émise par l'émetteur i et celle émise par l'émetteur j, et I_i l'intensité émise par l'émetteur i, on a
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\phi_{12}) + 2\sqrt{I_1I_3}\cos(\Delta\phi_{13}) + 2\sqrt{I_2I_3}\cos(\Delta\phi_{23})$$
   Tracez la courbe polaire d'émission de trois antennes en phase placées en $(-\lambda/2;0)$, $(0;0)$ et $(+\lambda/2;0)$.

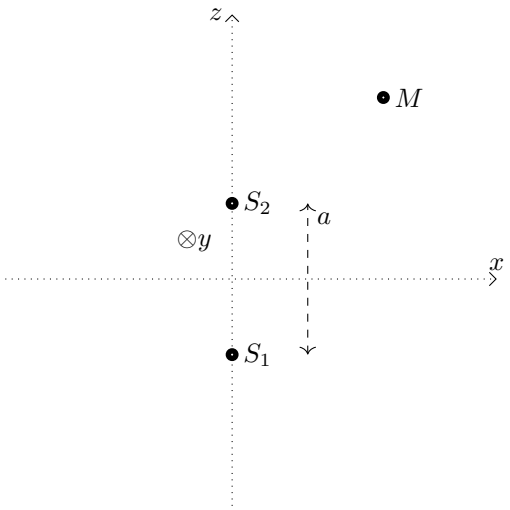
Vous pouvez vous amuser avec d'autres configurations, par exemples un carré d'antennes de côté $\lambda/4$ avec un déphasage de $\pi/2$ pour celles du bas.

TD numérique : Trous d'Young

.py plot(image)

Le calcul vu en cours montre que, pour deux fentes d'Young séparées de a, on observe sur un écran placé à grande distance D face aux fentes une figure formée de franges brillantes et sombres rectilignes, avec un interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$. On va ici simuler les figures d'interférences dans le cas général.
Dans ce TD, on considère non plus des fentes, mais de simples trous. Plus généralement, on va considérer deux sources ponctuelles S_1 et S_2 placées comme sur la figure. Pour les AN : $a = 0{,}4\,\text{mm}$ et $\lambda = 612\,\text{nm}$, et on considérera que les deux sources émettent dans toutes les directions la même intensité $I_0 = 1$ (unités

arbitraires).



1. Donner les 3 coordonnées des points S_1 et S_2.
   On considère un point M quelconque de coordonnées (x, y, z). Exprimez les longueurs S_1M et S_2M, puis la différence de chemin optique δ en supposant qu'on est dans l'air d'indice 1.
2. **Écran parallèle à S_1S_2**
   On place tout d'abord un écran dans le plan perpendiculaire à x à une distance $D = 2\,\text{m}$ du plan des sources.
   (a) On va d'abord tracer le profil selon l'axe z pour $y = 0$. On considère donc des points de coordonnées $(D, 0, z)$ pour z variant entre $-2\,\text{cm}$ et $+2\,\text{cm}$.
   Créez le tableau des valeurs de z, puis le tableau des différences de marches δ correspondant, enfin le tableau contenant l'intensité donnée par la formule de Fresnel.
   (b) Tracez le profil d'intensité en fonction de z. Mesurez l'interfrange au centre et comparez à la théorie.
   (c) On veut maintenant avoir non pas un profil mais une image en 2D de l'intensité (ou éclairement). Pour cela, il faut commencer par générer deux tableaux 2D donnant les coordonnées y et z des points de l'écran (la coordonnée x est fixée à D). On utilise la fonction `np.meshgrid(tab_colonnes,tab_lignes)` qui crée deux tableaux ; pour cela, testez le programme :

```
import numpy as np
tab_lignes=np.linspace(1,5,5) # les coordonnées des lignes vont de 1 à 5
tab_colonnes=np.linspace(3,6,5) # les coordonnées des colonnes vont de 3 à 6
mesh_colonnes,mesh_lignes=np.meshgrid(tab_colonnes,tab_lignes)
print(mesh_lignes)
print(mesh_colonnes)
```

   À partir de là, écrivez un programme qui génère deux tableaux `mesh_y` et `mesh_z` contenant les coordonnées des points de l'écran, pour z variant entre $-2\,\text{cm}$ et $+2\,\text{cm}$ et y entre $-3\,\text{cm}$ et $+3\,\text{cm}$ (pas plus de 300 points pour chaque direction).
   (d) À l'aide des tableaux de la question précédente, générez le tableau `mesh_delta` contenant les différences de chemin optique, puis `mesh_I` contenant l'intensité.
   Affichez alors ce tableau comme une image à l'aide du programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.imshow(mesh_I,cmap="gray",aspect=4/6,extent=[-30,30,-20,20])
plt.show()
```

   Remarque : `plt.imshow` affiche un tableau 2D comme une image. L'option `cmap` indique la palette, c'est-à-dire la correspondance valeur/couleur, il en existe d'autres que `"gray"`. L'option `aspect` indique le rapport d'aspect, c'est-à-dire le rapport des échelles verticale:horizontale de l'image. L'option `extent` donne les limites des axes.
   (e) Modifiez le programme pour que y varie entre $-2\,\text{m}$ et $+2\,\text{m}$. Observez comment la figure change quand on s'éloigne du centre.

3. **Écran perpendiculaire à S_1S_2**
   On place maintenant l'écran dans le plan $z = D$ avec $D = 50\,\text{cm}$. Tracez la figure d'interférence sur l'écran sur un carré de taille $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$.
4. **Trois trous d'Young**
   Reprendre la figure sur un écran en $x = D$, mais avec 3 trous d'Young identiques placés en triangle équilatéral de côté a ; la formule de Fresnel à 3 ondes est

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi_{12}) + 2\sqrt{I_1 I_3}\cos(\Delta\phi_{13}) + 2\sqrt{I_2 I_3}\cos(\Delta\phi_{23})$$

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (b)
La fonction cosinus est paire.
Q2.(a) ET (d)
Q3.(a)
Q4.(d)
La réponse $\frac{\lambda}{a}$ est juste pour $a \gg \lambda$.
Q5.(b)
Q6.(c) ET (d)
Le cas de deux sources de même pulsation est très rare.
Q7.(a)
Q8.(d)
Q9.(b) ET (d)
C'est la seule solution, et elle est souvent compliquée, sauf numériquement.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice O4.1 : Diffraction des ondes sonores [*]

1. $\lambda = \frac{c}{f} = 77\,\text{cm}$ donc $\arcsin\frac{\lambda}{\ell} = 1{,}31\,\text{rad} = 75°$. On a donc une diffraction à très grand angle, voilà pourquoi il n'est pas nécessaire d'être en face de la porte pour entendre ce qui est dit à côté.
2. $1{,}02\,\text{rad} = 58°$: un tel émetteur ne peut donc pas être très directionnel.

Corrigé de l'exercice O4.2 : Émission par une sonde spatiale [*]

1. Quand la Terre et Jupiter sont de part et d'autre du Soleil, la distance vaut $d_{max} = 6{,}2\,\text{u.a.} = 9{,}3\times10^{11}\,\text{m}$
2. À la fréquence f_1 on a un angle $\alpha_1 = \arcsin\frac{1{,}22c}{f_1.d} = 0{,}0144\,\text{rad}$; de même $\alpha_2 = 0{,}0048\,\text{rad}$.
3. Avec un peu de trigo, on trouve le diamètre du faisceau $d_1 = 2d_{max}\tan\alpha_1 = 2{,}7\times10^{10}\,\text{m}$; de même $d_2 = 8{,}9\times10^{9}\,\text{m}$.
4. Soit ℓ le diamètre de l'antenne, alors la portion de faisceau captée est $\frac{\pi\ell^2/4}{\pi d_1^2/4} = 9\times10^{-20}$; de même pour l'autre fréquence on trouve 8×10^{-19}. Dans les deux cas c'est très faible et nécessite une forte puissance d'émission et une détection très sensible.

Corrigé de l'exercice O4.3 : Mesure de la distance Terre-Lune par un laser [**]

1. $d = \frac{2{,}588\times299\,792\,458}{2}$ soit $388\,000\,\text{km}$
2. L'angle vaut $1{,}22\frac{\lambda}{a} = 1{,}1\times10^{-5}\,\text{rad}$. Un schéma montre facilement que le diamètre de la tache sur la Lune vaut $2\times1{,}1\times10^{-5}\times388\times10^{6} = 8400\,\text{m}$
3. Pour savoir la proportion de photons qui tapent le miroir, il faut faire le rapport des surfaces : on trouve donc $N\left(\frac{0{,}11}{8400}\right)^2 = 1{,}7\times10^{-10}N$
4. On trouve une tache de 4600 m de diamètre et un nombre final de photons égal à $1{,}9\times10^{-17}N$. Il y a donc très très peu de photons qui reviennent, la détection est très difficile.
   Dans la pratique, on tire 10 fois par secondes pendant 10 minutes, et on récolte à peine 600 photons !

Corrigé de l'exercice O4.4 : Interférence d'une onde avec son onde réfléchie [*]

1. Par Pythagore : $d' = 2\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4h^2+d^2}$
2. Il y a interférence constructive si $d'-d = p\lambda$ avec $p\in\mathbb{N}^*$ (ici $p\leq0$ est impossible car $d'>d$), soit $\lambda_p = \frac{1}{p}d\left(\sqrt{1+\frac{4h^2}{d^2}}-1\right)$
   Pour les interférences destructives, on remplace p par $p-\frac{1}{2}$.
3. | p | λ (m) | f (Hz) |
   |---|---|---|
   | 1 | 32 | 10,6 |
   | 2 | 16 | 21,2 |
   | 3 | 10,7 | 31,8 |
   | 4 | 8,0 | 42,4 |
   | 5 | 6,4 | 52,9 |
4. Les valeurs mesurées vérifient $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c(p-1/2)}{d\left(\sqrt{1+\frac{4h^2}{d^2}}-1\right)}$ mais p n'est pas connu. Par contre, si on note Δf l'écart de fréquence entre deux interférences destructives consécutives, on obtient facilement $h = \frac{1}{2}\sqrt{\left(d+\frac{c}{\Delta f}\right)^2-d^2}$

Corrigé de l'exercice O4.5 : Fentes d'Young [*]

1. Par le théorème de Pythagore : $AM = \sqrt{D^2 + (x - e/2)^2}$ et $BM = \sqrt{D^2 + (x + e/2)^2}$
2. Les sources sont cohérentes, donc par la formule de Fresnel : $I = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(BM - AM)\right)$
3. Au centre $x = 0$ donc $AM = BM$ et $I = 4I_0$: interférence constructive, frange brillante.
   Pour l'interfrange, il faut faire comme dans le cours : $\delta = \frac{BM^2 - AM^2}{BM + AM} \approx \frac{D^2 + (x+e/2)^2 - D^2 - (x-e/2)^2}{2D} = \frac{2ex}{2D} = \frac{ex}{D}$. La position de la p-ième frange brillante est donnée par $\frac{ex_p}{D} = p.\lambda$ soit $x_p = p\frac{\lambda D}{e}$ donc $i = \frac{\lambda D}{e} = 0{,}8\,\text{mm}$

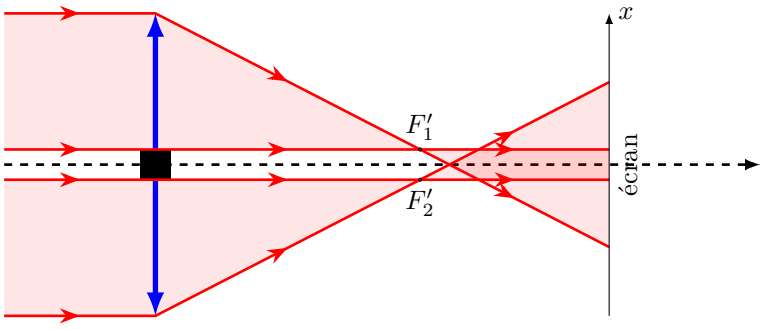
Corrigé de l'exercice O4.6 : Émission radio par un phare [**]

1. $\lambda = \frac{c}{f} = 150\,\text{m}$
2. P' est le symétrique de P par rapport au niveau de la mer.
3. On se retrouve alors avec une construction qui ressemble aux fentes d'Young. On trouve après des calculs semblables à ceux du cours : $\delta = \sqrt{(z+h)^2 + L^2} - \sqrt{(z-h)^2 + D^2}$
4. Si $z = 0\,\text{m}$, alors $\delta = 0\,\text{m}$ donc l'interférence est constructive.
   On résout $\delta = \frac{\lambda}{2}$; pour cela on opère comme dans le cours : $\delta = \frac{(z+h)^2 + D^2 - (z-h)^2 - D^2}{\sqrt{(z+h)^2 + L^2} + \sqrt{(z-h)^2 + D^2}} \approx \frac{4zh}{2L} = \frac{2zh}{L}$. L'équation devient alors $\frac{2zh}{L} = \frac{\lambda_0}{2}$ donc $z = \frac{\lambda_0 L}{4h} = 5200\,\text{m}$: il n'y a donc aucun risque qu'un bateau se retrouve dans une zone d'interférence destructive où il ne capterait pas le signal.

Corrigé de l'exercice O4.7 : Trous d'Young avec un émetteur à distance finie [**]

1. Toujours avec Pythagore, comme dans le cours, on trouve $SA = \sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}$, $SB = \sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + D^2}$, $AM = \sqrt{\left(x' - \frac{e}{2}\right)^2 + D'^2}$, $BM = \sqrt{\left(x' + \frac{e}{2}\right)^2 + D'^2}$
2. $\delta = SB - SA + BM - AM$. Pour simplifier les racines, on multiplie les groupes de deux termes : $\delta = \frac{SB^2 - SA^2}{SB + SA} + \frac{BM^2 - AM^2}{BM - AM} \approx \frac{xe}{D} + \frac{x'e}{D'}$ après quelques calculs.
3. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ donc $I = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{xe}{D} + \frac{x'e}{D'}\right)\right)$
4. Les franges brillantes vérifient $\delta = p.\lambda$ avec p un entier, et cela correspond à x'_p tel que $\frac{xe}{D} + \frac{x'_p e}{D'} = p.\lambda$ soit $x'_p = p\frac{\lambda D'}{e} - \frac{D'}{D}x$. Entre x'_p et x'_{p+1} il y a donc un écart de $i = \frac{\lambda D'}{e}$, identique au cas d'une source à l'infini.
5. $p = 0$ pour $x'_0 = -\frac{D'}{D}x$ ce qui correspond au point de l'écran diamétralement opposé avec S par rapport au milieu des deux fentes.
6. Les deux sources n'ont aucune chance d'avoir exactement la même fréquence, donc elles n'interfèreront pas : leurs intensités s'ajoutent. Suivant la position de S_2, on peut avoir différents cas :
   — soit les franges brillantes correspondant aux deux sources se superposent, et la figure d'interférence reste la même
   — soit les franges brillantes d'une source se superposent avec les franges sombres de l'autre source, et les interférences se brouillent.

Corrigé de l'exercice O4.8 : Bilentilles de Billet [**]

1. 

   On peut observer des interférences là où les deux faisceaux se recouvrent, donc sur une zone de hauteur e.
2. C'est le calcul classique de fentes d'Young ; on trouve $I(x) = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{e.x}{d}\right)$

3. L'interfrange vaut $i = \frac{\lambda d}{e}$ donc on voit $\frac{e}{i} = \frac{e^2}{\lambda d} = 6{,}7$ franges dans 2 mm. C'est très peu visible.
4. À réfléchir. Les deux foyers sont maintenant alignés avec l'axe optique ; le champ d'interférence est une petite zone comprise entre les deux foyers ; le système (deux foyers + écran) étant invariant par rotation autour de cet axe, les franges seront des cercles. Le calcul du rayon de ces cercles demande de savoir faire des développements limités, vous verrez ça plus tard.

Corrigé de l'exercice O4.9 : Interféromètre de Mach-Zehnder [**]

1. $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ et $\lambda_1 = \frac{c}{n_1 f}$ en notant f la fréquence, donc $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$ et $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$.
2. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_2}L - \frac{2\pi}{\lambda_1}L = \frac{2\pi L}{\lambda_0}(n_2 - n_1)$
3. L'interférence est destructive lorsque $\Delta\phi = \pi + p2\pi$ avec p un entier, soit $\lambda_0 = \frac{L(n_2-n_1)}{p+1/2}$; pour $p = 1, 2, 3, \ldots$ on trouve $\lambda_0 = 2000\,\text{nm}$; 667 nm ; 400 nm ; 285 nm ; etc. Donc on en trouve 2 dans le visible.

Corrigé de l'exercice O4.10 : Des ronds dans la mare [***]

1. **Eau profonde**
   (a) $h.k = 2\pi\frac{h}{\lambda} \gg 1$ donc $\tanh(h.k) \approx \lim_{x\to+\infty}\tanh(x) = 1$. La relation de dispersion devient alors $\omega^2 = g.k + \frac{\gamma k^3}{\rho}$
   (b) $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}$
   $\frac{dv}{dk} = \frac{-\frac{g}{k^2}+\frac{\gamma}{\rho}}{2v}$ donc $\frac{dv}{dk} > 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho} > \frac{g}{k^2} \Leftrightarrow k > \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$

k	0		$\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$		$+\infty$
$\frac{dv}{dk}$		-	0	+	
v	$+\infty$	↘	$2\sqrt[4]{\frac{\gamma g}{\rho}}$	↗	$+\infty$

   (c) Le minimum a lieu pour $k = 360\,\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$ ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 1{,}7\,\text{cm}$; la vitesse correspondante vaut $v_{min} = 33\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.
   (d) On est dans la zone de grande longueurs d'onde donc de petit k : la zone où v décroît avec k donc croît avec λ. Donc les courtes longueur s'écartent plus lentement que les grandes longueurs d'ondes.
   (e) Dans ce cas, on crée de courtes longueurs d'ondes (taille typique d'une goutte de pluie : quelques millimètres) avec de grands vecteurs d'ondes. Dans cette zone, le sens de variation de v est inversé, donc l'ordre des longueurs d'ondes aussi.
2. **Eau peu profonde**
   (a) Cette fois $h.k \ll 1$ donc $\tanh(h.k) \approx \frac{1+h.k-(1-h.k)}{1+h.k+1-h.k} \approx h.k$ donc $\omega^2 = h.k^2\left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho}\right)$
   (b) Donc $v = \sqrt{gh + \frac{\gamma h k^2}{\rho}}$ donc v est une fonction croissante de k (ça se voit…on peut aussi dériver)

k	0	$+\infty$
v	$\sqrt{gh}$ ↗	$+\infty$

   (c) On voit facilement que, si k est fixé, la vitesse augmente avec la profondeur h.
   (d) Le centre de la vague va plus vite, il rattrappe l'avant de la vague. Cela conduit au déferlement de la vague qu'on observe losqu'une vague arrive sur une plage dont le fond monte doucement.

Corrigé de l'exercice O4.11 : Effet Sagnac [***]

1. Dans le bras du haut : $\varphi_1 = \frac{2\pi^2 R}{\lambda_0} = \frac{2\pi^2 Rf}{c}$. On a le même déphasage en bas, l'interférence est donc constructive (différence de déphasage nulle).

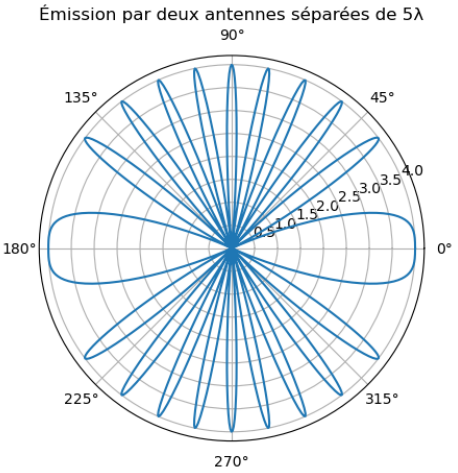
2. La lumière parcourt $\pi R - \omega t_1 R$ donc $ct_1 = \pi R - \omega t_1 R$ soit $t_1 = \frac{\pi R}{c+R\omega}$. La lumière parcourt donc $d_1 = \pi R - \frac{\omega R \pi R}{c+R\omega} = \pi R \frac{c}{c+R\omega}$. La phase accumulée vaut alors $\varphi_1 = 2\pi \frac{d_1}{\lambda_0}$
3. Ici la phase accumulée vaut $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \pi R \frac{c}{c-R\omega}$
4. Le déphasage vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \pi R \left(\frac{c}{c-R\omega} - \frac{c}{c+R\omega} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \pi R \frac{2Rc\omega}{c^2 - R^2\omega^2}$

   Pour des vitesses de rotation faibles : $\Delta\varphi = \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda_0 c} \omega$
5. $\Delta\varphi = \pi$ lorsque $\omega = \frac{\lambda_0 c}{4\pi R^2} = 5860\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 930\,\mathrm{tr \cdot s^{-1}}$
   Ce système est donc peu sensible.
6. Dans la matière, on a désormais $\Delta\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda_0 v_2} \pi R \frac{v_2}{v_2 - R\omega} - \frac{2\pi c}{\lambda_0 v_1} \pi R \frac{v_1}{v_1 + R\omega} = \frac{2\pi^2 Rc}{\lambda_0} \left(\frac{1}{v_2 - R\omega} - \frac{1}{v_1 + R\omega} \right)$. Le terme dans la parenthèse vaut $\frac{1}{\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) R\omega - R\omega} - \frac{1}{\frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) R\omega + R\omega} = \frac{1}{\frac{c}{n} - \frac{R\omega}{n^2}} - \frac{1}{\frac{c}{n} + \frac{R\omega}{n^2}} = \frac{2\frac{R\omega}{n^2}}{\frac{c^2}{n^2} - \frac{R^2\omega^2}{n^4}}$. Dans le cas $R\omega \ll c/n$ on cela donne $\frac{2R\omega}{c^2}$ donc on retrouve $\Delta\varphi = \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda_0 c} \omega$: l'indice n n'apparaît pas.
7. On peut essayer d'augmenter le rayon, mais cela prend plus de place. L'idée est plutôt d'utiliser deux fibres optiques qu'on enroule sur beaucoup de tours. Si on enroule N tours, l'effet est multiplié par $2N + 1$, et on obtient des systèmes sensibles.

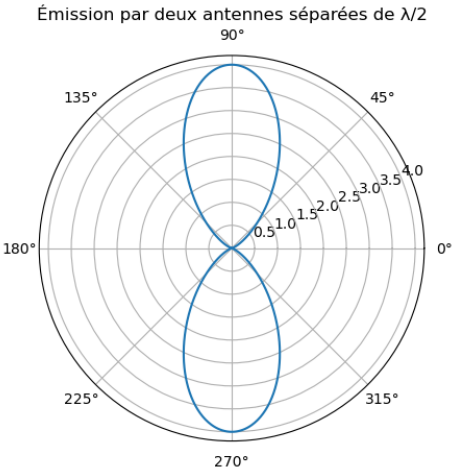
Réponses aux TDs numériques

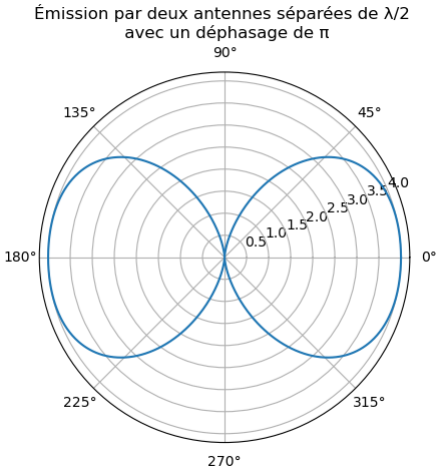
Réponses au TD d'info : Émission par deux antennes

$\delta = M_1A - M_2A = \sqrt{\left(r.\cos\theta + \frac{a}{2}\right)^2 + (r.\sin\theta)^2} - \sqrt{\left(r.\cos\theta - \frac{a}{2}\right)^2 + (r.\sin\theta)^2}$ qu'on envoie dans la formule de Fresnel.

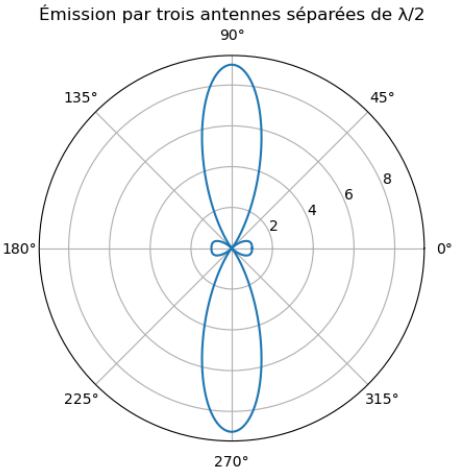


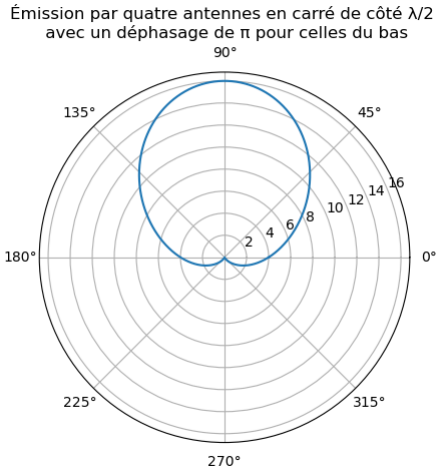
Avec 2 antennes déparées de 5λ on observe des oscillations de l'intensité émise. Si on place un écran dans un plan $y = cst$ on verra des franges sombres et lumineuses qui s'alternent.





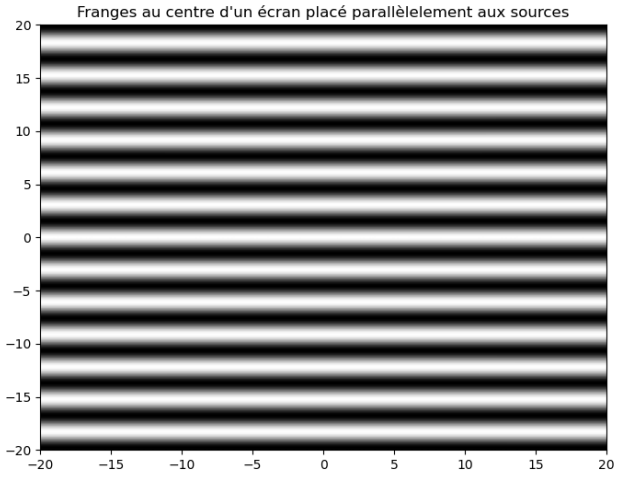
Si on rapproche les antennes à $\lambda/2$, l'émission ne se fait plus que dans deux directions opposées. L'ajout d'un déphasage de π permet de tourner la direction d'émission.

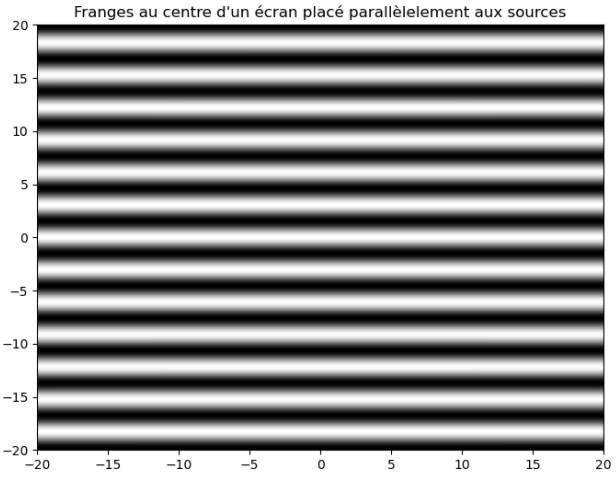




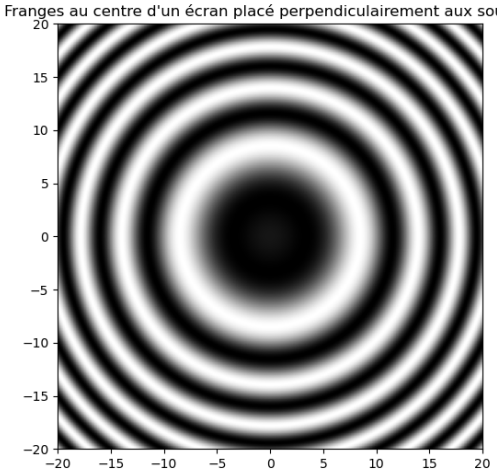
Avec 3 antennes on peut avoir des faisceaux plus fins ; avec 4 antennes on arrive à n'émettre plus que dans une seule direction.

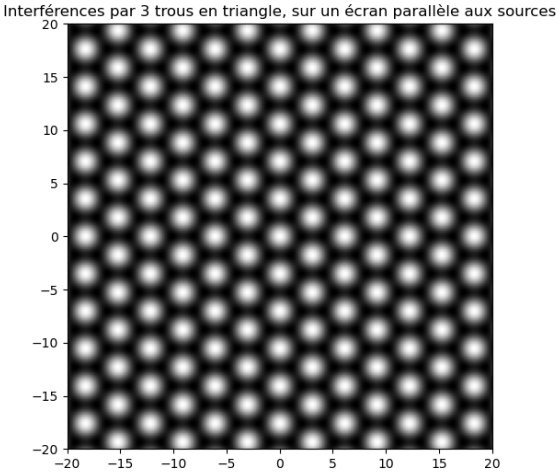
Réponses au TD d'info : Trous d'Young





Au centre on retrouve bien des franges rectilignes ; si on s'écarte, les droites deviennent des hyperboles.





Si l'écran est perpendiculaire à la direction reliant les deux trous, on observe des anneaux, semblables à ceux qu'on observe sur l'interféromètre de Michelson (2ème année). Avec 3 trous en triangle, on observe des nids d'abeille.

Électricité

Chapitre E0 Prérequis mathématiques pour l'électricité

Cours p.202
E0.A. Fonctions
E0.B. Trigonométrie

QCMs p.206

E0. Prérequis mathématiques pour l'électricité

Cours

E0.A. Fonctions

On a déjà parlé de la notion de fonction et de celle de dérivée ; on rappelle une formule très utile :

Propriété : Approximation d'une fonction par sa tangente (ou développement limité d'ordre 1)

Au voisinage d'une valeur x_0, la fonction f vaut approximativement

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dx.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \tag{E0.1}$$

A.1. Primitive

La relation de dérivation peut s'inverser avec la relation d'intégration :

Définition : Primitive

Soit f une fonction de x ; toute fonction F telle que $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ est une *primitive* de f.
Si on connaît une primitive F_0 de f, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F = F_0 + \mathrm{cst}, \mathrm{cst} \in \mathbb{R}\}$.
On note $\int f(x).\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f.

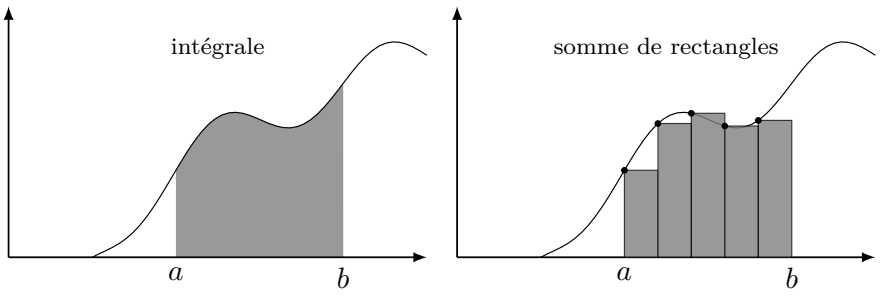
A.2. Intégrale

Définition : Intégrale

Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}^2$; l'intégrale de f entre a et b est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses si $a < b$, ou son opposé sinon ; on la note $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$.
Si F est **une** primitive de f, alors $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, qu'on note $[F]_a^b$, ou encore en physique $\Delta^{a\to b}F$ qui se lit : la variation de F lorsqu'on passe de a à b :

$$\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = [F]_a^b = \Delta^{a\to b}F = F(b) - F(a) \tag{E0.2}$$

La notation $\int_a^b f'x).\mathrm{d}x$ représente une somme infinie de termes : si on divise l'aire sous la courbe en un grand ($\to \infty$) nombre de rectangles de largeur $\mathrm{d}x$ et de hauteur $f(x)$, la somme des aires de ces rectangles tend vers $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$.



! Il ne faut pas confondre une primitive, qui est une fonction, avec une intégrale, qui est un nombre.

Cette notion d'intégrale permet de définir une grandeur importante : la valeur moyenne :

Définition : Valeur moyenne d'une fonction périodique

Soit f une fonction T-périodique. On définit sa valeur moyenne par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x).\mathrm{d}x \tag{E0.3}$$

Cette définition consiste à prendre l'aide sous la courbe pendant une période, et à la diviser par la largeur d'une période ; ainsi, l'aide sous la courbe sur une période vaut $T \times \langle f \rangle$.

Propriété : Linéarité de la valeur moyenne

La valeur moyenne est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que :

— si f et g sont 2 fonctions de même période, $\langle f+g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$

— si f est une fonction périodique et λ une constante, $\langle \lambda f \rangle = \lambda \langle f \rangle$

Démonstration

Cela vient du fait que l'intégrale est linéaire.

Il faut connaître quelques valeurs moyennes importantes :

Propriété : Valeurs moyennes de fonctions trigonométriques

$$\forall \omega \neq 0, \langle \cos(\omega t) \rangle = 0 \tag{E0.4a}$$
$$\forall \omega \neq 0, \langle \sin(\omega t) \rangle = 0 \tag{E0.4b}$$

Démonstration

$\langle \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t).\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sin(2\pi)-\sin(0)}{2\pi\omega} = 0$

$\langle \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega t).\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{2\pi} = \frac{\cos(2\pi)-\cos(0)}{2\pi\omega} = 0$

Remarque : Si $\omega = 0$ dans les expressions précédentes, on a une constante, et la valeur moyenne d'une fonction constante est bien évidemment sa valeur : 1 pour le cosinus et 0 pour le sinus.

A.3. Changement de variable

Pour calculer des intégrales, il est parfois pratique d'utiliser deux techniques mathématiques : l'intégration par parties, et le changement de variable. Ce dernier est assez utilisé en physique, sous une forme un peu bizarre.

Soit f une fonction de la variable x ; supposons qu'il existe deux fonctions h et g telle que :

— $f = h \circ g$, c'est à dire qu'on puisse écrire $f(x) = h(g(x))$

— g soit bijective sur $[a;b]$ et que sa dérivée ne s'annule jamais sur cet intervalle

— on connaisse la réciproque g^{-1} de g (fonction telle que $g \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ g$ soient l'identité)

Alors pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$, on peut prendre $g(x)$ comme nouvelle variable (notée simplement g), et écrire $x = g^{-1}(g)$ donc $\mathrm{d}x = {g^{-1}}'(g).\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{g'(g^{-1}(g))}$ puis transformer l'intégrale ainsi : $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} h(g)\frac{\mathrm{d}g}{g'(g^{-1}(g))}$.

En physique, cette relation prend une forme particulière (qui est équivalente, même si ça ne saute pas aux yeux) : la technique de séparation des variables. On la verra dans le chapitre sur les régimes transitoires des circuits d'ordre 1.

E0.B. Trigonométrie

On a déjà revu les formules de cosinus et sinus d'une somme : $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{cases}$

En les sommant, on peut établir des formules très importantes :

Propriété : Formules de linéarisation des sinus et cosinus

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \tag{E0.5a}$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{E0.5b}$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \tag{E0.5c}$$

Démonstration

Pour la première, on somme : $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$ d'où le résultat affirmé.
On fait pareil pour les autres.

Il est essentiel de retenir la première au moins.

Parfois, c'est l'inverse, on a une somme de deux cosinus, et on veut un produit. On peut alors montrer que :

Propriété : Formule de factorisation des sinus et cosinus

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \tag{E0.6a}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \tag{E0.6b}$$

Démonstration

À partir des formules précédentes, en posant $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$.

On tire de ces propriétés des valeurs moyennes :

Propriété : Moyenne de sinus et cosinus au carré

$$\forall\omega\neq 0, \langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2} \tag{E0.7a}$$

$$\forall\omega\neq 0, \langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2} \tag{E0.7b}$$

$$\forall\omega\neq 0, \langle\cos(\omega t).\sin(\omega t)\rangle = 0 \tag{E0.7c}$$

Démonstration

$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \left\langle\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right\rangle = \langle\frac{1}{2}\rangle + \left\langle\frac{\cos(2\omega t)}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}$
$\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \left\langle\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right\rangle = \langle\frac{1}{2}\rangle - \left\langle\frac{\cos(2\omega t)}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}$
$\langle\cos(\omega t).\sin(\omega t)\rangle = \left\langle\frac{\sin(2\omega t)}{2}\right\rangle = 0$

Enfin, un résultat à retenir :

Propriété : Somme d'un cosinus et d'un sinus

Toute expression de la forme $A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}^2$ peut aussi être mise sous la forme $D\cos(\alpha t+\varphi)$ avec $D, \varphi \in \mathbb{R}^2$

Démonstration

On peut développer la seconde forme en $D\cos(\alpha t)\cos(\varphi)-D\sin(\alpha t)\sin(\varphi)$ donc on voit que les deux expressions sont équivalentes si et seulement si $\begin{cases} A = D\cos\varphi \\ B = -D\sin\varphi \end{cases}$. On en tire $D^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = A^2+B^2$ et $-\tan\varphi = \frac{B}{A}$.

Il est alors facile de montrer que $\begin{cases} D = \sqrt{A^2+B^2} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) \end{cases}$ fonctionnent, ce qui démontre l'implication énoncée.

E0. Prérequis mathématiques pour l'électricité

QCMs

réponses page 208

✓ QCM : Trigonométrie ✗

Q1. $\cos(3t).\cos(5t) =$

(a). $\cos(8t)$
(b). $\cos(8t)+\cos(2t)$
(c). $\cos(5t)+\cos(3t)$
(d). $\cos(8t)-\cos(-2t)$

Q2. Si ω et φ sont des constantes, alors $\cos(\omega t).\cos(\omega t+\varphi) =$

(a). $\cos(2\omega t)+\cos(\varphi)$
(b). $\cos(2\omega t+\varphi)$
(c). $\cos(2\omega t+\varphi)+\cos(-\varphi)$
(d). $\cos(2\omega t+\varphi)+\cos(\varphi)$

Q3. Si ω_1 et ω_2 sont deux constantes, alors $2\cos(\omega_1 t)+2\cos(\omega_2 t) =$

(a). $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right).\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$
(b). $4\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right).\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$
(c). $\cos\left((\omega_1+\omega_2)t\right).\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right)$
(d). $4\cos\left((\omega_1+\omega_2)t\right).\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right)$

✓ QCM : Primitives et intégrales ✗

Q4. Quelle est la primitive de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ qui vaut 2 lorsque $t=1$?

(a). $t\mapsto 3-\frac{1}{t}$
(b). $t\mapsto\frac{4}{3}-\frac{1}{3t^3}$
(c). $t\mapsto 5-\frac{3}{t^3}$
(d). $t\mapsto-\frac{1}{t}$

Q5. Quelle est la primitive de la fonction $t\mapsto e^{4t}$ qui s'annule en 0 ?

(a). $t\mapsto 4e^{4t}$
(b). $t\mapsto 4\left(e^{4t}-1\right)$
(c). $t\mapsto\frac{e^{4t}-1}{4}$
(d). $t\mapsto\frac{e^{4t}}{4}$

Q6. Que vaut la valeur moyenne de la fonction $t\mapsto|\sin(t)|$ qui est π-périodique ?

(a). 0
(b). $\frac{1}{2}$
(c). $\frac{2}{\pi}$
(d). $\frac{\pi}{4}$

Q7. Que vaut la valeur moyenne de la fonction $t\mapsto\cos(\omega t).\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$ avec $\omega\neq 0$?
Indication : linéariser l'expression puis prenez la valeur moyenne de chaque terme obtenu ; inutile ici de passer par l'intégrale.

(a). $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
(b). $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c). 0
(d). $\frac{1}{2}$

Q8. Quelles fonctions peuvent être des primitives de la fonction $t\mapsto 0$?

(a). 0
(b). une constante quelconque
(c). 1
(d). -1

Q9. Que peut valoir l'intégrale de la fonction $t \mapsto 0$ entre a et b ?

(a). une constante quelconque
(b). $b - a$
(c). 1
(d). 0

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Trigonométrie

Q1.(b)
Q2.(c) ET (d)
Eh oui, cosinus est paire.
Q3.(b)

Réponses au QCM : Primitives et intégrales

Q4.(a)
Q5.(c)
Q6.(c)
$\langle |sin(t)| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)| \, .dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t).dt = \frac{1}{\pi} \left[-\cos(t) \right]_0^{\pi} = \frac{1+1}{\pi}$
Q7.(a)
$\left\langle \cos(\omega t). \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2} \right\rangle = \frac{0 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
Q8.(a) ET (b) ET (c) ET (d)
Q9.(d)
Attention à l'erreur classique « une constante. » Une intégrale n'est pas définie à une constante près !

Chapitre E1 Lois des circuits électriques

Programme p.227

Conseils p.228

Cours p.210
- E1.A. Intensité et tension
- E1.B. Les dipôles fondamentaux
- E1.C. Puissance électrique

QCMs p.229

Exercices p.232

TDs numériques p.236

E1. Lois des circuits électriques

Cours

Ce chapitre est l'introduction d'une nouvelle partie du cours : l'électricité. Il s'agit d'une partie très importante, car elle va nous permettre d'introduire de très nombreux outils qui seront utiles par la suite en physique, en particulier les équations différentielles et, plus tard, la notation complexe. Elle permet d'illustrer des notions importantes et universelles sur des systèmes modèles simples, et possède de très nombreuses applications que nous ne ferons qu'effleurer.

Si l'électricité statique était connue depuis longtemps, l'essor de l'électricité a commencé lorsqu'on a pu la créer de manière continue dans le temps : d'abord par la pile (découverte par Volta vers 1800) puis les alternateurs/dynamos vers la fin du XIXe siècle.

Dans ce chapitre nous allons nous contenter d'établir les lois fondamentales de l'électricité.

E1.A. Intensité et tension

A.1. Le courant électrique

L'électricité est la science qui étudie les phénomènes associés à des transports de charges électriques. La matière est constituée de particules élémentaires possédant une caractéristique appelée *charge électrique* : électrons, protons, ou bien d'édifices plus gros et chargés tels que les ions.

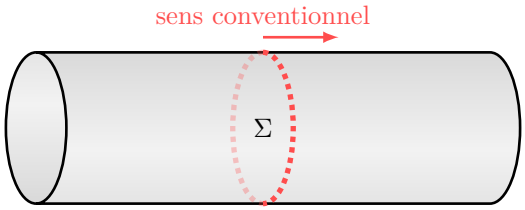
Définition : Charge élémentaire

La charge élémentaire est la charge du proton (ou bien l'opposé de la charge de l'électron) ; elle vaut $e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Une charge qui circule, c'est comme de l'eau qui circule dans un tuyau. La première chose qui nous intéresse, c'est le débit de ces charges : on l'appelle le courant électrique.

Définition : Courant électrique

Considérons un fil parcouru par des charges, et une section Σ de ce fil ; on choisit un sens d'orientation du fil, appelé *sens conventionnel du courant*.



On compte, pendant un petit temps $\mathrm{d}t$, la charge totale δq qui va traverses la section Σ, avec la convention suivante :

- si une charge q_i traverse la section dans le même sens que le sens conventionnel, on compte $+q_i$
- si une charge q_i traverse la section dans le sens opposé au sens conventionnel, on compte $-q_i$

Alors on définit le courant à travers la section Σ par

$$i = \frac{\delta q}{\mathrm{d}t} \text{ (en Ampères)} \qquad \text{(E1.1)}$$

Remarque : Pourquoi écrit-on δq (avec la lettre grecque delta) et non pas $\mathrm{d}q$? C'est un peu compliqué ; en gros, δq n'est défini qu'entre 2 instants, on ne peut pas le définir comme la variation d'une quantité q qui existe au début et à la fin. Si vous ne comprenez pas et écrivez $\mathrm{d}q$, pour le moment ce n'est pas grave.

Remarque : Cette définition s'utilisera surtout ainsi : en un temps dt, la charge qui traverse la section Σ vaut $\delta q = i.\mathrm{d}t$.

Remarque : Le sens réel du courant est le sens dans lequel se déplacent les charges positives. Le courant électrique a un signe : s'il est positif, c'est que le sens réel du courant est dans le même sens que le sens conventionnel, sinon c'est qu'il est en sens inverse (figure E1.1). Mais cela n'indique rien sur le sens de déplacement des charges à l'échelle microscopique, car si elles sont positives, elles vont dans le même sens que le sens réel du courant, et si elles sont négatives, elles vont en sens opposé (figure E1.2).

FIGURE E1.1 : Sens conventionnel et sens réel.



(a) Courant de signe positif : $i > 0$ (b) Courant de signe négatif : $i < 0$

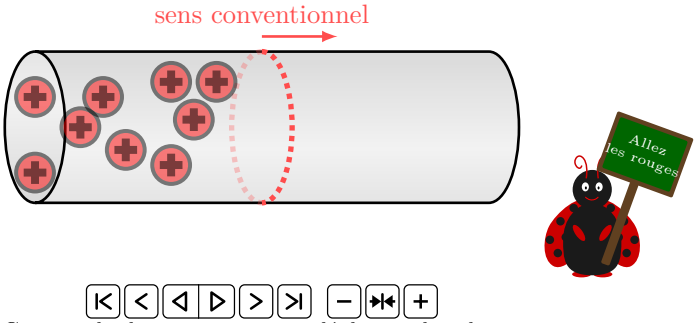
FIGURE E1.2 : Sens du courant en fonction du déplacement des charges.



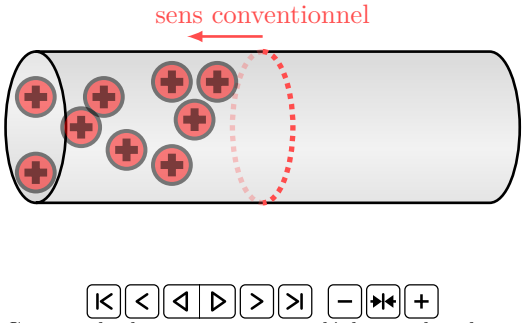
(a) Courant de charges positives (b) Courant de charges négatives

Ainsi, la figure E1.3 montre les différents cas possibles de déplacements de charges et les signes correspondants.

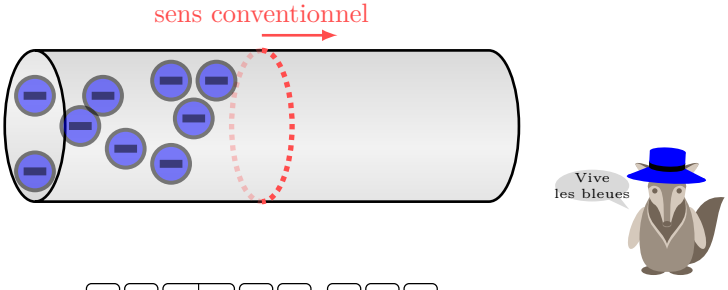
FIGURE E1.3 : Signe de comptage des charges.



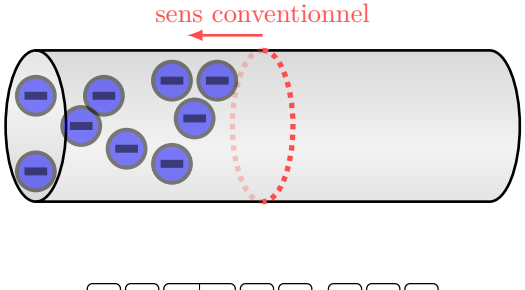
(a) Courant de charges positives se déplaçant dans le sens conventionnel(cliquer pour voir l'animation)



(b) Courant de charges positives se déplaçant dans le sens opposé au sens conventionnel(cliquer pour voir l'animation)



(c) Courant de charges négatives se déplaçant dans le sens conventionnel(cliquer pour voir l'animation)



(d) Courant de charges négatives se déplaçant dans le sens opposé au sens conventionnel(cliquer pour voir l'animation)

Les porteurs de charges sont de nature diverses. Dans les métaux, ce sont des *électrons libres* qui se déplacent, de charge $-e$; c'est le cas le plus habituel. Il existe d'autres matériaux solides appelés semiconducteurs, comme le silicium, dans lesquels les électrons se déplacent, mais aussi des manques d'électrons appelés *trous*, de charge $+e$. Dans les solutions ioniques, ce sont les *ions* qui conduisent le courant, de charge positive ou négative égale à un nombre entier de fois la charge élémentaire. Enfin, à très basse température, des phénomènes bizarres apparaissent : des paires d'électrons (paires de Cooper) dans les supraconducteurs, ou encore des fractions d'électrons dans les semiconduteurs à basse température.

À priori, dans la plupart des phénomènes électriques, la nature des charges qui transportent le courant n'importe pas : le signe de la charge n'intervient pas dans les lois. Vous verrez l'an prochain un phénomène électromagnétique, l'effet Hall, qui permet de distinguer le signe des porteurs de charges.

Remarque : Les courants électriques utilisés en TP seront de l'ordre de quelques dizaines de mA jusqu'à quelques A. Dans un réseau domestique, on peut monter jusqu'à quelques dizaines d'Ampères. Pour des machines de fortes puissance on monte à quelques centaines d'Ampères pour une voiture électrique, quelques milliers pour un train. Les plus forts courants, de plusieurs centaines de milliers d'Ampères, sont utilisés pour la fabrication de l'aluminium. À l'inverse, en électronique, on cherche à minimiser la consommation électrique, et les courants sont de l'ordre du mA, pouvant même descendre jusqu'au µA ou au nA dans les applications cherchant à vraiment économiser l'énergie (cf. tableau E1.1).

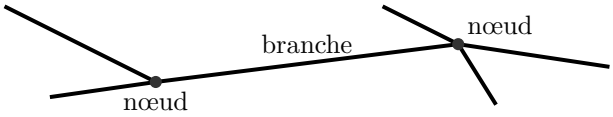
Tableau E1.1 : Valeur de quelques intensités usuelles.

Système	Intensité
puce RFID	≈1mA
smartphone (veille)	≈10mA
smartphone (utilisation)	jusqu'à 100mA
smartphone (charge)	10A
éclairage domestique LED	≈50mA
cuisinière à induction	≈10A
voiture électrique Zoé	160A
TGV M	400A
métallurgie de l'aluminium	300kA
pile AA	≈1A
panneau photovoltaïque 1 m^2	≈10A

Définition : Nœud et branche

Un nœud est une portion de circuit où plusieurs fils se rejoignent.
Une branche est une portion de circuit entre deux nœuds consécutifs (figure E1.4).

Figure E1.4 : Nœud et branche dans une portion de circuit.



Définition : Régime continu

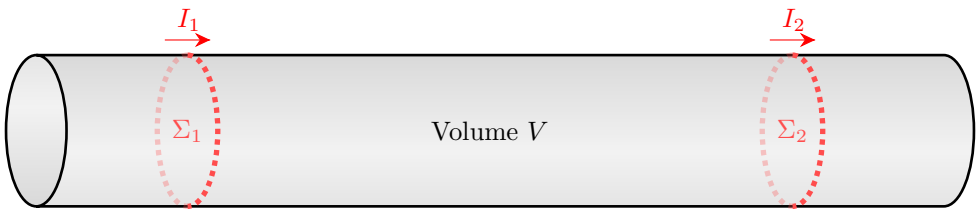
En électricité, le terme de *régime continu* désigne un mode de fonctionnement où toutes les grandeurs sont **constantes** ; cela n'a rien à voir avec la notion de continuité en mathématiques.
En régime continu, les différentes variables qui apparaissent (courants, tensions,...) seront notées par une lettre majuscule.

Propriété : Courant dans une branche

En régime continu, le courant est le même à travers toutes les sections d'une même branche.

Démonstration

Considérons une branche et deux sections Σ_1 et Σ_2 orientées dans le même sens ; on note I_1 et I_2 les intensités qui les traversent.



On va noter V le volume de fil contenu entre les sections Σ_1 et Σ_2 ; ce volume contient une charge électrique qu'on va noter q_V et qui dépend a priori du temps, pour le moment. Notons donc $q_V(t)$ cette charge à l'instant t, et $q_V(t+\mathrm{d}t)$ à l'instant $t+\mathrm{d}t$. Alors on peut faire un bilan entre ces deux instants t et $t+\mathrm{d}t$:

— à travers Σ_1, une charge $\delta q_1 = I_1.\mathrm{d}t$ est **entrée** dans le volume V ;

— à travers Σ_2, une charge $\delta q_2 = I_2.\mathrm{d}t$ est **sortie** du volume V.

On peut donc écrire que la charge à l'instant $t+\mathrm{d}t$ est égale à la charge qui était là à l'instant t, plus celle qui est entrée, moins celle qui est sortie : $q_V(t+\mathrm{d}t) = q_V(t) + I_1.\mathrm{d}t - I_2.\mathrm{d}t$ soit $\frac{q_V(t+\mathrm{d}t)-q_V(t)}{\mathrm{d}t} = I_1 - I_2$. À gauche, on reconnaît le taux d'accroissement entre t et $t+\mathrm{d}t$, et comme $\mathrm{d}t \to 0$, ce taux tend vers la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t} = I_1 - I_2$$

Cette loi est toujours vraie ; dans le cas particulier du régime continu, toutes les grandeurs sont constantes, entre autres $q_V = \text{cst}$ donc $\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t} = 0$ ce qui prouve bien que $I_1 = I_2$.

Ainsi, le long d'une branche, on ne placera qu'une seule flèche représentant le courant.

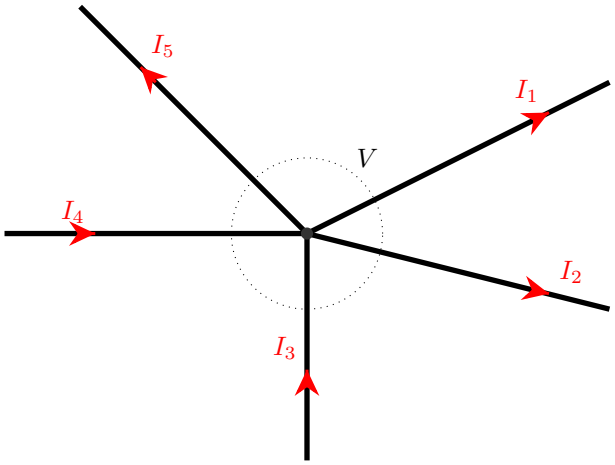
Loi des nœuds

En régime continu, la somme des intensités qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités qui partent de ce nœud.
En notant les intensités qui arrivent ou partent d'un nœud avec un indice k, on peut écrire cette loi sous la forme :

$$\sum_k \epsilon_k I_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } I_k \text{ va vers le nœud et } -1 \text{ sinon} \qquad \text{(E1.2)}$$

Démonstration

La démonstration ressemble à la précédente. Considérons un exemple avec un nœud où 5 branches se rejoignent, avec des courants I_1 à I_5 :



On note V un volume quelconque qui englobe le nœud, et q_V la charge électrique qu'il contient. Alors un bilan entre t et $t+\mathrm{d}t$ indique que

— des charges $\delta q_3 = I_3.\mathrm{d}t$ et $\delta q_4 = I_4.\mathrm{d}t$ sont entrées dans V ;

— des charges $\delta q_1 = I_1.\mathrm{d}t$, $\delta q_2 = I_2.\mathrm{d}t$ et $\delta q_5 = I_5.\mathrm{d}t$ sont sorties de V.

Donc $q_V(t+\mathrm{d}t) = q_V(t) - I_1.\mathrm{d}t - I_2.\mathrm{d}t + I_3.\mathrm{d}t + I_4.\mathrm{d}t - I_5.\mathrm{d}t$ soit

$$\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5$$

En régime continu : $-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$ ou encore $I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4$.

Cependant, on n'utilise pas les circuits électriques uniquement en régime continu, mais aussi en régime variable. Dans ce cas, la loi des nœuds n'est plus exactement vraie, mais elle reste quasiment valable si les grandeurs du circuit ne varient pas trop rapidement. On appelle cela l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

Définition : ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) est une approximation qui consiste à considérer que les lois valables en régime continu restent valables pour des signaux variant de façon pas trop rapide. Le critère est le suivant : l'ARQS est valable si les temps de variations des grandeurs électriques dans ce circuit sont grands par rapport au temps que met la lumière pour parcourir le circuit.
En pratique, pour un circuit de taille ℓ en régime variable à la fréquence f, l'ARQS est donc valable si $\frac{1}{f} \gg \frac{\ell}{c}$ soit $\ell \ll \frac{c}{f} = \lambda$: le circuit doit être petit devant la longueur d'onde de la lumière à la fréquence f.

Par exemple, considérons un circuit pour lequel le courant varie en 1 ms. Pendant ce temps, la lumière parcourt $1 \times 10^{-3} c = 300\,\mathrm{km}$ donc si le circuit est petit devant 300 km, l'ARQS est valide.

En TP, on construira des circuits de taille maximale 2 m environ ; or $\frac{2}{3\times10^8} \approx 10\,\mathrm{ns}$ donc il ne faudra pas que les grandeurs varient en moins de 100 ns environ. Par exemple, si on alimente le circuit en régime sinusoïdal, la période devra être supérieure à 100 ns, donc la fréquence inférieure à 10 MHz. C'est pour cela que les générateurs utilisés en TP (Générateurs Basses Fréquences) ne dépassent pas 10 MHz.

Dans les processeurs d'ordinateur, on travaille à plusieurs GHz, donc en 1 période la lumière parcourt quelques centimètres ; on est à la limite de l'ARQS.

Loi des nœuds en ARQS

Dans l'ARQS, la loi des nœuds reste valable. On peut alors écrire en ARQS :

$$\sum_k \epsilon_k i_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } i_k \text{ va vers le nœud et } -1 \text{ sinon} \qquad \text{(E1.3)}$$

A.2. Le potentiel électrique

Pour le moment, nous nous sommes intéressés à décrire et à quantifier le courant électrique qui circule, sans nous demander pourquoi il circule. Pour faire circuler de l'eau dans un tuyau, il faut une cause : une différence l'altitude, ou bien une différence de pression ; pour faire circuler les charges, il faut une différence de quelque chose d'invisible et d'abstrait : le potentiel électrique.

Définition : Potentiel électrique

En tout point de l'espace, il existe un champ (c'est-à-dire une grandeur qui dépend de la position) appelé potentiel électrique, noté v, qui s'exprime en Volts (V). Les charges positives sont attirées vers les potentiels bas, et les charges négatives vers les potentiels élevés.

Ce qui attire les charges, c'est la recherche de potentiels plus bas (pour les charges positives) ou plus élevés (pour les charges négatives). Autrement dit, la valeur du potentiel ne compte pas, ce qui compte, c'est la valeur relative des potentiels en différents points. Si on ajoute 1 V à tous les potentiels en tout point, on ne change rien : on dit parfois que le potentiel est défini à une constante près. Par conséquent on peut très bien choisir où se trouve le potentiel de référence, 0 V.

Définition : Masse



La masse est le point de potentiel nul. On peut choisir sa position, et on la symbolise par ⏚.

Définition : Tension

Une tension est une différence de potentiel entre deux points ; on la symbolise par une flèche :

$$A \cdot \xleftarrow{u_{AB} = v_A - v_B} \cdot B$$

Remarque : Les tensions manipulées en TP seront de l'ordre de quelques Volts. Au-delà de 100 V environ, on passe aux hautes tensions, qui sont dangereuses pour l'homme. Les prises du secteur fournissent des tensions de 220 V alternatif ($f = 50$ Hz), tandis que le transport de l'électricité sur de grandes distances se fait à de très hautes tensions (400 kV). À l'inverse, les capteurs fournissent souvent des tensions de l'ordre du mV qu'il faut amplifier avant de les mesurer (cf. tableau E1.2).

TABLEAU E1.2 : Valeur de quelques tensions usuelles.

Système	Tension
thermocouple	≈1mV
puce RFID	2V
smartphone	5V
éclairage domestique LED	220V
cuisinière à induction	220V
voiture électrique Zoé	400V
TGV M	25kV
pile AA	1,50V
panneau photovoltaïque 1 m^2	≈30V

Loi d'additivité des tensions

Les tension, qu'on symbolise par des flèches, vérifient la relation de Chasles : $u_{AB} + u_{BC} = u_{AC}$.

Démonstration

$u_{AB} + u_{BC} = (v_A - v_B) + (v_B - v_C) = v_A - v_C = u_{AC}$

Remarque : Il est aussi évident, d'après la définition, que $u_{AB} = -u_{BA}$.

Définition : Maille

Une maille est un ensemble de branches qui forment un circuit fermé.

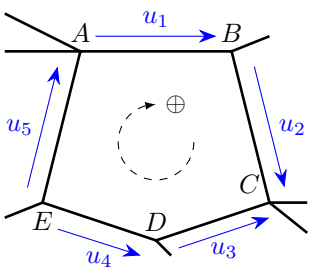
Loi des mailles

Considérons une maille d'un circuit ; on l'oriente, c'est-à-dire qu'on choisit un sens de parcours. Alors la somme des tensions orientées autour de cette maille est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k u_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si la tension } u_k \text{ tourne dans le sens de la maille et } -1 \text{ sinon} \qquad \text{(E1.4)}$$

Démonstration

Considérons une nouvelle fois un exemple particulier d'une maille constituée de 5 branches :



On choisit d'orienter la maille dans le sens $ABCDE$ par exemple. Alors il est facile de voir (en plaçant les tensions dans le sens ABCDE) que $u_{BA} + u_{CB} + u_{DC} + u_{ED} + u_{AE} = u_{AA} = v_A - v_A = 0$. Or d'après la figure : $u_1 = u_{BA}$, $u_2 = u_{CB}$, $u_3 = -u_{DC}$, $u_4 = -u_{ED}$ et $u_5 = u_{AE}$ donc $u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 = 0$: c'est la loi des mailles appliquée à cette maille.

Remarque : On peut appliquer la loi des mailles même à une maille « virtuelle », c'est-à-dire à un ensemble de flèches de tensions qui forment une boucle fermée, même s'il n'y a pas vraiment de fil qui forme une maille.

La loi d'additivité et la loi des mailles sont vraies même si on n'est pas en ARQS ; le seul cas où elles changent un peu, c'est en présence de champs magnétiques variables (cf. fin de l'année). Par conséquent, les lois précédentes s'écrivent aussi bien avec des minuscules qu'avec des majuscules.

On admettra également la propriété suivante :

Propriété : Fil idéal en ARQS

La tension aux bornes d'un fil idéal est nulle en régime continu ou en ARQS. Autrement dit, si deux points A et B sont reliés par un fil, ils sont au même potentiel ; on peut considérer que c'est le même point.

E1.B. Les dipôles fondamentaux

On a vu qu'une différence de potentiel (ou une tension) amène l'apparition d'un courant électrique. Mais quelle est la relation entre la tension et le courant ? Cela va dépendre de ce qui se trouve dans le circuit. Chaque portion de circuit a un rôle, et en l'étudiant, on peut déterminer les lois qui relient u et i pour un composant donné.

FIGURE E1.5 : Quelques physiciens et physiciennes ayant étudié des dipôles au XIXe siècle.



(a) Hertha Ayrton a étudié les propriétés électriques des arcs électriques. *(Crédit : J. Russel & sons)*



(b) Georg Simon Ohm a étudié les propriétés électriques des fils. (Crédit : Wikipedia)

Dans la suite, on va s'intéresser aux composants les plus simples : les dipôles.

B.1. Propriété générales d'un dipôle

Définition : Dipôle électrique

Un dipôle est une portion d'un circuit qui est reliée au reste du circuit par deux bornes.

Un dipôle possède deux bornes entre lesquelles on applique une tension, ou différence de potentiel ; cette tension va faire circuler des charges électriques, donc un courant, à travers ce dipôle. Le lois physiques internes qui régissent ce dipôle vont déterminer le courant qui traverse le dipôle pour une tension donnée.

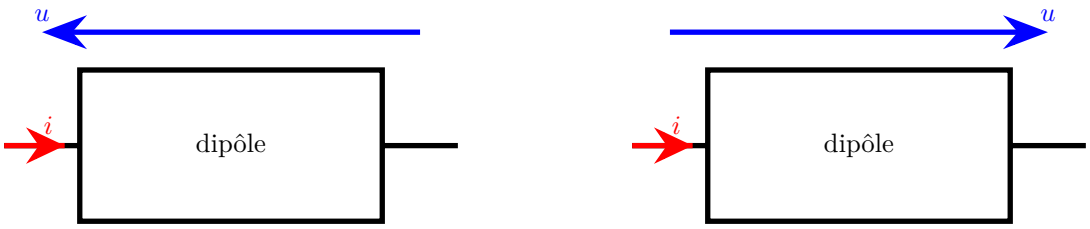
Définition : Convention d'orientation

Un dipôle est traversé par un courant i et possède une tension u à ses bornes. Il existe deux façons d'orienter les flèches de i et u (figure E1.6) :

— si les flèches représentant u et i sont tête-bêche, on dit que le dipôle est orienté en *convention récepteur*

— si les flèches représentant u et i sont dans le même sens, on dit que le dipôle est orienté en *convention générateur*

FIGURE E1.6 : Convention d'orientation d'un dipôle.



(a) Dipôle en convention récepteur

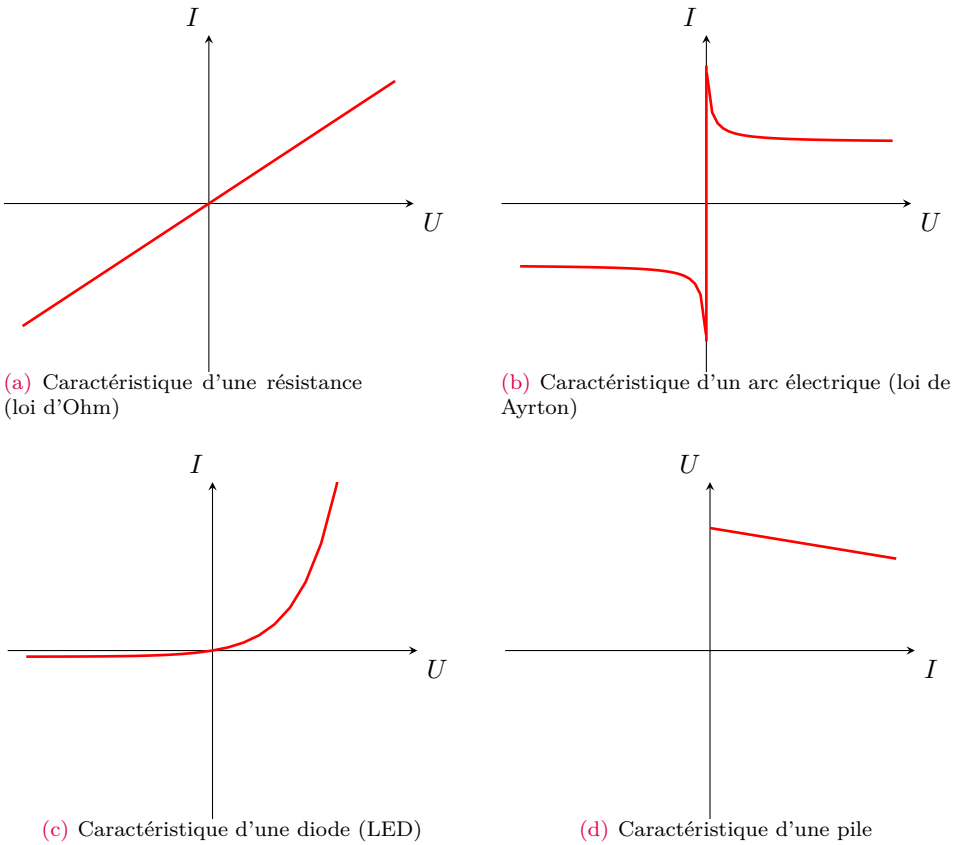
(b) Dipôle en convention générateur

Définition : Caractéristique d'un dipôle

La caractéristique d'un dipôle est le tracé de $I = f(U)$ ou $U = g(I)$ en régime continu.

La figure E1.7 montre des exemples de caractéristiques de dipôles courants.

FIGURE E1.7 : Caractéristiques de quelques dipôles.



(a) Caractéristique d'une résistance (loi d'Ohm)

(b) Caractéristique d'un arc électrique (loi de Ayrton)

(c) Caractéristique d'une diode (LED)

(d) Caractéristique d'une pile

En régime variable, non seulement u et i interviennent, mais leurs dérivées également. Par conséquent, la loi qui caractérise un dipôle en régime variable est une équation qui fait intervenir u et ses dérivées ($\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$,...) et i et ses dérivées ($\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}$,...) : on appelle cela une *équation différentielle*.

À partir de l'observation des caractéristiques des dipôles, on déduit un certain nombre de définitions sur les dipôles en régime continu, qu'on peut étendre au régime variable :

Définition : Dipôle passif ou actif

En régime continu, un dipôle est *passif* si sa caractéristique passe par $(0,0)$; de manière plus générale, un dipôle est passif s'il n'est parcouru par aucun courant lorsqu'on impose une tension nulle à ses bornes.
Dans le cas contraire, il est *actif*.

Par exemple, sur la figure E1.7, la résistance, l'arc électrique et la LED sont des dipôles passifs, et la pile est active.

Définition : Dipôle symétrique ou polarisé

En régime continu, un dipôle est *symétrique* si sa caractéristique est impaire ; de manière plus générale, un dipôle est symétrique si sa loi reste vraie lorsqu'on change en même temps les signes de i et u.
Dans le cas contraire, il est *polarisé*.

Par exemple, sur la figure E1.7, la résistance et l'arc électrique sont symétriques, tandis que la LED et la pile sont polarisés.

Remarque : On choisira toujours un symbole qui indique si le dipôle est symétrique ou pas. Quant au vrai composant, s'il est polarisé, il y aura un symbole dessus qui permettra de reconnaître ses deux côtés.

Définition : Dipôle linéaire

En régime continu, un dipôle est *linéaire* si la relation entre I et U suit une loi linéaire (ou plus exactement affine). En régime variable, un dipôle est *linéaire* si la loi entre u et i *et leurs dérivées* est linéaire (ou affine), c'est-à-dire de la forme $a_0 u + a_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \cdots = b_0 i + b_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \cdots + C$

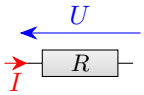
Par exemple, sur la figure E1.7, la résistance et la pile sont linéaires, tandis que l'arc électrique et la LED sont non linéaires.

On verra au cours de l'année que les lois linéaires sont beaucoup plus faciles à traiter que les autres. Par conséquent, pour cette année, nous allons étudier surtout les dipôles linéaires fondamentaux.

B.2. Les résistors, ou conducteurs ohmiques

Définition : Résistor

Un résistor (souvent appelé résistance électrique, ou encore conducteur ohmique) est la modélisation d'une portion de conducteur électrique quelconque.

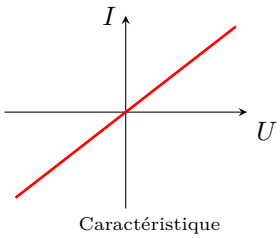


Loi d'Ohm

Dans un résistor, le courant qui circule est proportionnel à la tension à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité entre la tension et l'intensité s'appelle la *résistance* R, en Ohm (Ω). On a donc la loi d'Ohm en convention récepteur :

$$U = R.I \text{ ou } I = G.U \qquad \text{(E1.5)}$$

où $G = \frac{1}{R}$ est la conductance, en Siemens (S).



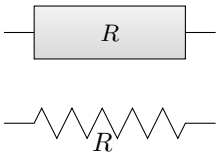
Remarque : Un résistor est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

Le modèle du conducteur ohmique est un modèle théorique, mais qui modélise assez bien un fil ; vous montrerez l'année prochaine qu'un fil de longueur L et de section S a pour résistance $R = \frac{\rho L}{S}$ où ρ est la *résistivité électrique* du matériau qui constitue le fil. Par exemple, en travaux pratiques, on utilise des fils de 1 m de long et 0,75 mm^2 de section, en cuivre de résistivité $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$; ce fil a donc une résistance $R = 23\,\mathrm{m}\Omega$ qui est très faible : même si on fait passer un fort courant de 2 A dans ce fil, la tension à ses bornes ne sera que de 46 mV : on voit qu'on peut la négliger, comme on en a fait la remarque précédemment concernant le fil idéal.

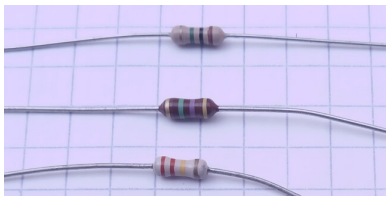
Pour fabriquer des composants de résistance plus forte, on utilise souvent des pistes en carbone, de résistivité plus élevée ($\rho = 4 \times 10^{-5}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$) et de faible section. En TP, on utilisera souvent des résistances comprises entre 10 Ω et 1 MΩ.

Remarque : Le rectangle est le symbole européen du résistor ; le symbole américain est un zigzag (figure E1.8).

FIGURE E1.8 : Résistance électrique.



(a) Symbole (européen en haut, américain en bas)



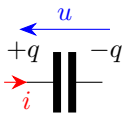
(b) Résistances classiques au carbone ; la valeur de la résistance est représentée par un code de couleurs.

B.3. Les condensateurs

Le condensateur a été découvert en 1745 sous la forme de la bouteille de Leyde. À l'époque où on ne disposait pas encore de sources de charges continues, et où seule l'électricité statique était manipulée, on découvrit qu'en plaçant deux feuilles métalliques de part et d'autres d'une plaque en verre, on pouvait stocker des charges électriques.

Définition : Condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux plaques métalliques placées l'une vis-à-vis de l'autre (les *armatures*). Il est capable de stocker deux charges électriques opposées $+q$ et $-q$ sur ces armatures, proportionnelles à la tension u entre les plaques selon la loi



$$q = C.u \qquad \text{(E1.6a)}$$

où C est la capacité du condensateur, en Farad (F). On en déduit la relation

$$i = C.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(E1.6b)}$$

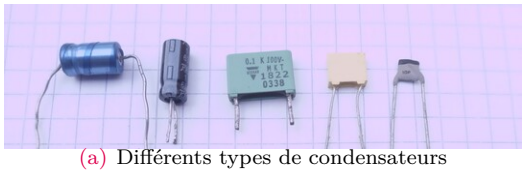
Démonstration

Si on admet la relation $q = C.u$ (que vous démontrerez l'année prochaine), alors un bilan de la charge de la plaque de gauche entre t et $t + \mathrm{d}t$ indique que $q(t + \mathrm{d}t) = q(t) +$ la petite charge qui entre en un temps $\mathrm{d}t = q(t) + i.\mathrm{d}t$ donc $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i$ soit $i = \frac{\mathrm{d}(C.u)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ si $C = \text{cst}$.

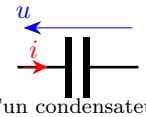
Remarque : Un condensateur est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

Remarque : La capacité classique d'un condensateur utilisé en TP varie entre le pF (1×10^{-12} F) et le µF (1×10^{-6} F). Quand on a besoin de capacités plus fortes, on utilise des condensateurs particuliers, les condensateurs chimiques, mais qui ont la particularité d'être polarisés (la tension u à leur bornes ne doit pas être trop négative). Cf. figure E1.9.

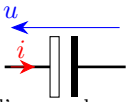
FIGURE E1.9 : Condensateurs.



(a) Différents types de condensateurs



(b) Symbole d'un condensateur non polarisé



(c) Symbole d'un condensateur polarisé

Propriété : Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours **continue mathématiquement**.

Démonstration

D'après la loi du condensateur, la tension à ses bornes est dérivable, donc continue mathématiquement.

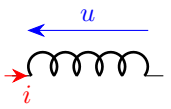
Cette propriété indique une première utilité d'un condensateur : il peut servir à supprimer les discontinuités (ou les variations brusques) de tension ; par exemple les pics de tension dus à des décharges d'électricité statique. Il sert également à stocker de l'énergie, comme on le verra à la fin de ce chapitre.

B.4. Les bobines (ou inductances)

Définition : Inductance

Une bobine est un enroulement de fil formant un grand nombre de tours. On la modélise par un composant idéalisé (inductance) dont la loi est

$$u = L.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(E1.7)}$$



où L est l'inductance, en Henry (H).

Remarque : Une inductance est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

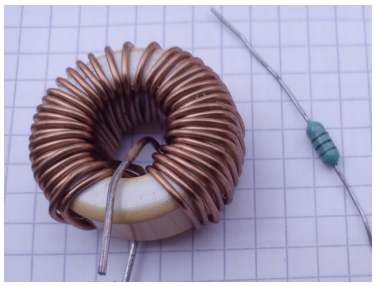
Remarque : Les bobines utilisées en TP ont des inductances de l'ordre de quelques dizaines de mH.

Nous démontrerons à la fin de l'année la loi de l'inductance écrite ci-dessus. On peut simplement retenir pour le moment que :

— plus une bobine a de tours de fils, plus son inductance L est grande

— on peut augmenter beaucoup l'inductance d'une bobine en mettant en son milieu un matériau magnétique comme du fer (cf. figure E1.10)

FIGURE E1.10 : Bobines ou inductances (torique à gauche, axiale à droite).



Remarque : Pour faire une bobine, il faut une grande longueur de fil ; du coup, la résistance de ce fil n'est pas toujours négligeable. La modélisation d'une bobine par une simple inductance est le modèle le plus simple ; parfois, pour plus de réalisme, on modélisera une bobine par une inductance L en série avec une résistance R ; en notant u la tension aux bornes de l'ensemble, on a alors la relation $u = L.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R.i$.

Propriété : Continuité de l'intensité à travers une bobine

L'intensité qui traverse une bobine est toujours **continue mathématiquement**.

Démonstration

D'après la loi de la bobine, l'intensité qui la traverse est dérivable, donc continue mathématiquement.

Cette propriété indique que le courant qui traverse une bobine ne peut pas s'éteindre instantanément ; ainsi, lorsqu'on débranche un moteur (constitué de plusieurs bobines), une étincelle apparaît dans le circuit pour que le courant décroisse de façon continue.

Une bobine peut donc être utilisée pour éviter les variation de courant ; mais elle a une autre utilité : elle produit ou reçoit des effets magnétiques (cf. la fin de l'année). Elle stocke aussi de l'énergie, comme on le verra à la fin du chapitre.

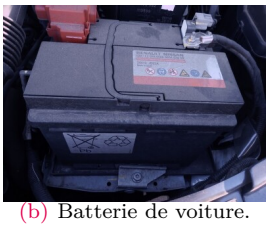
B.5. Les générateurs linéaires

Il existe de nombreuses sources d'énergie électrique ; la figure E1.11 en représente quelques-uns qui créent du continu ; les tensions alternatives sont produites par des alternateurs ou des onduleurs (figure E1.12).

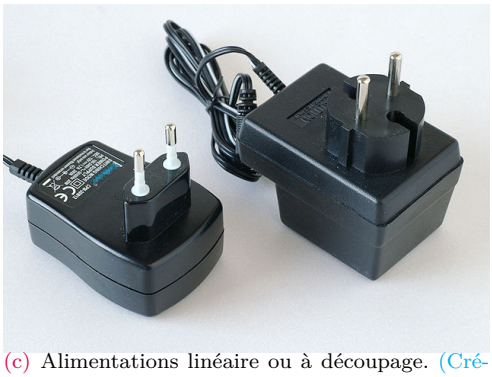
FIGURE E1.11 : Générateurs continus.



(a) Piles électriques. (Crédit : Wikipedia/Lead holder)



(b) Batterie de voiture.

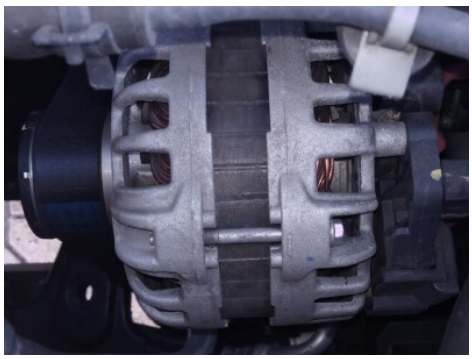


(c) Alimentations linéaire ou à découpage. (Crédit : Wikipedia/Smial)



(d) Centrale photovoltaïque. (Crédit : Wikipedia/Ceinturion)

FIGURE E1.12 : Générateurs alternatifs.



(a) Alternateur de voiture.

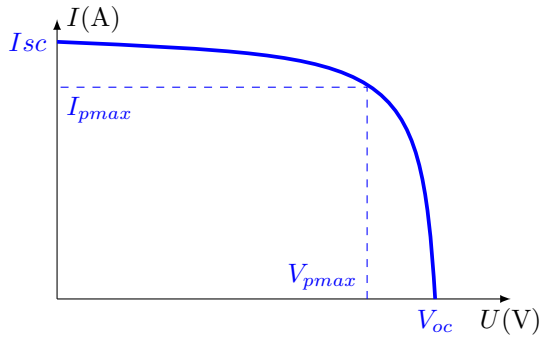


(b) Onduleur. (Crédit : Wikipedia/C.Ableiter)

De telles alimentations sont des dipôles actifs : même si aucun courant ne circule, il existe une tension à leurs bornes ; mais lorsqu'un courant circule, cette tension change : la figure E1.13 montre un exemple de documentation technique d'un panneau solaire. On voit que la caractéristique est une courbe non linéaire, mais qu'on peut modéliser assez bien par deux morceaux, un au voisinage de I_{sc}, et un autre au voisinage de V_{oc}.

On propose donc deux modèles idéaux de générateurs, qui seront valables uniquement dans une certaine plage de fonctionnement.

FIGURE E1.13 : Exemples de caractéristiques techniques de cellules photovoltaïques.



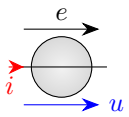
(a) Caractéristique courant-tension d'une cellule photovoltaïque

CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES	STC	NOCT
Gamme de puissance (Wc)	500	380
Rendement surfacique	22,0%	
Tensions à puissance max. Vpmax	33,90	31,95
Intensité à puissance max. Ipmax	14,75	11,91
Tension circuit ouvert Voc (V)	40,50	38,56
Courant de court-circuit Isc (A)	15,60	12,47

(b) Caractéristiques d'un panneau Voltec^{TM} TARKA 500 sous deux conditions de test (STC : 1000 W · m^{-2}, 25 °C ; NOCT : 800 W · m^{-2}, 46 °C).

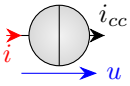
Définition : Générateur idéal de tension

Un générateur idéal de tension impose entre ses bornes une tension constante quel que soit le courant qu'il débite : $u = e$.
e s'appelle la force électromotrice (ou tension en circuit ouvert).



Définition : Générateur idéal de courant

Un générateur idéal de courant débite une intensité constante quelle que soit la tension à ses bornes : $i = i_{cc}$.
i_{cc} s'appelle le courant de court circuit.



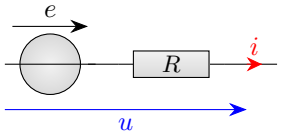
Remarque : Parfois on voit le symbole du générateur idéal de courant avec la flèche i_{cc} à côté, comme une tension ; j'évite cette notation car elle prête à confusion.

Dans un générateur **réel** de tension, quand on demande plus de courant, la tension baisse un peu. On peut modéliser cela par une loi linéaire grâce au modèle de Thévenin :

Définition : Modèle du générateur de Thévenin

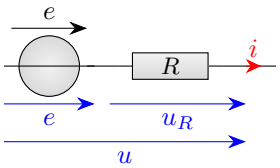
Un générateur linéaire peut être modélisé par un modèle de Thévenin : un générateur idéal de tension de fem e en série avec une résistance R ; on a alors la relation caractéristique

$$u = e - R.i \qquad \text{(E1.8)}$$



Démonstration

Notons u_R la tension aux bornes de la résistance :



Alors d'après la loi d'additivité des tensions, $u = e + u_R$. Or d'après la loi d'Ohm, $u_R = -R.i$ (le signe $-$ vient de ce que la résistance est orientée en convention générateur et non pas récepteur), ce qui donne bien $u = e - R.i$.

Remarque : On appelle *intensité de court-circuit* d'un générateur le courant qu'il débite si on impose une tension nulle entre ses bornes. Dans le cas d'un générateur de Thévenin de fem e et de résistance interne R, on voit que $u = 0 \Leftrightarrow i = \frac{e}{R}$.

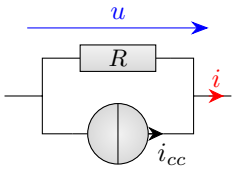
Exemple : Pile

Une pile électrique a pour fem 1,5 V et pour intensité de court-circuit 8 A ; calculez sa résistance interne.

La fem correspond au modèle de Thévenin : $E = 1{,}5\,\text{V}$. L'intensité de court-circuit vaut $\frac{E}{R}$ (un schéma on on referme le générateur par un fil le montre facilement) donc $R = \frac{1{,}8}{8} = 0{,}19\,\Omega$.

Remarque : Pour les générateurs se comportant comme des générateurs de courant presque idéaux, il existe un autre modèle, celle du générateur de Norton, qui met un générateur idéal de courant en parallèle avec une résistance interne ; on a alors la loi caractéristique

$$i = i_{cc} - \frac{u}{R}$$

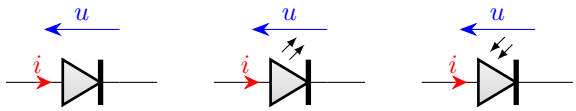


B.6. Les diodes (Hors programme)

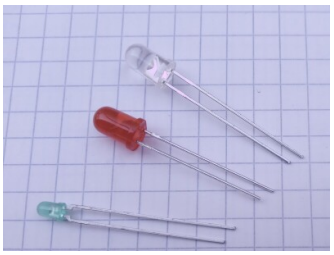
Les diodes sont des composants non linéaires, donc très intéressants mais qui rendent l'analyse des circuits plus difficiles. Elles ne sont pas au programme, j'en parle ici uniquement dans un but de culture générale mais rien n'est à savoir à leur sujet.

Les diodes sont des composants utilisés dans de très nombreux domaines ; la figure E1.14 en montre différents types. Les diodes les plus simples sont les diodes de redressement, utilisées entre autres dans la conversion de puissance (tension continue/alternative) et dans l'électronique numérique (portes logiques). Les diodes électroluminescentes (LED) se comportent de la même manière mais émettent de la lumière lorsqu'un courant les traverses ; les photodiodes, quant à elles, permettent en plus de convertir la lumière reçue en courant, de manière à former des unités photovoltaïques.

FIGURE E1.14 : Différents types de diodes.



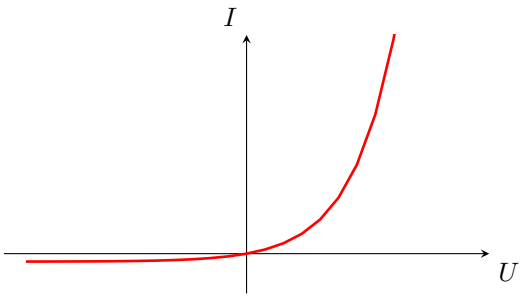
(a) De gauche à droite : diode de redressement, diode électroluminescente et photodiode.



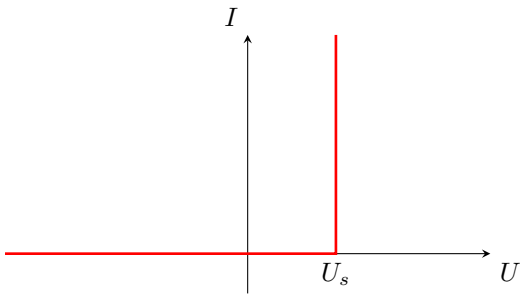
(b) Diodes électroluminescente (LED)

La caractéristique générale d'une diode est représentée sur la figure E1.15(a) : c'est une courbe d'allure à peu près exponentielle, avec un courant très faible pour des tensions négatives, et qui devient très important pour des tensions positives. Pour pouvoir traiter ce composant, on va proposer un modèle idéalisé permettant de conserver le comportement général de la diode.

FIGURE E1.15 : Caractéristiques de diodes.



(a) Caractéristique exacte d'une diode



(b) Caractéristique du modèle de la diode idéale

Modèle de la diode idéale

On modélise une diode idéale de tension seuil U_s par deux régimes de fonctionnement (figure E1.15(b)) :

— tant que la tension reste inférieure à la tension seuil U_s de l'ordre du Volt, la diode est *bloquée* et aucun courant ne passe : $U < U_s$ et $I = 0$ en régime bloqué

— si la tension atteint la tension seuil, alors la diode est *passante* et l'intensité passe dans un seul sens : $U = U_s$ et $I > 0$ en régime passant.

Remarque : Pour les diodes au silicium (les plus courantes), $U_s \approx 0{,}7\,\text{V}$.

Le traitement des circuits à diode est compliqué à cause des deux régimes de fonctionnement distincts : il faut émettre une hypothèse sur le régime de fonctionnement de la diode, puis calculer les caractéristiques du circuit, et à la fin vérifier si l'hypothèse de départ était juste ; si ce n'est pas le cas, on repart sur l'autre hypothèse.

E1.C. Puissance électrique

L'électricité consiste donc à faire passer du courant dans des composants à l'aide d'une tension imposée. Ce courant, ou charge électriques en mouvement, apporte avec lui une énergie.

C.1. Lois générales

Définition : Énergie et puissance

Une *énergie* est une grandeur que possède un système et qu'il peut échanger pour réaliser certaines actions ; elle se mesure en Joules (J).
Un *travail* W représente une énergie échangée, par exemple par le moyen de l'électricité. Il se mesure aussi en Joules.
Une *puissance moyenne* est le quotient d'un travail par le temps mis pour l'échanger : $\mathcal{P}_{moy} = \frac{W}{\Delta t}$; il se mesure en Watts ($1\,\text{W} = 1\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$).
Une *puissance* (instantanée) est la puissance moyenne calculée sur un temps très court : $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\text{d}t}$.

La définition de l'énergie est vague…. Quelles actions peut-on faire avec de l'énergie ? Beaucoup : mettre en mouvement, éclairer, chauffer, refroidir, communiquer,…

Remarque : La relation $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\text{d}t}$ peut être inversée : le travail échangé entre deux instants t_1 et t_2 vaut $W^{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}.\text{d}t$; si $\mathcal{P} = \text{cst}$ alors $W^{t_1\to t_2} = \mathcal{P}.(t_2 - t_1)$.

Eh oui, la notation est une source de confusion : un travail s'écrit W et s'exprime en J ; une puissance s'écrit $\mathcal{P}$ et s'exprime en W. W comme Work ou comme Watt, il ne faut pas tout mélanger.

Définition : Puissance reçue/fournie par un dipôle

Pour un dipôle orienté en *convention récepteur*, la puissance électrique *reçue* vaut $\mathcal{P}_{reçue} = u.i$; c'est l'opposé de la puissance fournie.
Pour un dipôle orienté en *convention générateur*, la puissance électrique *fournie* vaut $\mathcal{P}_{fournie} = u.i$; c'est l'opposé de la puissance reçue.

Définition : Caractère récepteur ou générateur

Un dipôle a un caractère récepteur si la puissance qu'il reçoit est positive, et générateur dans le cas contraire.

La puissance consommée par un récepteur varie sur de grands ordres de grandeur. Le Watt est une unité assez petite ; par exemple un téléphone portable en utilisation consomme de l'ordre du Watt ; en veille il tombe en-dessous de 100 mW. Pour des systèmes électroniques fonctionnant sur batterie avec de grandes durées de vie, on peut tomber sous le µW. À l'opposé, les systèmes électriques de puissance consomment rapidement plusieurs kW (cf. tableau E1.3).

TABLEAU E1.3 : Valeur de quelques puissances usuelles.

Système	Puissance
puce RFID	≈1mW
smartphone (veille)	≈50mW
smartphone (utilisation)	≈500mW
smartphone (charge)	jusqu'à 50W
éclairage domestique LED	≈10W
cuisinière à induction	2kW
voiture électrique Zoé	65kW
TGV M	9MW
pile AA	≈1W
panneau photovoltaïque 1 m^2	≈250W
éolienne	10MW
tranche de centrale nucléaire	1GW

C.2. Puissance consommée par une résistance

Commençons par le dipôle le plus universel, la résistance (car on rappelle que tout fil réel possède une résistance, même faible).

Propriété : Puissance Joule

La puissance reçue par une résistance vaut $\mathcal{P} = R.i^2 = \dfrac{u^2}{R}$, elle est toujours positive. Une résistance a donc toujours un caractère récepteur.

Démonstration

En convention récepteur, $\mathcal{P} = u.i$; or $u = R.i$ par la loi d'Ohm, donc $\mathcal{P} = R.i^2$.
On peut aussi écrire $i = \frac{u}{R}$ ce qui donne bien $\mathcal{P} = \frac{u^2}{R}$.

Une résistance consomme donc de la puissance électrique ; elle la convertit en une élévation de température. C'est le principe de base d'un radiateur ; mais le plus souvent, cette perte d'énergie est un défaut qu'on cherche à minimiser en ayant des résistances faibles. On le voit en particulier sur le bilan de puissance d'un générateur de Thévenin :

Propriété : Puissance fournie par un générateur linéaire

La puissance fournie par un générateur de Thévenin vaut $\mathcal{P} = e.i - R.i^2$: le terme $e.i$ représente la puissance fournie par le générateur idéal de tension, et $-R.i^2$ la puissance perdue dans la résistance interne.

C.3. Énergie stockée par un condensateur ou une bobine

Contrairement à la résistance qui reçoit toujours de l'énergie, un condensateur ou une bobine peuvent en recevoir, la stocker, puis la rendre : ils ont parfois un caractère récepteur, parfois un caractère générateur.

Propriété : Énergie stockée par un condensateur

Un condensateur de capacité C ayant une tension u à ses bornes stocke une énergie

$$E_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad \text{(E1.9)}$$

Démonstration

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur vaut $\mathcal{P} = u.i = u.C.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On rencontrera souvent dans la suite des dérivées de cette forme : $u.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, il faut apprendre à les reconnaître : en multipliant et en divisant par 2, on obtient $\frac{1}{2}.2.u.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}$. Donc $\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)$.
La puissance reçue par le condensateur est donc la dérivée d'une quantité qui ne dépend que de l'état du condensateur : cette quantité représente l'énergie stockée par le condensateur.

Un condensateur stocke donc de l'énergie électrique au même titre qu'une batterie, mais il y a des différences :

— une batterie stocke l'énergie avec une tension quasiment constante (sauf quand elle est vraiment à plat) ; alors que la tension d'un condensateur croît beaucoup quand on le charge

— une batterie stocke l'énergie électrique sur un temps assez long, alors qu'un condensateur réel a des « fuites » de charges entre ses armatures qui font qu'il ne peut pas la stocker sur des temps longs

— en contrepartie, un condensateur est capable de recevoir de très fortes puissances et donc de stocker de l'énergie très rapidement, alors qu'une batterie a une vitesse de charge limitée sous peine de gros dégâts.

Propriété : Énergie stockée par une inductance

Une inductance L parcourue par un courant i stocke une énergie

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 \tag{E1.10}$$

Démonstration

En convention récepteur, la puissance reçue par l'inductance vaut $\mathcal{P} = u.i = L.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.i$. On reconnaît $i.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i^2}{\mathrm{d}t}$ donc $\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$.
La puissance reçue par l'inductance est donc la dérivée d'une quantité qui ne dépend que de l'état de l'inductance : cette quantité représente l'énergie stockée par l'inductance.

E1. Lois des circuits électriques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Grandeurs électriques	
Charge électrique, intensité du courant électrique. Régime variable et régime continu. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance électrique.	Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges. Utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer des ordres de grandeur d'intensités, de tensions et de puissances dans différents domaines d'application.
Dipôles électriques usuels	
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.

E1. Lois des circuits électriques

Quelques conseils

✎ Il faut connaître les ordres de grandeur des tensions, courants, résistances, capacités et inductances usuels, pour repérer les applications numériques totalement fausses.

✎ Dans un exercice d'électricité, la première chose à faire si ce n'est pas fait, c'est de **placer sur le schéma tous les courants et tensions inconnus** en leur donnant un sens et un nom. Si on ne place pas les flèches, on est sûr de faire des erreurs de signe.

✎ Attention aux conventions d'orientation des dipôles ! Apprenez les lois des dipôles avec leur convention associée ; si la convention est opposée, un signe − apparaît. Quand vous avez le choix pour placer les tensions et/ou les courants dans un exercice, essayez de placer les résistances, condensateurs et bobines en convention récepteur, et les générateurs en convention générateur.

E1. Lois des circuits électriques

QCMs

réponses page 238

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. La flèche indiquant le sens du courant doit toujours être orientée dans le sens réel de celui-ci.

(a). Vrai (b). Faux

Q2. Si on change le sens de la flèche représentant une tension, on change le signe de la tension.

(a). Faux (b). Vrai

Q3. Tout dipôle vérifie la loi d'Ohm : $U = R.I$

(a). Vrai (b). Faux

Q4. La loi caractéristique d'un générateur de Thévenin est :

(a). $U = E - R.I$ (b). $I = I_0 - \frac{U}{R}$
(c). $U = E + R.I$ (d). $I = I_0 + \frac{U}{R}$

Q5. La puissance reçue par une résistance :

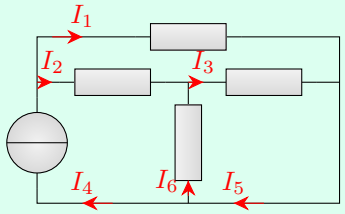
(a). est nulle (b). vaut $\frac{U^2}{R}$
(c). vaut $R.I^2$ (d). est toujours positive

Q6. Un condensateur a toujours un caractère récepteur

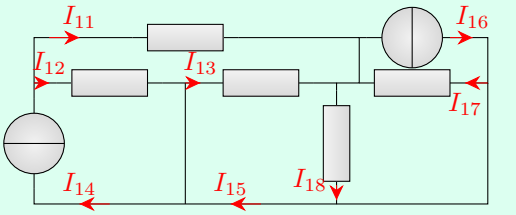
(a). Faux (b). Vrai

✓ QCM : Loi des nœuds ✗

On travaille sur les deux circuits suivants, où certaines intensités (indiquées en-dessous) sont connues.



(a) $I_6 = -0{,}4\,\text{A}$; $I_4 = 1{,}2\,\text{A}$ et $I_2 = 300\,\text{mA}$



(b) $I_{14} = 0{,}7\,\text{A}$; $I_{16} = 1{,}3\,\text{A}$; $I_{17} = 0{,}4\,\text{A}$; $I_{18} = 0{,}1\,\text{A}$ et $I_{13} = -0{,}2\,\text{A}$

Q7. $I_1 =$

(a). $-298{,}8\,\text{A}$ (b). $0{,}9\,\text{A}$
(c). $1{,}5\,\text{A}$ (d). $1{,}1\,\text{A}$

Q8. $I_3 =$

(a). 0,7 A
(b). −0,1 A
(c). 0,1 A
(d). −0,7 A

Q9. $I_5 =$

(a). −1,6 A
(b). 0,8 A
(c). −0,8 A
(d). 1,6 A

Q10. $I_{11} =$

(a). 0,9 A
(b). 1,3 A
(c). 1,7 A
(d). 1,2 A

Q11. $I_{12} =$

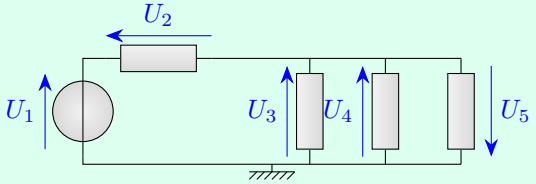
(a). −0,5 A
(b). 0 A
(c). 0,2 A
(d). 0,7 A

Q12. $I_{15} =$

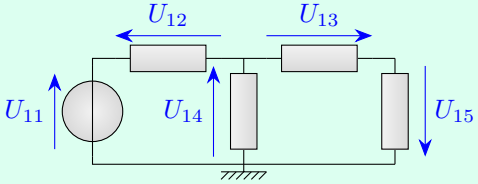
(a). 1,0 A
(b). 1,5 A
(c). 0 A
(d). 0,5 A

✓ QCM : Loi des mailles, tensions ✗

On travaille sur les deux circuits suivants, où certaines tensions (indiquées en-dessous) sont connues.



(a) $U_1 = 10\,\text{V}$ et $U_3 = 6\,\text{V}$



(b) $U_{11} = 8\,\text{V}$; $U_{12} = 2\,\text{V}$ et $U_{13} = -5\,\text{V}$

Q13. $U_4 =$

(a). −2 V
(b). 10 V
(c). 6 V
(d). 2 V

Q14. $U_5 =$

(a). 2 V
(b). −6 V
(c). 6 V
(d). −2 V

Q15. $U_2 =$

(a). 6 V
(b). −4 V
(c). −2 V
(d). 4 V

Q16. $U_{14} =$

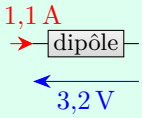
(a). $6\,\text{V}$ (b). $8\,\text{V}$
(c). $4\,\text{V}$ (d). $2\,\text{V}$

Q17. $U_{15} =$

(a). $2\,\text{V}$ (b). $4\,\text{V}$
(c). $-1\,\text{V}$ (d). $-3\,\text{V}$

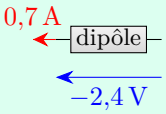
✓ QCM : Puissance électrique ✗

Q18.



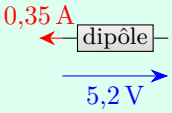
(a). ce dipôle est un récepteur (b). $\mathcal{P}_{fournie} = 3{,}5\,\text{W}$
(c). $\mathcal{P}_{reçue} = 3{,}5\,\text{W}$ (d). ce dipôle est un générateur

Q19.



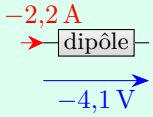
(a). $\mathcal{P}_{reçue} = 1{,}7\,\text{W}$ (b). ce dipôle est orienté en convention générateur
(c). $\mathcal{P}_{reçue} = -1{,}7\,\text{W}$ (d). ce dipôle est orient en convention récepteur

Q20.



(a). $\mathcal{P}_{fournie} = 1{,}8\,\text{W}$ (b). ce dipôle est un récepteur
(c). ce dipôle est un générateur (d). $\mathcal{P}_{fournie} = -1{,}8\,\text{W}$

Q21.



(a). ce dipôle est un générateur (b). $\mathcal{P}_{reçue} = -9\,\text{W}$
(c). ce dipôle est orienté en convention générateur (d). $\mathcal{P}_{fournie} = 9\,\text{W}$

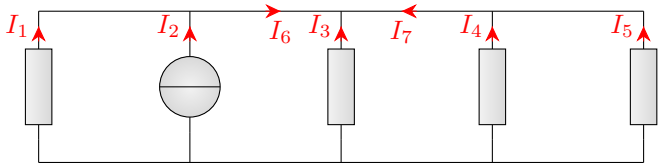
E1. Lois des circuits électriques

Exercices

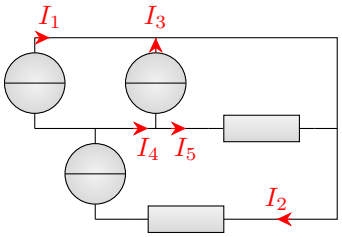
réponses page 239

Exercice E1.1 : Application de la loi des nœuds [*]

Pour chaque figure, trouvez les valeurs de tous les courants inconnus.



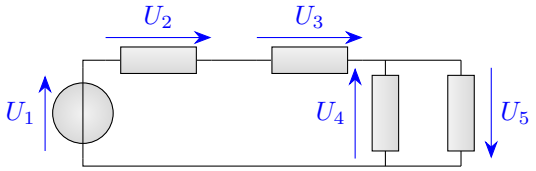
(a) $I_2 = 0{,}6\,\text{A}$; $I_3 = -120\,\text{mA}$; $I_4 = -60\,\text{mA}$ et $I_5 = -320\,\text{mA}$



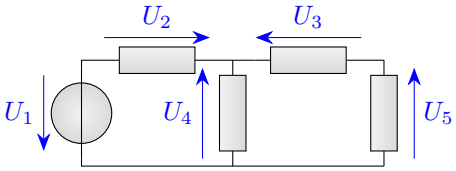
(b) $I_1 = 1{,}2\,\text{A}$; $I_2 = 0{,}4\,\text{A}$ et $I_3 = -0{,}2\,\text{A}$

Exercice E1.2 : Loi des mailles ou loi d'additivité [*]

Pour chaque figure, trouvez les valeurs des tensions inconnues.



(a) $U_1 = 10\,\text{V}$; $U_2 = -3\,\text{V}$ et $U_5 = -4\,\text{V}$

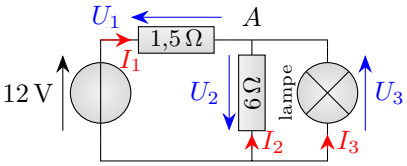


(b) $U_1 = -8\,\text{V}$; $U_3 = 2\,\text{V}$ et $U_5 = 4\,\text{V}$

Exercice E1.3 : Calcul d'une tension et d'un courant

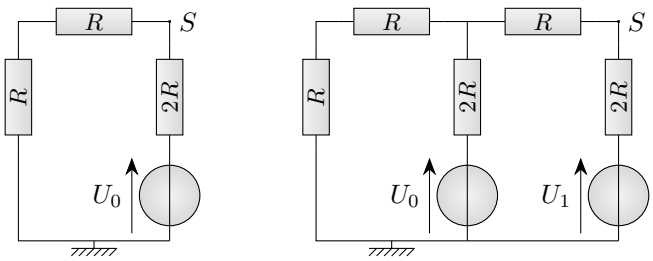
Dans le circuit ci-contre, la lampe est assimilable électriquement à une résistance $R_l = 3{,}5\,\Omega$.

1. Écrivez les lois des mailles appliquées à chaque maille, en fonction des tensions U_k puis des courants I_k (attention aux signes !).
2. Écrivez la loi des nœuds au nœud A.
3. Résolvez le système pour calculer I_3.



Exercice E1.4 : Convertisseur Numérique-Analogique [**]

On considère les deux circuits suivants :

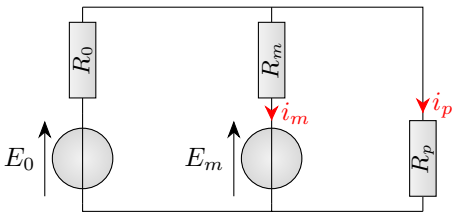


1. Circuit de gauche : placez les tensions et les intensités inconnues, puis appliquez la loi des mailles et la loi d'Ohm. Déduisez-en le courant, puis le potentiel V_S du point S, en fonction de U_0 et R.
2. Circuit de droite : par la même méthode, écrivez 2 lois des mailles et 1 loi des nœuds, et déduisez-en un système de 3 équations ayant 3 intensités comme inconnues. Déduisez-en l'intensité dans la branche de droite, puis montrez que $V_S = \frac{2U_1+U_0}{4}$.

3. Essayez de deviner ce que vaudra V_S si on met des générateurs U_0, U_1, ..., U_k. À quoi sert un tel montage ?

Exercice E1.5 : Voiture radiocommandée [**]

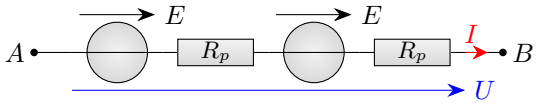
Dans une voitude radiocommandée, les piles (représentées par un générateur de Thévenin de fem $E_0 = 6\,\text{V}$ et de résistance interne $R_0 = 1{,}5\,\Omega$) alimentent un moteur (représenté électriquement par un générateur de tension $E_m = 0{,}7\,\text{V}$ et une résistance $R_m = 0{,}6\,\Omega$) et des ampoules de phares (représentés électriquement par une résistance $R_p = 110\,\Omega$).



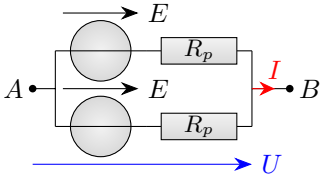
1. Exprimez et calculez le courant i_m à travers le moteur et le courant i_p à travers les phares.
2. Exprimez et calculez la puissance reçue par le moteur et celle reçue par les phares.
3. Les piles peuvent débiter $8{,}8\,\text{A}\cdot\text{h}$; pendant combien de temps la voiture fonctionnera-t-elle ?

Exercice E1.6 : Association de piles [**]

On dispose de piles électriques qu'on modélisera par des générateurs de Thévenin de fem $E = 1{,}5\,\text{V}$ et de résistance interne $R_p = 0{,}6\,\Omega$. On souhaite associer deux piles de deux manières schématisées sur les deux circuits ci-dessous :



Circuit (a)



Circuit (b)

Dans les deux cas, on cherche à établir la relation entre la tension U et le courant I de manière à trouver le générateur équivalent aux deux piles ; on remarquera que rien n'est dessiné entre A et B, mais il peut se trouver toutes sortes de circuits.

1. Circuit (a) : montrer que, dans une telle disposition, la fem vaut $2E$ et la résistance interne $2R_p$; quel est l'intérêt de cette configuration ?
2. Circuit (b) : montrer que, dans une telle disposition, la fem vaut E et la résistance interne $R_p/2$; quel est l'intérêt de cette configuration ?
3. Dans chaque cas, on branche entre A et B une résistance $R = 1\,\Omega$. Calculez le courant qui la traverse dans les deux cas.

Exercice E1.7 : Caractéristiques d'une alimentation électrique [**]

On dispose au laboratoire d'une série de générateurs du même modèle ; on cherche à les modéliser par un générateur de Thévenin.

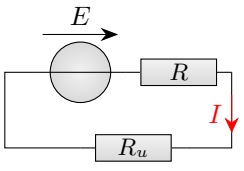
— Lorsqu'on mesure sa tension avec un voltmètre (aucun courant ne la traverse alors) on trouve 10 V

— Lorsqu'on court-circuite les deux bornes par un fil, l'intensité débitée vaut 200 mA.

Déduisez-en les caractéristiques de ce générateur.

Exercice E1.8 : Adaptation d'impédance [**]

On veut alimenter une résistance R_u à l'aide d'un générateur de Thévenin de fem E et de résistance interne R.



1. Exprimez l'intensité I qui traverse le circuit.
2. En déduire la puissance $\mathcal{P}$ reçue par la résistance R_u.

3. On fait varier la valeur de la résistance R_u. Tracez le tableau de variations de $\mathcal{P}$ en fonction de R_u, et vérifiez que $\mathcal{P}$ passe par un maximum lorsque $R_u = R$ (on dit alors qu'on a « adapté les impédances »).

Exercice E1.9 : Puissance délivrée par une pile [**]

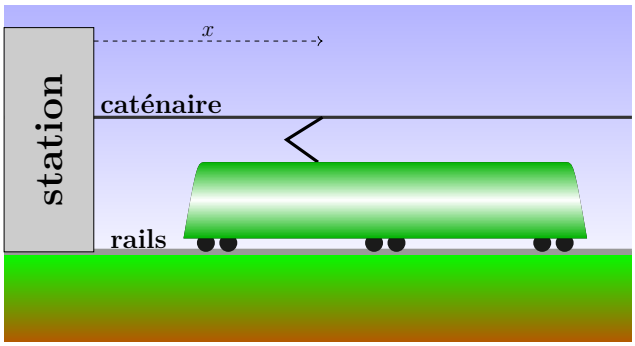
On relève les points suivants de la caractéristique d'une pile électrochimique $4,5V$:

U(V)	4,52	4,45	4,39	4,32	4,26	4,15	3,41	1,27
I(mA)	0	50	100	150	200	250	300	350

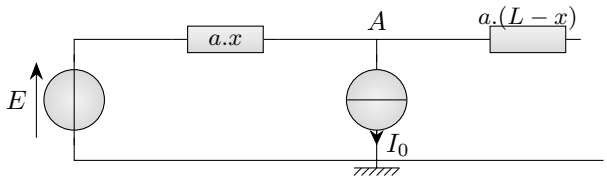
1. Tracez la caractéristique $U(I)$ de la pile. Jusqu'à quel courant peut-on la modéliser par un générateur linéaire de Thévenin ?
2. Par une régression linéaire, déterminez sa fem et sa résistance interne.
3. Complétez la dernière ligne du tableau, et déduisez-en la puissance maximale que peut fournir cette pile.

Exercice E1.10 : Alimentation d'un tramway [***]

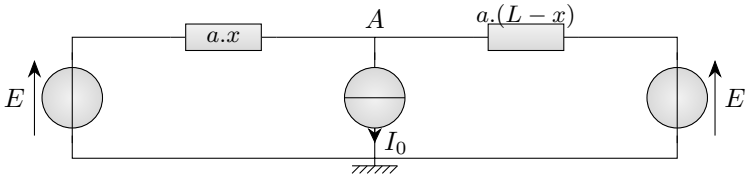
Un tramway est alimenté par l'intermédiaire de deux conducteurs électriques : la caténaire, au-dessus de lui, et les rails sur lesquels il repose.
À un bout de la ligne est installée une station d'alimentation. On la modélisera par un générateur idéal de tension de fem $E = 750\,\text{V}$. Le tramway consomme une intensité $I_0 = 800\,\text{A}$. Les rails ont une résistance négligeable ; par contre, la résistance de la caténaire n'est pas négligeable. On note a la résistance par unité de longueur de la caténaire. On note x la distance entre le tramway et la station d'alimentation, et $L = 2\,\text{km}$ la longueur totale de la ligne.



Le schéma électrique équivalent est alors le suivant (la partie de droite ne sert à rien pour le moment) :



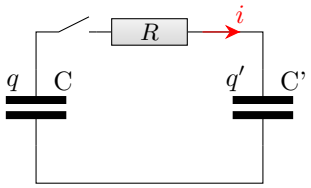
1. Exprimez la tension V_A aux bornes du tramway à la position x.
2. On mesure $V_A(L) = 450\,\text{V}$; calculez a.
3. Tracez l'allure de V_A en fonction de x.
4. Exprimez la puissance consommée par le tramway en fonction de la position. Calculez numériquement sa valeur au milieu de la ligne.
5. Pour que le tramway fonctionne, la tension ne doit pas passer en-dessous de 500 V. On ajoute donc une deuxième station en bout de ligne. Le schéma électrique équivalent est le suivant :



Exprimez $V_A(x)$. Calculez numériquement $V_A(L/2)$, et tracez l'allure de la courbe donnant V_A en fonction de la position.

Exercice E1.11 : Décharge d'un condensateur dans un autre [***]

On considère la figure ci-contre contenant 2 condensateurs de capacités C et C' et une résistance. Initialement le condensateur C possède une charge q_0, l'autre est déchargé. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur ; après un bref instant on obtient un état continu où les condensateurs ont des charges q_1 et q'_1.



1. En appliquant deux fois la loi caractéristique du condensateur, montrer qu'au cours du temps, $q+q' = \text{cst}$. Que vaut cette constante ?
2. Une fois que le système a atteint son équilibre, que vaut i ? En déduire une relation reliant q_1 et q'_1.
3. En combinant les deux questions précédentes, montrer que $q_1 = \frac{C}{C+C'} q_0$; exprimez aussi q'_1.
4. Par un bilan d'énergie, montrez que l'énergie finale est strictement inférieure à l'énergie initiale. Expliquez la cause.

E1. Lois des circuits électriques

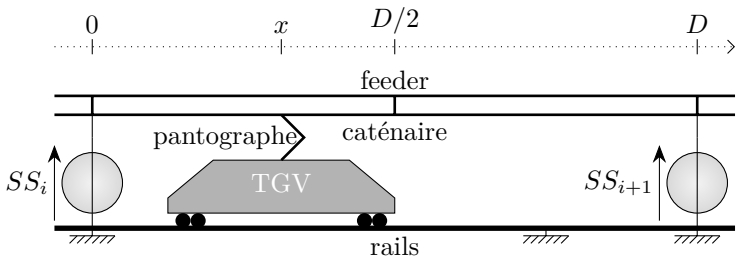
TDs numériques

réponses page 243

TD numérique : Alimentation électrique d'un TGV

.py A.X=B

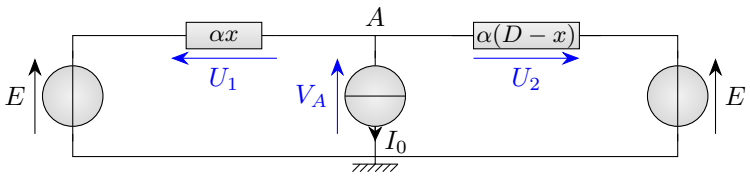
La puissance électrique est fournie aux TGV à partir de sous stations électriques $SS_{i=1,\dots,n}$ que l'on assimilera à des générateurs idéaux de tension continue $E = 25\,\text{kV}$ (en réalité, c'est de l'alternatif, mais cela ne change rien à l'étude). Ces sous stations sont implantées le long de la voie et espacées d'une distance $D = 60\,\text{km}$. Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au-dessus des rails. La motrice TGV reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe situé sur son toit. Tous les moteurs de la motrice sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la Terre. On peut schématiser le circuit d'alimentation par la figure ci-dessous :



Pour l'étude nous nous plaçons dans les conditions suivantes : le fil de la caténaire de section $s = 1{,}47\,\text{cm}^2$ est en cuivre de résistivité $\rho = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$; la résistance d'une longueur x de caténaire aura donc une résistance $\frac{\rho x}{s} = \alpha x$ en notant $\alpha = \frac{\rho}{s}$. On néglige la résistance des rails. La tension des sous-stations étant nominale ($E = 25\,\text{kV}$), on suppose que l'intensité du courant qui circule dans les moteurs est $I_0 = 600\,\text{A}$. Le rail rectiligne est confondu avec l'axe Ox dont l'origine est placé à la dernière sous station électrique atteinte par le TGV. La variable x est donc définie modulo D.

1. **Alimentation sans feeder**

   Si la caténaire est simple, le schéma électrique équivalent est le suivant :



   (a) Appliquez la loi des mailles dans les deux mailles.

   (b) Placez les courants I_1 et I_2 à travers les deux résistances. Par la loi des nœuds, écrivez une relation reliant ces deux intensités avec I_0.

   (c) Grâce à la loi d'Ohm, transformez cette relation en une relation entre U_1, U_2, I_0, α, D et x.

   (d) On a donc écrit en tout 3 équations sur les 3 inconnues U_1, U_2 et V_A. Notre premier but va être d'évaluer V_A lorsque $x = \frac{D}{2}$. Pour cela, on va écrire le système sous forme matricielle. Pour cela, réarrangez les 3 équations sous la forme :

$$\begin{cases} a.U_1 + b.U_2 + c.V_A = d \\ e.U_1 + f.U_2 + g.V_A = h \\ i.U_1 + j.U_2 + k.V_A = l \end{cases}$$

   Définissez alors deux tableaux sous Python : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & h & l \end{pmatrix}$.

   Indication : On peut définir à la main un tableau 1D avec `np.array([d,h,l])` et 2D avec `np.array([[a,b,c],[e,f,g],[i,j,k]])` (à remplacer par leurs valeurs).

(e) On résout alors ce système par la commande `solution=np.linalg.solve(A,B)` qui renvoie un tableau contenant les valeurs des trois inconnues. Déduisez-en V_A.

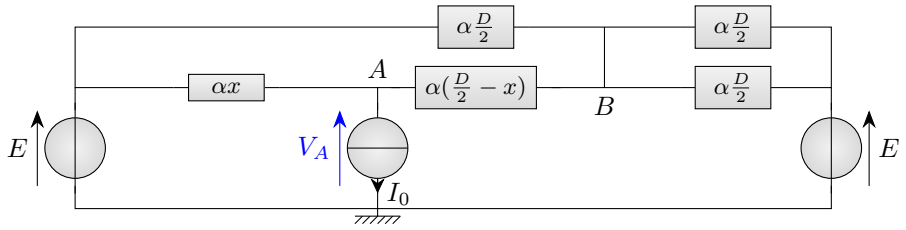
(f) Complétez alors le programme suivant pour calculer la tension V_A pour différentes valeurs réparties sur la ligne (on évite $x = 0$ et $x = D$ car on obtient parfois des divisions par 0).

```
N=100
tab_x=np.linspace(D*0.001,D*0.999,N)
tab_VA=np.zeros(N)
for i in range(N):
    x=tab_x[i]
    ... calcul de VA
    tab_VA[i]=VA
```

Tracez alors la courbe $V_A(x)$.

2. **Alimentation avec feeder**

Pour avoir moins de perte de tension, on ajoute un second câble au-dessus de la caténaire, le feeder, qui est relié à la caténaire en ses deux bouts et en son milieu. Le schéma électrique équivalent devient alors (dans le cas $x < \frac{D}{2}$, sinon il faut faire une symétrie droite/gauche) :



(a) Simplifiez le circuit en associant 2 résistances.

(b) Placez les tensions aux bornes de toutes les résistances.

(c) Écrivez 3 lois des mailles et deux lois de nœuds (aux deux nœuds proches du centre, les nœuds des bords ne servent pas) exprimées en fonction des tensions grâce à la loi d'Ohm.

(d) Résoudre le système obtenu de 5 équations à 5 inconnues pour x variant de $0{,}001D$ à $0{,}499D$. Tracez la courbe obtenue.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Le sens conventionnel du courant peut être choisi dans n'importe quel sens ; si le sens réel est opposé, le courant sera négatif.
Q2.(b)
Q3.(b)
Ce n'est vrai que pour une résistance orientée en convention récepteur.
Q4.(a)
Q5.(b) ET (c) ET (d)
Q6.(a)

Réponses au QCM : Loi des nœuds

Q7.(b)
$I_1 = I_4 - I_2$
Q8.(b)
$I_3 = I_2 + I_6$
Q9.(b)
$I_5 = I_4 + I_6$
Q10.(d)
Dans le gros nœud en haut à droite : $I_{11} + I_{13} + I_{17} = I_{16} + I_{18}$
Q11.(a)
$I_{12} = I_{14} - I_{11}$
Q12.(a)
$I_{15} + I_{12} = I_{13} + I_{14}$

Réponses au QCM : Loi des mailles, tensions

Q13.(c)
$U_4 - U_3 = 0$
Q14.(b)
$U_5 + U_3 = 0$
Q15.(d)
$U_2 + U_3 - U_1 = 0$
Q16.(a)
$U_{14} + U_{12} - U_{11} = 0$
Q17.(c)
$U_{15} + U_{14} + U_{13} = 0$

Réponses au QCM : Puissance électrique

Q18.(a) ET (c)
Q19.(a) ET (b)
Q20.(b) ET (d)
Q21.(a) ET (b) ET (c) ET (d)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E1.1 : Application de la loi des nœuds [*]

(a) $\begin{cases} I_7 &= I_4 + I_5 = -380\,\text{mA} \\ I_6 &= -I_7 - I_3 = 500\,\text{mA} \\ I_1 &= I_6 - I_2 = -100\,\text{mA} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} I_4 &= I_2 - I_1 = -0{,}8\,\text{A} \\ I_5 &= I_4 - I_3 = -0{,}6\,\text{A} \end{cases}$

Corrigé de l'exercice E1.2 : Loi des mailles ou loi d'additivité [*]

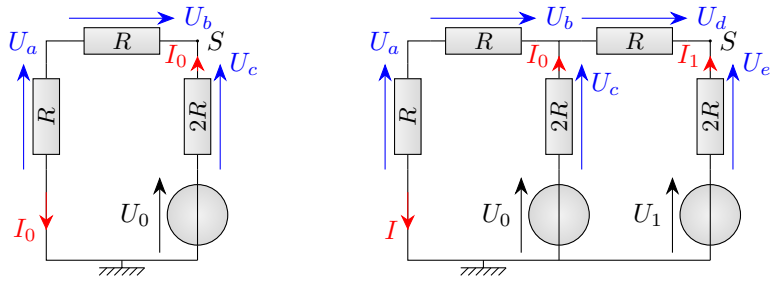
(a) $\begin{cases} U_4 &= -U_5 = 4\,\text{V} \\ U_3 &= -U_1 - U_2 + U_4 = -3\,\text{V} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} U_2 &= U_1 + U_5 + U_3 = -2\,\text{V} \\ U_4 &= U_5 + U_3 = 6\,\text{V} \end{cases}$

Corrigé de l'exercice E1.3 : Calcul d'une tension et d'un courant

1. À gauche : $12\,\text{V} - U_1 + U_2 = 0$; à droite : $U_2 - U_3 = 0$; avec la loi d'Ohm, en faisant attention aux conventions : $12 - 1,5I_1 + 6I_2 = 0$ et $6I_2 - 3,5I_3 = 0$ (en unités SI).
2. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
3. On résout ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues : $I_2 = \frac{3,5}{6} I_3$ et $I_1 = 8 - 4I_2 = 8 + \frac{7}{3} I_3$ donc $\frac{3,5}{6} I_3 + 8 + \frac{7}{3} I_3 + I_3 = 0$ d'où on tire $I_3 = -\frac{48}{23,5} = 2{,}0\,\text{A}$

Corrigé de l'exercice E1.4 : Convertisseur Numérique-Analogique [**]



1. Circuit de gauche : $U_0 + U_c - U_b - U_a = 0$ et par la loi d'Ohm : $U_0 - 2R.I - R.I - R.I = 0$ donc $I = \frac{U_0}{4R}$. Ensuite, par additivité des tensions : $V_S = U_0 + U_c = U_0 - 2R.I = \frac{U_0}{2}$.
2. Circuit de droite : $U_0 + U_c - U_b - U_a = 0$ et par la loi d'Ohm : $U_0 - 2R.I_0 - 2R.I = 0$. Dans l'autre maille : $U_1 + U_e - U_d - U_b - U_a = 0$ donc $U_1 - 2R.I_1 - R.I_1 - 2R.I = 0$. Or par la loi des nœuds : $I = I_0 + I_1$ donc $\begin{cases} U_0 = 4R.I_0 + 2R.I_1 \\ U_1 = 5R.I_1 + 2R.I_0 \end{cases}$ On élimine I_0 et on trouve $U_0 - 2U_1 = -8R.I_1$ soit $R.I_1 = \frac{2U_1 - U_0}{8}$. On a alors $V_S = U_1 - 2R.I_1 = \frac{2U_1 + U_0}{4}$.
3. On aura $V_S = \frac{2^k U_k + \cdots + 2^1 U_1 + 2^0 U_0}{2^{k+1}}$. Ce circuit sert à transformer un nombre binaire en une tension analogique.

Corrigé de l'exercice E1.5 : Voiture radiocommandée [**]

1. Notons i_0 le courant sortant du générateur E_0 vers le haut, alors :
   - loi des nœuds au nœud du haut : $i_0 = i_m + i_p$
   - loi des mailles à gauche, combinée à la loi d'Ohm : $E_0 - R_0.i_0 - R_m.i_m - E_m = 0$
   - loi des mailles à droite, combinée à la loi d'Ohm : $E_m + R_m.i_m - R_p.i_p = 0$

En remplaçant i_0 on trouve $\begin{cases}(R_0+R_m).i_m+R_0.i_p=E_0-E_m\\ R_p.i_p=E_m+R_m.i_m\end{cases}$ d'où on tire

$$\begin{cases}i_m &= \frac{E_0-E_m-E_m\frac{R_0}{R_p}}{R_0+R_m+\frac{R_mR_0}{R_p}}=2{,}50\,\text{A}\\ i_p &= \frac{E_m+R_m.i_m}{R_p}=20\,\text{mA}\end{cases}$$

2. Les phares reçoivent une puissance $\mathcal{P}_m=R_p.i_p^2=44\,\text{mW}$
   Le moteur a une tension à ses bornes $E_m+R_m.i_m$ donc il reçoit une puissance $\mathcal{P}_m=(E_m+R_m.i_m).i_m=5{,}5\,\text{W}$
3. Les piles peuvent fournir $8{,}8\times3600=31\,680\,\text{C}$ et débitent un courant $i_0=i_m+i_p=2{,}53\,\text{A}$; elles tiendront donc $\frac{31\,680}{2{,}53}=12\,500\,\text{s}=3\,\text{j}29\,\text{min}$

Corrigé de l'exercice E1.6 : Association de piles [**]

1. Loi d'additivité des tensions : $U=2E+U_{R1}+U_{R2}$ en notant U_{R1} et U_{R2} les tensions aux bornes des résistances orientées vers la droite. Par la loi d'Ohm (en convention générateur) : $U=2E-2R_pI$ ce qui correspond à un Thévenin de fem $2E$ et de résistance $2R_p$. L'intérêt de ce montage est de doubler la fem.
2. On procède de même avec la loi des nœuds $I=I_1+I_2$ en notant les courants dans les deux branches orientés vers le droite. Par la loi d'Ohm : $I_1=\frac{E-U}{R_p}$ et $I_2=\frac{E-U}{R_p}$ donc $I=2\frac{E-U}{R_p}$ ce qui donne $U=E-\frac{R_p}{2}I$. L'intérêt de ce montage est de diviser la résistance interne, donc de fournir plus de courant.
3. Dans chaque cas, redessiner le circuit avec un générateur de Thévenin et une résistance. Par la loi des mailles, on trouve $I=1{,}36\,\text{A}$ dans le premier cas et $I=1{,}15\,\text{A}$ dans le second.

Corrigé de l'exercice E1.7 : Caractéristiques d'une alimentation électrique [**]

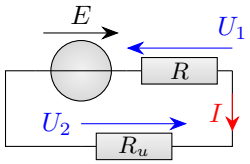
Pour un générateur de Thévenin, $U=E-R.I$ donc :

— si on impose $I=0$ on trouve $U=E$; donc $E=10\,\text{V}$.

— si on impose $U=0$ on trouve $I=\frac{E}{R}$; donc $\frac{E}{R}=200\times10^{-3}$ donc $R=50\,\Omega$.

Corrigé de l'exercice E1.8 : Adaptation d'impédance [**]

1. On place les tensions :



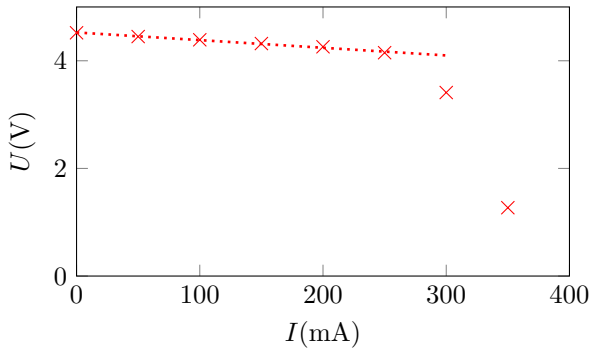
   Loi des mailles : $E=U_1+U_2$. Loi d'Ohm : $E=R.I+R_u.I$ donc $I=\frac{E}{R+R_u}$.
2. $\mathcal{P}=R_u.I^2=E^2\frac{R_u}{(R+R_u)^2}$
3. On dérive : $\frac{d\mathcal{P}}{dR_u}=E^2\frac{1.(R+R_u)^2-R_u.2.(R+R_u)}{(R+R_u)^4}=E^2\frac{R-R_u}{(R+R_u)^3}$: cette dérivée est positive pour $R_u<R$ et négative pour $R_u>R$.

R_u	0		R		$+\infty$
$\frac{d\mathcal{P}}{dR_u}$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{P}$	0	↗	$\frac{E^4}{4R}$	↘	0

   L'adaptation d'impédance a donc lieu lorsque $R_u=R$, c'est là que la puissance reçue par la résistance est la plus grande.

Corrigé de l'exercice E1.9 : Puissance délivrée par une pile [**]

1.



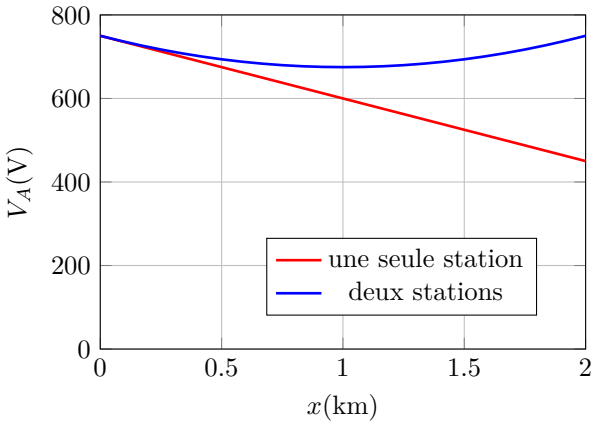
On peut considérer que c'est linéaire jusqu'à $I = 250\,\text{mA}$.

2. Par régression linéaire, la fem vaut 4,53 V et la résistance interne $1{,}4\,\Omega$ (attention aux unités !)
3.

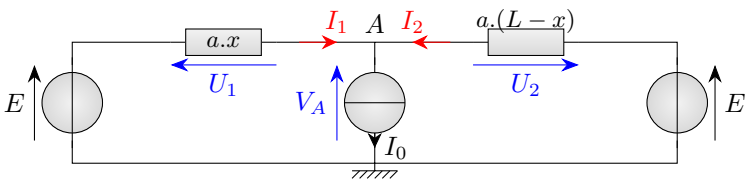
U(V)	4,52	4,45	4,39	4,32	4,26	4,15	3,41	1,27
I(mA)	0	50	100	150	200	250	300	350
$\mathcal{P}$(W)	0	0,22	0,44	0,65	0,85	1,04	1,02	0,44

Corrigé de l'exercice E1.10 : Alimentation d'un tramway [***]

1. L'intensité dans le circuit vaut I_0 ; on trouve alors par la loi des mailles et la loi d'Ohm : $E - a.x.I_0$
2. $E - a.L.I_0 = 450$ donc $a = \frac{750-450}{2{,}800} = 0{,}188\,\Omega\cdot\text{km}^{-1}$
3. C'est une fonction linéaire (en rouge ci-dessous).



4. $\mathcal{P} = I_0.V_A = E.I_0 - a.x.I_0^2$; au milieu de la ligne ($x = 1\,\text{km}$) : $\mathcal{P} = 480\,\text{kW}$
5. On ajoute les notations :



Dans la maille de gauche : $E = V_A + U_1 = V_A + a.x.I_1$.
Dans la maille de droite : $E = V_A + U_2 = V_A + a.(L-x).I_2$.
Or par la loi des nœuds : $I_1 + I_2 = I_0$ donc $I_2 = I_0 - I_1$ d'où $\frac{E-V_A}{a.x} + \frac{E-V_A}{a.(L-x)} = I_0$ soit après quelques calculs $V_A = E - I_0.a.\frac{x(L-x)}{L}$. C'est un polynome d'ordre 2, dont on montre facilement qu'il atteint son minimum en $L/2$. La courbe est tracée en bleu sur le graphique précédent.

Corrigé de l'exercice E1.11 : Décharge d'un condensateur dans un autre [***]

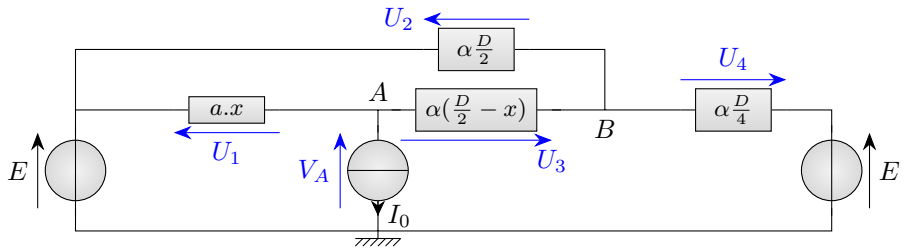
1. Les lois des condensateurs s'écrivent $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}$ (attention aux signes !) donc $\frac{\mathrm{d}(q+q')}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $q + q' = \text{cst} = q_0$.
2. À l'équilibre, les tensions sont constantes, donc par la loi du condensateur $i = 0$. On en déduit que la tension aux bornes de la résistance est nulle, donc en notant u et u' les tensions aux bornes des condensateurs, orientées vers le haut, on a $u = u'$ d'où $\frac{q_1}{C} = \frac{q_1'}{C'}$ ou encore $C'.q_1 = C.q_1'$.
3. Or $q_1 + q_1' = q_0$ donc $q_1' = q_0 - q_1$ d'où $C'.q_1 = C.q_0 - C.q_1$ d'où on tire $q_1 = \frac{C}{C+C'}q_0$ et $q_1' = \frac{C'}{C+C'}q_0$.
4. Initialement $E_c(\text{initial}) = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$.
   À la fin : $E_c(\text{final}) = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{{q_1'}^2}{C'} = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{(C+C')^2} + \frac{C'}{(C+C')^2}\right)q_0^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C+C'} < E_c(\text{initial})$: de l'énergie a été dissipée par la résistance lors du transfert de charges.

Réponses aux TDs numériques

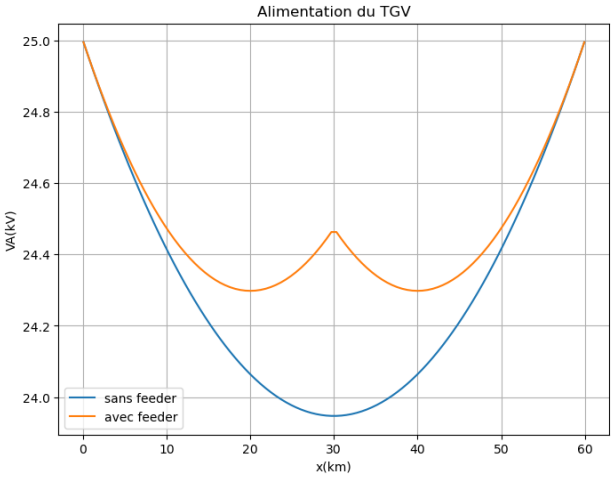
Réponses au TD d'info : Alimentation électrique d'un TGV

Sans feeder, on obtient les systèmes d'équations : $\begin{cases} U_1 + V_A = E \\ U_2 + V_A = E \\ \dfrac{U_1}{\alpha x} + \dfrac{U_2}{\alpha(D-x)} = I_0 \end{cases}$

Avec feeder, avec les notations ci-dessous, on obtient le système d'équations :



$$\begin{cases} U_1 + V_A = E \\ U_3 + U_4 + V_A = E \\ U_1 - U_2 - U_3 = 0 \\ \dfrac{U_1}{\alpha x} + \dfrac{U_3}{\alpha\left(\frac{D}{2}-x\right)} = I_0 \\ \dfrac{U_2}{\alpha\frac{D}{2}} - \dfrac{U_3}{\alpha\left(\frac{D}{2}-x\right)} + \dfrac{U_4}{\alpha\frac{D}{4}} = 0 \end{cases}$$



Sans le feeder, la tension au milieu de la ligne descend à 23,9 kV ; le feeder fait remonter cette valeur à 24,3 kV.

E2 Chapitre Circuits linéaires en régime continu

Programme p.259

Conseils p.260

Cours p.246

E2.A. Association de résistances ; ponts diviseurs

E2.B. Autres lois des circuits linéaires

E2.C. L'Amplificateur Linéaire ou Amplificateur Opérationnel

QCMs p.261

Exercices p.265

TDs numériques p.272

E2. Circuits linéaires en régime continu

Cours

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les lois fondamentales et les dipôles les plus utiles. Nous allons maintenant les mettre ensembles pour fabriquer des circuits. Il existe plusieurs conditions d'utilisation de ces circuits :

— le *régime continu*, lorsque toutes les tensions et intensités sont constantes, que nous allons étudier dans ce chapitre ;

— le *régime transitoire*, qui existe un court instant lorsqu'on allume les générateurs, le temps que les tensions et les courants s'établissent ; nous l'étudierons au chapitre suivant ;

— le *régime sinusoïdal*, que nous étudierons au second semestre.

En régime continu, les condensateurs et les bobines ne jouent pas un grand rôle :

Propriété : Condensateurs et bobines en régime continu

En régime continu, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
En régime continu, une bobine est équivalente à un fil.

Démonstration

Pour un condensateur, $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En régime continu, $u = \text{cst}$ donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $i = 0$: aucun courant ne passe, c'est comme un interrupteur ouvert.
Pour une bobine, on a de même $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ donc le courant circule sans aucune tension à ses bornes : c'est comme un fil.

Dans ce chapitre, nous étudierons donc des circuits composés uniquement de générateurs linéaires et de résistances ; nous les utiliserons surtout en régime continu, mais en fait, **toutes les lois que nous allons voir sont aussi valables dans le cadre de l'ARQS** ; c'est pour cela qu'elles seront écrites avec des grandeurs en minuscules, dans leur formulation la plus générale.

E2.A. Association de résistances ; ponts diviseurs

Il existe des configurations simples, que nous rencontrerons souvent, dans lesquelles les circuits peuvent être simplifiés par association des résistances qui le composent.

A.1. Résistances en série

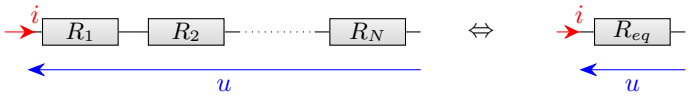
Définition : Association en série

On dit que des dipôles sont placés *en série* s'ils sont placés à la suite l'un de l'autre, dans la même branche.
Des dipôles en série sont traversés par le même courant.

Association de résistances en série

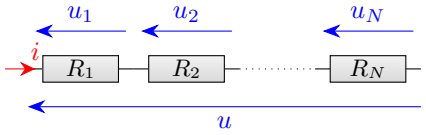
Des résistances R_k placées en série sont équivalentes à une seule résistance équivalente R_{eq} telle que

$$R_{eq} = \sum_k R_k \qquad \text{(E2.1)}$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les tensions aux bornes de chaque résistance :



On peut alors écrire : $u = \sum_{k=1}^{N} u_k$ (loi d'additivité des tensions)

$$= \sum_{k=1}^{N} R_k.i \text{ (loi d'Ohm)}$$

$$= R_{eq}.i \text{ avec } R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

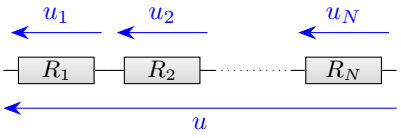
Remarque : La résistance équivalente est toujours plus forte que les résistances initiales en série.

Cette propriété permet donc parfois de simplifier les circuits en remplaçant plusieurs résistances par une seule. Mais si on fait cela, on perd la tension aux bornes des différentes résistances. Si, au contraire, on cherche à connaître la tension aux bornes d'une seule résistance, il existe une loi extrêmement pratique :

Loi du pont diviseur de tension

Soient N résistances en série ; on met une tension u aux bornes de l'ensemble. Alors la tension aux bornes de la n-ième résistance vaut

$$u_n = u\frac{R_n}{\sum_{k=1}^{N} R_k} = u\frac{R_n}{R_{eq}} \qquad \text{(E2.2)}$$



Démonstration

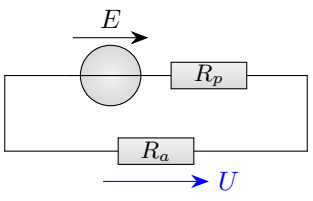
Plaçons le courant i pour que les résistances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm, $u_n = R_n.i$. Or l'ensemble des résistances est équivalent à une seule résistance $R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k$, donc $u = R_{eq}.i$. On en déduit que $i = \frac{u}{R_{eq}}$ donc $u_n = u\frac{R_n}{R_{eq}}$.

Remarque : Attention aux signes : ici, u_n et u sont dans le même sens ; s'ils sont en sens opposé, il faut ajouter un signe $-$ dans la loi.

Exemple : Alimentation d'une lampe de poche

On considère une lampe de poche ancienne (à ampoule à incandescence) alimentée par une pile. La pile est modélisée par un générateur de fem $e = 4{,}5\,\text{V}$ et de résistance interne $R_p = 1{,}5\,\Omega$; l'ampoule est équivalente, électriquement, à une résistance $R_a = 6\,\Omega$. Calculez la tension aux bornes de l'ampoule.

On commence par un schéma du circuit :



Dans ce circuit, les résistances R_p et R_a sont en série. La tension totale aux bornes de ces deux résistances est E. Le diviseur de tension indique donc que

$$U = E\frac{R_a}{R_a + R_p} = 3{,}6\,\text{V}$$

A.2. Résistances en parallèle/dérivation

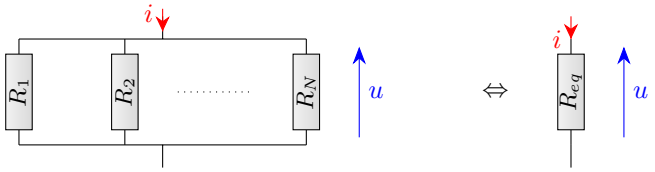
Définition : Association en parallèle

On dit que des dipôles sont en parallèle (ou en dérivation) s'ils sont branchés entre les mêmes nœuds du circuit. Des dipôles en parallèle ont la même tension entre leurs bornes.

Association de résistances en parallèle

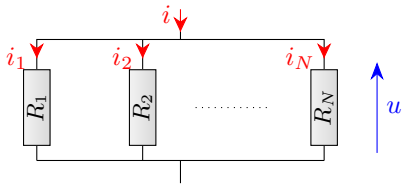
Des résistances R_k placées en parallèle sont équivalentes à une seule résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \text{ soit } G_{eq} = \sum_k G_k \qquad \text{(E2.3)}$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les courants qui traversent chaque résistance :



On peut alors écrire : $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$ (loi des nœuds)

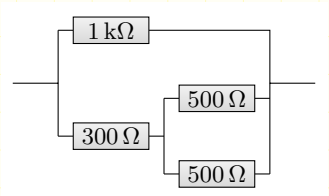
$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{u}{R_k} \text{ (loi d'Ohm)}$$

$$= \frac{u}{R_{eq}} \text{ avec } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$$

Remarque : La conductance équivalente est toujours plus forte que les conductances initiales, donc la résistance équivalente est toujours plus faible que les résistances initiales en parallèle.

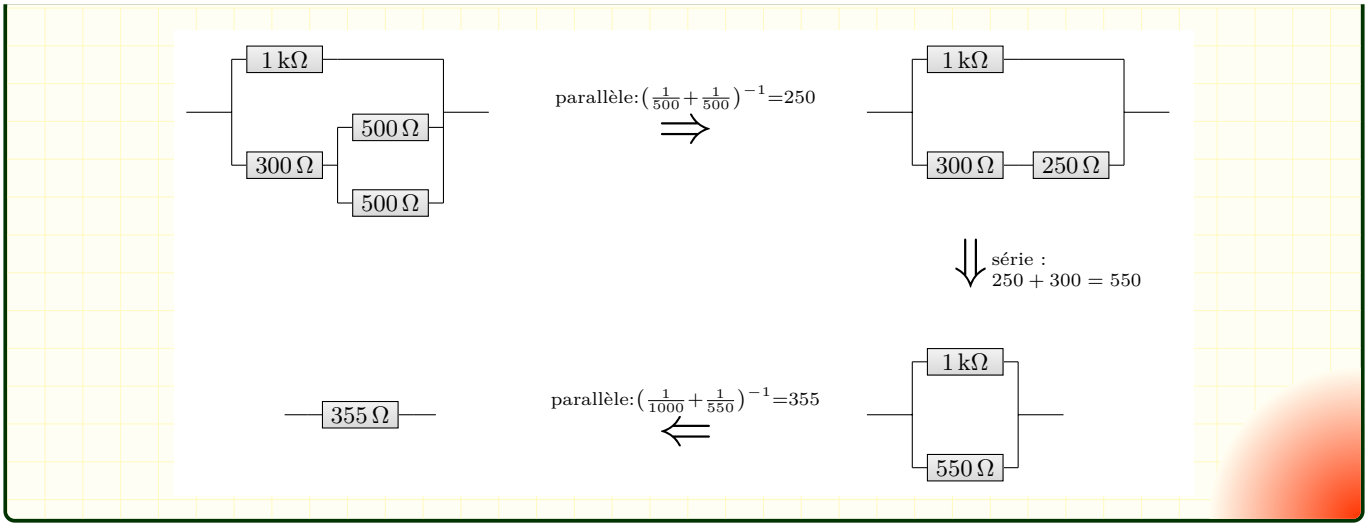
Exemple : Résistance équivalente

On considère le circuit suivant (imaginaire) formé de 4 résistance :



Déterminez la résistance équivalente.

Il ne faut pas chercher à associer deux résistances quelconques choisies au hasard, mais il faut chercher quelles sont les résistances qu'on peut associer. Ici, par exemple, les seule résistances qu'on peut associer au départ sont les deux résistances de 500 Ω qui sont en parallèle :

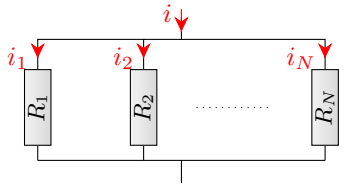


Cette propriété permet donc parfois de simplifier les circuits en remplaçant plusieurs résistances par une seule. Mais si on fait cela, on perd le courant à travers les différentes résistances. Si, au contraire, on cherche à connaître le courant qui traverse une seule résistance, il existe une loi extrêmement pratique :

Loi du pont diviseur de courant

Soient N résistances en parallèle ; on alimente l'ensemble par un courant I. Alors le courant qui traverse la n-ième résistance vaut

$$i_n = i\frac{g_n}{G_{eq}} = i\frac{G_n}{\sum_{k=1}^{N} G_k} = i\frac{\frac{1}{R_n}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{R_k}} \qquad \text{(E2.4)}$$



Démonstration

Plaçons la tension u pour que les résistances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm, $i_n = G_n.u$. Or l'ensemble des conductances est équivalent à une seule conductance $G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k$, donc $i = G_{eq}.u$. On en déduit que $u = \frac{i}{G_{eq}}$ donc $i_n = i\frac{G_n}{G_{eq}}$.

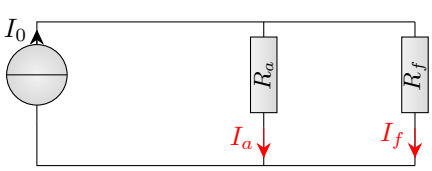
Remarque : Dans le cas où il n'y a que 2 résistances, la loi s'écrit $i_1 = i\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = I\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}} = i\frac{R_2}{R_1+R_2}$ et de même $i_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$, mais ces formules ne se généralisent pas à plus de 2 résistances.

Remarque : Attention encore une fois au sens des flèches. Si i_k et i sont de sens contraire, un signe $-$ apparaît. Cf. les QCMs à la fin.

Exemple : Shunt

On alimente une lampe (modélisée par une résistance $R_a = 6\,\Omega$) par un générateur de courant $I_0 = 0{,}7\,\text{A}$. On décide de brancher un fil de résistance $R_f = 50\,\text{m}\Omega$ aux bornes (= en parallèle) de la lampe. Calculez le courant dans la lampe, et dans le fil.

On fait un schéma :



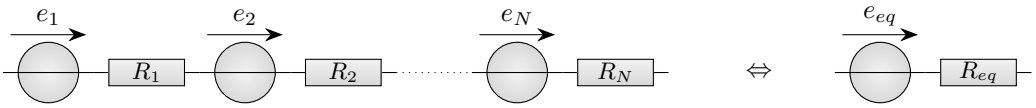
Alors $I_a = I_0\frac{G_a}{G_a+G_f} = 5{,}8\,\text{mA}$ et $I_f = I_0\frac{G_f}{G_a+G_f} = 0{,}694\,\text{A}$: presque toute l'intensité passe dans le fil, plus rien dans la lampe. On dit que la lampe est court-circuitée, ou shuntée.

A.3. Association de générateurs

Les lois d'associations de générateurs ne sont pas explicitement au programme, mais dans le cas de générateurs de Thévenin en série, la loi est facile à retenir et on peut l'admettre.

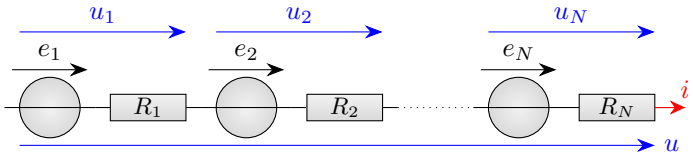
Association de générateurs de Thévenin en série

Si on met en série des générateurs de Thévenin de fem respectives e_k et de résistances internes respectives R_k, l'ensemble est équivalent à un seul générateur de Thévenin de fem $e_{eq} = \sum_k e_k$ et de résistance interne $R_{eq} = \sum_k R_k$.



Démonstration

On place les tensions :



Alors $u = \sum_{k=1}^{N} u_k$ (loi d'additivité des tensions)

$= \sum_{k=1}^{N} (e_k - R_k.i)$ (loi des générateurs de Thévenin)

$= \sum_{k=1}^{N} e_k - i.\sum_{k=1}^{N} R_k$

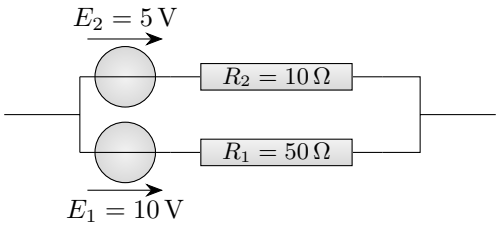
On identifie alors avec la loi d'un seul générateur de Thévenin.

Remarque : La propriété précédente est valable pour des fem orientées dans le même sens ; dans le cas contraire, on peut toujours inverser le signe d'une flèche en changeant le signe de la fem.

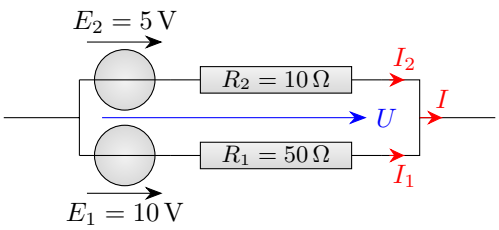
Pour des générateurs de Thévenin en parallèle, il faut écrire la loi des nœuds, les lois de chaque générateur, et combiner le tout. On peut aussi passer par des générateurs de Norton (cf. planche d'exercices).

Exemple : Générateurs de Thévenin en parallèle

Déterminez le générateur de Thévenin équivalent :



On place les notations :



Par la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2$; par les lois des générateurs : $I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$ et $I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$ d'où on tire $I = \frac{E_1 - U}{R_1} + \frac{E_2 - U}{R_2} = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2 - (R_1 + R_2)U}{R_1 R_2}$ et donc $U = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$ ce qui correspond à un générateur de Thévenin de fem $E = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = 9{,}2\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 8{,}3\,\Omega$.

E2.B. Autres lois des circuits linéaires

Les lois de Pouillet et de Millman ne sont que la réécriture de la loi des mailles et de la loi des nœuds dans certains cas simples où elles permettent d'aller plus vite. Elles sont aussi valables en régime non continu, en ARQS. Ces lois n'étant pas explicitement au programme, on doit savoir au besoin les redémontrer. Elles permettent de gagner un temps précieux dans certains circuits, en particulier avec les Amplificateurs Opérationnels.

B.1. La loi de Pouillet

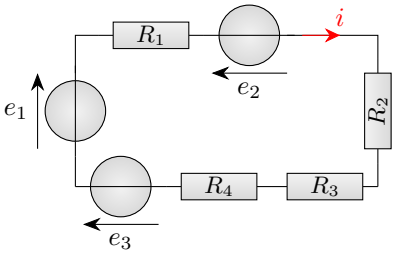
Loi de Pouillet

Dans un circuit en série contenant des générateurs de tension de fem e_k et des résistances R_j, on peut écrire la *loi des mailles en terme de courant* :

$$\sum_k \epsilon_k e_k - (\sum_j R_j).i = 0$$

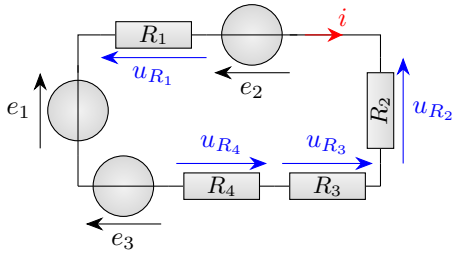
avec $\epsilon_k = +1$ si la fem e_k tourne dans le même sens que i et -1 sinon.
Le courant qui circule dans la seule maille est alors donné par la *loi de Pouillet* :

$$i = \frac{\sum_k \epsilon_k e_k}{\sum_j R_j} \qquad \text{(E2.5)}$$



Démonstration

Plaçons des tensions aux bornes des résistances, en convention récepteur (cela ne change rien au résultat) :



Par la loi des mailles : $e_1 - u_{R_1} - e_2 - u_{R_2} - u_{R_3} - u_{R_4} + e_3 = 0$. En appliquant la loi d'Ohm aux résistances : $e_1 - R_1.i - e_2 - R_2.i - R_3.i - R_4.i + e_3 = 0$ soit $e_1 - e_2 + e_3 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\,.i$ d'où $i = \frac{e_1 - e_2 + e_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$

B.2. Le théorème de Millman

Théorème de Millman

Considérons un nœud N auquel arrivent plusieurs branches :

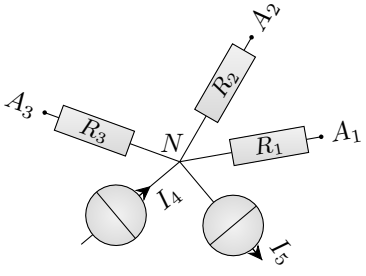
- des branches par lesquelles le nœud N est relié à d'autres nœuds A_k par des résistances R_k
- des branches par lesquelles un courant i_j arrive au nœud N ($\epsilon_j = +1$) ou en part ($\epsilon_j = -1$)

alors d'après la *loi des nœuds en terme de potentiels* :

$$\sum_j \epsilon_j i_j + \sum_k \frac{v_{A_k} - v_N}{R_k} = 0$$

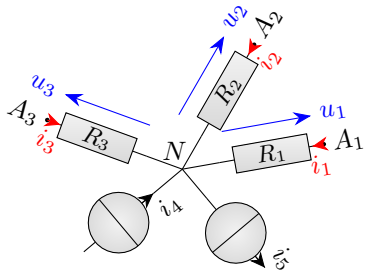
On peut alors exprimer le potentiel du nœud N en fonction de celui de ses voisins par le *théorème de Millman* :

$$v_N = \frac{\sum_k G_k v_{A_k} + \sum_j \epsilon_j i_j}{\sum_k G_k} = \frac{\sum_k \frac{v_{A_k}}{R_k} + \sum_j \epsilon_j i_j}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \qquad \text{(E2.6)}$$



Démonstration

Plaçons sur la figure les tensions aux bornes de résistances et les intensités qui les traversent, orientées ainsi :



Par la loi des nœuds : $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$. Or par la loi d'Ohm : $i_1 = \frac{u_1}{R_1} = \frac{v_{A_1} - v_N}{R_1}$ et de même pour les autres résistances, donc $\frac{v_{A_1}}{R_1} - \frac{v_N}{R_1} + \frac{v_{A_2}}{R_2} - \frac{v_N}{R_2} + \frac{v_{A_3}}{R_3} - \frac{v_N}{R_3} + i_4 - i_5 = 0$. En isolant v_N on obtient $\frac{v_{A_1}}{R_1} + \frac{v_{A_2}}{R_2} + \frac{v_{A_3}}{R_3} + i_4 - i_5 = v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$ soit $v_N = \dfrac{\frac{v_{A_1}}{R_1} + \frac{v_{A_2}}{R_2} + \frac{v_{A_3}}{R_3} + i_4 - i_5}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

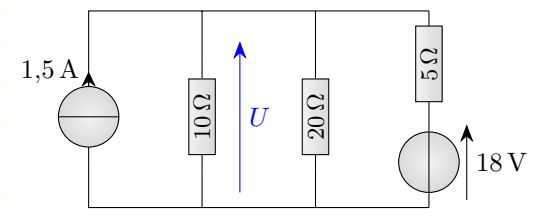
Méthode : Application du théorème de Millman

Pour calculer des tensions à l'aide du théorème de Millman, on procède ainsi :

- on place la masse dans le circuit (si elle n'est pas déjà placée). En effet, le théorème de Millman ne calcule pas des tensions, mais des potentiels ; il faut donc placer la référence des potentiels nuls.
- on repère les nœuds présents dans le circuit ; comme les fils ne jouent pas de rôle et peuvent être rallongés ou raccourcis à volonté, il faut toujours considérer que plusieurs nœuds reliés par des fils sont le même nœud.
- on place les potentiels qui se déduisent de celui de la masse par une différence de tension connue ; par exemple, si un générateur de fem 6 V est placé entre la masse et le point A, alors $V_A = +6\,\text{V}$.
- on repère alors les nœuds dont on a besoin de connaître le potentiel. Si on veut une tension U entre A et B, il faut calculer V_A et V_B ; mais le plus souvent la tension recherchée se trouve entre un point et la masse, donc on a un seul potentiel à calculer.

Exemple : Comment applique-t-on le théorème de Millman ?

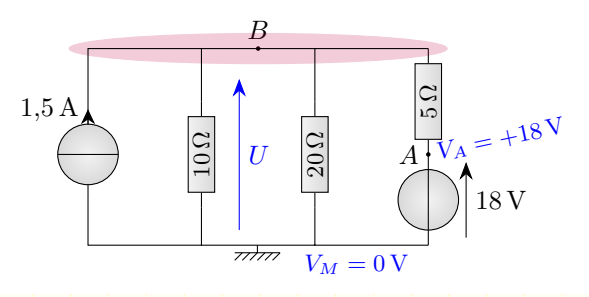
Calculez la tension U :



On commence par :

- placer la masse. Pour trouver le bon endroit, il faut si possible que la tension recherchée se trouve entre un nœud quelconque et la masse ; de plus, si la majorité des générateurs de tension touchent la masse, cela simplifie la suite. Ici, on voit que le bon candidat est le point en bas du circuit (n'importe quel point en bas, car tous les points reliés par un fil sont en fait le même point du point de vue électrique).
- placer les nœuds, mais aussi les points tels que le point A qui jouera un rôle. Le nœud B comprend tout le haut de la figure.
- placer les potentiels connus : $V_A = +18\,\text{V}$.
- repérer la tension recherchée : elle est entre B et la masse, donc $U = V_B$.

La figure ci-dessous résume ces notations :



On applique alors ainsi le théorème de Millman : on écrit un trait de fraction

$$V_B = \frac{\dots}{\dots}$$

On considère le nœud B (ellipse violette en haut). Quatre branches y aboutissent. On commence par celle de gauche : on connaît explicitement le courant $1,5A$ qui arrive au nœud de cette branche ; on met donc ce courant en haut de la fraction, et rien en bas :

$$V_B = \frac{1,5 + \dots}{\dots}$$

Deuxième branche : elle contient une résistance de $10\,\Omega$; si, en partant de B, on traverse cette résistance, on arrive à la masse, de potentiel $0\,V$. On ajoute donc $\frac{0}{10}$ en haut (inutile en fait, mais au début on peut mettre les 0 pour être sûr de ne rien oublier) et surtout $\frac{1}{10}$ en bas :

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} \dots}{\frac{1}{10} \dots}$$

On procède de même avec la troisième branche, qui, à travers une résistance de $20\,\Omega$, mène à la masse de potentiel nul :

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{20} \dots}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \dots}$$

Enfin, la quatrième branche mène, à travers une résistance de $5\,\Omega$, au point A de potentiel $18\,V$, donc

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{20} + \frac{18}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 14,6\,V$$

B.3. Théorème de superposition

On cite simplement pour terminer ce théorème qui servira assez peu pour le moment.

Théorème de superposition

Si un circuit linéaire contient plusieurs générateurs, alors la valeur d'une grandeur électrique dans ce circuit (tension ou courant) est la somme des valeur que prendrait cette grandeur si un seul générateur était allumé à la fois.

Autrement dit, supposons que si j'allume le générateur 1, telle tension vaut $0,3\,V$; si j'allume le générateur 2, cette même tension vaut $0,5\,V$; alors si j'allume les deux, la tension vaut $0,3 + 0,5 = 0,8\,V$.

Remarque : Ce théorème ne fonctionne qu'avec un circuit linéaire. Comme contre-exemple, prenons une diode (une LED pour s'éclairer) de tension seuil $2,5\,V$. Si on l'alimente avec une seule pile de fem $1,5\,V$, la LED reste bloquée et ne s'allume pas. Par contre si on met deux piles en série, la fem devient $3\,V$ et la LED s'allume. Ainsi, l'intensité non nulle qui passe quand les deux piles sont là, n'est pas égale à deux fois l'intensité (nulle) avec une seule pile.

Remarque : Si on garde un seul générateur allumé, c'est qu'on éteint le autres. Éteindre un générateur de tension, c'est mettre sa tension à $0\,V$, donc le remplacer par un fil ; éteindre un générateur de courant, c'est mettre son courant à $0\,A$, donc le remplacer par un interrupteur ouvert.

B.4. Détermination graphique du point de fonctionnement d'un circuit série ou parallèle

Ce paragraphe montre comment on peut résoudre le cas des circuits simples (série ou parallèles) dans le cas de composants non-linéaire, à l'aide d'une construction graphique.

Pour déterminer le point de fonctionnement d'un circuit série (resp. parallèle) :

— on trace les axes d'un graphique avec I en abscisse et U en ordonnée (resp. U en abscisse et I en ordonnée)

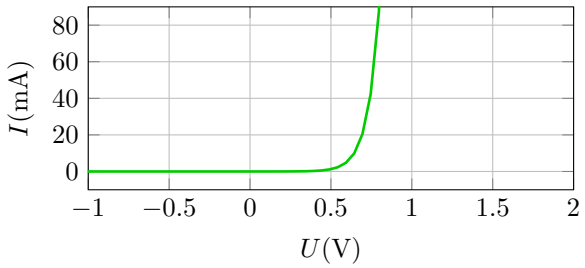
— on trace les caractéristiques des générateurs, et on les additionne ; cela donne une première courbe

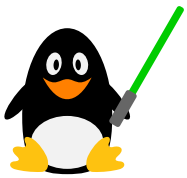
— on trace les caractéristiques des récepteurs, et on les additionne ; cela donne une seconde courbe

— le (ou les) point(s) de fonctionnement sont donnés par les points d'intersection des deux courbes.

Exemple : Lampe de poche

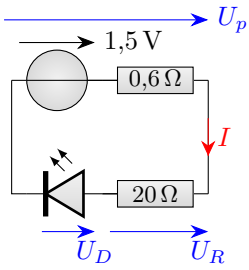
Une lampe de poche est constituée d'une pile de fem 1,5 V et de résistance interne 0,6 Ω en série avec une résistance de protection $R = 20\,\Omega$ et une LED dont la caractéristique est représentée ci-dessous :



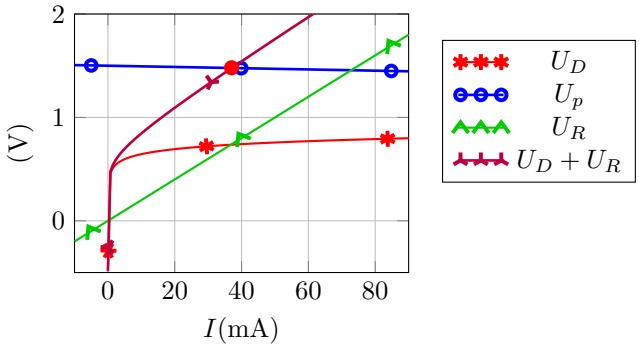


Calculez le courant qui traverse la LED.

Le schéma est le suivant :



On trace les différentes caractéristiques : $U_p = 1{,}5 - 0{,}6.I$ pour la pile et $U_R = 20.I$ pour la résistance.



On voit donc que le point de fonctionnement a pour intensité $I = 37\,\text{mA}$.

E2.C. L'Amplificateur Linéaire ou Amplificateur Opérationnel

Jusqu'à présent, nous avons parlé de circuits où on utilise une pile ou un générateur pour alimenter un ou des composants représentés par une ou des résistances ; mais l'électricité est très importante pour un autre but : les mesures à l'aide de capteurs. En effet, la facilité à transporter des signaux électriques à travers des fils, fait que la grande majorité des capteurs aujourd'hui transforment la valeur mesurée (température, pression, luminosité,...) en une grandeur électrique qui va ensuite être mesurée à l'aide d'une *chaîne d'acquisition*.

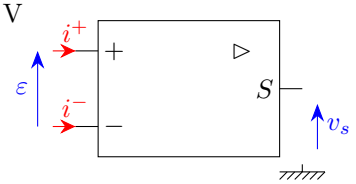
Très souvent, la tension produite par un capteur est faible, ou parasitée, et il faut la traiter. Nous allons donc, pour terminer ce chapitre, introduire un composant qui est très utilisé pour ce genre de traitement de données : l'Amplificateur Opérationnel (AO ou AOp, ou encore Amplificateur Linéaire Intégré ALI).

C.1. Présentation du composant

Définition : Pattes de l'AO

Un amplificateur opérationnel est un circuit possédant 5 pattes :

- deux pattes d'alimentation symétriques, sur lesquelles on doit mettre des potentiels continus $\pm V_{sat}$ où V_{sat} (appelé *tension de saturation*) prend des valeurs comme 9 V, 12 V, ou 15 V
- une patte d'entrée inverseuse notée E^- ou simplement $-$
- une patte d'entrée non inverseuse notée E^+ ou simplement $+$
- une patte de sortie notée S



Le symbole de l'AO, ci-contre, ne fait voir que les 3 pattes utiles ; le rectangle symbolise un circuit intégré quelconque, le ▷ indique qu'il s'agit d'un AO ; s'il est accompagné d'un ∞, cela indique que l'AO est considéré comme idéal.
Les courants i^+ et i^- qui entrent dans l'AO sont appelés *courants de polarisation*.
La différence de potentiel ε entre les deux entrées est appelée *tension différentielle*.
Le potentiel v_s de la sortie de l'AO est appelé *tension de sortie*.

Remarque : Une alimentation d'AO possède 3 bornes : $+V_{sat}$, $-V_{sat}$ et une borne de masse. Cela signifie que l'alimentation d'un AO injecte du courant dans la masse, sans que cela se voie sur le schéma ; par conséquent, dans un montage contenant un ou des AO, il ne faut JAMAIS appliquer la loi des nœuds à la masse.

Propriété : AO en régime linéaire

Lorsque le circuit dans lequel est placé l'AO permet un *rebouclage sur l'entrée inverseuse* (c'est-à-dire qu'il existe une branche qui relie la sortie à l'entrée inverseuse sans passer par la masse), l'AO essaye de fonctionner en *régime linéaire* ; l'AO idéal a alors les propriétés suivantes :

- les courants de polarisation sont nuls : $i^+ = i^- = 0\,\text{A}$
- la tension différentielle est nulle : $\varepsilon = 0\,\text{V}$ donc $v^+ = v^-$
- la tension de sortie ne doit pas dépasser V_{sat} en valeur absolue : $|v_s| < V_{sat}$

! Dans un AO, il ne faut jamais appliquer la loi des nœuds ni le théorème de Millman :

- à la sortie, car un courant inconnu sort de S
- à la masse, car l'alimentation, non représentée, injecte du courant dans la masse

C.2. Montages fondamentaux

Un AO, c'est comme une baguette magique : en lui-même il ne fait pas grand chose ; mais utilisé avec la bonne formule magique — un montage bien conçu, — il permet de réaliser énormément de fonctions de tous genres ; pour chaque montage, on va se demander ce que vaudra la tension de sortie en fonction de celle d'entrée. Il y a 3 montages fondamentaux à connaître.

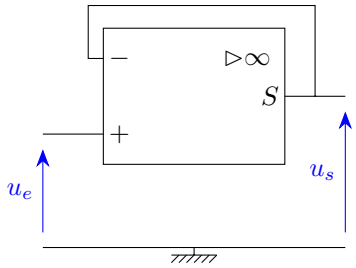


Remarque : Il existe une méthode générale pour trouver la tension de sortie, qui fonctionne toujours, mais qui utilise le théorème de Millman qui n'est pas explicitement au programme :

— on écrit la relation de linéarité de l'AO
— on utilise la constance du potentiel électrique le long d'un fil pour relier de potentiels de différents nœuds
— on applique le théorème de Millman à tous les nœuds sauf la sortie de l'AO

Il est bon de savoir aussi traiter les montages basiques en se passant du théorème de Millman.

Définition : Montage suiveur



Le montage suiveur donne en sortie une tension égale à celle en entrée :

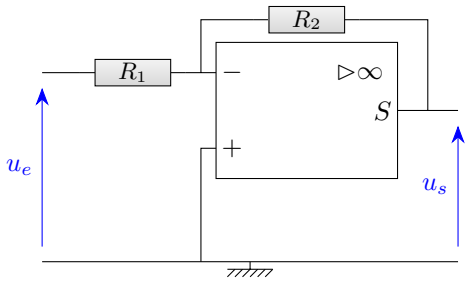
$$u_s = u_e \tag{E2.7}$$

Démonstration

En plaçant la tension différentielle ε et en appliquant la loi des mailles à la grande maille qui fait le tour du circuit, on trouve que $u_e - \varepsilon - u_s = 0$. Or la sortie est rebouclée sur l'entrée inverseuse, donc l'AO fonctionne en régime linéaire : $\varepsilon = 0$ d'où $u_s = u_e$.
On peut aussi travailler avec les potentiels : en régime linéaire, $v^+ = v^-$. Or en suivant les fils, on trouve que $v^+ = u_e$ et $v^- = u_s$, donc $u_s = u_e$.

Remarque : Ce montage peut sembler sans intérêt. On en reparlera quand on traitera des filtres.

Définition : Montage amplificateur inverseur

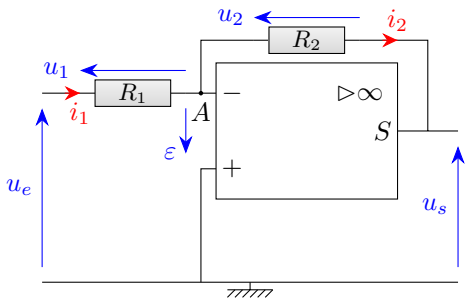


Le montage amplificateur inverseur amplifie la tension en changeant son signe :

$$u_s = -\frac{R_2}{R_1} u_e \tag{E2.8}$$

Démonstration

On place les courants et les tensions pour les deux résistances :



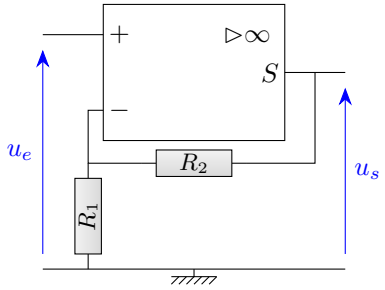
On commence par les propriétés de l'AO : d'une part les courants de polarisation sont nuls, $i^- = i^+ = 0$; d'autre part l'AO fonctionne en régime linéaire, donc : $\varepsilon = 0$.

Démonstration 1 (par les lois fondamentales) :
La loi des nœuds en A indique que $i_1 = i_2 + i^- = i_2$.
On applique la loi d'Ohm à la résistance R_1 : $u_1 = R_1.i_1$; or par la loi des mailles dans la partie gauche, on trouve que $u_e - u_1 + \varepsilon = 0$ donc $u_e = u_1$; on en déduit que $i_1 = \frac{u_e}{R_1}$.
On applique la loi d'Ohm à la résistance R_2 : $u_2 = R_2.i_2$; or par la loi des mailles dans la partie droite, on trouve que $u_s + u_2 + \varepsilon = 0$ donc $u_s = -u_2$; on en déduit que $i_2 = -\frac{u_s}{R_2}$.
On combine les deux lois avec $i_1 = i_2$ et on trouve $\frac{u_e}{R_1} = -\frac{u_s}{R_2}$ donc $u_s = -\frac{R_2}{R_1}u_e$.

Démonstration 2 (par le pont diviseur de tension) :
Comme $i^- = 0$, on peut considérer que R_1 et R_2 sont en série, et la tension aux bornes de l'ensemble (flèche vers la droite) vaut $u_e - u_s$, donc $u_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}(u_e - u_s)$ d'après le pont diviseur de tension. Or par la loi des mailles comme ci-dessus, $u_2 = -u_s$ donc $-(R_1 + R_2)u_s = R_2u_e - R_2u_s$ d'où $-R_1u_s = R_2u_e$ et $u_s = -\frac{R_2}{R_1}u_e$.

Démonstration 3 (par le théorème de Millman) :
Millman en A : $v_A = \frac{\frac{u_e}{R_1} + \frac{u_s}{R_2} - i^-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ car le potentiel d'un point est la tension entre ce point et la masse. Or $i^- = 0$, et de plus, par linéarité de l'AO : $v^- = v^+$ donc d'après le schéma $v_A = v_{////} = 0$. On en déduit que $\frac{u_e}{R_1} + \frac{u_s}{R_2} = 0$ d'où $u_s = -\frac{R_2}{R_1}u_e$.

Définition : Montage amplificateur non inverseur

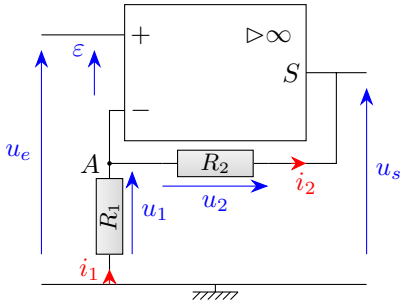


Le montage amplificateur non inverseur amplifie la tension en ne changeant pas son signe :

$$u_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}u_e \qquad \text{(E2.9)}$$

Démonstration

On place les tensions et les courants :



Démonstration 1 (par les lois fondamentales) :
Comme le courant de polarisation i^- est nul, on peut tout de suite appliquer la loi des nœuds et en tirer $i_2 = i_1$: le courant est le même dans les deux résistances :
La loi d'Ohm indique que $u_1 = R_1.i_1$ et $u_2 = R_2.i_1$. Or par la loi d'additivité à gauche puis à droite, on trouve deux relations : $u_e = \varepsilon + u_1$, soit $u_1 = u_e$ (on est en régime linéaire : $\varepsilon = 0$), et $u_1 + u_2 = u_s$.
On en déduit que $u_s = u_1 + u_2 = u_e + R_2.i_1 = u_e + \frac{R_2}{R_1}u_1 = u_e + \frac{R_2}{R_1}u_e$ soit finalement $u_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)u_e = \frac{R_1+R_2}{R_1}u_e$.

Démonstration 2 (par le pont diviseur de tension) :
Comme $i^- = 0$, on peut considérer que R_1 et R_2 sont en série, et la tension aux bornes de l'ensemble vaut u_s, donc $u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}u_s$. Or par la loi d'additivité comme ci-dessus, $u_1 = u_e$ donc $u_s = \frac{R_1+R_2}{R_1}u_e$.

Démonstration 3 (par le théorème de Millman) :

Millman en A : $v_A = \frac{\frac{0}{R_1}+\frac{u_s}{R_2}-i^-}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1+R_2}u_s$ car $i^- = 0$. Or, par linéarité de l'AO : $v^- = v^+$ donc d'après le schéma $v_A = u_e$. On en déduit que $u_s = \frac{R_1+R_2}{R_1}u_e$.

E2. Circuits linéaires en régime continu

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	
Caractéristique d'un dipôle. Point de fonctionnement.	

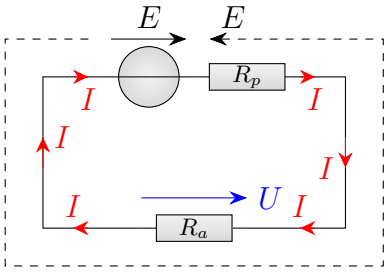
E2. Circuits linéaires en régime continu

Quelques conseils

✎ Avant d'associer deux résistances, vérifiez bien si elles sont en série ou en parallèle ; le plus souvent, elles ne sont en rien du tout.

✎ Les lois d'associations de résistances en série ou en parallèle ne s'appliquent…qu'à des résistances ! Pas à d'autres dipôles !

✎ Les courants circulent dans une branche en se conservant ; pour les tensions, c'est différent, elles sont définies **entre deux points**, elles ne « circulent » pas. On peut toujours redessiner une tension en faisant une flèche (biscornue au besoin) allant du même point de départ au même point d'arrivée. Ainsi dans l'exemple ci-dessous :



la tension E et la tension U vont dans le même sens ; il suffit, pour le voir, de redessiner E en passant par la résistance R_a (en pointillés).

✎ Pour répondre à une question de la forme « calculer telle tension ou telle intensité », il faut absolument repérer où se trouve la grandeur recherchée. Si on simplifie le circuit par des associations, alors il ne faut pas perdre cette grandeur, ou bien alors ce doit être pour trouver une grandeur intermédiaire qui permettra de retrouver la grandeur recherchée. En particulier :

— lors d'une association en série, on perd la tension aux bornes de chaque dipôle, mais on conserve le courant qui les traverse tous

— lors d'une association parallèle, on perd le courant qui traverse chaque dipôle, mais on garde la tension aux bornes de tous

✎ Pour résoudre un problème, il faut appliquer la bonne loi. Vous n'en connaissez pas tant que ça : loi d'Ohm, ponts diviseurs, loi de Pouillet et théorème de Millman éventuellement ; si vous apprenez bien les hypothèses de ces lois, vous repérerez facilement lesquelles sont utilisables pour répondre à la question posée.

✎ Les lois de ce chapitre sont essentielles à connaître, car elles serviront beaucoup quand on traitera le Régime Sinusoïdal Forcé.

✎ Le théorème de superposition sert rarement pour le moment, mais quand l'énoncé conduit à l'utiliser, c'est qu'on est devant un circuit où il va simplifier fortement les calculs, souvent en permettant des associations de dipôles.

✎ Il est utile de connaître par cœur les 3 montages fondamentaux de l'AO, mais il faut savoir redémontrer les relations entre la sortie et l'entrée. On les reverra plus tard.

E2. Circuits linéaires en régime continu

QCMs

réponses page 273

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Deux résistances R en série sont équivalentes à une résistance :

(a). $\frac{1}{R}$ (b). $2R$
(c). $\frac{R}{2}$ (d). R

Q2. Deux résistances R en parallèle sont équivalentes à une résistance :

(a). $2R$ (b). R
(c). $\frac{R}{2}$ (d). $\frac{1}{R}$

Q3. Le pont diviseur de tension s'applique à :

(a). des résistance en série (b). des dipôles quelconques en parallèle
(c). des résistances en parallèle (d). des dipôles quelconques en série

Q4. Le pont diviseur de courant s'applique à :

(a). des dipôles quelconques en parallèle (b). des dipôles quelconques en série
(c). des résistances en parallèle (d). des résistance en série

Q5. Pour un Amplificateur Opérationnel idéal en régime quelconque :

(a). la tension de sortie est nulle (b). les courants en entrée sont nuls
(c). la tension entre les entrées est nulle (d). le courant de sortie est nul

Q6. Un Amplificateur Opérationnel fonctionne en régime linéaire si :

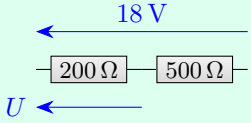
(a). les deux entrées sont reliées (b). la sortie est rebouclée sur l'entrée +
(c). la sortie est rebouclée sur l'entrée - (d). la sortie est reliée à la masse

Q7. Pour un Amplificateur Opérationnel idéal en régime linéaire :

(a). le courant de sortie est nul (b). la tension de sortie est nulle
(c). la tension entre les entrées est nulle (d). les courants en entrée sont nuls

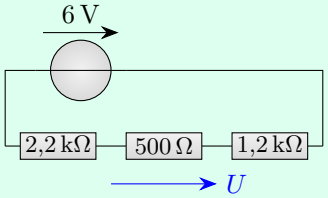
✓ QCM : Pont diviseur de tension ✗

Q8. $U =$



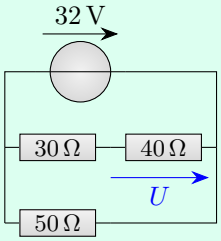
(a). 5,1 V
(b). 9 V
(c). −0,28 V
(d). 0,28 V

Q9. $U =$



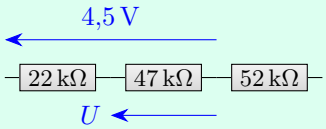
(a). −1,21 V
(b). 0,77 V
(c). −0,77 V
(d). 1,21 V

Q10. $U =$



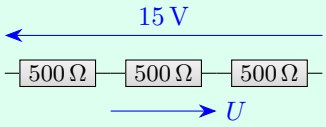
(a). 14,4 V
(b). 12,1 V
(c). 18,3 V
(d). 10,7 V

Q11. $U =$



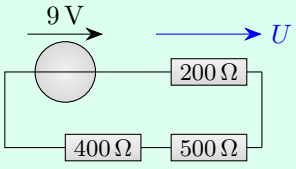
(a). −2,1 V
(b). 3,1 V
(c). 1,7 V
(d). −3,5 V

Q12. $U =$



(a). 7,5 V
(b). 5 V
(c). −5 V
(d). 7,5 V

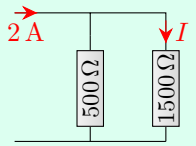
Q13. $U =$



(a). 1,6 V
(b). 2,0 V
(c). −1,6 V
(d). −2,0 V

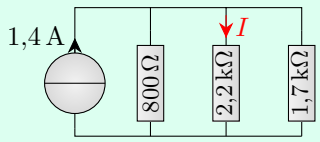
✓ QCM : Pont diviseur de courant ✗

Q14. $I =$



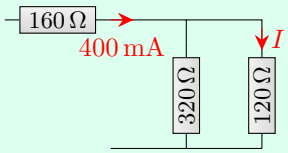
(a). 0,75 A
(b). 0,5 A
(c). 0,25 A
(d). 1,5 A

Q15. $I =$



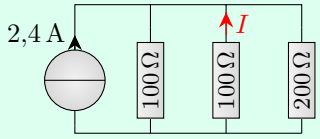
(a). 0,28 A
(b). 0,36 A
(c). 0,41 A
(d). 0,2 A

Q16. $I =$



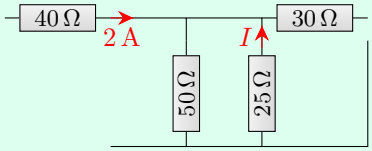
(a). 720 mA
(b). −190 mA
(c). 190 mA
(d). 290 mA

Q17. $I =$



(a). −0,96 A
(b). 1,2 A
(c). 0,96 A
(d). 0,8 A

Q18. $I =$

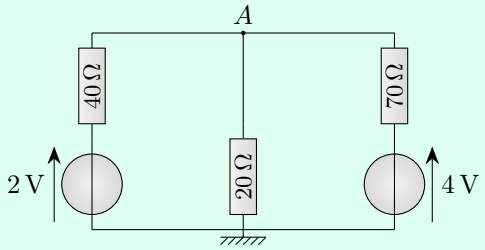


(a). 0,71 A
(b). −0,86 A
(c). −0,98 A
(d). 0,45 A

✓ QCM : Théorème de Millman ✗

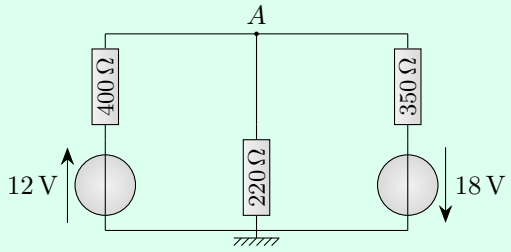
Un QCM très court pour juste appliquer deux ou trois fois ce théorème.

Q19. $V_A =$



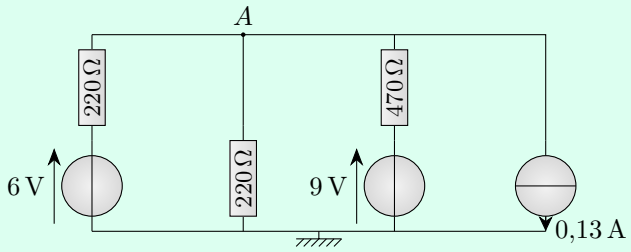
(a). 1,2 V
(b). 0,05 V
(c). 6 V
(d). 3,3 V

Q20. $V_A =$



(a). −2,2 V
(b). 0,0 V
(c). 3,1 V
(d). −0,8 V

Q21. $V_A =$



(a). 7,5 V
(b). −7,5 V
(c). 6 V
(d). −3,1 V

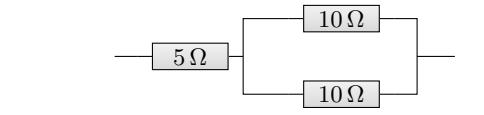
E2. Circuits linéaires en régime continu

Exercices

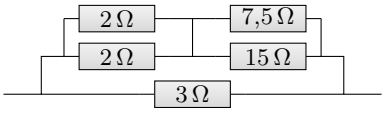
réponses page 274

Exercice E2.1 : Association de résistances [**]

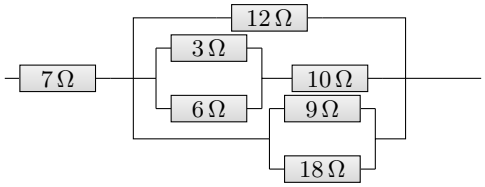
Déterminez la résistance équivalente aux dipôles suivants :



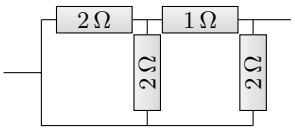
(a)



(b)



(c)

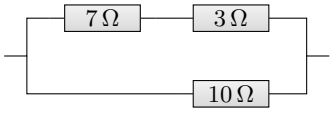


(d)

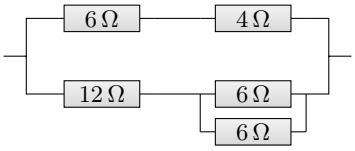
Indication : on ne peut pas forcément associer toutes les résistances. Commencez par vous demander : où y a-t-il deux résistances en série ou en parallèle, que je puisse associer ?

Exercice E2.2 : Association de résistances [**]

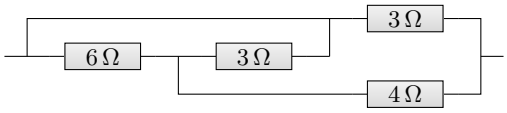
Déterminez la résistance équivalente aux dipôles suivants :



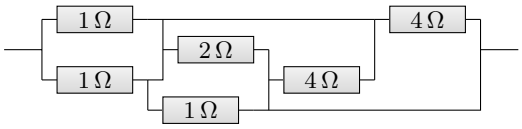
(a)



(b)



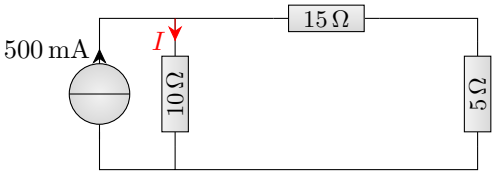
(c) Difficile



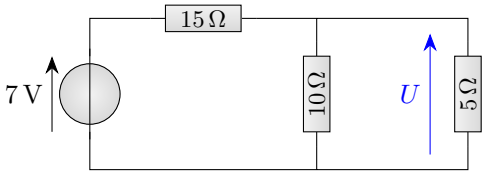
(d) Très difficile

Exercice E2.3 : Application des ponts diviseurs [**]

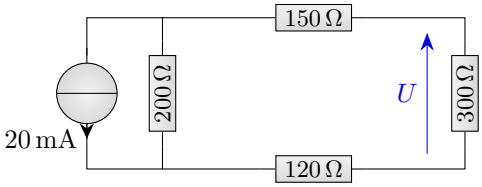
On considère les circuits suivants :



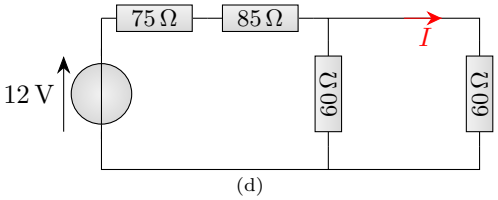
(a)



(b)



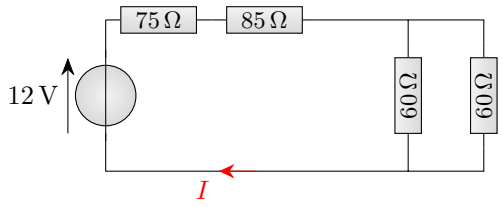
(c)



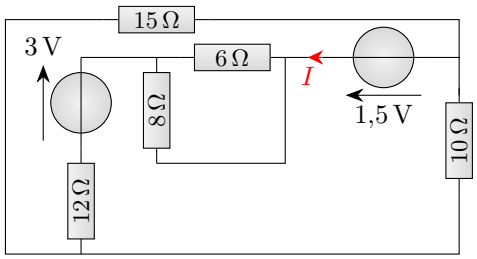
(d)

1. Circuit (a) : calculez I.
2. Circuit (b) : calculez U.
3. Circuit (c) : on veut calculer U. Pour cela, calculez par un pont diviseur le courant qui traverse la résistance de $300\,\Omega$; déduisez-en alors U.
4. Circuit (d) : on veut calculer I. Pour cela, calculez par un pont diviseur la tension aux bornes de la résistance de $60\,\Omega$; déduisez-en alors I.

Exercice E2.4 : Loi de Pouillet [*]



(a)



(b) plus difficile

Dans ces deux cas, simplifiez les circuits pour vous ramener à un circuit où tout est en série, puis calculez I.

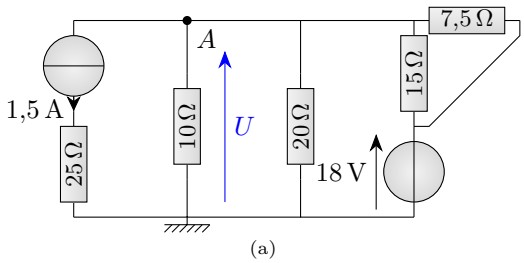
Exercice E2.5 : Alimentation des phares d'une voiture [**]

Une batterie de voiture (modélisée par un générateur de Thévenin de fem $E = 12\,\text{V}$ et de résistance interne $R = 0{,}2\,\Omega$ – batterie à changer) alimente 4 ampoules placées en parallèle l'une de l'autre (on ne considère ici que les feux de croisement) : deux feux à l'avant consommant 55 W sous 12 V, et deux feux à l'arrière consommant 5 W sous 12 V.

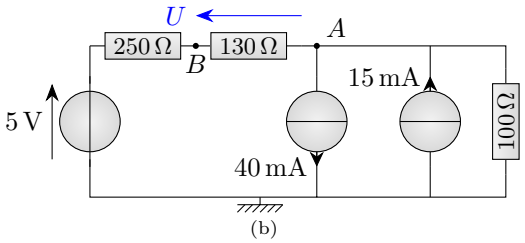
1. On suppose que les ampoules peuvent être modélisées par des résistances. Calculer la résistance de chaque ampoule.
2. Dessiner le schéma du circuit
3. Calculer le courant débité par le générateur.
4. En déduire le courant qui traverse chaque ampoule.
5. On suppose qu'un feu avant grille. Calculer le courant qui traverse les 3 autres ampoules.

Exercice E2.6 : Application du théorème de Millman [**]

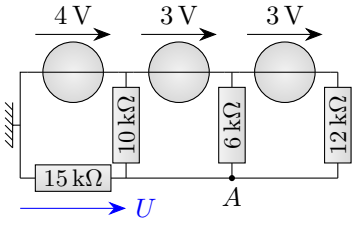
Dans les exemples suivants, appliquez le théorème de Millman en A (et éventuellement en B) et déduisez-en U.
Indication : dans une branche avec plusieurs dipôles en série, on peut intervertir l'ordre de ces dipôles.



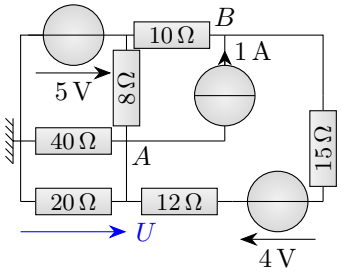
(a)



(b)



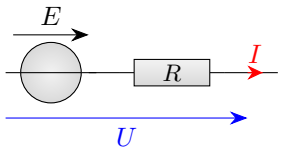
(c)



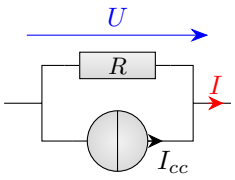
(d) (***)

Exercice E2.7 : Modèle de Norton d'un générateur linéaire [**]

Un générateur linéaire possède une loi affine entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse. Il existe 2 modèles : celui de Thévenin (vu en cours) et celui de Norton.

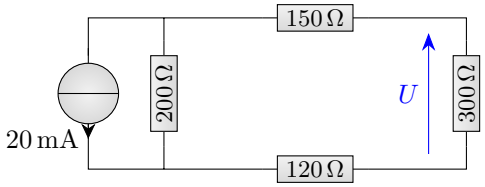


Modèle de Thévenin

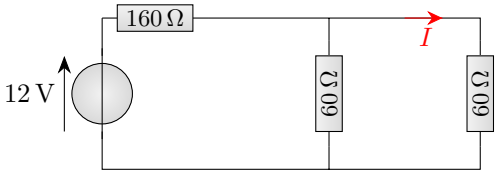


Modèle de Norton

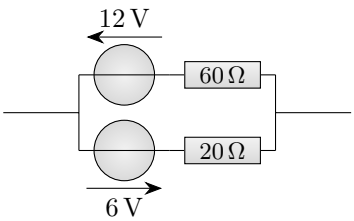
1. Retrouvez rapidement la loi entre U et I dans le cas du générateur de Thévenin.
2. Montrez que, pour le générateur de Norton, on a la loi $I = I_{cc} - \frac{U}{R} = I_{cc} - G.U$.
3. Déduisez-en que le générateur de Norton est équivalent à celui de Thévenin en précisant la relation entre E, I_{cc} et R.
4. Exemple d'application 1 : dans le circuit ci-dessous, transformez le générateur de Norton en générateur de Thévenin, puis déterminez U par un pont diviseur.



5. Exemple d'application 2 : dans le circuit ci-dessous, transformez le générateur de Thévenin en générateur de Norton, puis déterminez I par un pont diviseur.

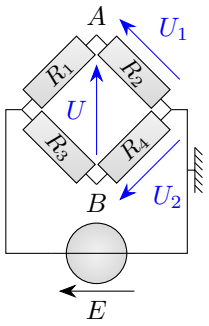


6. On considère dans cette question deux générateurs de Norton en parallèle ; montrez que le générateur de Norton équivalent se trouve en faisant la somme des intensités de court-circuit et la somme des conductances.
7. Exemple d'application : on considère deux générateurs de Thévenin en parallèle ; transformez-les en générateurs de Norton, puis associez-les, et déduisez-en le générateur de Thévenin équivalent.



Exercice E2.8 : Pont de Wheatstone alimenté en tension [**]

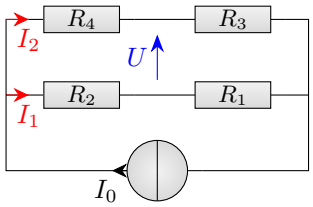
Le pont de Wheatstone est formé par quatre résistances placées comme sur la figure. On l'alimente par un générateur idéal de tension $E = 10\,\text{V}$.



1. À l'aide du diviseur de tension, exprimez U_1 et U_2 ; déduisez-en U.
2. (optionnelle) À l'aide du théorème de Millman, exprimez V_A et V_B ; retrouvez alors l'expression de U.
3. On construit par exemple un pont tel que $R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\text{k}\Omega$; calculez U si $R_4 = 1{,}5\,\text{k}\Omega$, puis $R_4 = 2{,}5\,\text{k}\Omega$.
4. On dit que le pont de Wheatstone est équilibré lorsque $U = V_A - V_B = 0$. Montrez que le pont est équilibré si et seulement si on a une relation très simple entre R_1, R_2, R_3 et R_4.

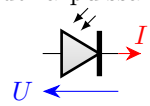
Exercice E2.9 : Pont de Wheatstone alimenté en courant [**]

Le pont de Wheatstone est formé par quatre résistances placées comme sur la figure. On l'alimente par un générateur idéal de courant $I_0 = 10\,\text{mA}$.



1. Exprimez les courants I_1 et I_2 en fonction de I_0 et des résistances.
2. Déduisez-en la tension U en fonction de I_0 et des résistances.
3. Vérifiez que le pont est équilibré ($U = 0$) si et seulement si $R_1 R_4 = R_2 R_3$.
4. On règle $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\text{k}\Omega$ et R_4 est une thermistance dont la résistance varie avec la température T selon la loi $R_4 = 10(1 + \alpha(T - 25\,^\circ\text{C}))$ en kΩ avec $\alpha = 3 \times 10^{-3}\,^\circ\text{C}^{-1}$.
   Calculez U à 25 °C, puis à 35 °C, puis à 0 °C. Commentez.

Exercice E2.10 : Photodiodes [***]

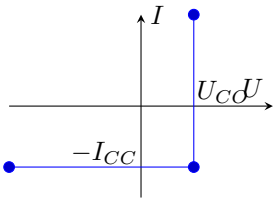
Un exercice adapté d'une annale de concours, dont la principale difficulté est la compréhension de l'énoncé.
Une photodiode est un composant électro-optique dont la caractéristique dépend de la puissance lumineuse moyenne reçue au niveau de sa surface sensible. Une photodiode, représentée ainsi : 

a une caractéristique $I(U)$ donnée par

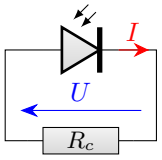
$$I(U) = I_0 \left(e^{U/V_0} - 1 \right) - I_p$$

où I_0, V_0 sont des constantes ($I_0 = 10\,\mu\text{A}$ et $V_0 = 26\,\text{mV}$) ; l'intensité I_p, appelée « photocourant », est proportionnelle à la puissance lumineuse reçue P_l selon la loi $I_p = k \times P_l$ où k est une constante valant $0{,}5\,\text{A} \cdot \text{W}^{-1}$.

1. **Photodiode seule**
   On considère une photodiode recevant une puissance lumineuse $P_l = 1\,\text{mW}$. Représenter rapidement **l'allure** de la caractéristique de la photodiode avec I en ordonnée et U en abscisse. Exprimer la tension U_{CO} de la diode en circuit ouvert (courant nul) en fonction de V_0, I_p et I_0, et calculer sa valeur numérique.
2. Justifier qu'il existe un domaine du plan (U, I) où la photodiode *fournit* une puissance positive au circuit où elle se trouve.
3. Afin de simplifier l'analyse, on représente désormais la caractéristique $I(U)$ de façon approchée par deux segments de droite (figure (a)) : pour $U < U_{CO}$, $I = -I_0 - I_p$ noté $-I_{CC}$; et pour $I > -I_{CC}$, $U = U_{CO}$. On pose $R_0 = \frac{U_{CO}}{I_{CC}}$.



(a) Caractéristique simplifiée



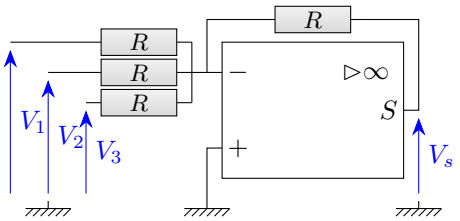
(b) Schéma du montage

Dans toute la suite, la puissance lumineuse P_l reste constante et vaut la même valeur que précédemment.
Recopier cette caractéristique sur la copie ; pour chacun des deux domaines, préciser par quel dipôle idéal on peut modéliser la photodiode.
Calculer également la valeur numérique de R_0.

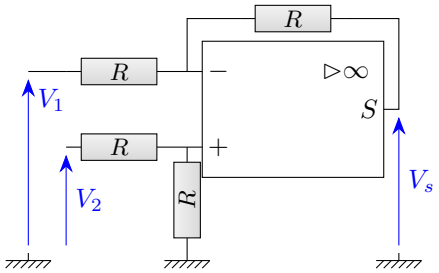
4. On connecte une résistance R_c en série avec la photodiode (figure (b)).
   Pour chacun des deux domaines de fonctionnement, dessiner le schéma du circuit, donner l'expression de la tension U aux bornes de la photodiode et de I qui la traverse, et déterminer la condition sur R pour que le circuit fonctionne bien dans ce domaine-là ; la condition sera à chaque fois exprimée en fonction de R_0.
5. Déterminer la puissance fournie par la photodiode en fonction de R_c, U_{CO} et I_{CC} (en séparant les cas $R_c < R_0$ et $R_c > R_0$). Représenter graphiquement l'allure de $P(R_c)$. Que vaut la puissance maximale P_{max} ? on l'exprimera en fonction de U_{CO} et I_{CC} et on en fera l'AN.
6. **Associations de photodiodes**
   On associe en **série** N photodiodes identiques recevant chacune la puissance lumineuse P_l.
   - Donner rapidement la tension à vide (courant nul) U'_{CO} et le courant de court-circuit I'_{CC} du dipôle ainsi constitué.
   - En appliquant les résultats précédents, déterminer P'_{max} en fonction de N et P_{max}.
   - Déterminer la résistance optimale R'_0 permettant d'obtenir cette puissance, en fonction de R_0 et N.
7. Mêmes questions si on associe les photodiodes en **parallèle** (on notera les grandeur avec un $''$).
8. On désire alimenter un dipôle équivalent à une résistance $R_c = 1\,\text{k}\Omega$ à l'aide d'un ensemble de photodiodes associées, de manière à en tirer une puissance maximale. Déterminer numériquement le nombre N de photodiodes et le type d'association (série ou parallèle) à choisir.

Exercice E2.11 : Montages à A.O. [***]

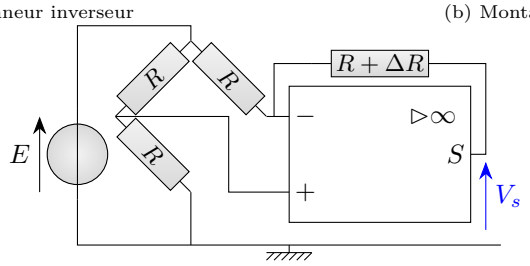
Justifiez les noms donnés aux montages suivants, où l'A.O. fonctionne en régime linéaire (le premier peut se faire sans utiliser le théorème de Millman, mais pour les suivants, c'est compliqué sans l'utiliser) :



(a) Montage additionneur inverseur



(b) Montage soustracteur



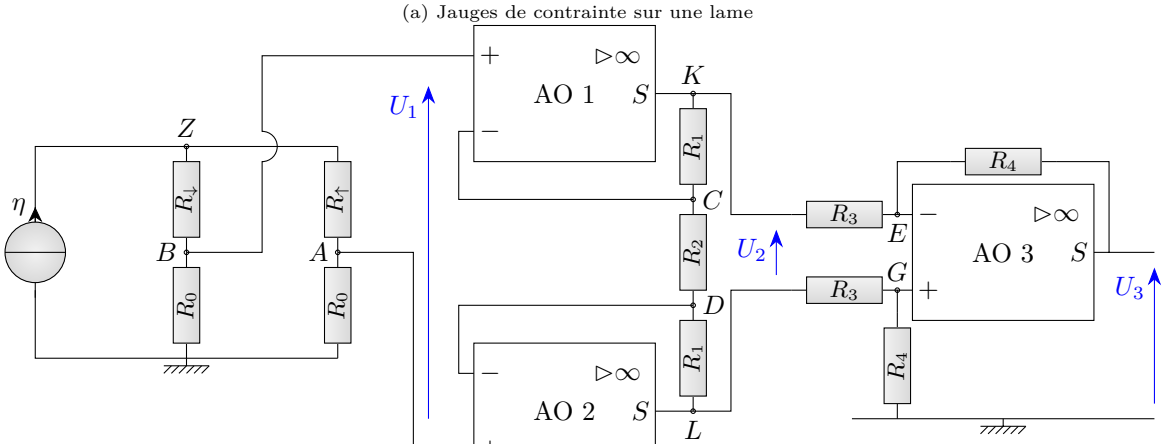
(c) Pont de Wheatstone linéarisé ; montrez simplement que V_s est proportionnelle à ΔR.

Exercice E2.12 : Capteur de déformation avec jauge de contrainte [***]

Une jauge de contrainte est un petit fil plat qu'on colle sur une lame souple (figure (a)). Lorsque la lame se tord, une jauge de contrainte collée dessus va s'allonger ou se raccourcir suivant qu'elle est collée sur la face extérieure ou intérieure de la lame. Ce changement de longueur s'accompagne d'un changement de la résistance de la jauge de contrainte, qu'on peut détecter.



(a) Jauges de contrainte sur une lame



(b) Circuit électrique

On considère donc deux jauges de contrainte identiques de résistance au repos R_0. Quand on exerce sur la lame une force F (par exemple un poids si on veut fabriquer une balance), on admet que les deux jauges de contrainte voient leurs résistance changer légèrement :

— celle au-dessus voit sa résistance devenir $R_\uparrow = R_0(1+\alpha F)$

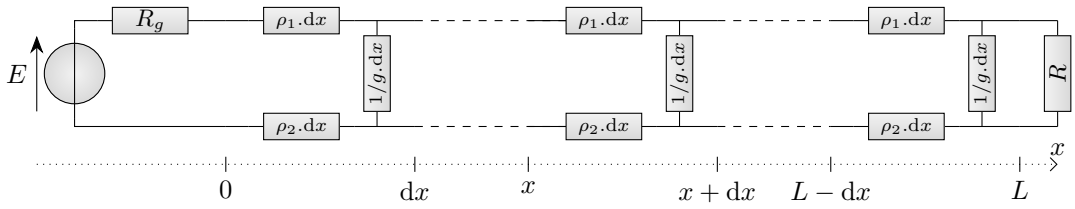
— celle au-dessous voit sa résistance devenir $R_\downarrow = R_0(1-\alpha F)$

où α est un coefficient caractéristique de la jauge de contrainte choisie. On place ensuite ces jauges dans un circuit où les AO fonctionnent en régime linéaire.

1. Exprimez V_A et V_B en fonction du courant η et de R_0, α et F ; en déduire que $U_1 = \frac{\eta\alpha R_0}{2}F$.
2. Numériquement on a $\eta = 20\,\text{mA}$, $R_0 = 1\,\text{k}\Omega$ et $\alpha = 3\times10^{-3}\,\text{N}^{-1}$.
   Que vaut U_1 pour une force nulle ? Pour une force égale au poids de 150 g ?
3. On veut avoir plus de signal. Une solution serait de prendre η plus élevé ; quel problème cela pose-t-il ?
4. On construit un amplificateur différentiel à deux étage. En appliquant Millmam aux points C et D, reliez U_2 à U_1.
5. Reliez maintenant U_3 à U_1. Déduisez-en U_3 en fonction de la force F.
   Commentez l'utilité de ce montage.

Exercice E2.13 : Ligne à résistance répartie [****]

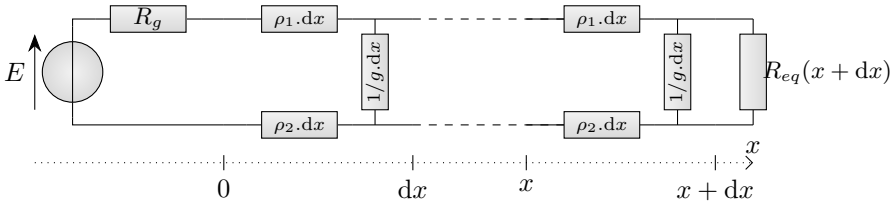
On s'intéresse à un générateur, par exemple un GBF en TP, qui alimente une résistance par le moyen d'un câble coaxial. Le générateur est modélisé par un générateur de Thévenin de fem $E = 5\,\text{V}$ et de résistance interne $R_g = 50\,\Omega$. Il alimente une résistance R à travers le câble coaxial de longueur L. Celui-ci est formé d'une âme et d'une gaine qui correspondent aux deux fils d'alimentation, et qui possèdent chacun une faible résistance, proportionnelle à la longueur de câble. Entre ces deux se trouve un isolant qui n'est pas parfait, il y a donc des fuites de courant à travers cet isolant.
Pour modéliser électriquement ce câble, on va le découper par la pensée en toutes petites tranches de longueur $\mathrm{d}x$. Pour chaque tranche $\mathrm{d}x$, l'âme a une résistance $\rho_1.\mathrm{d}x$ et la gaine une résistance $\rho_2.\mathrm{d}x$, tandis que la fuite à travers la gaine est modélisable par une résistance $\frac{1}{g.\mathrm{d}x}$ où ρ_1, ρ_2 et g sont des constantes caractéristiques du câble. On obtient alors le modèle de la figure ci-dessous.



Sur le générateur générateur, on a branché non pas la résistance R, mais le câble coaxial avec la résistance R au bout. On va montrer que cet ensemble est équivalent à une résistance à déterminer.

1. On considère pour le moment la résistance R et le bout de câble tout à la fin, entre $L-\mathrm{d}x$ et L. Montrer que cet ensemble est équivalent à une seule résistance R' à exprimer. Pour simplifier on notera $\rho=\rho_1+\rho_2$.
2. On pourrait procéder de la même manière une infinité de fois pour traiter tout le câble. Ça n'est pas une solution envisageable. On va procéder autrement.

   Supposons qu'on a déjà associé toute la portion de câble entre $x+\mathrm{d}x$ et la fin, avec la résistance R ; on a obtenu une résistance notée $R_{eq}(x+\mathrm{d}x)$. Le schéma équivalent devient alors :



   En associant la portion de câble entre x et $x+\mathrm{d}x$ avec $R_{eq}(x+\mathrm{d}x)$, exprimez $R_{eq}(x)$.
3. Les lois des développements limités que vous verrez plus tard indiquent que $\frac{1}{1+R.g.\mathrm{d}x}\approx 1-R.g.\mathrm{d}x$. Montrez alors que R_{eq} vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}R_{eq}}{\mathrm{d}x}=-\rho+g.R_{eq}^2$$

4. On pose $R_0=\sqrt{\frac{\rho}{g}}$ et $d=\sqrt{\frac{1}{\rho.g}}$.

   Vérifiez que R_0 est homogène à une résistance, et d à une longueur.
5. L'équation précédente peut alors être reécrite

$$\frac{\mathrm{d}R_{eq}}{\mathrm{d}x}=\frac{R_{eq}^2-R_0^2}{R_0.d}$$

   On peut montrer que la solution de cette équation est

$$R_{eq}(x)=R_0\frac{(R+R_0)\exp\left(\frac{L-x}{d}\right)+(R-R_0)\exp\left(\frac{x-L}{d}\right)}{(R+R_0)\exp\left(\frac{L-x}{d}\right)-(R-R_0)\exp\left(\frac{x-L}{d}\right)}$$

   Vérifiez que la solution proposée est cohérente en $x=L$.
6. Exprimez la résistance équivalente vue par le générateur, en fonction de R, R_0, d et L.
7. On alimente une résistance $R=50\,\Omega$ avec un câble de longueur $L=40\,\mathrm{m}$, de caractéristiques $R_0=75\,\Omega$ et $d=5\,\mathrm{km}$. Calculez $R(0)$.
8. Pour un câble très très long, vers quelle valeur tend la résistance vue par le générateur ?

E2. Circuits linéaires en régime continu

TDs numériques

réponses page 279

TD numérique : Balance avec jauge de contrainte

plot

Les balances électroniques utilisent des jauges de contraintes : ce sont des résistances fines collées sur une lame métallique. Lorsqu'on pose une masse au bout de la lame, celle-ci se plie, et une jauge de contrainte collée sur sa face de dessus voit sa longueur augmenter ; il en résulte que la jauge, de résistance initiale R_0 au repos, voir sa résistance varier de

$$\Delta R = k.m \tag{1}$$

où k est une constante caractéristique de la lame et de la jauge et m la masse posée sur la balance. Dans la suite on notera $R = R_0 + \Delta R$. Pour les AN, on prendra $R_0 = 500\,\Omega$ et $k = 1{,}4 \times 10^{-3}\,\Omega \cdot \mathrm{g}^{-1}$.



Jauge au repos



Jauge allongée

Pour mesurer la masse, il faut donc mesurer la variation de résistance ; pour cela, il faut transformer cette variation de résistance en variation de tension.

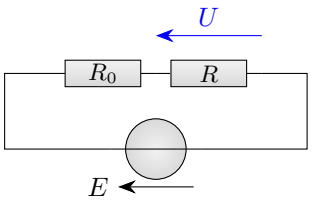
1. **Pont diviseur simple**

   On propose le montage de la figure (a) : la résistance R est placée en série avec une résistance de valeur R_0, et on mesure la tension aux bornes de R.

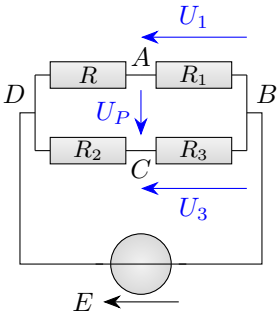
   (a) Exprimez U en fonction de E, R_0, k et m.

   (b) Tracez la courbe donnant U en fonction de m pour des masses allant de 0 g à 2000 g. On prendra $E = 5\,\mathrm{V}$. Commentez (attention à l'échelle).

   (c) Est-il possible d'utiliser un montage amplificateur pour mieux mesurer la variation de U ?



(a) Montage simple pour mesurer R



(b) R dans un pont de Wheatstone

2. **Pont de Wheatstone**

   On place maintenant la résistance R dans la figure (b).

   (a) Exprimez rapidement U_1 et U_3 en fonction de E et des résistances.

   (b) Déduisez-en U_P, la *tension différentielle du pont*.

   (c) On dit que le pont est équilibré lorsque $U_P = 0$. Montrez que le pont est équilibré si et seulement si $R.R_3 = R_1.R_2$.

   (d) On règle R_1, R_2 et R_3 à la valeur R_0 ; ainsi, le pont est équilibré lorsque $m = 0\,\mathrm{g}$.
   Simplifiez l'expression de U_P. Tracez U_P pour des masses jusqu'à 2000 g. Commentez.

   (e) Montrez que, si on tient compte du fait que $\Delta R = k.m \ll R_0$, on peut écrire $U_P = \alpha.m$ avec α à préciser. Comparez avec la courbe obtenue.

   (f) Pour plus de sensibilité, on peut mettre une deuxième jauge de contrainte à la place de R_3. Tracez la nouvelle tension U_P obtenue.

   (g) On peut même remplacer R_1 et R_2 par deux jauges de contraintes placées sous la lame, qui auront une résistance $R' = R_0 - \Delta R$. Tracez la nouvelle tension U_P obtenue.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(c)
Q3.(a)
Q4.(c)
Q5.(b)
Q6.(c)
Q7.(c) ET (d)

Réponses au QCM : Pont diviseur de tension

Q8.(a)
$U = \frac{200}{200+500} \times 18$.
Q9.(b)
$U = \frac{500}{2200+500+1200} \times 6$.
Q10.(c)
Ici la résistance $40\,\Omega$ n'est en série qu'avec la résistance $30\,\Omega$, et la tension aux bornes des deux vaut $32\,\text{V}$; la $50\,\Omega$ ne joue aucun rôle, donc $U = \frac{40}{30+40} \times 32$.
Q11.(b)
La tension de $4{,}5\,\text{V}$ n'est aux bornes que des résistances $22\,\text{k}\Omega$ et $47\,\text{k}\Omega$ donc c'est elle qui est divisée : $U = \frac{47}{22+47} \times 4{,}5$.
Q12.(c)
Attention au signe, la tension ne "tourne" pas, elle est située entre deux points, ici de gauche à droite pour la tension U et de droite à gauche pour la tension $15\,\text{V}$; donc $U = -\frac{500}{500+500+500} \times 15\,\text{V}$.
Q13.(c)
Question difficile à cause du signe. Le réflexe : « U et la tension $9\,\text{V}$ tournent dans le même sens »…sauf qu'une tension ne tourne pas, elle est entre deux points. Appelons A le point à gauche du générateur de tension et B le point juste à droite. Alors la tension $9\,\text{V}$ va de A vers B, et la tension U, en suivant le circuit, va de B vers A, d'où le signe $-$.

Réponses au QCM : Pont diviseur de courant

Q14.(b)
$I = \frac{\frac{1}{1500}}{\frac{1}{500}+\frac{1}{1500}} \times 2$
Q15.(a)
$I = \frac{\frac{1}{2200}}{\frac{1}{800}+\frac{1}{2200}+\frac{1}{1700}} \times 1{,}4$.
Q16.(d)
Ici, l'intensité $400\,\text{mA}$ alimente les résistances $320\,\Omega$ et $120\,\Omega$ en parallèle ; la résistance $160\,\Omega$ n'a rien à voir donc $I = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{320}+\frac{1}{120}} \times 400$.
Q17.(a)
Attention au signe ! Ici le courant $2{,}4\,\text{A}$ tourne dans le sens horaire et I dans le sens opposé.
Q18.(b)
$I = -\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{50}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}} \times 2$.

Réponses au QCM : Théorème de Millman

Q19.(a)
$V_A = \frac{\frac{2}{40}+\frac{4}{70}}{\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+\frac{1}{70}}$
Q20.(a)
$V_A = \frac{\frac{12}{400}-\frac{18}{350}}{\frac{1}{400}+\frac{1}{220}+\frac{1}{350}}$
Q21.(b)
$V_A = \frac{\frac{6}{220}+\frac{9}{470}-0{,}13}{\frac{1}{220}+\frac{1}{220}+\frac{1}{470}}$

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E2.1 : Association de résistances [**]

(a) $10\,\Omega$

(b) $2\,\Omega$

(c) $10\,\Omega$

(d) Les deux résistances de gauche sont en parallèles, on les associe puis on continue pour trouver $1\,\Omega$

Corrigé de l'exercice E2.2 : Association de résistances [**]

(a) $\left(\frac{1}{7+3}+\frac{1}{10}\right)^{-1} = 5\,\Omega$

(b) $6\,\Omega$

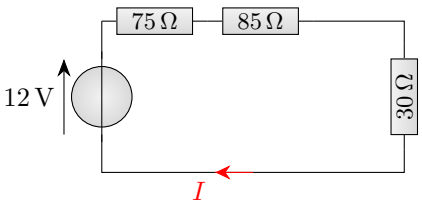
(c) $6\,\Omega$ en parallèle avec $3\,\Omega$ donne $2\,\Omega$. On l'associe en série avec $4\,\Omega$ puis en parallèle avec la dernière et on obtient $2\,\Omega$.

(d) Il y a un groupe de deux résistances en parallèle, et un autre de quatre résistances en parallèle. Ces deux groupes sont en série, ce qui donne $1\,\Omega$.

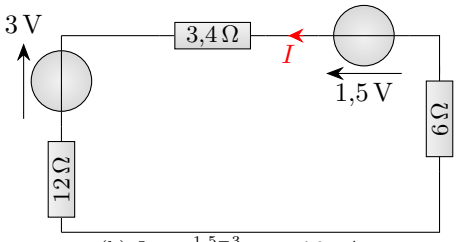
Corrigé de l'exercice E2.3 : Application des ponts diviseurs [**]

1. On associe en série les deux résistances de droite et on obtient $20\,\Omega$. Par le diviseur de courant, $I = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{10}} \times 500 = 333\,\text{mA}$.
2. On associe en parallèle les deux résistances de droite et on obtient $3{,}33\,\Omega$. D'après le diviseur de tension, $U = \frac{3{,}33}{3{,}33+15} \times 7 = 1{,}27\,\text{V}$.
3. On associe les 3 résistances de droite pour faire $570\,\Omega$. Par le diviseur de sourant, le courant qui traverse la résistance de $300\,\Omega$ de haut en bas vaut $\frac{\frac{1}{570}}{\frac{1}{200}+\frac{1}{570}} \times -20 = -5{,}2\,\text{mA}$ (attention au signe !) ; par la loi d'Ohm on trouve alors $U = 300 \times -5{,}1 \times 10^{-3} = -1{,}56\,\text{V}$
4. On associe les deux résistances en parallèle à droite pour obtenir $30\,\Omega$. La tension aux bornes de la résistance de droite vaut alors $\frac{30}{30+75+85} \times 12 = 1{,}9\,\text{V}$ donc par la loi d'Ohm $I = \frac{1{,}9}{60} = 31{,}6\,\text{mA}$.

Corrigé de l'exercice E2.4 : Loi de Pouillet [*]



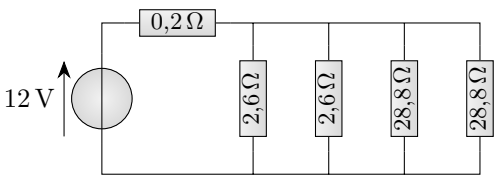
(a) $I = \frac{12}{75+85+30} = 63\,\text{mA}$



(b) $I = \frac{1{,}5-3}{12+3{,}4+6} = -70\,\text{mA}$

Corrigé de l'exercice E2.5 : Alimentation des phares d'une voiture [**]

1. $\frac{12^2}{55} = 2{,}6\,\Omega$ à l'avant et $28{,}8\,\Omega$ à l'arrière.
2.



3. On associe les 4 résistances en parallèle et on applique la loi de Pouillet : $I = 8{,}6\,\text{A}$.
4. Par le diviseur de courant on trouve alors 3,95 A à l'avant et 0,36 A à l'arrière.
5. 4,2 A à l'avant et 0,38 A à l'arrière.

Corrigé de l'exercice E2.6 : Application du théorème de Millman [**]

(a) La résistance de 25 Ω n'intervient pas ici : $U = \frac{-1{,}5+\frac{18}{15}+\frac{18}{7{,}5}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{7{,}5}} = 6\,\text{V}$

(b) $V_A = \frac{\frac{5}{250+130}-0{,}04+0{,}015}{\frac{1}{250+130}+\frac{1}{100}} = -0{,}9\,\text{V}$ et $V_B = \frac{\frac{5}{250}+\frac{-0{,}9}{130}}{\frac{1}{250}+\frac{1}{130}} = 1{,}1\,\text{V}$ donc $U = V_B - V_A = 2{,}0\,\text{V}$

(c) $U = V_A = \frac{\frac{4}{10\,000}+\frac{7}{6000}+\frac{10}{12\,000}}{\frac{1}{15\,000}+\frac{1}{10\,000}+\frac{1}{6000}+\frac{1}{12\,000}} = 5{,}8\,\text{V}$

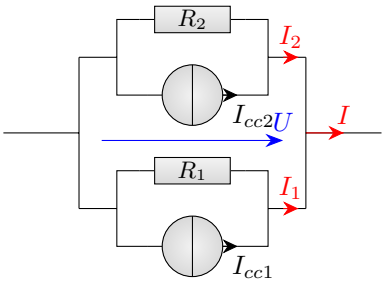
(d) En intervertissant 4 V et 15 Ω, Millman en A donne $V_A = \frac{\frac{0}{40}+\frac{0}{20}+\frac{V_B+4}{27}-1+\frac{5}{8}}{\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+\frac{1}{27}+\frac{1}{8}}$.

En intervertissant 4 V et 12 Ω, Millman en B donnc $V_B = \frac{\frac{5}{10}+1+\frac{V_A-4}{27}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{27}}$.

Une résolution numérique du système donne $U = V_A = 0{,}61\,\text{V}$.

Corrigé de l'exercice E2.7 : Modèle de Norton d'un générateur linéaire [**]

1. $U = E - R.I$ (cf. le cours)
2. Notons I_R le courant qui traverse la résistance vers la droite, alors par la loi des nœuds, $I = I_{cc} + I_R$ et par la loi d'Ohm en convention générateur $I_R = -\frac{U}{R}$ donc on a bien $I = I_{cc} - \frac{U}{R}$.
3. $I = I_{cc} - \frac{U}{R} \Leftrightarrow U = R.I_{cc} - R.I$ donc on a équivalence des deux modèles si $E = R.I_{cc}$.
4. On transforme le générateur de Norton en un générateur de Thévenin de fem 4 V vers le bas ; puis par le pont diviseur de tension : $U = -4\frac{300}{300+150+120+200} = -1{,}6\,\text{V}$
5. On transforme le générateur de Thévenin en un générateur de Norton de courant de court circuit 75 mA et de résistance 160 Ω, puis par le pont diviseur de courant : $I = 75\frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{160}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}} = 31{,}6\,\text{mA}$
6. On dessine :

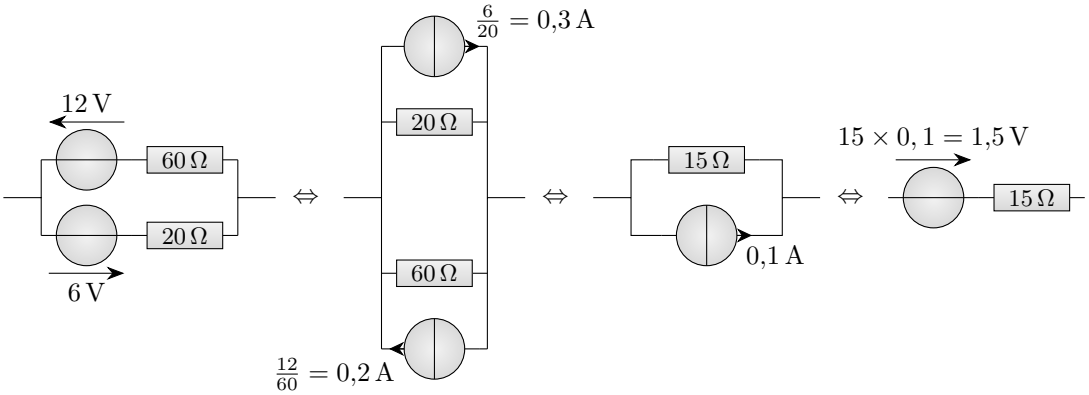


Les deux générateurs sont en parallèle, donc la tension U à leurs bornes est la même. Par la loi des nœuds et les lois des deux générateurs,

$$I = I_1 + I_2 = I_{cc1} - \frac{U}{R_1} + I_{cc2} - \frac{U}{R_2} = (I_{cc1} + I_{cc2}) + I\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ce qui démontre la propriété demandée.

7.



Corrigé de l'exercice E2.8 : Pont de Wheatstone alimenté en tension [**]

1. Les résistances R_1 et R_2 sont en série : $U_1 = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$. De même $U_2 = E\frac{R_4}{R_3+R_4}$. Donc $U = U_1 - U_2 = E\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right)$
2. $V_A = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{ER_2}{R_1+R_2}$ et $V_B = \frac{\frac{E}{R_3}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = \frac{ER_4}{R_3+R_4}$: on retrouve donc les mêmes résultats.
3. $U(R_4 = 1{,}5\,\text{k}\Omega) = -1{,}0\,\text{V}$ et $U(R_4 = 1{,}5\,\text{k}\Omega) = -2{,}1\,\text{V}$
4. Le pont est équilibré $\Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_4}{R_3+R_4} \Leftrightarrow R_2R_3 + R_2R_4 = R_1R_4 + R_2R_4 \Leftrightarrow R_2R_3 = R_1R_4$.

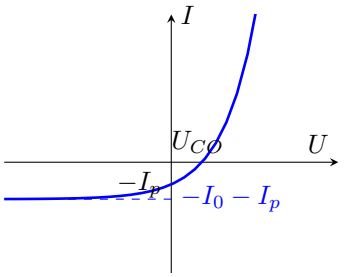
Corrigé de l'exercice E2.9 : Pont de Wheatstone alimenté en courant [**]

1. On reconnaît un pont diviseur de courant : $I_1 = I_0\frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}} = I_0\frac{R_3+R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$ et de même pour l'autre branche : $I_2 = I_0\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4}$
2. En plaçant les tensions aux bornes des résistances R_1 et R_3 et en utilisant la loi des mailles et la loi d'Ohm, on obtient $U = R_1I_1 - R_3I_3 = I_0\frac{R_1R_3+R_1R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4} - I_0\frac{R_3R_1+R_3R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4} = \frac{R_1R_4-R_2R_3}{R_1+R_2+R_3+R_4}$
3. C'est évident d'après le résultat de la question précédente.
4. $U(25\,^\circ\text{C}) = 0\,\text{mV}$; $U(35\,^\circ\text{C}) = 0{,}74\,\text{mV}$; $U(0\,^\circ\text{C}) = -1{,}91\,\text{mV}$. Ce sont des tensions faibles qu'il faut amplifier.

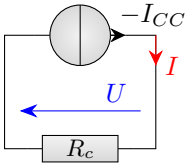
Corrigé de l'exercice E2.10 : Photodiodes [***]

1. $0 = I_0\left(e^{u_{CO}/V_0} - 1\right) - I_p$ donc $u_{CO} = V_0\ln\left(\frac{I_p}{I_0}+1\right) = 102\,\text{mV}$

   Pour tracer la caractéristique, il suffit d'étudier les variations, la fonction est strictement croissante ; ou bien de dire qu'il s'agit simplement d'une exponentielle moins une constante :

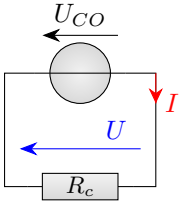


2. La photodiode est ici orientée en convention récepteur, donc la puissance fournie vaut $-U.I$. Elle est donc positive lorsque $U.I < 0$, ce qui est le cas lorsque la courbe passe dans le quadrant en bas à droite, c'est-à-dire $0 < U < U_{CO}$
3. La photodiode est équivalente à un générateur idéal de courant si $U < U_{CO}$ et à un générateur idéal de tension si $I > -I_{CC}$.
   $R_0 = \dfrac{U_{CO}}{I_{CC}} = 200\,\Omega$
4. Si $U < U_{CO}$ alors le schéma est



   Alors $I = -I_{CC}$, $U = -R_c.I = R_c.I_{CC}$ (loi d'Ohm en convention générateur) et la condition de validité est $U < U_{CO}$ soit $R_c = \frac{U}{I_{CC}} < \frac{U_{CO}}{I_{CC}} = R_0$

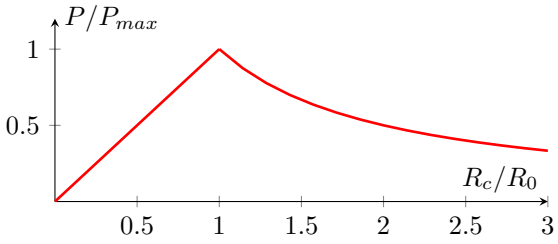
   Si $U < U_{CO}$ alors le schéma est



   Alors $U = U_{CO}$, $I = -\dfrac{U}{R_c} = -\dfrac{U_{CO}}{R_c}$ (loi d'Ohm en convention générateur) et la condition de validité est $I > -I_{CC}$ soit $R_c > R_0$

5. La puissance fournie vaut $P = -U.I$ donc : $P = \begin{cases} R_c I_{CC}^2 \text{ si } R_c < R_0 \\ \dfrac{u_{CO}^2}{R_c} \text{ si } R_c > R_0 \end{cases}$

   On obtient donc le graphique suivant :



   qui montre que la puissance maximale est donc atteinte lorsque $R_c = R_0$ et $P_{max} = (I_0 + I_p)\, u_{CO} = 51\,\mu\text{W}$
6. En série on ajoute les U (loi d'additivité des tensions) à I constant ; donc $U'_{CO} = NU_{CO}$ et $I'_{CC} = I_{CC}$

   On en déduit que $P'_{max} = NU_{CO}.I_{CC} = NP_{max}$ pour $R_c = R'_0 = \dfrac{U'_{CO}}{I'_{CC}} = NR_0$
7. En parallèle on ajoute les I (loi des nœuds) à U constant ; donc $U''_{CO} = U_{CO}$ et $I''_{CC} = N.I_{CC}$

   On en déduit que $P''_{max} = U_{CO}.NI_{CC} = NP_{max}$ pour $R_c = R''_0 = \dfrac{U'_{CO}}{I'_{CC}} = \dfrac{R_0}{N}$
8. On sait que $R_0 = 200\,\Omega$ et on veut alimenter $R_0 = R_c = 1\,\text{k}\Omega$ donc il faut associer 5 photodiodes en série pour avoir $R'_0 = 1\,\text{k}\Omega$.

Corrigé de l'exercice E2.11 : Montages à A.O. [***]

(a) On place I_1, I_2 et I_3 les courants entrant par les branches de gauche, et I le courant à travers la résistance de droite, tous orientés vers la droite. Alors la loi des nœuds à l'entrée inverseuse indique que $I = I_1 + I_2 + I_3$ car $I^- = 0$. Ensuite on applique la loi d'Ohm en remarquant que $\varepsilon = 0$ donc les tensions aux bornes des résistances valent V_1, V_2, V_3 et $-V_s$ (à placer dans le bon sens, je vous laisse compléter le schéma) ; on trouve $I = -\frac{V_s}{R}$, $I_1 = \frac{V_1}{R}$, $I_2 = \frac{V_2}{R}$ et $I_3 = \frac{V_3}{R}$ donc finalement $\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R} + \frac{V_3}{R} = -\frac{V_s}{R}$ d'où $V_s = -(V_1 + V_2 + V_3)$.

(b) Par linéarité : $V^+ = V^-$. Par le théorème de Millman : $V^+ = \frac{\frac{V_2}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{V_2}{2}$ et $V^- = \frac{\frac{V_1}{R}+\frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{V_1+V_s}{2}$. On en tire $V_s = V_2 - V_1$

(c) Par linéarité : $V^+ = V^-$. Par le théorème de Millman : $V^+ = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{E}{2}$ et $V^- = \frac{\frac{E}{R}+\frac{V_s}{R+\Delta R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R+\Delta R}} = \frac{E(R+\Delta R)+RV_s}{2R+\Delta R}$.
Donc $(2R + \Delta R)E = 2E(R + \Delta R) + 2V_sR$. On en tire $V_s = -\frac{E}{2}\frac{\Delta R}{R}$: la tension de sortie est proportionnelle à la variation de résistance ΔR.

Corrigé de l'exercice E2.12 : Capteur de déformation avec jauge de contrainte [***]

1. On peut par exemple calculer V_Z en associant par la pensée les résistances et en appliquant la loi d'Ohm : $V_Z = \eta \frac{1}{\frac{1}{R_\uparrow+R_0}+\frac{1}{R_\downarrow+R_0}} = \eta \frac{(R_\uparrow+R_0)(R_\downarrow+R_0)}{2R_0+R_\uparrow+R_\downarrow} = \eta \frac{(R_\uparrow+R_0)(R_\downarrow+R_0)}{4R_0}$
   Par le pont diviseur de tension : $V_A = \frac{R_0}{R_0+R_\uparrow} V_Z = \eta \frac{R_0+R_\downarrow}{4} = \frac{\eta}{4} R_0(2 - \alpha F)$.
   De même on trouve $V_B = \frac{\eta}{4} R_0(2 + \alpha F)$.
   Par soustraction : $U_1 = V_B - V_A = \frac{\eta \alpha R_0}{2} F$
2. $U_1 = 0\,\text{V}$ si $F = 0\,\text{N}$.
   $U_1 = 44\,\text{mV}$ si $F = 1{,}5\,\text{N}$ (on prend $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)
3. Si on augmente le courant, on augmente l'effet Joule : les résistances chauffent, et leur valeur est modifiée, ce qui perturbe la mesure.
4. Millman en C : $V_C = \frac{\frac{V_K}{R_1}+\frac{V_D}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$; par linéarité de l'AO 1, $V_C = V_B$.
   Millman en D : $V_D = \frac{\frac{V_L}{R_1}+\frac{V_C}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$; par linéarité de l'AO 2, $V_D = V_A$.
   On soustrait : $V_C - V_D = \frac{\frac{V_K-V_L}{R_1}+\frac{V_D-V_C}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$; or $V_C - V_D = U_1$ et $V_K - V_L = U_2$, donc $U_1 = \frac{\frac{U_2}{R_1}-\frac{U_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$ soit $U_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{U_2}{R_1}$. On en tire $U_2 = U_1\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$

5. Millman en E : $V_E = \frac{\frac{V_K}{R_3}+\frac{U_3}{R_4}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$.
   Millman en G : $V_G = \frac{\frac{V_L}{R_3}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$.
   Par linéarité : $V_E = V_G$ donc $\frac{V_K}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} = \frac{V_L}{R_3}$ soit $U_3 = \frac{R_4}{R_3}(V_L - V_K) = -\frac{R_4}{R_3}U_2 = -\frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)\frac{\eta\alpha R_0}{2}F$
   Avec deux étages d'amplification, on obtient une tension plus élevée et facilement mesurable.

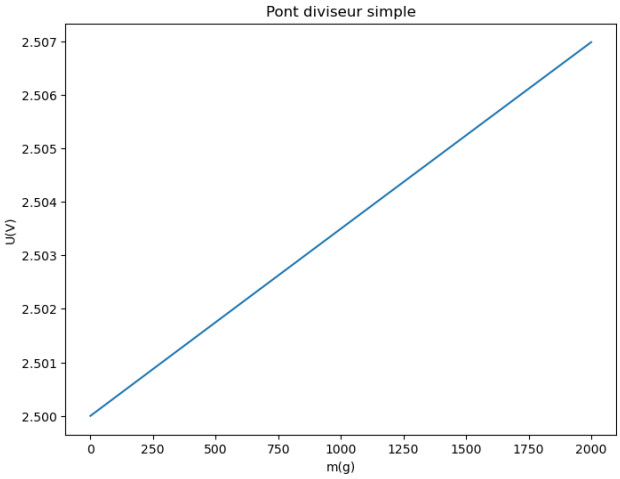
Corrigé de l'exercice E2.13 : Ligne à résistance répartie [****]

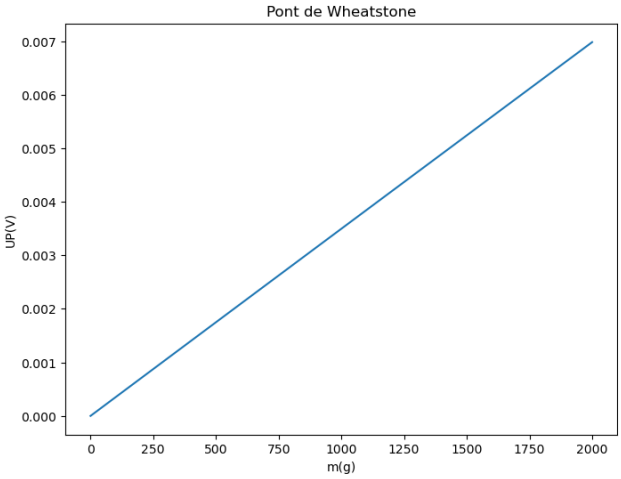
1. $R' = \rho.\mathrm{d}x + \frac{1}{g.\mathrm{d}x+\frac{1}{R}} = \rho.\mathrm{d}x + \frac{R}{g.R.\mathrm{d}x+1}$
2. $R_{eq}(x) = \rho.\mathrm{d}x + \frac{R_{eq}(x+\mathrm{d}x)}{g.R_{eq}(x+\mathrm{d}x).\mathrm{d}x+1}$
3. $R_{eq}(x) = \rho.\mathrm{d}x + R_{eq}(x+\mathrm{d}x) - R_{eq}^2(x+\mathrm{d}x).g.\mathrm{d}x$ donc $\frac{R_{eq}(x+\mathrm{d}x)-R_{eq}(x)}{\mathrm{d}x} = -\rho + R_{eq}^2 g$
   Remarque : vous vous demandez peut-être si on n'a pas triché en oubliant que R_{eq}^2 est en $x + \mathrm{d}x$ et non pas en x. En fait tout est en ordre, mais pour le moment vous n'avez pas les outils mathématiques pour comprendre tout.
4. ρ est en $\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et g en $\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, donc la réponse est évidente.
5. $R_{eq}(L) = R_0\frac{R+R_0+R-R_0}{R+R_0-R+R_0} = R$
6. Le générateur voit $R_{eq}(0) = R_0\frac{(R+R_0)\exp\left(\frac{L}{d}\right)+(R-R_0)\exp\left(\frac{-L}{d}\right)}{(R+R_0)\exp\left(\frac{L}{d}\right)-(R-R_0)\exp\left(\frac{-L}{d}\right)}$
7. $R_{eq}(0) = 50,3\Omega$
8. $\lim_{L\to\infty} R_{eq}(0) = R_0$

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Balance avec jauge de contrainte

Pour le pont simple $U = E\frac{R}{R+R_0}$; pour le pont de Wheatstone avec $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ on a $U_P = E\left(\frac{1}{2} - \frac{R_0}{R_0+R}\right)$.





Les deux donnent une tension de sortie qui varie de fonction affine avec la masse, mais dans le cas du pont de Wheatstone l'ordonnée à l'origine est nulle, ce qui va permettre de l'amplifier fortement grâce à un montage à AO.

Avec deux jauges on double la tension ; avec quatre jauges on la quadruple.

Chapitre E3 Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Programme p.295

Conseils p.296

Cours p.282
- E3.A. Équations différentielles
- E3.B. Circuit RC série
- E3.C. Circuit RL série
- E3.D. Résolution générale d'équations différentielles d'ordre 1

QCMs p.297

Exercices p.298

TDs numériques p.302

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Cours

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés au régime continu, dans lequel les tensions et les intensités sont constantes. Nous n'avons pas étudié la question de savoir comment les tensions et les courants ont atteints ce régime continu. Or il a bien fallu un jour allumer les générateurs ; comment, alors, les tensions et intensités sont-elles passées de la valeur nulle à leur valeur constante ? Ce passage s'appelle le *régime transitoire*, et nous allons l'étudier dans ce chapitre.

E3.A. Équations différentielles

A.1. Établissement de l'ED

Pour connaître le régime transitoire, il faut d'abord établir les lois auxquelles il obéit. Lors du régime transitoire, les grandeurs (intensités, tensions) vont varier, et ces variations vont modifier les autres tensions et intensités, via les lois des condensateurs et des bobines en particulier. En combinant toutes ces lois, on aboutit à une équation qui va relier une grandeur avec ses dérivées : une *équation différentielle*.

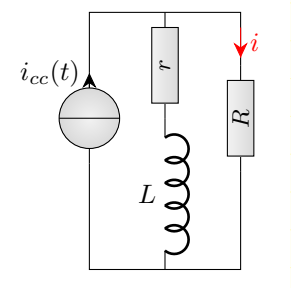
Méthode : Établissement de l'ED vérifiée par une grandeur du circuit

- On place sur un schéma et on donne un nom à toutes les tensions et intensités du circuit.
- On écrit :
  - la loi des mailles dans toutes les mailles indépendantes
  - la loi des nœuds à tous les nœuds sauf un (la masse le plus souvent)
  - les lois des composants.
- On combine ces équations pour éliminer les variables inutiles.

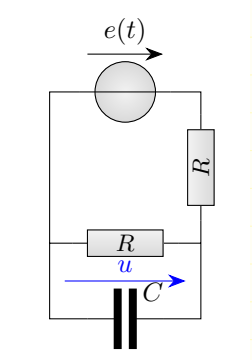
! En physique, on écrit indifféremment u ou $u(t)$ (de même i ou $i(t)$) ; ce qui compte, c'est de bien savoir ce qui dépend du temps et ce qui est constant. Dans le cours et les corrigés d'exercices, je préciserai toujours (t) pour les grandeurs variables, mais ce n'est pas obligatoire de les écrire en devoir, et les énoncés d'exercices les omettent le plus souvent.

Exemple : Équation différentielle d'un circuit d'ordre 1

1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par i dans le circuit de gauche (en fonction de i_{cc} et des composants).
2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par u dans le circuit de droite (en fonction de e et des composants).



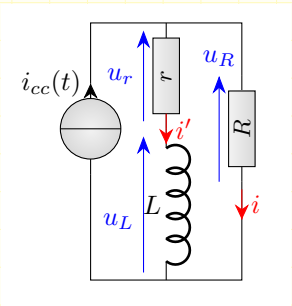
ED sur i



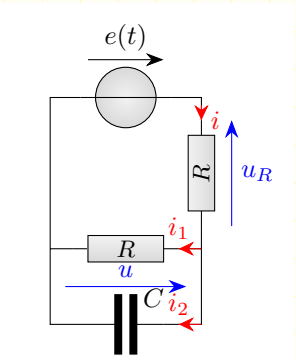
ED sur u

1. On commence par nommer les tensions (cf. ci-dessous). On écrit alors :
   - la loi des mailles : $u_r(t) + u_L(t) = u_R(t)$ (on n'applique jamais la loi des mailles à un générateur idéal de courant, car on ne connaît rien sur sa tension)
   - la loi des nœuds au nœud du haut : $i_{cc}(t) = i'(t) + i(t)$
   - les lois de composants : $u_r(t) = r.i'(t)$; $u_L(t) = L.\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t}$; $u_R(t) = R.i(t)$

   On part alors de la loi des mailles : $u_r(t) + u_L(t) = u_R(t)$ donc $r.i'(t) + L.\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t} = R.i(t)$. Or $i'(t) = i_{cc}(t) - i(t)$ donc $r.i_{cc}(t) - r.i(t) + L.\frac{\mathrm{d}i_{cc}(t)}{\mathrm{d}t} - L.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = R.i(t)$. Pour terminer, on sépare les termes, en mettant dans le terme de gauche la variable qui nous intéresse et le reste à droite : $-r.i(t) - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - R.i(t) = -r.i_{cc}(t) - L.\frac{\mathrm{d}i_{cc}(t)}{\mathrm{d}t}$.



ED sur i



ED sur u

2. On place les tensions et intensités ; attention, la tension u est à la fois aux bornes de la résistance et du condensateur ; de plus, les deux résistances ont la même valeur, mais ni la même tension, ni la même intensité. On écrit :
   - la loi des mailles : $e(t) = u_R(t) + u(t)$
   - la loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$
   - les lois des composants : $u_R(t) = R.i(t)$; $u(t) = R.i_1(t)$ et $i_2(t) = C.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

   Alors $R.i(t) + u(t) = e(t)$, donc $R.i_1(t) + R.i_2(t) + u(t) = e(t)$; en remplaçant les intensités on obtient $u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t)$ soit $2u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$.

A.2. Régime transitoire et régime permanent

Propriété : Solutions d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire portant sur une variable x dépendant du temps s'écrit en mettant tous les termes contenant de x dans le premier membre (à gauche) et le reste dans le second membre (à droite). Pour la résoudre, on cherche :

- **une** *solution particulière* de l'équation différentielle complète ; en pratique, si le second membre est constant, une solution constante convient.
- l'ensemble des *solutions de l'ED homogène* ou *ED sans second membre* (formules à apprendre).

Alors l'ensemble des solutions est la somme des deux précédente ; les conditions initiales (CI) permettent alors de choisir la bonne parmi l'ensemble.

Définition : Régime permanent, transitoire, libre

La solution particulière de l'équation correspond au *régime permanent*.
La solution de l'ED homogène correspond au *régime transitoire*. Si elle tend vers 0, on dit que l'ED est stable, sinon elle est instable.
On appelle *régime libre* le régime transitoire lorsqu'il est seul (c'est-à-dire lorsque le régime permanent est nul).

On l'appelle « régime transitoire » car il est constitué d'exponentielles, donc il évolue très vite : soit il disparaît et tend vers 0 très vite, soit, si le système est instable, il diverge très vite.

Définition : Ordre d'une ED

On appelle *ordre* d'une équation différentielle, la différence des degrés de dérivation entre le terme le plus dérivé et le terme le moins dérivé.

Par exemple, l'équation $3\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 4$ fait apparaître l'inconnue $f(t)$ sous forme non dérivée (ou dérivée 0 fois), sous forme dérivée une fois et dérivée deux fois, donc cette équation est d'ordre 2.

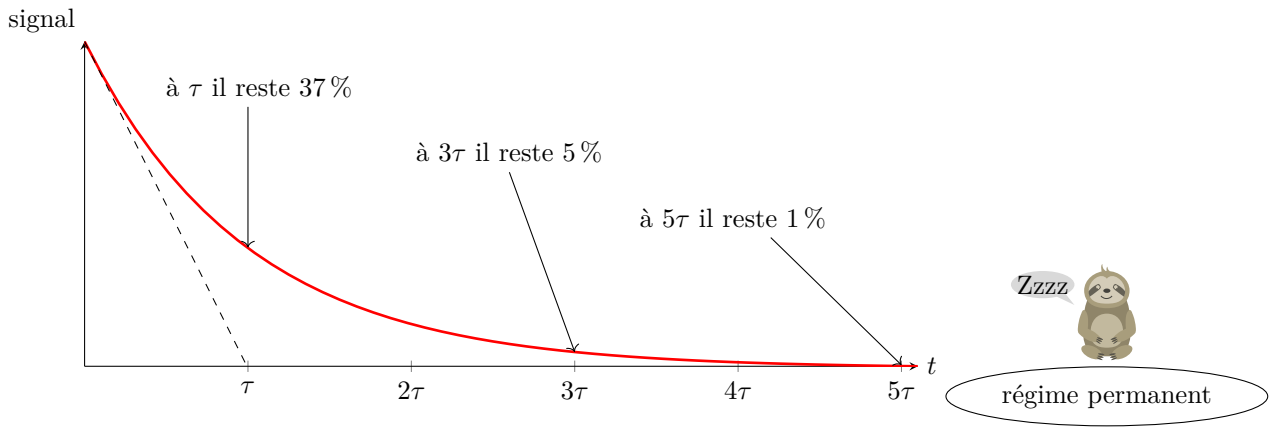
Nous allons donc maintenant apprendre par cœur les solutions des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1. Pour cela, on les met sous une forme particulière : la forme canonique.

A.3. Solutions d'une ED d'ordre 1 à coefficients constants

Propriété : Solutions d'une ED linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Une ED linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants peut se mettre sous la forme canonique $\tau\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0$. L'ensemble de ses solutions est de la forme $\left\{t \mapsto K.e^{-t/\tau}, K \in \mathbb{R}\right\}$.
τ est la constante de temps du circuit ; si $\tau > 0$, au bout de quelques τ, la solution transitoire a atteint 0 (figure E3.1) ; sinon la solution transitoire diverge.

FIGURE E3.1 : Solutions d'une ED linéaire homogène d'ordre 1.



Remarque : Graphiquement, pour trouver τ sur une courbe expérimentale, la façon la plus précise consiste à tracer la tangente à l'origine à la courbe ; on peut montrer que cette tangente coupe l'asymptote (ici 0) à une abscisse τ.

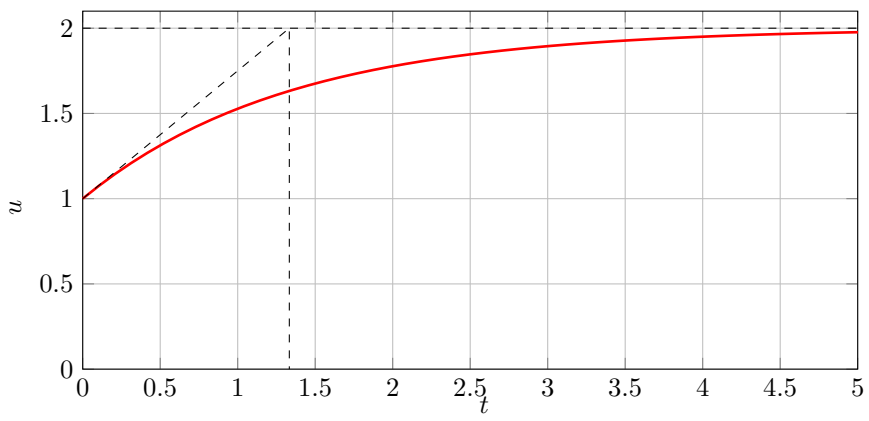
Exemple : Résolution d'une ED d'ordre 1

Trouvez la solution de l'ED $4\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3u = 6$ vérifiant $u(0) = 1$.

On commence par passer l'équation sous forme canonique ; pour cela il faut un coefficient 1 devant le terme non dérivé, donc on divise par 3 et on obtient $\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 2$.

- L'équation homogène $\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ a pour solutions $u(t) = K.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{4}{3}$
- On cherche une solution constante de l'équation complète. Si $u = \text{cst}$ alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$ donc l'ED devient $\frac{4}{3} \times 0 + u = 2$ donc $u = 2$
- La solution générale est donc de la forme $u(t) = 2 + Ke^{-t/\tau}$
- Les conditions initiales sont $u(0) = 1$. Or $u(0) = 2 + K$ donc $K = -1$. On a donc $u(t) = 2 - e^{-t/\tau}$.

Pour tracer cette solution, on remarque que $u(0) = 1$ et $u(\infty) = 2$; de plus le temps caractéristique vaut $\frac{4}{3}$:



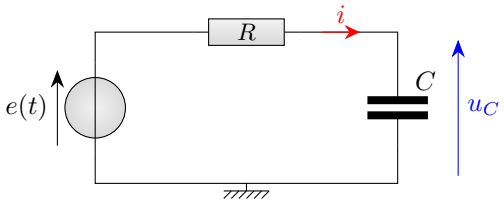
E3.B. Circuit RC série

Le circuit modèle d'ordre 1 est le RC série. Il faut savoir établir l'équation de sa charge et de sa décharge.

B.1. Résolution de la tension aux bornes du condensateur

Exemple : Charge d'un condensateur **À connaître**

On considère un circuit RC série (figure ci-dessous). Initialement (à $t < 0$), le générateur est éteint ($e(t < 0) = 0\,\text{V}$) et le condensateur déchargé ($u_C(t < 0) = 0\,\text{V}$).



On allume le générateur à $t = 0$; donc pour tout $t > 0$, $e(t > 0) = E = \text{cst}$.
Déterminez $u_C(t)$ et $i(t)$ à $t > 0$.

— On commence par établir l'ED vérifiée par u_C à $t > 0$: en notant u_R la tension aux bornes de R orientée en convention récepteur, on a $u_R(t) + u_C(t) = E$. Or $u_R(t) = R.i(t)$ (par la loi d'Ohm) et $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ (par la loi du condensateur) donc $RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E$. On peut donc écrire

$$\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E \text{ avec } \tau = RC$$

— On cherche l'ensemble des solutions. D'abord une solution particulière constante : si $u_C = \text{cst}$ alors $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ donc l'ED devient $0 + u_C = E$. Ensuite, l'équation sans second membre $\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$ a pour solutions $u_C(t) = K.e^{-t/\tau}$. Donc la solution complète pour $t > 0$ est de la forme

$$u_C(t) = E + K.e^{-t/\tau} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

— Il faut trouver l'inconnue K à l'aide d'une condition initiale. Pour cela, on utilise la continuité (mathématique) de la tension aux bornes du condensateur. En effet, il faut bien comprendre que, pour le moment,

la fonction u_C est définie par morceaux :

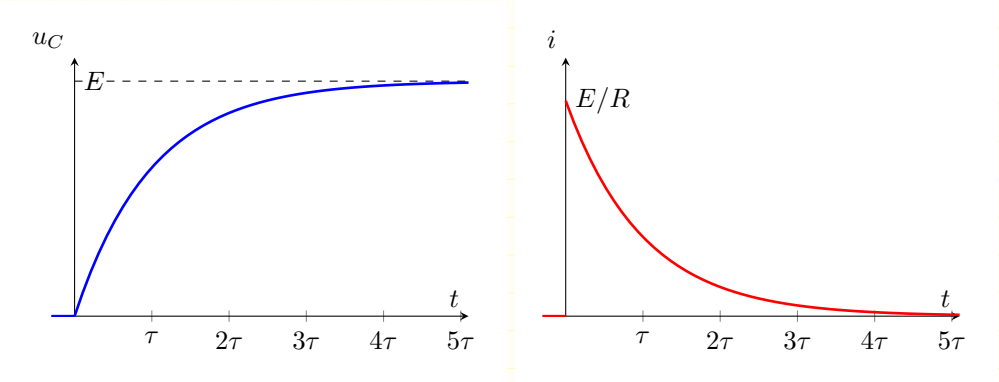
$$u_C(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E + K.e^{-t/\tau} \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

La continuité mathématique de la tension u_C traduit par l'égalité des limites de u_C à droite et à gauche en 0 ; en physique, on l'écrira $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ (il faut lire cela comme une façon abrégée d'écrire des limites). En faisant tendre les deux morceaux de u_C vers 0, on trouve à gauche : $u_C(0^-) = 0$; et à droite : $u_C(0^+) = E + K.e^0 = E + K$. Par continuité, on a donc $0 = E + K$ donc $K = -E$. On en déduit donc la solution :

$$u_C(t) = E - E.e^{-t/\tau}$$

— Une fois $u_C(t)$ trouvé, on peut calculer $i(t) = C.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = C\left[0 - E.\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right] = \frac{E.C}{\tau}e^{-t/\tau}$ et comme $\tau = RC$ on obtient

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$



Exemple : Décharge d'un condensateur

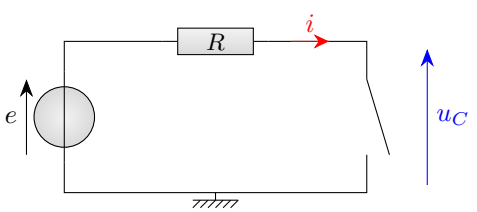
À connaître

On reprend le circuit RC série de l'exemple précédent. Cette fois, à $t < 0$, le générateur est allumé depuis longtemps : $e(t < 0) = E$ et le régime continu est atteint. À $t = 0$, on éteint le générateur, donc $e(t > 0) = 0\,\mathrm{V}$ pour $t > 0$.
Déterminez $u_C(t)$ et $i(t)$ à $t > 0$.

— On commence par reétablir l'ED vérifiée par u_C à $t > 0$: en notant u_R la tension aux bornes de R orientée en convention récepteur, on a $u_R(t) + u_C(t) = e(t) = 0$. Or $u_R(t) = R.i(t)$ (par la loi d'Ohm) et $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ (par la loi du condensateur) donc $RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$. On peut donc écrire $\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$ avec $\tau = RC$

— L'équation est déjà sans second membre, inutile de chercher une solution particulière. L'équation a pour solutions $u_C(t) = K.e^{-t/\tau}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

— Il faut trouver l'inconnue K à l'aide d'une condition initiale. Pour cela, on utilise la continuité (mathématique) de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0^-) = u_C(0^+)$. Ici, la difficulté est d'avoir $u_C(0^-)$: c'est la valeur de u_C juste avant qu'on éteigne le générateur. Or l'énoncé nous dit que, à ce moment-là, $e = E$ et le régime continu est atteint, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. On redessine donc le circuit équivalent à $t = 0^-$:



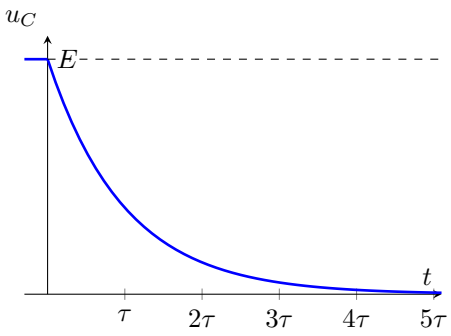
On a donc $i = 0$, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. Par la loi des mailles, on trouve $u_C(0^-) = E$. Quant à $u_C(0^+)$, on prend l'expression trouvée pour la solution de l'ED en $t = 0$, et on

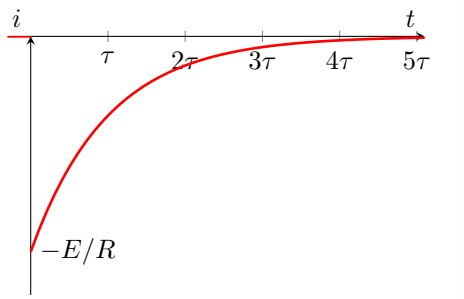
trouve $u_C(0^+) = K$. On en déduit que $K = E$. On en déduit donc la solution :

$$u_C(t) = E.e^{-t/\tau}$$

— Une fois u_C trouvé, on peut calculer $i(t) = C.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = CE.\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{-E.C}{\tau}e^{-t/\tau}$ et comme $\tau = RC$ on obtient

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$





En plus de savoir refaire les calculs ci-dessus, il faudra bien retenir la propriété :

Propriété : Temps caractéristique de charge/décharge d'un circuit RC série

Un condensateur C en série avec une résistance R se charge/décharge avec un temps caractéristique $\tau = RC$.

Typiquement, pour une résistance de 1 kΩ et une capacité de 1 µF, on trouve $\tau = 1$ ms. C'est rapide, mais pas trop non plus : en 1 ms, la lumière parcourt 300 km ce qui montre qu'on reste bien dans les conditions de l'ARQS.

De manière générale, en électricité, les régimes transitoires durent souvent entre quelques µs et quelques ms.

La mesure du temps de charge/décharge permet, si on connaît R, de mesurer la capacité C du condensateur. Or la capacité d'un condensateur est modifiée par la présence de conducteurs électriques à proximité, ou par la modification de sa géométrie. Ce phénomène est à la base de tous les capteurs capacitifs comme les écrans tactiles.

FIGURE E3.2 : Exemples de capteurs capacitifs.



(a) Écran tactile de téléphone portable.



(b) Le thérémine, instrument de musique inventé par Lev Termen, controlé par la position des mains du joueur formant un condensateur avec deux antennes.(Crédit : Wikipedia/B.Corbis)

B.2. Bilan énergétique

Lors de la charge du condensateur sous une tension constante E, le condensateur a accumulé de l'énergie. On peut chercher à évaluer quelle proportion de l'énergie fournie par le générateur a été stockée.

Exemple : Bilan énergétique de la charge du condensateur — À connaître

On considère le problème déjà traité plus haut d'un condensateur qui se charge sous une tension constante E. On a trouvé les solutions : $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ et $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
Déterminez le travail fourni par le générateur, l'énergie stockée par le condensateur et le travail reçu (et dissipé) par la résistance. Déduisez-en le rendement du stockage de l'énergie par un condensateur.

— Le générateur fournit une puissance $\mathcal{P}_{gén}(t) = E.i(t) = \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}$. Pour connaître le travail total fourni, on intègre cette puissance entre 0 et l'infini (une intégrale jusqu'à l'infini, il faut voir ça comme une limite). On a donc

$$W_{gén} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{gén}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-t/RC}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{E^2RC}{R}e^{-t/RC}\right]_0^\infty = CE^2$$

car $e^0 = 1$ et $e^{-\infty} = 0$

— Le condensateur voit sa tension passer de 0 à E, donc son énergie de 0 à $\frac{1}{2}CE^2$. Il stocke donc une énergie

$$E_{cond}(\text{fin}) = \frac{1}{2}CE^2$$

— La résistance dissipe le travail qu'elle reçoit :

$$W_{rés} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{rés}\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{RE^2}{R^2}e^{-2t/RC}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{R^2CE^2}{2R^2}e^{-2t/RC}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2$$

On constate donc que :

— l'énergie est conservée : $E_{cond}(\text{fin}) - E_{\text{cond}}(\text{début}) = W_{gén} - W_{rés}$

— le condensateur ne stocke que 50 % du travail fourni par le générateur

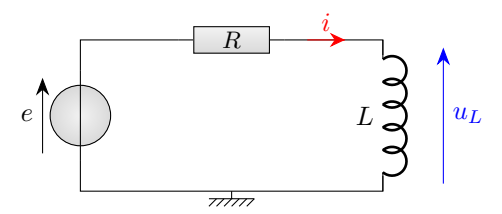
Néanmoins, la capacité des condensateurs à accumuler de l'énergie très rapidement font qu'ils sont de plus en plus utilisés, entre autres dans les transports électriques (voiture, bus,...).

E3.C. Circuit RL série

Un autre exemple très important à connaître est celui constitué d'une bobine et d'une résistance en série. On ne traitera ici que l'établissement du courant.

Exemple : Établissement du courant dans la bobine — À connaître

On considère un circuit RL série :



À $t<0$, le générateur est éteint et aucun courant ne circule. On allume le générateur à $t=0$: e passe de 0 à $E=$ cst. Calculez $i(t)$ puis $u_L(t)$ pour $t>0$, et tracez les courbes.

— Soit u_R la tension aux bornes de la résistance, en convention récepteur. Alors par la loi des mailles : $u_R(t)+u_L(t)=E$ donc $R.i(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=E$. On met cette équation sous forme canonique :

$$\tau\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)=\frac{E}{R}\text{ avec }\tau=\frac{L}{R}$$

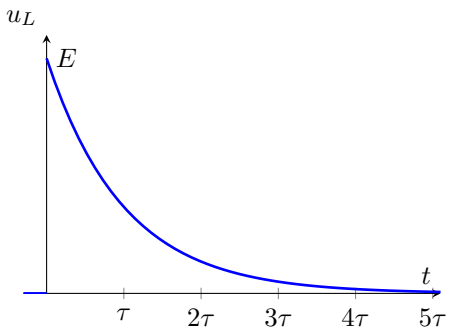
— On cherche une solution particulière constante : $i=$ cst alors $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$ donc $i=\frac{E}{R}$.
Les solutions de l'équation homogène $\tau\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)=0$ sont de la forme $i(t)=K.e^{-t/\tau}$.
Donc la solution recherchée est de la forme

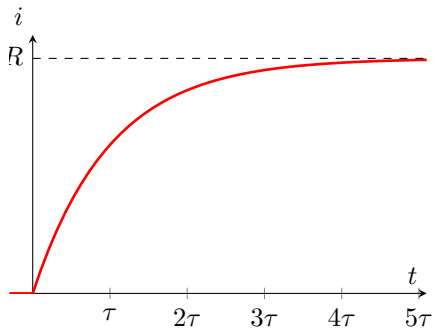
$$i(t)=\frac{E}{R}+Ke^{-t/\tau}\text{ avec }K\in\mathbb{R}$$

— Le courant à travers une bobine est continu mathématiquement donc $i(0^-)=i(0^+)$. À $t<0$ il n'y a pas de courant donc $i(0^-)=0$. À $t>0$ on sait que $i=\frac{E}{R}+Ke^{-t/\tau}$ donc $i(0^+)=\frac{E}{R}+Ke^0=\frac{E}{R}+K$. On en tire $0=\frac{E}{R}+K$ donc $K=-\frac{E}{R}$. Donc

$$i(t)=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

— On a ensuite $u_L(t)=L.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=L.\left[0-\frac{E}{R}.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-t/\tau}\right]=\frac{LE}{\tau R}e^{-t/\tau}=E.e^{-t/\tau}$





Propriété : Temps caractéristique d'établissement / rupture du courant dans un circuit RL série

Une inductance L en série avec une résistance R voit son courant apparaître ou disparaître avec un temps caractéristique $\tau=\frac{L}{R}$.

Comme pour le condensateur, on peut se servir de cette propriété pour mesurer l'inductance d'une bobine, et sa modification dû à la proximité d'un objet magnétisable, en acier par exemple. C'est ainsi que les boucles inductives sous la chaussée permettent de détecter la présence d'un véhicule ; néanmoins, dans ce cas, le système utilisé pour mesurer L n'est pas directement le temps d'établissement du courant.

E3.D. Résolution générale d'équations différentielles d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont faciles à résoudre dans le cas d'un second membre constant. Tant que nous ne considérerons que des circuits avec des composants linéaires, et alimentés par des tensions constantes, il sera possible de les résoudre à la main. Mais ce n'est pas toujours le cas, et nous allons voir dans cette section deux techniques pour ces cas-là, la seconde étant de toute importance à connaître.

D.1. Résolution par séparation des variables

Cette technique n'est pas explicitement au programme, mais il est bon d'en avoir entendu parler. C'est une façon « à la physicienne » d'écrire le changement de variable dans une intégrale en maths. Prenez le temps de lire le principe, mais sans plus, car pour le moment, nous n'aurons que très peu à l'utiliser.

Méthode : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 par séparation des variables

Une équation différentielle d'ordre 1 sur la fonction u peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u,t)$ où f est une fonction générale. Si f peut s'écrire comme le produit d'un terme dépendant de l'inconnue u par un terme dépendant de la variable t selon la forme $f(u,t) = g(u) \times h(t)$, alors :

— on sépare les variables en divisant la fraction de la dérivée en deux et en mettant les termes en u d'un côté, ceux en t de l'autre : $\frac{\mathrm{d}u}{g(u)} = h(t).\mathrm{d}t$

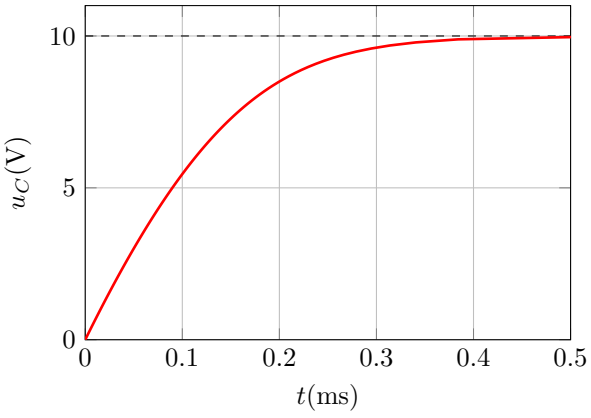
— on intègre de chaque côté en tenant compte des conditions initiales : $\int_{u(0)}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{g(u)} = \int_0^t h(t).\mathrm{d}t$ [a]

a. En maths, vous ne devez jamais donner le même nom à la variable intégrée et à la variable qui apparaît dans les bornes, il faudrait ainsi écrire $\int_{u(0)}^{u} \frac{\mathrm{d}u'}{g(u')} = \int_0^t h(t').\mathrm{d}t'$; en physique on ne vous embêtera pas avec ça.

Exemple : Circuit RC avec résistance variable

On considère un circuit RC série mais avec une résistance qui varie en fonction de la tension à ses bornes selon la loi $R(u) = R_0 + \alpha u$ avec $R_0 = 300\,\Omega$ et $\alpha = 40\,\Omega \cdot \mathrm{V}^{-1}$. On prend $C = 220\,\mathrm{nF}$, et la tension d'alimentation e passe, à l'instant $t = 0$, de la valeur 0 à la valeur $E = 10\,\mathrm{V}$.
Déterminez l'ED vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur, et résolvez-la pour trouver $u_C(t)$ en supposant que $u_C(0) = 0$.

On reprend les notations vues pour le RC série : $u_C(t) + u_R(t) = E$ or $u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = (R_0 + \alpha(E - u_C(t)))C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $(R_0 + \alpha(E - u_C(t)))C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E$. Cette équation différentielle est d'ordre 1, mais n'est pas à coefficients constants ; donc la méthode de résolution vue plus haut ne fonctionne pas. On va séparer les variables.
On commence par isoler la dérivée : $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{E - u_C(t)}{(R_0 + \alpha(E - u_C(t)))C}$.
On sépare les variables : $\frac{R_0 + \alpha(E-u_C)}{E-u_C}\mathrm{d}u_C = \frac{1}{C}\mathrm{d}t$ (on peut aussi passer C à gauche si on veut, peu importe) ; on considère u_C comme une variable maintenant, et non plus comme dépendant de t.
On intègre : $\int_{u_C(0)=0}^{u_C(t)} \frac{R_0 + \alpha(E-u_C)}{E-u_C}\mathrm{d}u_C = \frac{1}{C}\int_0^t \mathrm{d}t$ soit $[-R_0 \ln(E - u_C) + \alpha u_C]_0^{u_C(t)} = \frac{t}{C}$ d'où $R_0 \ln\frac{E}{E-u_C(t)} + \alpha u_C(t) = \frac{t}{C}$.
Ici il est difficile d'isoler $u_C(t)$ littéralement ; néanmoins, on peut tracer sa courbe avec un ordinateur :



Cela ressemble de loin à la solution exponentielle du RC série, mais ce n'est pas vraiment une exponentielle.

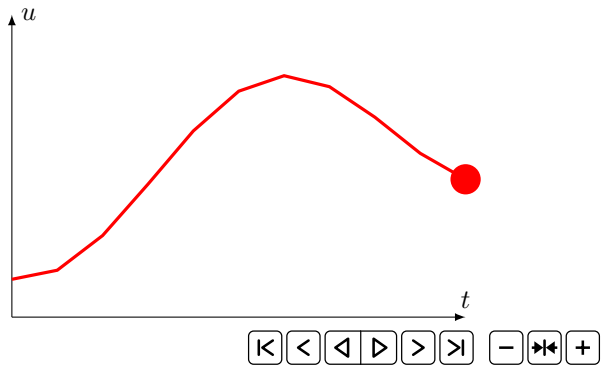
D.2. Résolution numérique

Jusqu'ici, nous avons essayé de résoudre les ED de façons analytique, c'est-à-dire d'obtenir une forme mathématique de la solution. Souvent, cette solution n'est pas possible à trouver, mais on peut résoudre de façon numérique les valeurs que prendra la fonction au cours du temps.

Dans tout ce paragraphe, on considère une ED portant sur une fonction u de variable t qu'on peut écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = f(u(t), t)$

La méthode la plus simple est la méthode d'Euler ; elle est basée sur la définition de la dérivée comme un taux d'accroissement : $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$. Si on prend un h petit, on obtiendra une approximation pas trop mauvaise et on pourra écrire $\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \approx f(u(t), t)$ soit $u(t+h) = u(t) + h.f(u(t), t)$. Ainsi, de proche en proche, par pas de h, on détermine les valeurs approchées de $f(t)$ (cf. figure E3.3).

FIGURE E3.3 : Illustration de la détermination d'une fonction $u(t)$ par la méthode d'Euler.



Méthode : Résolution d'une ED d'ordre 1 par la méthode d'Euler

Soit une équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u, t)$ avec une condition initiale $u(0) = u_0$ connue.

- on choisit un *pas temporel* h petit
- on calcule deux suites (t_n) et (u_n) définies par
  - les valeurs initiales $t_0 = 0$ et u_0
  - les relations de récurrence

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + h \times f(u_n, t_n) \end{cases} \quad \text{(E3.1)}$$

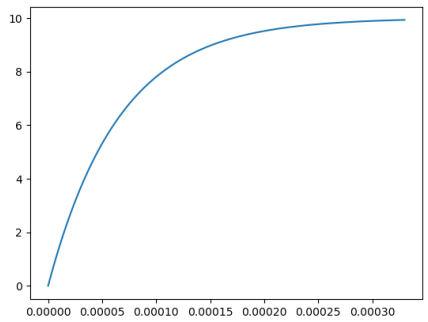
La suite (u_n) contient alors les valeurs de u aux instants définis par la suite (t_n).
Le choix de h ne doit pas être effectué au hasard : il faut connaître le temps caractéristique d'évolution du système, et prendre par exemple $1/1000$ de ce temps.

Exemple : Charge d'un condensateur — À connaître

On considère un circuit RC série avec $R = 300\,\Omega$ et $C = 220\,\mathrm{nF}$, vérifiant l'équation $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E = 10\,\mathrm{V}$ avec $u_C(0) = 0$.
Résolvez numériquement $u_C(t)$ sur une durée de 5τ et tracez la courbe de $u_C(t)$

L'ED peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{10-u_C}{300\times 220\times 10^{-9}}$. On réalise donc le programme suivant avec Python :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
R,C,E=300,220e-9,10 # constantes
tau=R*C # constante de temps
h=tau/1000 # choix du pas temporel
tmax=5*tau # temps de simulation
N=int(tmax/h) # nb de points
tab_t=np.zeros(N+1) # tableau des temps
tab_uc=np.zeros(N+1) # tableau des tensions
tab_t[0],tab_uc[0]=0,0 # initialisation
def derivee(uc,t): # terme de droite de l'ED
    return (E-uc)/tau
for n in range(0,N): # récurrence
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
    tab_uc[n+1]=tab_uc[n]+h*derivee(tab_uc[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.show()
```



On retrouve bien l'exponentielle attendue. Évidemment, il faudrait ajouter des labels sur les axes,...

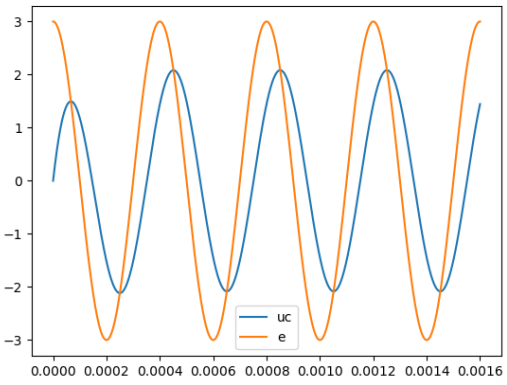
Exemple : Circuit RC soumis à une tension sinusoïdale

On considère un circuit RC série avec $R = 300\,\Omega$ et $C = 220\,\text{nF}$, vérifiant l'équation $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t)$ avec $u_C(0) = 0$; la tension $e(t)$ est une tension sinusoïdale de la forme $e(t) = 3\cos(5000\pi t)$.
Résolvez numériquement $u_C(t)$ sur 4 périodes de $e(t)$ et tracez les courbes de $e(t)$ et $u_C(t)$ sur le même graphe.

L'ED peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{3\cos(5000\pi t) - u_C}{300\times220\times10^{-9}}$.
Cette fois il faut faire attention qu'il y a 2 temps caractéristiques : $\tau = RC = 66\,\mu\text{s}$ et la période du signal $T = \frac{1}{2500} = 400\,\mu\text{s}$. Pour le pas temporel on prendra $\frac{1}{1000}$ du plus petit des deux, soit $\frac{\tau}{1000}$.
On réalise donc le programme suivant avec Python :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
R,C,E,f=300,220e-9,3,2500 # constantes
tau=R*C # constante de temps
h=tau/1000 # choix du pas temporel
tmax=4/f # temps de simulation
N=int(tmax/h) # nb de points
tab_t=np.zeros(N+1) # tableau des temps
tab_uc=np.zeros(N+1) # tableau des tensions
tab_t[0],tab_uc[0]=0,0 # initialisation
def e(t): # générateur
    return E*np.cos(2*np.pi*f*t)
def derivee(uc,t): # terme de droite de l'ED
    return (e(t)-uc)/tau
for n in range(0,N): # récurrence
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
    tab_uc[n+1]=tab_uc[n]+h*derivee(tab_uc[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc,label="uc")
plt.plot(tab_t,e(tab_t),label="e")
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient la courbe :



On constate que $u_C(t)$ devient rapidement sinusoïdale de même période que $e(t)$; on reverra cet effet au second semestre.

La méthode d'Euler marche donc assez bien. Mais elle souffre d'un gros problème de précision, qu'on verra beaucoup plus quand on passera aux équations d'ordre 2 : en effet, l'erreur commise entre la résolution numérique et la solution exacte varie proportionnellement au pas temporel h. Pour avoir 10 fois mois d'erreur, il faut un pas 10 fois plus petit, ce qui fait 10 fois plus de calculs ; mais rapidement la limite de précision des nombres flottants va être atteinte.

Pour aller au-delà, il faut étudier l'approximation de la dérivée par son taux d'accroissement à la lumière d'un outil mathématique que vous n'avez pas encore vu : les développements limités. À l'aide de cet outil, on peut mettre au point des relations de récurrence plus performantes. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 qui utilise les équations suivantes mettant en œuvre 4 valeurs intermédiaires $k_{1...4}$:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ k_1 = f(u_n, t_n) \\ k_2 = f\left(u_n + \dfrac{h.k_1}{2}, t_n + \dfrac{h}{2}\right) \\ k_3 = f\left(u_n + \dfrac{h.k_2}{2}, t_n + \dfrac{h}{2}\right) \\ k_4 = f\left(u_n + h.k_3, t_n + h\right) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4\right) \end{cases}$$

On peut montrer que la précision de cette méthode varie comme h^4 ; autrement dit, si on divise le pas par 10, on divise l'erreur par 10^4.

Vous n'avez pas à savoir implémenter cette méthode ; seule celle d'Euler est exigible. Par contre, il existe une fonction toute prête sous Python que vous devez savoir utiliser : la fonction `scipy.integrate.odeint(derivee,ci,tab_t)` qui prend comme arguments :

— la fonction correspondant à la dérivée (notée $f(u,t)$ précédemment). Cette fonction prend deux arguments, la **liste** des inconnues et la variable, et elle renvoie la **liste** des dérivées ;

— la **liste** des conditions initiales ;

— le tableau des instants où on veut calculer les inconnues.

Considérons par exemple l'équation $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{E-u_c}{RC}$. Ici on a une seule inconnue, u_c. Voici un exemple de programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as spi
R,C,E=300,220e-3,10
def derivee(tab,t): # fonction dérivée
    uc=tab[0] # une seule inconnue, uc
    return [(E-uc)/(R*C)] # renvoie [dérivée de uc]
tab_t=np.linspace(0,5*R*C,100) # temps de simulation
ci=[0] # liste des CI
solution=spi.odeint(derivee,ci,tab_t) # résolution
tab_uc=solution[:,0] # récupération de uc
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.show()
```

— la fonction `derivee` prend comme argument une liste d'inconnues ne contenant que u_c, et la variable temps. Elle renvoie une liste ne contenant qu'un seul terme, $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ calculé à partir de l'ED ;

— le tableau des instants est établi grâce à `np.linspace`, ici on prend 100 points entre 0 et 5τ ;

— la liste des valeurs initiales des inconnues contient seulement $u_c(0) = 0$

— la fonction `odeint` renvoie un tableau 2D contenant une colonne par inconnues ; par exemple, ici on a une seule colonne correspondant à u_c et 100 lignes correspondant aux 100 valeurs du temps. Pour récupérer la colonne 0 contenant l'inconnue u_c, on utilise la syntaxe `solution[:,0]` où `:` signifie : « toutes les lignes ».

La courbe obtenue ressemble évidemment à ce qu'on a déjà obtenu. Sur cet exemple, l'avantage de la méthode de Runge-Kutta n'est pas évident ; il le deviendra sur les équations différentielles d'ordre 2.

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circuits linéaires du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Capacité numérique : Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Quelques conseils

- ✎ Pour établir une ED, il faut bien avoir en tête quelle est l'inconnue recherchée, et quelles sont les données (sources de tension ou de courant) ; toutes les autres variables doivent disparaître ; ensuite, il faut ordonner l'ED avec l'inconnue au premier membre et le reste au second membre.
- ✎ L'ajout des (t) est fastidieux, mais quand on débute, il permet d'éviter bien des erreurs.
- ✎ Il faut d'abord déterminer la forme complète des solutions d'une ED, **puis** appliquer les conditions initiales pour déterminer la constante. Une erreur classique consiste à appliquer les CI uniquement à la solution de l'équation homogène.
- ✎ Il faut savoir mesurer τ sur une courbe à partir de la tangente à l'origine.

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

QCMs

réponses page 305

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. La solution particulière d'une équation différentielle s'appelle :

(a). l'ancien régime
(b). le régime transitoire
(c). le régime libre
(d). le régime permanent

Q2. La solution d'une équation différentielle correspondant à l'équation sans second membre s'appelle :

(a). le régime transitoire
(b). l'ancien régime
(c). le régime permanent
(d). le régime libre

Q3. Le régime transitoire tend toujours vers 0 :

(a). Faux
(b). Vrai

Q4. La forme canonique d'une ED linéaire homogène d'ordre 1 est :

(a). $\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0$
(b). $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0$
(c). $\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0$
(d). $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\tau s=0$

Q5. Si on a une courbe solution d'une ED linéaire d'ordre 1, on peut tracer la tangente à l'origine, et l'asymptote en l'infini ; ces courbes se coupent à l'abscisse :

(a). τ
(b). 5τ
(c). 0
(d). 3τ

✓ QCM : ED linéaires d'ordre 1 ✗

Q6. La solution de l'ED $400\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=2$ vérifiant $x(0)=1$ est :

(a). $x(t)=e^{-400t}$
(b). $x(t)=2+e^{-t/400}$
(c). $x(t)=e^{-t/400}$
(d). $x(t)=2-e^{-t/400}$

Q7. La solution de l'ED $100\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=2$ vérifiant $x(0)=1$ est :

(a). $x(t)=2+e^{-25t}$
(b). $x(t)=0{,}5+e^{-t/25}$
(c). $x(t)=2-e^{-25t}$
(d). $x(t)=0{,}5+0{,}5e^{-t/25}$

Q8. La solution de l'ED $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+0{,}5x=4$ vérifiant $x(0)=0$ est :

(a). $x(t)=8-8e^{-0{,}5t}$
(b). $x(t)=8-8e^{-2t}$
(c). $x(t)=4-4e^{-2t}$
(d). $x(t)=8$

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Exercices

réponses page 306

Exercice E3.1 : Extinction du courant dans une bobine [*]

On reprend le circuit vu en cours avec un générateur de tension e, une résistance R et une bobine L en série. À $t < 0$, $e = E = \text{cst}$ et le régime permanent continu est atteint ; on coupe la tension à $t = 0$: $e(t > 0) = 0$.

1. Établisez l'ED vérifiée par le courant i dans le circuit à $t > 0$.
2. Trouvez la solution à une constante près.
3. Dessinez le circuit à l'instant $t = 0^-$ en tenant compte des indications de l'énoncé. Déduisez-en la constante dans $i(t)$.
4. Calculez la variation d'énergie stockée dans la bobine entre 0 et ∞, ainsi que l'énergie dissipée dans la résistance.

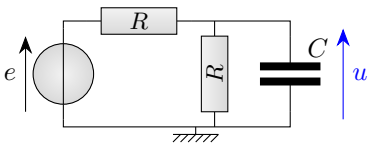
Exercice E3.2 : Charge d'un condensateur en 2 étapes [**]

On considère un circuit formé d'un générateur de tension e, d'une résistance R et d'un condetsateur C. Initialement, le condensateur est déchargé. On note u la tension à ses bornes et i le courant qui le traverse (en convention récepteur, mêmes notations que dans le cours).

1. Étape 1
   À $t = 0$, la tension du générateur passe de 0 à $\frac{E}{2}$.
   (a) Établissez l'ED vérifiée par u.
   (b) Déduisez-en $u(t)$ et $i(t)$.
   (c) On attend longtemps ; quelle valeur u_{lim} est atteinte par u ? Exprimez l'énergie stockée par le condensateur, et le travail fourni par le générateur.
2. Étape 2
   À un nouvel instant pris comme nouvelle origine des temps $t = 0$, le générateur passe de $\frac{E}{2}$ à E.
   (a) Établissez l'ED vérifiée par u.
   (b) Déduisez-en $u(t)$ et $i(t)$.
   (c) On attend longtemps ; quelle valeur est atteinte par u ? Exprimez l'énergie stockée par le condensateur, et le travail fourni par le générateur.
3. Exprimez le travail total $W_{gén}$ fourni par le générateur lors des deux étapes, et l'énergie totale E_{cond} stockée pendant les 2 étapes. Déduisez-en le rendement de la charge en 2 étapes.

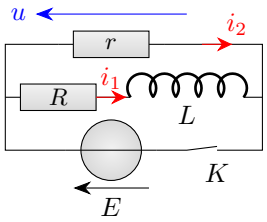
Exercice E3.3 : Régime transitoire d'un circuit $R, R /\!/ C$ [**]

On considère le circuit ci-contre formé d'un générateur, de deux résistances identiques et d'un condensateur.



1. Établissez l'équation différentielle reliant u à e et aux constantes.
2. À $t < 0$, le générateur est éteint et le condensateur déchargé. À $t = 0$, on passe la tension e à $E = 10\,\text{V}$ et elle reste constante pour $t > 0$.
   Trouvez l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.
3. Calculez le temps caractéristique pour $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 0{,}2\,\mu\text{F}$.
4. Tracez $u(t)$.

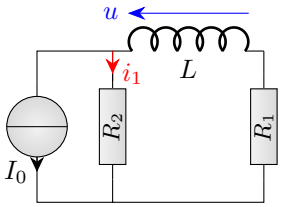
Exercice E3.4 : Surtension due à une bobine [**] py plot



1. À $t = 0^-$, l'interrupteur K est fermé depuis longtemps. Déterminez les intensités $i_1(0^-)$ et $i_2(0^-)$.
2. À $t = 0$ on ouvre K. Déterminez $u(t)$ pout $t > 0$.
3. À quelle condition a-t-on $|u(0^+)| > E$?
4. Tracez l'allure de $u(t)$ pour $r = 10.R$ et $E = 5\,\text{V}$.

Exercice E3.5 : Circuit alimenté par un générateur de courant [**]

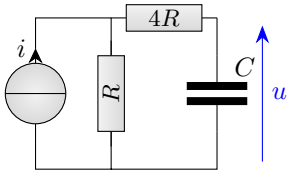
On considère le circuit ci-contre alimenté par une source idéale de courant $I_0 = 2\,\text{A}$; on prendra $R_1 = 3{,}3\,\Omega$, $R_2 = 2{,}2\,\Omega$ et $L = 18\,\text{mH}$.



1. À $t < 0$, le générateur est éteint et aucun courant ne circule ; à $t > 0$, le générateur est allumé. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par i_1.
2. Déterminez $i_1(t)$ à $t > 0$. Tracez sa courbe. Justifiez la valeur atteinte aux temps longs.
3. Reprenez les mêmes questions avec u.
4. On attend longtemps que les courants se stabilisent, puis on éteint le générateur à un instant t pris comme nouvelle origine des temps. Déterminez $i_1(t)$ à $t > 0$.

Exercice E3.6 : Étude d'un circuit d'ordre 1 [**]

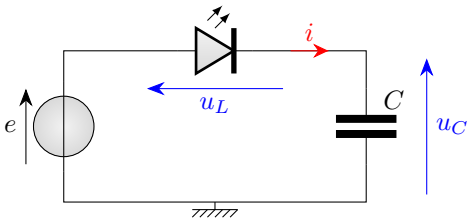
On considère le circuit ci-contre. Au temps $t < 0$, le générateur est allumé depuis très longtemps avec une intensité $i = I_0 = \text{cst}$.



1. On suppose qu'à $t = 0$ le régime permanent est atteint. Calculez $u(0^-)$.
2. On suppose qu'à $t = 0$ on double l'intensité du générateur, donc $i = 2I_0$ pour $t > 0$.
   Établissez l'équation différentielle vérifiée par u aux temps $t > 0$; on introduira son temps caractéristique τ à exprimer.
3. Résolvez l'ED et établissez $u(t)$.
4. Tracez l'allure de $u(t)$.

Exercice E3.7 : Charge d'un condensateur avec une LED témoin [**] py EDO

On considère le circuit ci-dessous avec $C = 220\,\text{nF}$, alimentée par une tension e qui passe, à l'instant $t = 0$, de la valeur $0\,\text{V}$ à la valeur $E = 3\,\text{V}$. Le condensateur est initialement déchargé. La LED vérifie la loi $i = I_0 e^{u_L/U_s} - I_0$ avec $I_0 = 5\,\mu\text{A}$ et $U_s = 0{,}6\,\text{V}$.



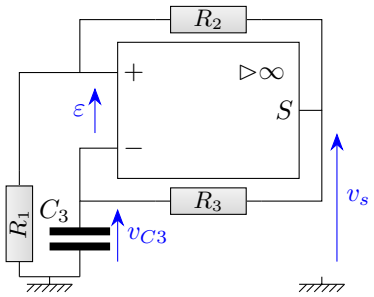
1. Déterminez l'ED vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur
2. Pour choisir un pas temporel, on doit évaluer le temps caractéristique d'évolution du système. Ici, on a comme données une tension U_s, un courant I_0 et une capacité C. Par analyse dimensionnelle, construisez une grandeur τ homogène à un temps à l'aide de ces 3 grandeurs.
3. Résolvez-la numériquement à l'aide d'une méthode d'Euler. Commentez.
4. Mesurez le temps t_{90} mis par le condensateur pour se charger à 90 %.

Exercice E3.8 : Multivibrateur astable (adapté de Centrale Supélec) [***]

Un exercice classique.
On considère le circuit ci-contre avec $R_1 = 19{,}6\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 40{,}2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 100{,}0\,\text{k}\Omega$, $C_3 = 470\,\text{pF}$; on admet que l'AO fonctionne en régime saturé, de tension de saturation $V_{sat} = 13{,}5\,\text{V}$.
On pose $\alpha = \frac{R_1}{R_1+R_2}$ et $\tau = R_3C_3$.
En régime saturé, les lois de l'AO sont les suivantes :

— les courants de polarisation sont nuls

— la tension différentielle ε est non nulle ; si elle est positive alors $v_s = +V_{sat}$, sinon $v_s = -V_{sat}$.

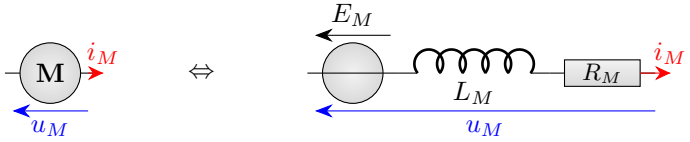


Rappel : n'appliquez jamais la loi des nœuds à la masse, car l'alimentation de l'AO injecte dans la masse un courant non représenté sur la figure.

1. Exprimez ε en fonction de α, v_s et v_{C3}.
2. Montrez que $v_{C3}(t)$ obéit à l'équation différentielle $\tau\frac{\mathrm{d}v_{C3}}{\mathrm{d}t} + v_{C3} = v_s$.
3. On suppose que $v_{C3}(0) = 0$ et $v_s(0) = +V_{sat}$. Déterminez $v_{C3}(t)$ puis l'instant t où v_s va basculer à la valeur $-V_{sat}$.
4. On prend cet instant de basculement comme nouvelle origine des temps. Déterminez $v_{C3}(t)$ puis l'instant t où v_s va basculer à la valeur $+V_{sat}$.
5. Par déduction, dessiner alors les allures de $v_{C3}(t)$ et de $v_s(t)$, et calculez numériquement la période des oscillations.

Exercice E3.9 : Hacheur dévolteur [***]

Les moteurs à courant continu sont utilisés universellement dans notre vie de tous les jours. Le réglage de la vitesse de rotation se fait par l'intermédiaire de l'intensité qui le traverse. Habituellement, on dispose d'une source de tension continue fixe, et un dispositif se charge d'alimenter plus ou moins le moteur.
On modélisera électriquement un moteur par une résistance R_M, une inductance L_M et un générateur de tension E_M s'opposant au courant i_M qui le traverse, placés en série.

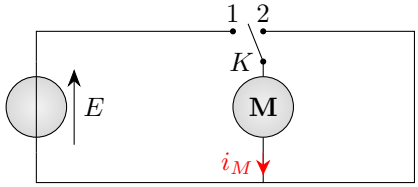


Le principe du hacheur dévolteur est illustré ci-contre. Le cycle de fonctionnement de ce circuit, d'une durée T, est le suivant :

— entre 0 et $D.T$, l'interrupteur K est en position 1 ;

— entre $D.T$ et T, l'interrupteur K est en position 2.

puis le cycle recommence périodiquement. D est un réel compris entre 0 et 1, appelé rapport cyclique. Dans la réalité, le rôle de K est joué par un transistor et une diode.
La tension E est positive.



1. *Première phase*
   On note I_0 le courant i_M au début de la première phase ; donc $i_M(0^+) = I_0$.
   (a) Redessiner le schéma du circuit lors de cette phase en éliminant aussi les branches inutiles.
   Ecrire l'équation différentielle vérifiée par i_M entre 0 et $D.T$; on posera un temps caractéristique τ.
   (b) Déterminer $i_M(t)$ pendant cette phase.
   (c) On note I_1 la valeur de i_M à la fin de la première phase. Exprimer I_1 en fonction de I_0, E, E_M, R_M, D, T et τ.
2. *Seconde phase*
   On prend la nouvelle origine des temps au début de cette phase.
   (a) Redessiner le schéma du circuit lors de cette phase. Écrire l'équation différentielle vérifiée par i_M.

(b) Justifier que $i_M(0^+) = I_1$.
Exprimer alors $i_M(t)$ pendant la seconde phase, en fonction de I_1 et des données.

(c) On note I_2 la valeur de i_M à la fin de la deuxième phase. Exprimer I_2 en fonction de I_1 et des données.

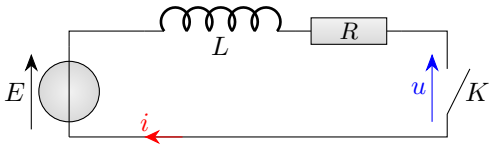
3. Le hacheur a atteint son régime périodique lorsque $I_2 = I_0$. À partir des équations précédentes, on peut montrer que cela est équivalent à

$$I_0 e^{-T/\tau} + \frac{E}{R_M}\left[e^{-(1-D)T/\tau} - e^{-T/\tau}\right] + \frac{E_M}{R_M}\left[e^{-T/\tau} - 1\right] = I_0$$

On suppose que le hacheur fonctionne très vite : $T \ll \tau$. En utilisant l'approximation $e^x \approx 1 + x$ pour $x \ll 1$, montrer que I_0 est une fonction affine de D à exprimer.

4. Quelle valeur minimale de D permet d'avoir $I_0 > 0$? Que vaut I_0 au maximum ?
5. On a un moteur tel que $R_M = 1,2\Omega$, $L = 2,1\,\text{mH}$ et $E_M = 6\,\text{V}$. On l'alimente avec $E = 10\,\text{V}$. Quel rapport cyclique doit-on choisir pour que l'intensité à travers le moteur vaille 1 A ? Quelle condition doit vérifier T ?

Exercice E3.10 : Arc électrique [***] EDO



Un moteur électrique à courant continu peut être modélisé électriquement par une bobine $L = 85\,\text{mH}$ en série avec une résistance $R = 12\,\Omega$. On alimente ce moteur selon la figure ci-dessus avec $E = 50\,\text{V}$ une tension constante ; l'interrupteur K est fermé initialement.

1. Calculez l'intensité i qui traverse la moteur en régime permanent.
2. On ouvre l'interrupteur ; l'intensité i peut-elle s'annuler instantanément ?
3. Il apparaît alors une étincelle aux bornes de l'interrupteur. Celui-ci se comporte alors comme un dipôle électrique avec une tension u à ses bornes, une intensité i qui le traverse, vérifiant la relation

$$u = U_0 + \frac{K}{i} \text{ avec } U_0 = 15\,\text{V}, \qquad K = 18\,\text{V}\cdot\text{A}$$

Établissez l'équation différentielle vérifiée par i.

4. Cette équation n'est pas linéaire.
Mettez-la sous la forme $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L} f(i)$. Faites l'étude des variations de f et tracez sa courbe entre 0 et $+\infty$.
Calculez numériquement les deux valeurs de i qui annulent f ; on les notera i_1 et i_2. À quoi correspondent physiquement ces valeurs ?
5. Si $i \in]0; i_1[$, quel est le signe de $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$? Comment va varier i ?
Mêmes questions si $i \in]i_1; i_2[$, puis si $i \in]i_2; +\infty[$.
Déduisez-en qu'un des deux points de fonctionnement est stable est que l'autre est instable.
D'après la valeur initiale de i, vers quel point de fonctionnement va-t-on tendre ?
6. Simulez alors l'évolution de $i(t)$ en fonction du temps à l'aide d'une méthode d'Euler, et tracez sa courbe.
Tracez aussi la courbe si on remplace l'interrupteur par un interrupteur isolé de caractéristiques $U_0' = 40\,\text{V}$ et $K' = 32\,\text{V}\cdot\text{A}$. Commentez.

E3. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

TDs numériques

réponses page 314

TD numérique : Circuit RC soumis à une tension quelconque

Ad. EDO

On considère un circuit RC série alimenté par une tension $e(t)$. On prendra $R = 2{,}2\,\text{k}\Omega$ et $C = 300\,\text{nF}$.

1. Dessinez le circuit et vérifiez que vous savez reétablir l'ED vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur : $RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = e(t)$.
2. Ouvrez un programme Python. Commencez par définir les constantes, et le temps caractéristique τ du circuit.
3. Mettez l'ED sous la forme $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = f(u_c, t)$. Écrivez alors une fonction `derivee(uc,t)` prenant comme argument u_c et le temps, et renvoyant $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$; elle utilisera une fonction `e(t)` qui sera définie à la question suivante.
4. **Réponse à une marche d'escalier**
   On suppose que $u_c(0) = 1\,\text{V}$ et que $e = 5\,\text{V}$ pour $t \geq 0$.
   (a) Calculez par la méthode d'Euler $u_c(t)$ pour $t > 0$ par la méthode d'Euler, sur une durée de 5τ avec comme pas $h = \frac{\tau}{100}$. Tracez la courbe obtenue.
   (b) Tracez sur la même courbe la formule théorique $u_{cth}(t) = 5 - 4e^{-t/\tau}$ en prenant comme liste des temps 100 points entre 0 et 5τ. Comparez les courbes.
   (c) Augmentez le pas de simulation à $\frac{\tau}{10}$, puis $\frac{\tau}{2}$, puis $1{,}5\tau$, enfin $2{,}5\tau$. Commentez l'influence du pas en distinguant les intervalles $h < \tau$, $\tau < h < 2\tau$ et $h > 2\tau$.
   On voit l'importance de connaître à l'avance les caractéristiques approchées du systèmes avant de se lancer dans une simulation.
5. **Réponse à un créneau**
   On prend maintenant une tension en créneaux de période T oscillant entre $E = +5V$ et $-E$. Cette fonction pourra être représentée mathématiquement ainsi :

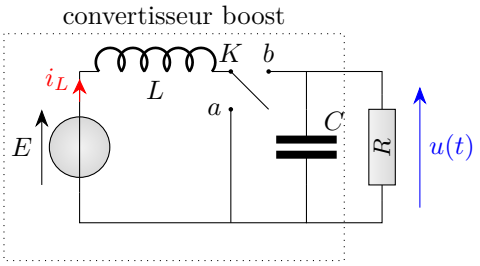
$$e(t) = \begin{cases} +E \text{ si } (t\%T) < \dfrac{T}{2} \\ -E \text{ sinon} \end{cases}$$

   Pour cette simulation on reprend $h = \frac{\tau}{100}$.
   (a) Simulez $u_c(t)$ lorsque $T = 10\tau$, sur une durée de $5T$; tracez $u_c(t)$ et éventuellement $e(t)$.
   (b) Réduisez T à 3τ, puis τ, puis $\frac{\tau}{2}$. Observez les changements : quelle forme prend la sortie ? comment varie son amplitude ?
6. **Réponse à un sinus**
   Testez maintenant une entrée $e(t)$ ayant la forme d'un cosinus d'amplitude 5 V et pour différentes fréquences : 100 Hz, 300 Hz et 1 kHz. Commentez la courbe obtenue.
7. **Précision de la méthode d'Euler**
   On reprend la tension en marche d'escalier.
   Pour différents pas de valeurs $\frac{\tau}{10^p}$ avec p un entier, simulez la courbe, puis calculez l'écart maximum entre les valeurs simulées et les valeurs théoriques. Tracez l'écart maximal en fonction de $\frac{1}{pas}$ (pour voir quelque chose, passez en échelle logarithmique avec les commandes `plt.xscale("log")` et `plt.yscale("log")`). Commentez.

TD numérique : Convertisseur Boost

Ad. EDO

Dans les voitures électriques, la tension de 24 V continue fournie par les batteries soit être transformée en une tension plus élevée pour alimenter les moteurs. On utilise pour cela un convertisseur *boost*.



Ce circuit est alimenté par une tension continue E qu'on prendra égale à 24 V pour les simulations. Il contient une bobine L, un condensateur C et une résistance R qu'on cherche à alimenter. Au milieu se trouve un interrupteur K qui peut prendre deux positions, a ou b ; il s'agit d'un interrupteur commandé (en réalité, un transistor et une diode) qui oscille périodiquement sur une période T de la manière suivante :

— pendant l'étape a d'une durée $D.T$ avec $0 < D < 1$, l'interrupteur est en position a ; on a alors deux circuits indépendants : $E + L$ à gauche, et $R + C$ à droite.

— pendant l'étape b d'une durée $(1 - D).T$, l'interrupteur est en position b, et on a un circuit avec E, L, C et R.

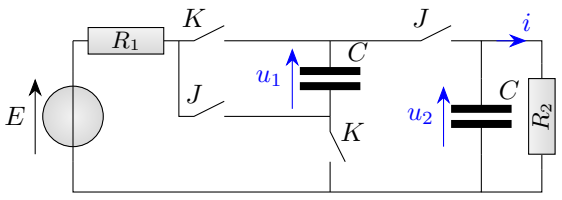
Le nombre D est appelé le *rapport cyclique* du circuit.

1. Redessinez le circuit pendant la phase a, et déterminez rapidement $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pendant cette phase (ces dérivées doivent être exprimées en fonction de E, R, L, C, i_L, u seulement).
2. Faites la même chose pendant la phase b (il faudra appliquer la loi des nœuds et la loi des mailles, sans les combiner).
3. On va prendre : $L = 30\,\mathrm{mH}$, $C = 2\,\mu\mathrm{F}$, $R = 250\,\Omega$, $D = 0{,}5$ et $T = \frac{T_0}{100}$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.
   Ouvrez un programme, entrez ces valeurs, puis définissez deux fonctions `derivee_iL(iL,u,t)` et `derivee_u(iL,u,t)`. Pour savoir dans quelle phase on est, on utilisera le test : `if (t%T)<D*T:` qui est vrai lors de la phase a et faux lors de la phase b.
4. Par un schéma d'Euler, simulez alors le système sur une durée de $5T_0$ avec un pas $\frac{T}{100}$ et des CI nulles, et tracez la courbe de $u(t)$ obtenue.
5. Faites varier un peu D et observez ce qui change.
6. À l'aide d'une boucle, faites varier D de 0,05 à 0,95 par pas de 0,05, et mesurez la valeur limite u_{lim} obtenue pour u. Tracez u_{lim} en fonction de D, et comparez à la formule théorique : $u_{lim} = \frac{E}{1-D}$ (admise).
7. S'il vous reste du temps, vous pouvez tester plein de choses :
   — l'influence de R sur la forme de la courbe et aussi sur la valeur limite (pour des R trop petits, ce convertisseur marche mal)
   — l'influence de T sur le taux d'ondulation de la courbe

TD numérique : Doublage d'une tension par une pompe à charges

ap. EDO

Si on dispose d'une tension E et qu'on veuille obtenir une tension double $2E$ à partir de rien, il faut utiliser une alimentation à découpage. Il en existe différente sortes, mais toutes sont basées sur le même principe : un interrupteur bascule périodiquement entre deux positions et provoque des suites de charges/décharges de condensateurs qui, au final, amplifient la tension.
On considère donc le circuit de la figure suivante :



Ce circuit est alimenté par un générateur de Thévenin de fem continue E qu'on prendra égale à 1 V pour les simulations, et de résistance interne R_1. Il contient deux condensateurs C identiques, et alimente une

résistance R_2. On trouve aussi des interrupteurs notés J et K ; il s'agit d'interrupteurs commandés (en réalité, des transistors et des diodes) qui oscillent périodiquement sur une période T de la manière suivante :

— pendant l'étape a d'une durée $\frac{T}{2}$, les interrupteurs K sont fermés et les interrupteurs J sont ouverts

— pendant l'étape b d'une durée $\frac{T}{2}$, les interrupteurs J sont fermés et les interrupteurs K sont ouverts

1. On va s'intéresser aux tensions u_1 et u_2 ; expliquez les raisons de ce choix.
2. *Étape a*
   (a) Redessinez le circuit pendant l'étape a, en plaçant les interrupteurs comme il le faut, et en supprimant les branches inutiles.
   (b) Déterminez l'équation différentielle vérifiée par u_1.
   (c) Déterminez l'équation différentielle vérifiée par u_2.
3. *Étape b*
   (a) Redessinez le circuit pendant l'étape b, en plaçant les interrupteurs comme il le faut, et en supprimant les branches inutiles.
   (b) Montrez que u_1 et u_2 vérifient les équations différentielles $\begin{cases} u_2 - u_1 + \frac{R_1}{R_2}u_2 + R_1 C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = E \\ C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \end{cases}$
4. Définissez en Python les constantes : $E = 5\,\mathrm{V}$, $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 30\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ et $T = 100\,\mathrm{ns}$, puis, par un schéma d'Euler, calculez les tensions u_1 et u_2 pendant 2,5 ms et un pas égal à $\frac{T}{10}$; les condensateurs sont initialement déchargés.
   Remarque : le test `if (t%T)<T/2:` permet de savoir si on est dans la phase a.
   Tracez la courbe de $u2$ en fonction du temps et commentez.
5. On peut alors étudier plein de propriétés de ce circuit. En particulier, on peut considérer que tout le circuit à gauche de R_2 est un générateur qui alimente la résistance R_2. On peut essayer de modéliser ce générateur par un modèle de Thévenin de fem E_{pap} et de résistance interne R_{pap}. Pour cela, faites la démarche suivante :
   — choisissez une valeur de R_2
   — simulez la pompe à charge (comme dans la question précédente)
   — notez la valeur de u_2 atteinte
   — calculez la valeur du courant i dans R_2 lorsque u_2 a atteint sa valeur stable
   Essayez pour les valeurs suivantes : $100\,\Omega$, $300\,\Omega$, $1\,\mathrm{k}\Omega$, $3\,\mathrm{k}\Omega$, $10\,\mathrm{k}\Omega$, $30\,\mathrm{k}\Omega$. Créez alors deux listes, une avec les tensions u_2, l'autre avec les courants i, et tracez le graphique : vous devez avoir une droite ; son ordonnée à l'origine vaut E_{pap} et sa pente $-R_{pap}$.
   Déduisez E_{pap} et R_{pap} d'une régression linéaire à la calculatrice, ou bien avec Python à l'aide de la fonction `numpy.polyfit` (cf. la doc sur internet).
6. On peut alors étudier les variations de R_{pap} en fonction de R_1, puis de C…

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(d)
Q2.(a) ET (d)
Les deux noms correspondent à la même chose ; on parle plutôt de régime libre si le régime permanent est nul, et de régime transitoire s'il est non nul.
Q3.(a)
C'est vrai uniquement si le système est stable.
Q4.(c)
Q5.(a)

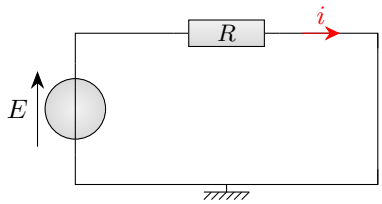
Réponses au QCM : ED linéaires d'ordre 1

Q6.(d)
L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = 2 + Ke^{-t/400}$
Q7.(d)
L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = \frac{2}{4} + Ke^{-t/25}$
Q8.(a)
L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = \frac{4}{0{,}5} + Ke^{-t/2}$

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E3.1 : Extinction du courant dans une bobine [*]

1. Comme dans le cours : $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 0$ car $e(t) = 0$.
2. L'équation est homogène, sa solution est de la forme $i(t) = A.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.
3. À $t = 0^-$, on sait que $e = E$ et que le régime continu est atteint donc la bobine est équivalente à un fil :



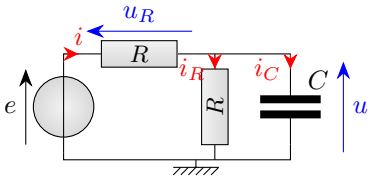
On en déduit facilement que $i(0^-) = \frac{E}{R}$ donc $i(0^+) = \frac{E}{R}$ par continuité du courant à travers une bobine, donc $A = \frac{E}{R}$. On a donc $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$.

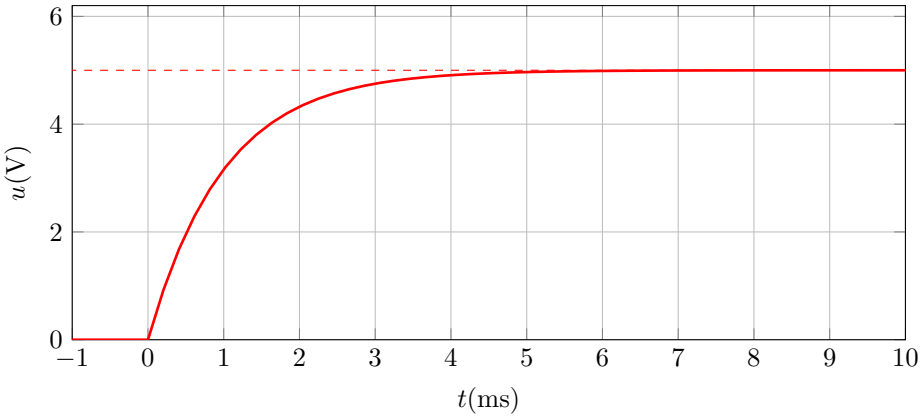
4. L'énergie de la bobine passe de $E_{bob} = \frac{1}{2}Li(0)^2 = \frac{LE^2}{2R^2}$ à 0. Pendant ce temps la résistance dissipe $E_{res} = \int_0^\infty Ri(t)^2dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-2Rt/L}dt = \left[-\frac{LE^2}{2R^2}e^{-2Rt/L}\right]_0^\infty = \frac{LE^2}{2R^2}$.

Corrigé de l'exercice E3.2 : Charge d'un condensateur en 2 étapes [**]

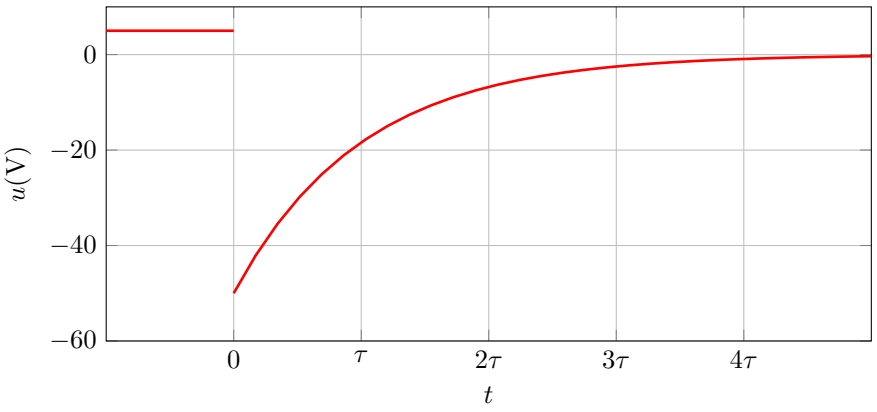
1.
   (a) Comme dans le cours : $RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = \frac{E}{2}$
   (b) Solution particulière constante : $u = \frac{E}{2}$. Solution de l'équation homogène : $u(t) = A.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$. Donc $u(t) = \frac{E}{2} + A.e^{-t/\tau}$ avec A un réel. Or initialement le condensateur est déchargé donc $u(0^+) = u(0^-) = 0$ donc $\frac{E}{2} + A = 0$ donc $A = -\frac{E}{2}$.
   Donc $u(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. On en tire $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}$.
   (c) $u(t)$ atteint la valeur $u_{lim} = \frac{E}{2}$. Donc le condensateur a stocké $E_{cond,1} = \frac{1}{2}C\frac{E^2}{2^2} - 0 = \frac{CE^2}{8}$ tandis que le générateur a fourni $W_{gén,1} = \int_0^\infty \frac{E}{2}i(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{CE^2}{4}e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{CE^2}{4}$.
2.
   (a) Seul e a changé : $RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = E$
   (b) On a de nouveau $u(t) = E + B.e^{-t/\tau}$ avec B un réel. Or le début de cette étape est la fin de l'étape précédente, donc $u(0^+) = u(0^-) = u_{lim} = \frac{E}{2}$ donc $E + B = \frac{E}{2}$ soit $B = -\frac{E}{2}$.
   Donc $u(t) = E - \frac{E}{2}e^{-t/\tau}$ et $i(t) = \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}$.
   (c) $u(t)$ atteint E donc le condensateur a stocké $E_{cond,2} = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{2}C\frac{E^2}{2^2} = \frac{3}{8}CE^2$. Le générateur a fourni $W_{gén,2} = \int_0^\infty Ei(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{CE^2}{2}e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{CE^2}{2}$.
3. Au final $E_{cond} = E_{cond,1} + E_{cond,2} = \frac{1}{2}CE^2$ et $W_{gén} = W_{gén,1} + W_{gén,2} = \frac{3}{4}CE^2$. Le rendement vaut donc $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} = 66\,\%$ ce qui est mieux que les 50 % de la charge directe sous tension E.

Corrigé de l'exercice E3.3 : Régime transitoire d'un circuit $R, R /\!/ C$ [**]

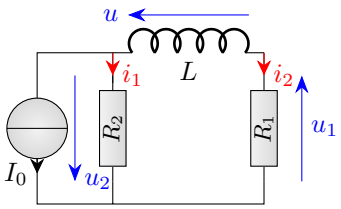


1. Par la loi des mailles : $u(t)+u_R(t) = e(t)$ donc $u(t)+R.i(t) = E$. Par la loi des nœuds : $u(t)+Ri_R(t)+Ri_C(t) = E$ soit $2u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = E$. On a donc $\tau\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = \frac{E}{2}$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$
2. Après quelques calculs : $u(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}$
3. $\tau = \frac{RC}{2} = 1\,\mathrm{ms}$
4. 

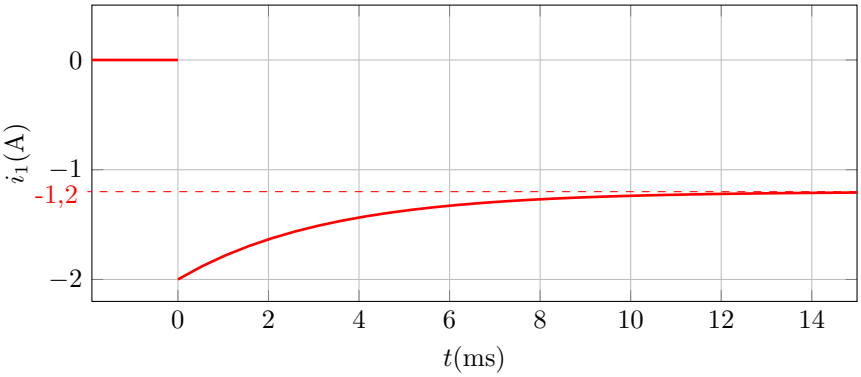
Corrigé de l'exercice E3.4 : Surtension due à une bobine [**]

1. En régime continu on remplace la bobine par un fil. La loi d'Ohm indique alors facilement $i_1(0^-) = \frac{E}{R}$ et $i_2(0^-) = \frac{E}{r}$.
2. Une fois K ouvert, on ne s'intéresse qu'à la maille du haut. C'est un RL série, on établit facilement l'équation $\frac{L}{R+r}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ (partir de la loi des mailles : $u(t) = Ri_1(t) + L\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$ puis $i_1(t) = -i_2(t) = -\frac{u(t)}{r}$).
   Les solutions de cette équation sont de la forme $u(t) = A.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.
   Pour les CI, on sait que i_1 est continue à cause de la bobine, donc $i_1(0^+) = \frac{E}{R}$. On voit facilement que $i_2(t) = -i_1(t)$ lorsque K est ouvert (c'est la même branche en sens inverse), et par la loi d'Ohm $u(t) = ri_2(t)$. Donc $u(0^+) = -\frac{r}{R}E$.
   On en déduit A, puis $u(t) = -\frac{r}{R}Ee^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.
3. On a une surtension si $r > R$. Elle peut même prendre une valeur très grande (si R est la résistance propre de la bobine, elle est de l'ordre de l'Ohm ; si on prend $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, on multiplie par environ 1000 la tension !).
4.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
t=np.linspace(0,5,100)
u=-50*np.exp(-t)
plt.plot(t,u)
plt.xlabel("t/tau")
plt.ylabel("u(V)")
plt.show()
```


Corrigé de l'exercice E3.5 : Circuit alimenté par un générateur de courant [**]

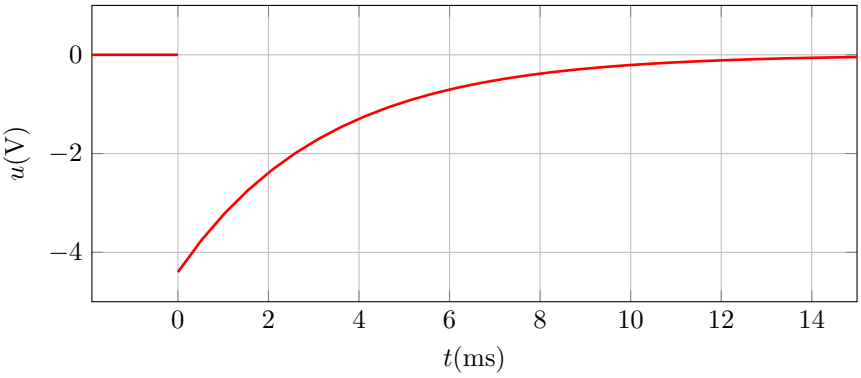


1. Loi des mailles : $u_1(t)+u(t)+u_2(t)=0$. Par les lois des composants, $R_1 i_2(t)+L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}-R_2 i_1(t)=0$. Par la loi des nœuds $i_2(t)=-I_0-i_1(t)$, donc $-R_1 I_0-R_1 i_1(t)-L\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}-R_2 i_1(t)=0$ d'où $\tau\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+i_1(t)=-\frac{R_1}{R_1+R_2}I_0$ avec $\tau=\frac{L}{R_1+R_2}$.
2. Solution particulière constante $i_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}I_0$, solution de l'équation homogène $i_1(t)=Ke^{-t/\tau}$, donc la forme générale des solutions est $i_1(t)=-\frac{R_1}{R_1+R_2}I_0+Ke^{-t/\tau}$ avec $K\in\mathbb{R}$. Or i_2 est continue mathématiquement à cause de la bobine, donc $i_2(0^-)=i_2(0^+)=0$ donc par la loi des nœuds $i_1(0^+)=-I_0$. On en tire que $-\frac{R_1}{R_1+R_2}I_0+K=-I_0$ donc $K=I_0\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-1\right)=-\frac{R_2}{R_1+R_2}I_0$ et donc $i_1(t)=-\frac{I_0}{R_1+R_2}I_0\left(R_2e^{-t/\tau}+R_1\right)$; numériquement, $\tau=3{,}3\,\text{ms}$ et $\frac{R_1}{R_1+R_2}I_0=1{,}2\,\text{A}$.



Aux temps longs, on a atteint le régime permanent, donc la bobine est équivalente à un fil, et un schéma équivalent permet d'appliquer le diviseur de courant : $i_1(\infty)=-I_0\frac{1/R_2}{1/R_1+1/R_2}=-I_0\frac{R_1}{R_1+R_2}$.

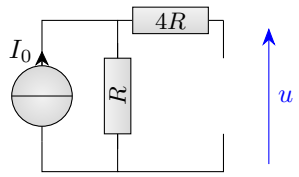
3. Loi des mailles : $u_1(t)+u(t)+u_2(t)=0$. Par les lois des composants, $R_1 i_2(t)+u(t)-R_2 i_1(t)=0$. Par la loi des nœuds $i_1(t)=-I_0-i_2(t)$, donc $(R_1+R_2)i_2(t)+u(t)+R_2 I_0=0$. Pour relier $i_2(t)$ à $u(t)$, on sait que $u(t)=L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$. On dérive donc l'équation : $(R_1+R_2)\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=0$ donc $\frac{R_1+R_2}{L}u(t)+\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=0$ d'où enfin $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u(t)=0$ avec $\tau=\frac{L}{R_1+R_2}$.
Rapidement : on trouve la forme générale des solutions sous la forme $u(t)=Ke^{-t/\tau}$. Par continuité mathématique de $i_2(t)$ à cause de la bobine, on sait que $i_2(0^+)=0$ et $i_1(0^+)=-I_0$ donc par la loi d'Ohm $u_1(0^+)=0$ et $u_2(0^+)=R_2 I_0$ donc par la loi des mailles $u(0^+)=-R_2 I_0$. On en tire $u(t)=-R_2 I_0 e^{-t/\tau}$.



4. Si on éteint le générateur, on obtient un circuit RL série, d'équation différentielle $\tau\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+i_1(t)=0$; la seule difficulté se trouve dans les conditions initiales : c'est i_2 qui est continue mathématiquement à cause de la bobine, et un petit calcul avec le schéma précédent en régume permanent (bobine=fil) donne $i_2(0^-)=i_2(0^+)=-I_0\frac{R_2}{R_1+R_2}$; or une fois le générateur de courant éteint, la loi des nœuds donne $i_1(t)=-i_2(t)$ donc on en tire la condition initiale $i_1(0^+)=I_0\frac{R_2}{R_1+R_2}$ puis $i_1(t)=I_0\frac{R_2}{R_1+R_2}e^{-t/\tau}$.

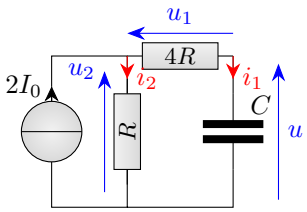
Corrigé de l'exercice E3.6 : Étude d'un circuit d'ordre 1 [**]

1. En régime permanent (ici continu car $I_0 = \text{cst}$) :



Tout le courant passe dans la résistance R, donc par la loi d'Ohm la tension aux bornes de R vaut RI_0 et celle aux bornes de $4R$ vaut 0. Par la loi des mailles, on trouve alors : $u(0^-) = RI_0$.

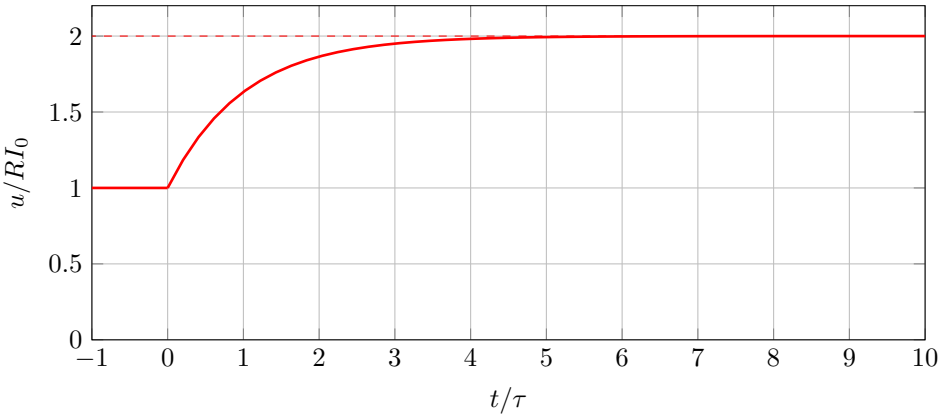
2.



$u(t) + u_1(t) = u_2(t)$ (loi des mailles) donc $u(t) + 4Ri_1(t) = Ri_2(t) = R(2I_0 - i_1(t))$. Par la loi du condensateur : $u(t) + 4RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 2RI_0 - RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. Donc $\tau\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 2RI_0$ avec $\tau = 5RC$

3. On trouve (je vous laisse rédiger…) $u(t) = 2RI_0 + K.e^{-t/\tau}$. Or la tension aux bornes du condensateur est continue donc $u(0^+) = RI_0 = 2RI_0 + K$ d'où $K = -RI_0$ donc $u(t) = RI_0\left[2 - e^{-t/\tau}\right]$

4.

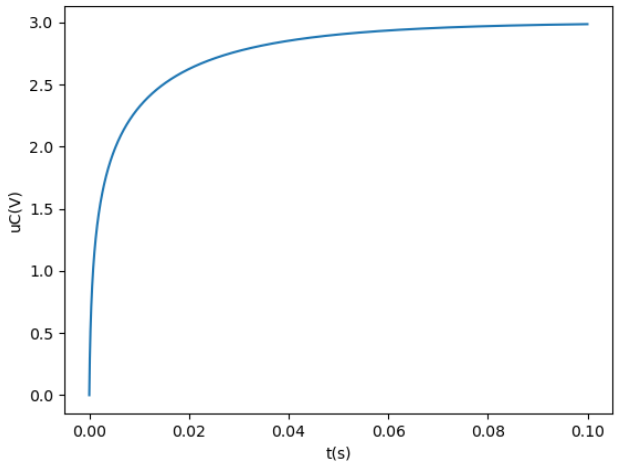


Corrigé de l'exercice E3.7 : Charge d'un condensateur avec une LED témoin [**]

1. Loi des mailles : $u_C(t) + u_L(t) = E$ or $u_L(t) = U_s \ln\frac{i(t)+I_0}{I_0}$ et $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $u_C(t) + U_s \ln\left(\frac{C}{I_0}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + 1\right) = E$.
On commence par isoler la dérivée : $\ln\left(\frac{C}{I_0}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 1\right) = \frac{E-u_C}{U_s}$ donc $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{I_0}{C}e^{\frac{E-u_C}{U_s}} - \frac{I_0}{C}$.
2. On sait que résistance fois capacité = temps. Ici on n'a pas de résistance, mais $\frac{U_s}{I_0}$ est homogène à une résistance, donc $\tau = \frac{U_s C}{I_0}$ a la dimension d'un temps. Numériquement, $\tau = 26\,\text{ms}$.
3. Programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
C,E,Us,I0=220e-9,3,0.6,5e-6
tau=Us*C/I0 # temps caractéristique
h=tau/1000 # choix du pas temporel
tmax=0.1 # temps de simulation
N=int(tmax/h) # nb de points
```

```
tab_t=np.zeros(N+1) # tableau des temps
tab_uc=np.zeros(N+1) # tableau des tensions
tab_t[0],tab_uc[0]=0,0 # initialisation
def derivee(uc,t): # terme de droite de l'ED
    return I0/C*(np.exp((E-uc)/Us)-1)
for n in range(0,N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
    tab_uc[n+1]=tab_uc[n]+h*derivee(tab_uc[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("uC(V)")
plt.show()
```

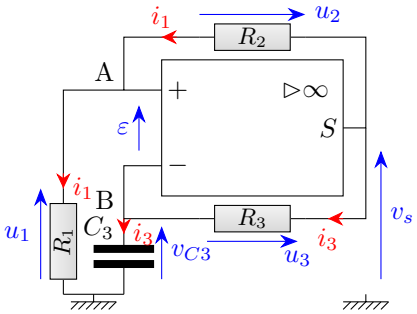


On a bien une charge jusqu'à 3 V, mais avec un profil très différent d'une exponentielle.

4. On mesure un temps de charge à 90 % égal à 25 ms.

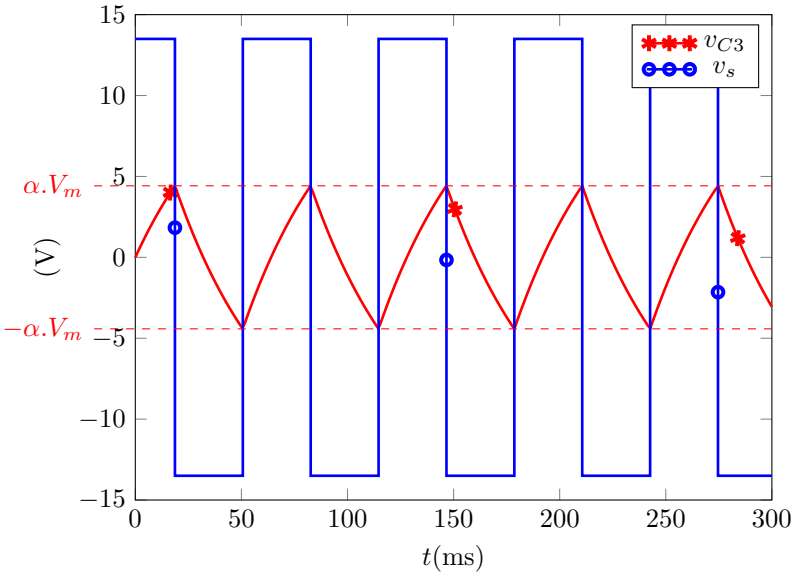
Corrigé de l'exercice E3.8 : Multivibrateur astable (adapté de Centrale Supélec) [***]

On place les tensions et les courants inconnus, en tenant déjà compte du fait que les courants de polarisation sont nuls.



1. On a deux possibilités pour cette question.
   Par la loi des mailles à gauche : $\varepsilon(t) = u_1(t) - v_{C3}(t)$ or R_1 et R_2 sont en série (car $i^+ = 0$) et la tension aux bornes des deux vaut v_s, donc par le diviseur de tension $u_1(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_s(t) = \alpha.v_s(t)$. On en déduit que $\varepsilon(t) = \alpha.v_s(t) - v_{C3}(t)$.
   Par le théorème de Millman : $\varepsilon(t) = v_A(t) - v_B(t) = \frac{\frac{v_s(t)}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} - v_{C3}(t) = \alpha.v_s(t) - v_{C3}(t)$.
2. La question indique d'utiliser τ, ce qui fait penser à la branche du bas. On peut y écrire la loi d'additivité $v_{C3}(t) + u_3(t) = v_s(t)$ or $u_3(t) = R_3.i_3(t)$ (loi d'Ohm) et par la loi du condensateur $i_3(t) = C_3 \frac{\mathrm{d}v_{C3}(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où $v_{C3}(t) + R_3C_3 \frac{\mathrm{d}v_{C3}(t)}{\mathrm{d}t} = v_s(t)$ ce qui est l'équation demandée.

3. On a donc $\begin{cases}\tau\frac{\mathrm{d}v_{C3}(t)}{\mathrm{d}t}+v_{C3}(t)=+V_{sat}\\ \varepsilon(t)=\alpha.V_{sat}-v_{C3}(t)\end{cases}$ qu'on résout (je passe rapidement) : $v_{C3}(t)=V_{sat}+Ke^{-t/\tau}$ et par la condition initiale $v_{C3}(0)=0$ on trouve $v_{C3}(t)=V_{sat}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$.
On a alors $\varepsilon(t)=\alpha.V_{sat}-V_{sat}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$; la tension de sortie reste à $+V_{sat}$ tant que $\varepsilon(t)>0$, soit $\left(1-e^{-t/\tau}\right)<\alpha$, soit $e^{-t/\tau}>1-\alpha$ donc $t<-\tau\ln(1-\alpha)$; après cet instant, la sortie bascule à $-V_{sat}$.
4. On a alors $\begin{cases}\tau\frac{\mathrm{d}v_{C3}(t)}{\mathrm{d}t}+v_{C3}(t)=-V_{sat}\\ \varepsilon(t)=-\alpha.V_{sat}-v_{C3}(t)\end{cases}$ dont la résolution donne $v_{C3}(t)=-V_{sat}+K'e^{-t/\tau}$; mais il faut faire attention à la condition initiale : à la fin de la phase précédente, $\varepsilon=0$ soit $v_{C3}=\alpha.V_{sat}$; par continuité mathématique de la tension aux bornes du condensateur, c'est aussi la tension au début de la nouvelle phase : $v_{C3}(0^+)=\alpha.V_{sat}$ d'où on tire $v_{C3}(t)=V_{sat}\left(-1+(1+\alpha)e^{-t/\tau}\right)$.
v_s reste à $-V_{sat}$ tant que $\varepsilon(t)<0$, donc que $v_{C3}(t)>-\alpha.V_{sat}$, soit $-1+(1+\alpha)e^{-t/\tau}>-\alpha$ ou encore $t<-\tau\ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=\tau\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$; après cet instant, v_s rebascule à $+V_{sat}$.
5. On va avoir ensuite des basculements réguliers tous les $\tau\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, donc une oscillation de période $T=2\tau\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=64\,\mathrm{ms}$:



Corrigé de l'exercice E3.9 : Hacheur dévolteur [***]

1. *Première phase*
   (a) On obtient un simple circuit série avec des tensions E et E_M, une bobine L_M et une résistance R_M.
   Par la loi des mailles : $E-E_M=R_Mi_M(t)+L_M\frac{\mathrm{d}i_M(t)}{\mathrm{d}t}$ soit $i_M(t)+\tau\frac{\mathrm{d}i_M(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{E-E_M}{R_M}$ avec $\tau=\frac{L_M}{R_M}$
   (b) La solution est de la forme $i_M(t)=\frac{E-E_M}{R_M}+Ke^{-t/\tau}$. Or $i_M(0^+)=I_0$ donc $\frac{E-E_M}{R_M}+K=I_0$ et $K=I_0-\frac{E-E_M}{R_M}$. Donc $i_M(t)=I_0e^{-t/\tau}+\frac{E-E_M}{R_M}\left[1-e^{-t/\tau}\right]$
   (c) Donc $I_1=I_0e^{-DT/\tau}+\frac{E-E_M}{R_M}\left[1-e^{-DT/\tau}\right]$.
2. *Seconde phase*
   (a) On a cette fois seulement E_M, L_M et R_M.
   La loi des mailles donne alors $i_M(t)+\tau\frac{\mathrm{d}i_M(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{E_M}{R_M}$
   (b) L'intensité à travers la bobine est continue, donc $i_M(0^+)=I_1$.
   Après quelques calculs on trouve donc $i_M(t)=I_1e^{-t/\tau}+\frac{E_M}{R_M}\left[e^{-t/\tau}-1\right]$
   (c) $I_2=I_1e^{-(1-D)T/\tau}-\frac{E_M}{R_M}e^{-(1-D)T/\tau}$
3. On remplace les exponentielles et on obtient : $I_0-\frac{T}{\tau}I_0+\frac{E}{R_M}\frac{DT}{\tau}-\frac{E_M}{R_M}\frac{T}{\tau}=I_0$
   En simplifiant on trouve $I_0=\frac{DE-E_M}{R_M}$
4. $I_0>0$ nécessite $D>\frac{E_M}{E}$; en-dessous, le moteur ne tournera pas.
   Si $D=1$ alors $I_0=\frac{E-E_M}{R_M}$.
5. On veut que $\frac{10D-6}{1{,}2}=1$ soit $D=0{,}72$. De plus $T\ll\tau=1{,}75\,\mathrm{ms}$.

Corrigé de l'exercice E3.10 : Arc électrique [***]

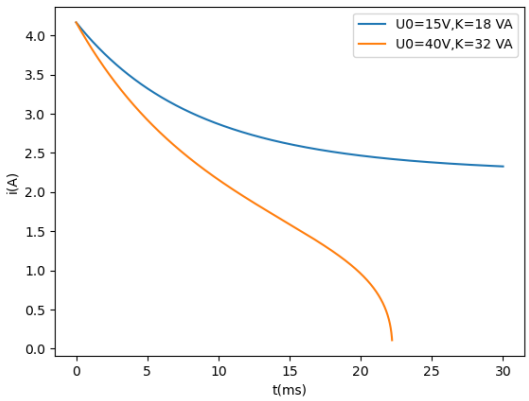
1. En régime continu, la bobine est un fil. Par la loi de Pouillet, $i = \frac{E}{R} = 4{,}2\,\text{A}$.
2. À cause de la bobine, le courant soit être continu mathématiquement, donc $i(0^+) = 4{,}2\,\text{A}$.
3. Loi des mailles puis loi des composants : $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + U_0 + \frac{K}{i(t)} = E$
4. On isole $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = f(i) = E - U_0 - Ri - \frac{K}{i}$; on dérive : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}i} = -R + \frac{K}{i^2}$ d'où le tableau de variations :

i	0		i_1		$\sqrt{\frac{K}{R}} = 1{,}2\,\text{A}$		i_2		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}i}$			$+$		0		$-$		
f	$-\infty$	↗	0	↗	$E-U_0-2\sqrt{KR}$ $= 5{,}6\,\text{V}$	↘	0	↘	$-\infty$

5. i_1 et i_2 vérifient $f(i) = 0$ soit $12i^2 - 35i + 18 = 0$ donc $i = \frac{35 \pm 19}{24}$: on trouve donc numériquement $i_1 = 0{,}67\,\text{A}$ et $i_2 = 2{,}25\,\text{A}$
6. Si $i < i_1$ alors $f(i) < 0$ donc $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < 0$ donc le courant i diminue et tend vers 0.
   Si $i_1 < i < i_2$ alors $f(i) > 0$ donc $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$ donc le courant i augmente et tend vers i_2.
   Si $i_2 < i$ alors $f(i) < 0$ donc $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < 0$ donc le courant i diminue et tend vers i_2.
   La solution i_1 est donc instable et la position i_2 est stable.
   Si au départ $i < i_1$ alors le courant tend vers 0 et l'étincelle s'arrête ; dans le cas contraire le courant tend vers i_2 et l'étincelle ne s'arrête jamais.
7.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
E,L,R=50,85e-3,12
U0a,Ka=15,18
U0b,Kb=40,32
def euler(U0,K,tmax):
    tau=L/R
    pas=tau/1000
    N=int(tmax/pas)
    tab_t=np.zeros(N+1)
    tab_i=np.zeros(N+1)
    tab_i[0]=E/R
    for n in range(N):
        tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
        tab_i[n+1]=tab_i[n]+pas*(E-U0-R*tab_i[n]-K/tab_i[n])/L
    return tab_t,tab_i
tab_ta,tab_ia=euler(U0a,Ka,3e-2)
tab_tb,tab_ib=euler(U0b,Kb,2.22e-2)
plt.figure()
plt.plot(tab_ta*1000,tab_ia,label="U0=15V,K=18␣VA")
plt.plot(tab_tb*1000,tab_ib,label="U0=40V,K=32␣VA")
plt.xlabel("t(ms)")
plt.ylabel("i(A)")
plt.legend()
plt.show()
```

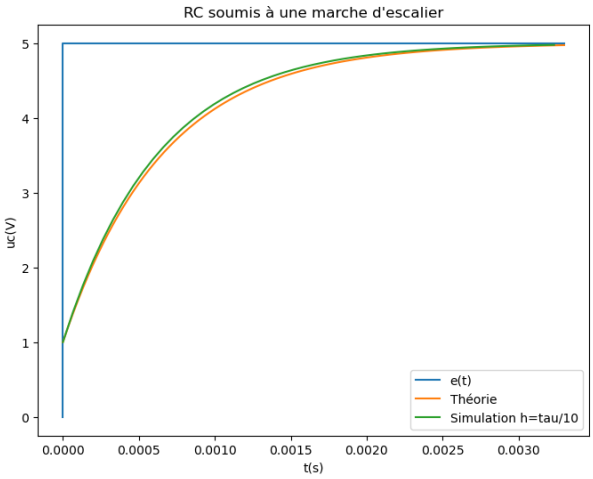
   Remarque : Dans le second cas, i atteint 0 à 22,2 ms, et ensuite la formule diverge, donc il faut arrêter la simulation pour ne par voir apparaître des choses bizarres.

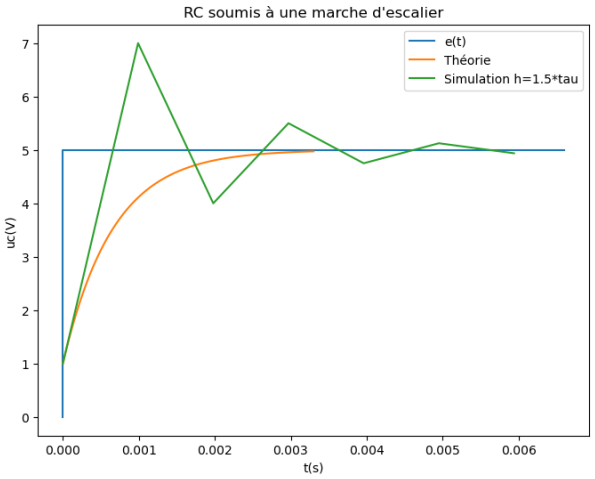

U0=15V,K=18 VA
U0=40V,K=32 VA
i(A)
t(ms)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
0
5
10
15
20
25
30

Réponses aux TDs numériques

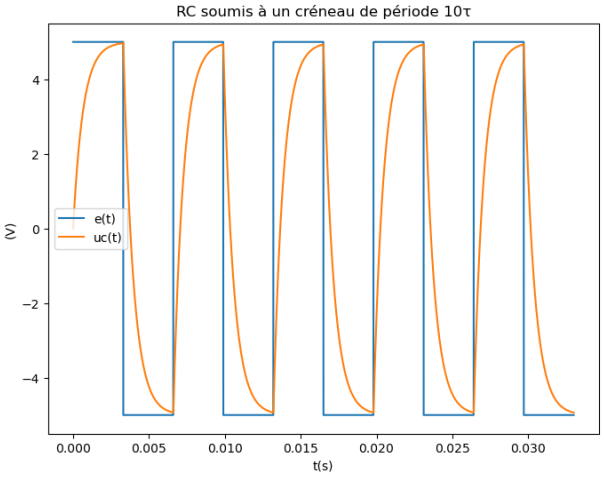
Réponses au TD d'info : Circuit RC soumis à une tension quelconque

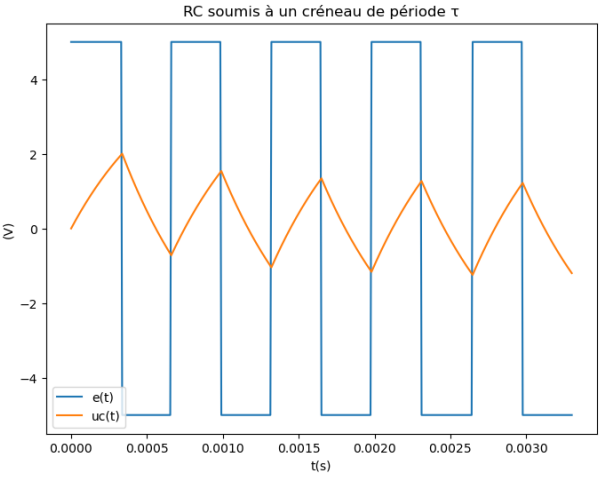
Avec une marche d'escalier, on obtient une courbe proche de l'exponentielle pour un par inférieur à $\frac{\tau}{10}$; pour un pas trop grand, la solution devient oscillante (pas $> \tau$) voire instable (pas $> 2\tau$).



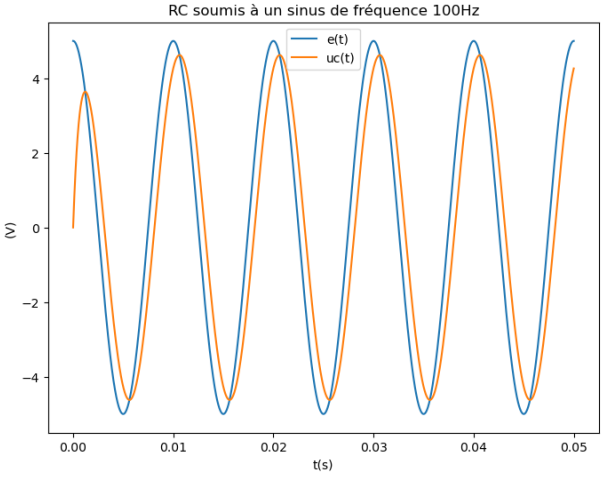


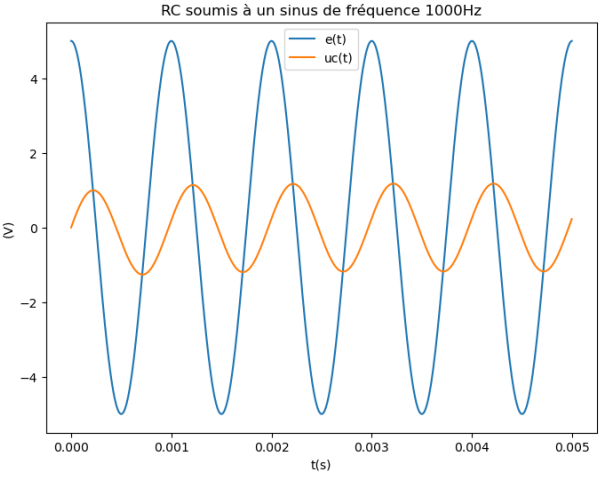
Pour une tension en créneau, si elle est suffisamment lente, on observe des cycles de charge/décharge ; si elle est trop rapide, le condensateur n'a pas le temps de se charger et décharger, et la tension de sortie est une sorte de tension en dents de scie d'amplitude faible.





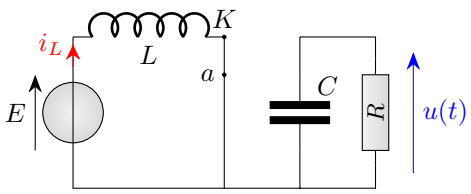
Pour une tension sinusoïdale, on observe que u_C est une sinusoïde de même fréquence que e, mais l'amplitude et la phase dépendent de la fréquence.





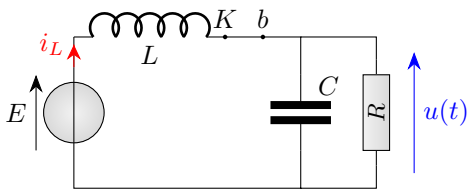
Réponses au TD d'info : Convertisseur Boost

phase a

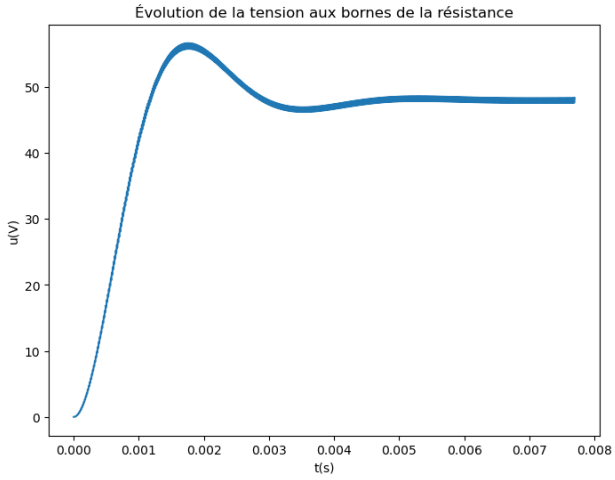


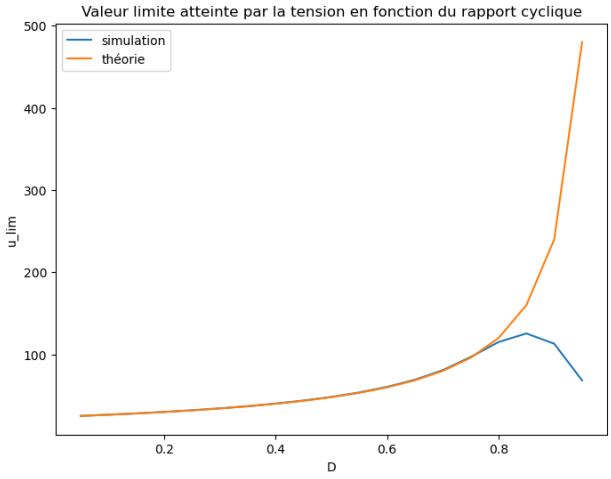
Durant la phase a : $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u}{RC} \end{cases}$

phase b



Durant la phase b : $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E-u}{L} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_L}{C} - \dfrac{u}{RC} \end{cases}$

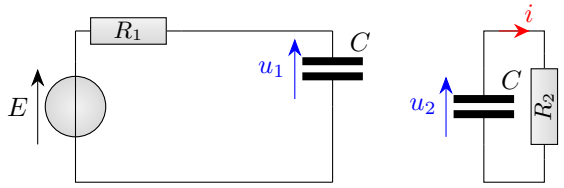




On voit que le système atteint un régime stable après un court transitoire, avec une tension supérieure à la tension E. En faisant varier le rapport cyclique, on voit qu'on peut régler la valeur de la tension atteinte, mais pour de trop grandes valeurs d'amplification la courbe simulée décroche ; ici on a par exemple un maximum de 125 V pour $D = 0{,}85$.

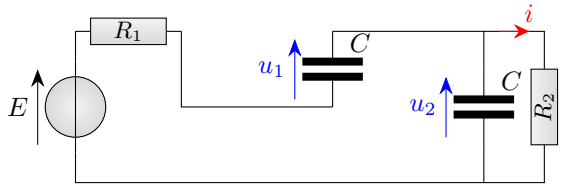
Réponses au TD d'info : Doublage d'une tension par une pompe à charges

Durant la phase a :

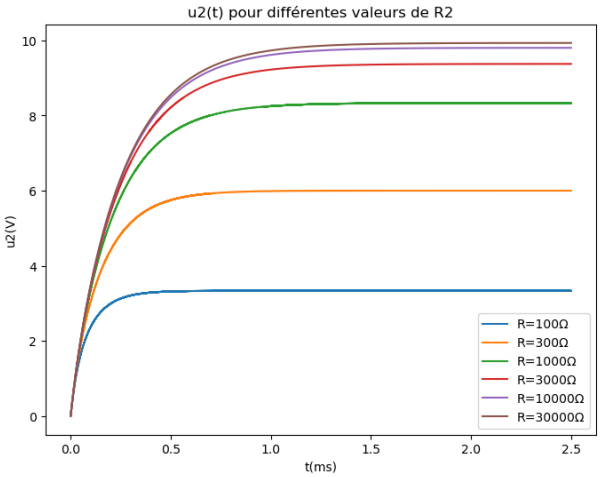


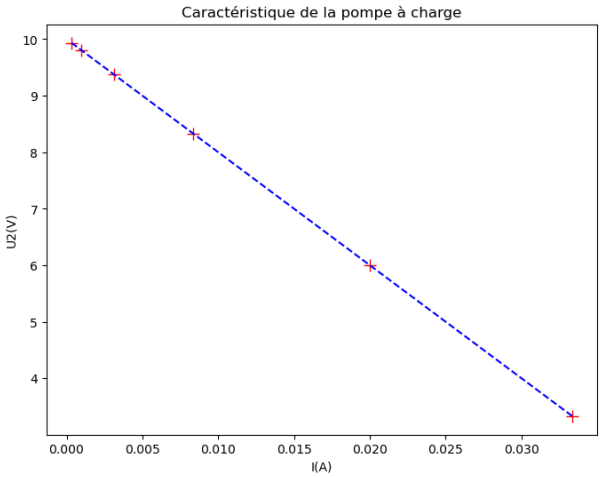
$$\begin{cases} \tau_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1 = E \\ \tau_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = 0 \end{cases}$$

Durant la phase b :



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_2}{R_2 C} - \dfrac{1}{R_1 C}\left(E + u_1 - u_2 - \frac{R_1}{R_2}u_2\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R_1 C}\left(E + u_1 - u_2 - \frac{R_1}{R_2}u_2\right) \end{cases}$$





On observe que la tension fournie diminue lorsque le courant fourni augmente, selon une loi linéaire représentable par un générateur de Thévenin de fem $2E = 10\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $200\,\Omega$.

Chapitre E4 Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Programme p.330

Cours p.318
- E4.A. Modèle de circuit linéaire d'ordre 2 : le RLC série
- E4.B. Évolution temporelle d'un circuit LC sans amortissement
- E4.C. Évolution temporelle du circuit RLC amorti
- E4.D. Stabilité des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2
- E4.E. Résolution numérique

Conseils p.331

QCMs p.332

Exercices p.334

TDs numériques p.338

E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Cours

Les circuits d'ordre 1 nous ont fait découvrir les principales propriétés d'un régime transitoire : ensemble des solutions (solution particulière + ensemble des solutions de l'équation homogène), temps caractéristique, stabilité,...Nous allons maintenant passer aux circuits d'ordre 2 qui vont conserver ces mêmes propriétés tout en en faisant apparaître d'autres, entre autres, les oscillations. On va bien sûr étudier essentiellement les circuits linéaires.

Définition : Forme canonique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'inconnue f s'écrit sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f(t) = 0 \qquad \text{(E4.1)}$$

où ω_0 est la *pulsation propre* (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) et Q est un nombre sans dimension appelé *facteur de qualité*.

Remarque : On va voir que Q caractérise l'amortissement présent dans le circuit. Plus Q est grand, moins il y a d'amortissement (ou de dissipation d'énergie) dans le circuit.

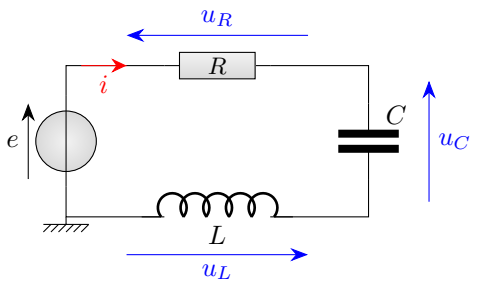
Remarque : Cette forme canonique n'est possible que si le signe du coefficient du terme non dérivé est le même que celui du terme dérivé deux fois. On supposera que c'est le cas dans les études théoriques utilisant cette forme canonique ; si ce n'est pas le cas, on verra comment on peut calculer les solutions, mais sans passer par la forme canonique.

Cette forme canonique va nous permettre d'établir des résultats qui seront vrais pour tout circuit, une fois son ED mise sous forme canonique ; même si on traitera dans le cours un exemple particulier.

E4.A. Modèle de circuit linéaire d'ordre 2 : le RLC série

Le circuit modèle d'ordre 2 est le *RLC* série (figure E4.1). On peut établir l'ED vérifiée par différentes grandeurs ; nous considérerons ici la tension aux bornes du condensateur.

FIGURE E4.1 : Circuit *RLC* série.



Propriété : Équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

La tension aux bornes du condensateur d'un *RLC* série vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t) \qquad \text{(E4.2)}$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(E4.3)}$$

Démonstration

Loi des mailles : $u_L(t)+u_C(t)+u_R(t)=e(t)$. Or $u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ et $i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $u_L(t)=LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}$. De même $u_R(t)=Ri(t)$ et $i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $u_R(t)=RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$. On en déduit que $LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=e(t)$.
Pour avoir la forme canonique, on divise par LC : $\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C(t)=\frac{e(t)}{LC}$. On identifie : $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}$ donc $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ qui est grand pour de faibles résistances (amortissement faible).

Remarque : On peut aussi établir l'équation vérifiée par $u_R(t)$, ou $u_L(t)$, ou $i(t)$: la forme de gauche sera toujours la même, en particulier ω_0 et Q seront les mêmes, par contre le terme de droite changera. Mais ces expressions de ω_0 et Q ne sont valables que pour ce circuit particulier ; pour d'autres circuits, l'expression sera différente.

E4.B. Évolution temporelle d'un circuit LC sans amortissement

Avant de traiter le cas général, nous allons voir le cas particulier où la résistance est nulle, ou en tout cas très faible. Le cas $R\to 0$ est une limite qui correspond à un facteur de qualité Q tendant vers l'infini.

B.1. Forme des solutions

Propriété : Solutions de l'équation homogène d'une équation linéaire d'ordre 2 sans amortissement

L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2f(t)=0$ a pour ensemble de solutions

$$\left\{t\mapsto A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t),(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\} \tag{E4.4a}$$

Une autre façon de l'écrire est

$$\left\{t\mapsto D\cos(\omega_0 t+\phi),(D,\phi)\in\mathbb{R}^2\right\} \tag{E4.4b}$$

L'ensemble des solutions est défini avec deux inconnues ; il faudra donc deux conditions initiales, le plus souvent $f(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

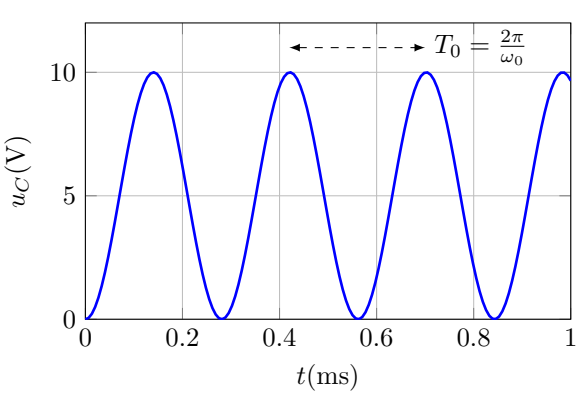
Exemple : Oscillations d'un LC soumis à un échelon de tension

On considère un circuit LC avec $C=100\,\mathrm{nF}$ et $L=20\,\mathrm{mH}$ soumis à une tension $e(t)$ qui est nulle pour $t<0$ et constante (égale à $E=5\,\mathrm{V}$) pour $t>0$. Initialement, le condensateur est déchargé et le courant est nul. Déterminez et tracez $u_C(t)$.

Il faut commencer par établir l'équation ; en partant de la figure E4.1 sans résistance, on écrit que $E=u_L(t)+u_C(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+u_C(t)$.
On met sous forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}u_C(t)=\frac{1}{LC}E$ soit $\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u_C(t)=\omega_0^2E$ avec $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=22\,360\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ ce qui correspond à une fréquence propre $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=3560\,\mathrm{Hz}$ (ou encore une période propre $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0{,}28\,\mathrm{ms}$).
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est de la forme $u_C(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t),(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
On cherche une solution particulière constante : $u_C=\mathrm{cst}$ donc $\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}=0$; l'ED devient alors $0+\omega_0^2u_C=\omega_0^2E$ donc $u_C=E$.
L'ensemble des solutions est donc de la forme $u_C(t)=E+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$. On doit maintenant appliquer deux conditions initiales (CI) :

- la tension aux bornes du condensateur est continue mathématiquement. Or le condensateur est déchargé initialement, donc $u_C(0^+)=0$ donc $E+A+0=0$ soit $A=-E$.
- le courant à travers la bobine est continu mathématiquement donc, ici, $i(0^+)=0$ soit $C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)=0$ donc $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)=0$. Pour l'exprimer, on dérive : $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=0-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$; donc

$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_0$ d'où on tire $B\omega_0 = 0$ donc $B = 0$.
On en déduit que $u_C(t) = E - E\cos(\omega_0 t)$.



Ainsi, on voit qu'un circuit LC non amorti par une résistance va osciller indéfiniment à une pulsation égale à sa pulsation propre. Un tel système permet de créer une tension sinusoïdale. En pratique, la résistance n'est jamais nulle, mais il existe des systèmes permettant de compenser cette résistance de façon à former un oscillateur, dans les montres à quartz par exemple.

B.2. Énergie électrique en régime libre

Le régime libre, c'est le régime dans lequel le système n'est plus soumis à aucune source : $e = 0\,\mathrm{V}$. Les solutions sont alors uniquement les solutions de l'équation homogène : $u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou $u_C(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi)$ avec A, B ou D, ϕ des constantes déterminées par les conditions initiales. Pour qu'elles soient non nulles, il faut qu'on ait auparavant alimenté le circuit. On peut donc observer ce régime, par exemple, en alimentant un LC série avec un générateur continu, puis en coupant le générateur.

On va étudier ici l'énergie d'un LC en régime libre. Pour cela, on commence par une propriété générale.

Propriété : Énergie électrique d'un LC en régime libre

En régime libre, l'énergie électrique totale (somme de celle du condensateur et de celle de la bobine) est constante.

Démonstration

Pour effectuer un bilan énergétique, il faut écrire la loi des mailles : $u_C(t) + u_L(t) = 0$ (en régime libre).
Puis on multiplie par l'intensité : $u_C(t).i(t) + u_L(t).i(t) = 0$. Par les lois du condensateur et de la bobine, on en déduit que $C.u_C(t).\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + L.i(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.
On reconnaît à gauche une dérivée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2\right] = 0$ donc $\frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \mathrm{cst}$.

On peut aller plus loin en regardant comment évoluent les énergies du condensateur et de la bobine. Pour cela, on va utiliser la forme $u_C(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi)$ qui est plus pratique pour les calculs. Les valeurs de D et ϕ importent peu, elles sont déterminées par les CI.

Propriété : Énergie du condensateur et de la bobine en régime libre

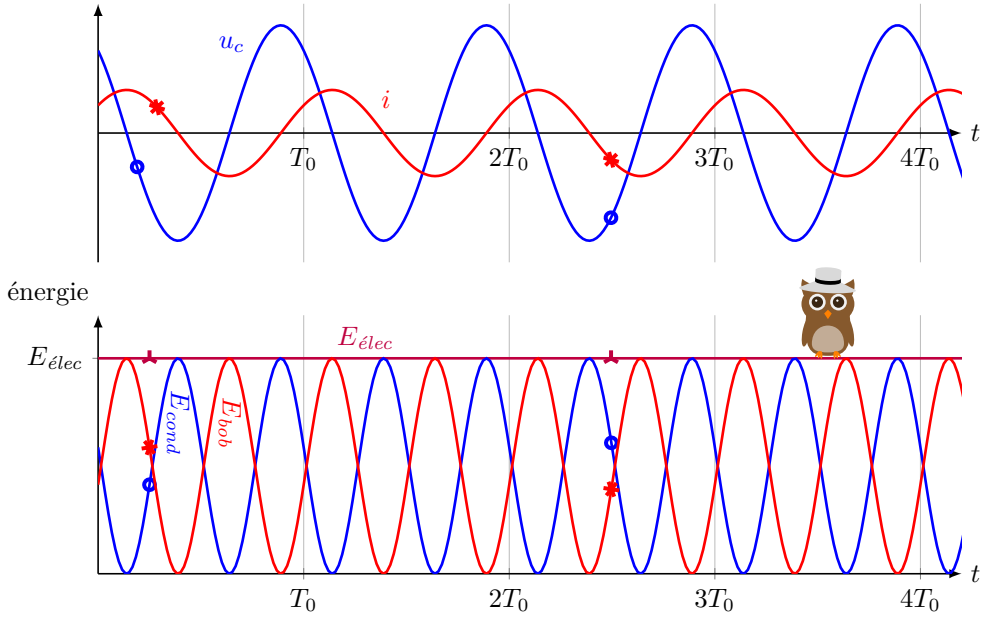
En régime libre, l'énergie E_{cond} du condensateur et l'énergie E_{bob} de la bobine oscillent en opposition de phase à la pulsation $2\omega_0$; leur somme est constante (voir figure E4.2).

Démonstration

On pose $u_C(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi)$. Alors $E_{cond}(t) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2 = \frac{1}{2}CD^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$.
On a aussi $E_{bob}(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$ or $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -C\omega_0 D\sin(\omega_0 t + \phi)$ donc $E_{bob}(t) = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2 D^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$.
Or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ donc $E_{bob}(t) = \frac{1}{2}CD^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$.
Donc $E_{élec}(t) = E_{cond}(t) + E_{bob}(t) = \frac{1}{2}CD^2\left(\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)\right] = \frac{1}{2}CD^2 = \mathrm{cst}$; cette constante

dépend de D donc des conditions initiales.
De plus, les formules $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ montrent que E_{cond} et E_{bob} seront la somme d'une constante et d'un terme de la forme $\cos(2\omega_0 t + 2\phi)$ qui oscille à la pulsation $2\omega_0$.

FIGURE E4.2 : Énergie l'un LC en régime libre.



E4.C. Évolution temporelle du circuit RLC amorti

Nous allons maintenant nous intéresser à un circuit RLC avec une résistance R qui va dissiper l'énergie et amortir les oscillations. Le première chose à savoir faire est de déterminer les solutions de l'équation homogène.

C.1. Forme générale des solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

La résolution d'une ED linéaire homogène d'ordre 2 passe par celle de son polynôme caractéristique :

Propriété : Ensembles des solution d'une ED homogène d'ordre 2

On associe à l'ED homogène $a.\dfrac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + b.\dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + c.u_c(t) = 0$ son équation caractéristique : $a.X^2 + b.X + c$.
Les solutions dépendent du signe de son discriminant Δ :

— si $\Delta > 0$ alors le polynôme a deux racines réelles notées r_1 et r_2 ; l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\left\{t \mapsto A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{(E4.5a)}$$

— si $\Delta = 0$ alors le polynôme a une racine réelle notée r_0 ; l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\left\{t \mapsto (A.t + B).e^{r_0 t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{(E4.5b)}$$

— si $\Delta < 0$ alors le polynôme a deux racines réelles conjuguées $r \pm j.q$; [a] l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\left\{t \mapsto e^{rt}\left(A\cos(qt) + B\sin(qt)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{(E4.5c)}$$

$$\text{ou } \left\{t \mapsto D.e^{rt}\cos(qt+\phi), (D,\phi) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{(E4.5d)}$$

a. En électricité, i désigne l'intensité, donc on note par la lettre j l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

Remarque : En physique, pour une équations différentielle d'ordre 2 avec des dérivées temporelles, les racines de l'équation caractéristique ont une unité : elles sont en s^{-1}.

On va maintenant appliquer cela à notre équation $\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. Les 3 cas précédents ont donnent lieu à 3 régimes différents.

C.2. Régime pseudo-périodique

Propriété : Solutions en régime pseudo-périodique

Lorsque $\Delta < 0$ (soit $|Q| > \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a 2 racines complexes : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Alors les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.\left(A.\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + B.\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$
$$= D.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t + \phi\right)$$

c'est-à-dire qu'elles sont le produit d'une exponentielle dont le coefficient est la *partie réelle des racines*, par une fonction sinusoïdale de pulsation égale à la *partie imaginaire des racines*.

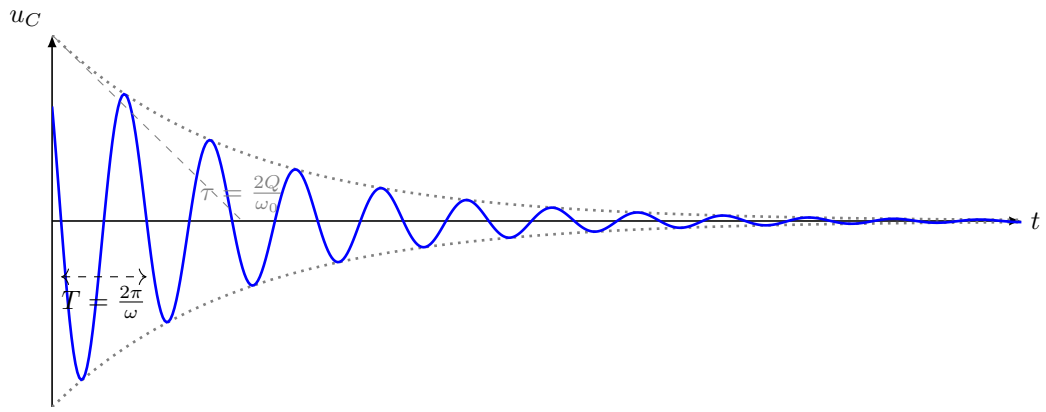
Remarque : Dans le suite de ce paragraphe, on supposera que $Q > 0$ donc $Q > \frac{1}{2}$; les facteurs de qualité négatifs donnent des solutions instables, on en reparlera plus loin.

On a donc une fonction sinusoïdale de la forme $\cos(\omega t)$ de pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$; en fait on parle de pseudo-pulsation, et de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, car la fonction complète n'est pas strictement périodique : le cosinus est multiplié par un terme exponentiel.

Quand on a une fonction de la forme $x(t) = f(t).\cos(\omega t)$ on dit qu'il s'agit d'une fonction pseudo-oscillante d'enveloppe $f(t)$. Comme $\cos(\omega t)$ oscille entre 1 et -1, la fonction complète $x(t)$ oscille entre $+f(t)$ et $-f(t)$. On trace donc les courbes de $f(t)$ et $-f(t)$, puis on trace une fonction qui oscille entre ces deux bornes avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La forme de la solution est représentée sur la figure E4.3. On constate que la fonction oscille avec une période $\frac{2\pi}{\omega}$ tout en s'atténuant avec un temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ (en effet, on peut écrire $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ sous la forme $e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.)

FIGURE E4.3 : Solution de l'équation homogène en régime pseudo-périodique (en pointillés, l'enveloppe exponentielle).



Propriété : Pseudo-pulsation pour un amortissement très faible

Lorsque $Q^2 \gg 1$, la pseudo-pulsation ω est quasiment égale à la pulsation propre ω_0.

Démonstration

On a vu que $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Si $Q^2 \gg 1$ alors $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$.

Remarque : On écrit parfois qu'il faut que $Q \gg 1$, mais en fait ce n'est pas nécessaire, il suffit que $4Q^2 \gg 1$; en pratique, si $Q > 3$ c'est suffisant.

Propriété : Nombre d'oscillations pour un amortissement très faible

Lorsque $Q^2 \gg 1$ ($Q > 3$ suffit), le nombre de fois que le système oscille avant de se stabiliser est environ égal à Q.

Démonstration

Le système oscille une fois tous les $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ lorsque $Q \gg 1$. On sait que l'exponentielle de l'enveloppe dure environ $3\tau = 3\frac{2Q}{\omega_0}$. Donc le nombre d'oscillations vaut $N \approx \frac{\frac{6Q}{\omega_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \approx Q$ sachant que $2\pi \approx 6$.

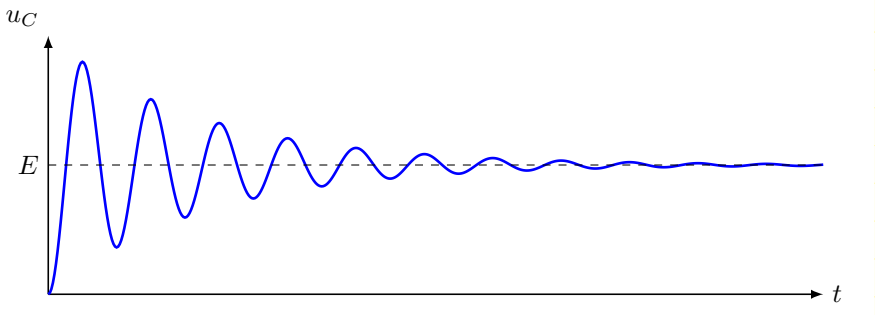
Remarque : Ce critère ne donne pas Q précisément, car le comptage du nombre d'oscillation est vague (en réalité, elles ne s'arrêtent jamais). Son utilité est plutôt de justifier, à partir d'une courbe, qu'on est dans le cas d'un amortissement faible : $Q^2 \gg 1$.

Exemple : Résolution complète de u_C

Calculez la solution complète de $u_C(t)$ dans un RLC série en régime pseudo-périodique si on allume le générateur à $t = 0$ avec une tension E (et tout est nul à $t < 0$).

Comme établi au début de ce chapitre, $u_C(t)$ vérifie l'équation $\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0 E$ avec $E = \text{cst}$ ici.
On a vu que la solution de l'équation homogène est de la forme $u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)\right]$. De plus, l'ED admet comme solution particulière une constante telle que $0 + 0 + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ donc $u_C = 0$. On a donc $u_C(t) = E + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)\right]$.
Pour les CI, il faut absolument utiliser les deux grandeurs qui sont continues, et rien d'autre. La tension aux bornes du condensateur est continue, or elle est nulle à $t < 0$ donc $u_C(0^+) = 0$. Donc $E + 1.[A + 0] = 0$ soit $A = -E$.
L'intensité à travers la bobine est continue donc $i(0^+) = 0$ (car elle est nulle à $t < 0$). Or $i(t) = C.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, donc $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$. Or $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)\right] + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[-A\omega.\sin(\omega t) + B\omega.\cos(\omega t)\right]$ donc $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega$. On en déduit que $B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}A = \frac{-E}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{-E}{\sqrt{4Q^2-1}}$ Donc

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}.\sin(\omega t)\right]$$



Remarque : On utilise la forme avec cosinus et sinus pour les calculs avec des CI, et la forme avec un seul cosinus pour les calculs théoriques.

C.3. Régime apériodique

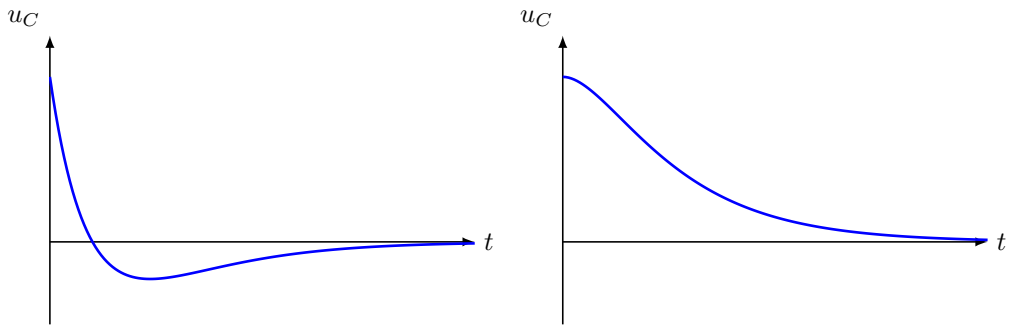
Propriété : Solutions en régime apériodique

Lorsque $\Delta > 0$ (soit $|Q| < \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a 2 racines réelles : $r_{1,2} = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right]$. Alors les solutions de l'équation homogène valent

$$u_C(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$

La forme générale de la solution dépend des signes de A et B, mais généralement, si $Q > 0$, on a une courbe qui ressemble à celle de la figure E4.4, avec aucune oscillation ou une demi-oscillation, mais pas une oscillation complète.

FIGURE E4.4 : Solutions possible de l'équation homogène en régime apériodique.



Propriété : Temps d'amortissement pour un amortissement très fort

Lorsque $Q \to 0$, le temps mis par le système pour revenir à 0 tend vers l'infini.

Démonstration

Les racines valent $r_1 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right]$ et $r_2 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right]$. Si $Q \ll 1$ alors $r_1 \to -\frac{\omega_0}{Q}$ et $r_2 \to 0$; du coup l'exponentielle $e^{r_2.t}$ mettra beaucoup de temps pour atteindre 0, du fait de la très faible valeur de r_2 (qui reste néanmoins négatif).

C.4. Régime apériodique critique

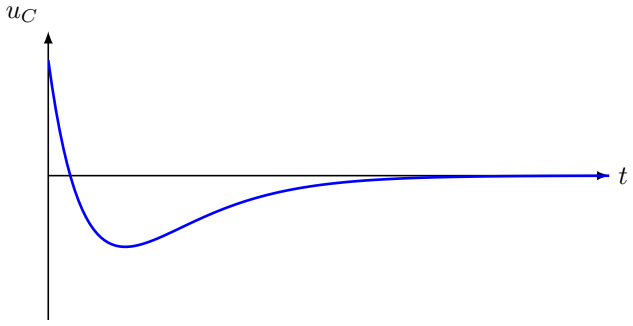
Propriété : Solutions en régime (apériodique) critique

Lorsque $\Delta = 0$ (soit $|Q| = \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a une seule racine réelle : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$. Alors les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$u_C(t) = (A.t + b)\, e^{-\omega_0 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$

L'allure de la courbe (figure E4.5) est proche de celle en régime apériodique ; seule la forme mathématique change.

FIGURE E4.5 : Solution de l'équation homogène en régime critique.



Évidemment, dans la réalité, on n'est jamais pile à $Q = \frac{1}{2}$. Mais ce régime est intéressant comme cas limite, à cause de sa propriété à connaître :

Propriété : Retour à l'équilibre le plus rapide

C'est au voisinage du régime critique que le retour à l'équilibre est le plus rapide.

Démonstration

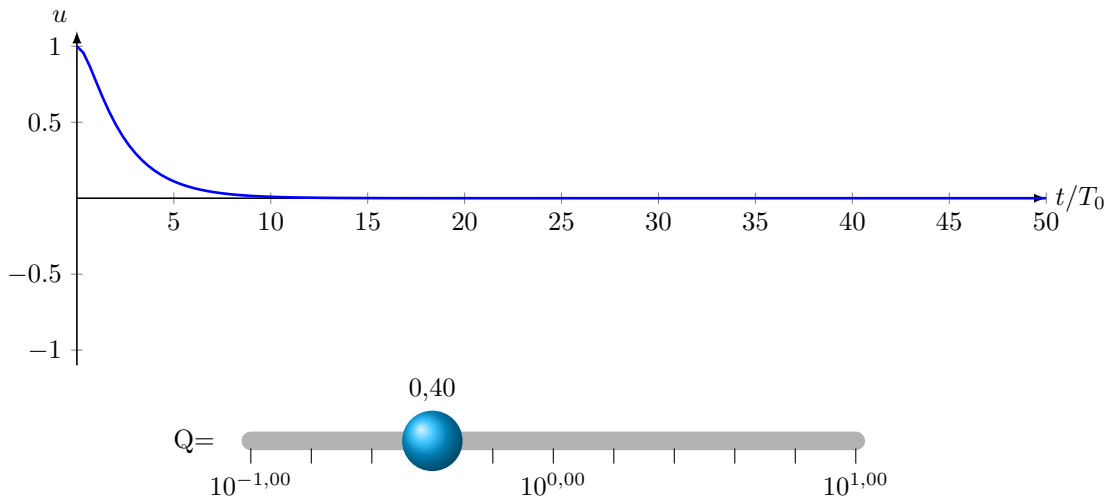
On ne va pas vraiment le démontrer, car il faudrait commencer par donner un critère numérique du temps de retour à l'équilibre. Mais on constate, à partir des calculs précédents, que :

- lorsque $Q > \frac{1}{2}$, alors plus Q est grand, plus le système oscille un grand nombre de fois, donc il met plus de temps pour retourner à l'équilibre ;
- lorsque $Q < \frac{1}{2}$, alors lorsque Q devient très petit le système met de plus en plus de temps pour retourner à l'équilibre.

L'idéal se situe entre les deux extrêmes ; on choisit le régime critique comme repère facile, car il intervient lorsque $\Delta = 0$.

La figure E4.6 permet d'observer les changements de la solution en fonction de la valeur de Q ; on constate bien qu'au voisinage de $Q = 0,5$ la courbe s'atténue rapidement.

FIGURE E4.6 : Solutions d'une équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = 0$ avec $u(0^+) = 1$ et $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$ en fonction de la valeur de Q.



C.5. Aspect énergétique

Propriété : Bilan énergétique du *RLC* série

L'énergie électrique $E_{élec}(t) = E_{cond}(t) + E_{bob}(t)$ obéit à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}E_{élec}(t)}{dt} = e(t).i(t) - Ri(t)^2 \qquad \text{(E4.6)}$$

Démonstration

On part de la loi des mailles : $u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t)$. On multiplie par $i(t)$: $u_L(t).i(t) + u_R(t).i(t) + u_C(t).i(t) = e(t).i(t)$. D'après les lois des composants : $L.i(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R.i(t)^2 + C.u_C(t).\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = e(t).i(t)$ soit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li(t)^2\right) + R.i(t)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C(t)^2\right) = e(t).i(t)$. Il ne reste qu'à regrouper les termes.

La traduction de cette égalité est celle-ci : le générateur apporte une puissance $e(t).i(t)$, et la résistance dissipe une puissance $R.i(t)^2$. Ainsi, en régime libre ($e = 0$), le terme de droite sera strictement négatif donc l'énergie diminuera.

La forme de cette décroissance est compliquée, sauf dans un cas limite :

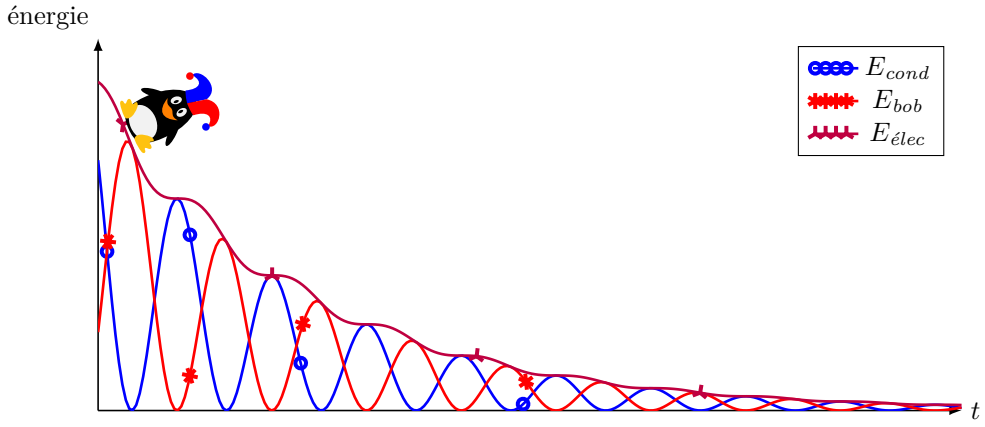
Calcul : Énergie en régime libre très peu amorti

En régime très peu amorti, R est petit donc Q est grand donc le régime est pseudo-périodique. On part de la solution $u_C(t) = D.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_0 t+\phi)$ avec $Q \gg 1$. On en déduit que $E_{cond}(t) = \frac{1}{2}CD^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos^2(\omega_0 t+\phi)$.
Pour obtenir E_{bob}, on calcule $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -D.C.\frac{\omega_0}{2Q}.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_0 t+\phi) - D.C.e^{\frac{\omega_0}{2Q}t}\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)$.
Comme $Q \gg 1$, on peut négliger le premier terme, et écrire $i(t) \approx -\omega_0 D.C.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\omega t+\phi)$. On en déduit que $E_{bob}(t) = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2D^2e^{\frac{\omega_0}{Q}t}\sin^2(\omega t+\phi)$ qu'on peut simplifier avec la relation $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.
Si on calcule la somme : $E_{élec}(t) = E_{cond}(t) + E_{bob}(t) = \frac{1}{2}CD^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left(\cos^2(\omega_0 t+\phi)+\sin^2(\omega_0 t+\phi)\right) = \frac{1}{2}CD^2e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$. On peut noter que $E_{élec}(0) = \frac{1}{2}CD^2$ et écrire

$$E_{élec}(t) = E_{élec}(0)e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$$

L'énergie décroît donc de façon approximativement exponentielle, ce qui se voit sur la figure E4.7.

FIGURE E4.7 : Énergies dans le cas peu amorti.



E4.D. Stabilité des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on va simplement établir une règle importante concernant la stabilité des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2. Cette règle, à retenir sans sa démonstration, est importante pour repérer les erreurs de signes. En effet, un circuit formé de composants passifs ne peut pas voir sa tension croître vers l'infini comme ça : il doit être stable. Par contre, si le système contient un composant qui amène de l'énergie, comme un AO, alors il peut être instable, comme on le verra en exercices.

Définition : Stabilité d'un système

On dit qu'un système est *stable* si son régime transitoire tend vers 0, et *instable* s'il tend vers l'infini (éventuellement en oscillant).

Propriété : Critère de stabilité d'une ED

Une ED linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si tous les coefficients de son premier membre sont de même signe

Démonstration

Commençons par les ED d'ordre 1, de forme $a.\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + b.f(t) = \ldots$. La solution de l'équation sans second membre est de la forme $f(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}$. Si a et b sont de même signe alors $-\frac{b}{a} < 0$ donc l'exponentielle tend vers 0 et le système est stable ; si a et b sont de signe opposés, alors l'exponentielle tend vers l'infini et le système est instable.

Pour un ordre 2, partons de $a.\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + b.\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + c.f(t) = \ldots$. Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue 3 cas :

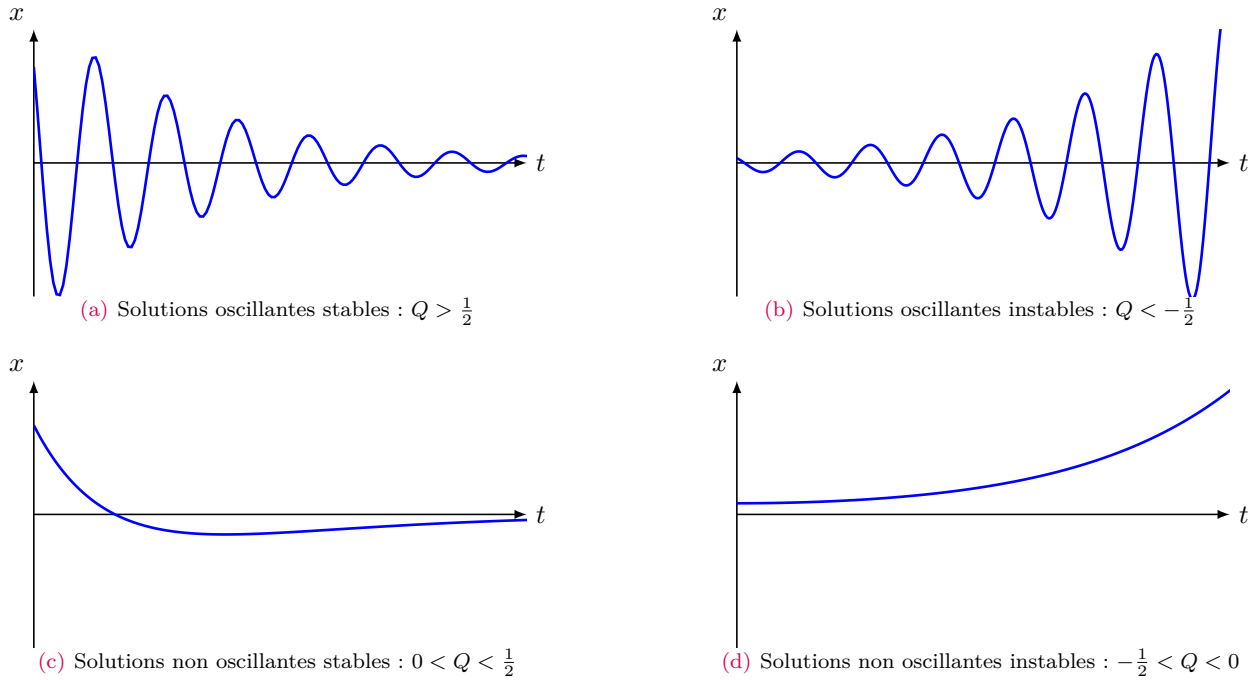
- si $\Delta < 0$, on est en régime pseudo-périodique. Pour que ce soit possible, il faut forcément que $ac > 0$ donc a et c sont de même signe. Les racines sont $-\frac{b}{2a} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ donc l'exponentielle dans les solutions est de la forme $e^{-\frac{b}{2a}t}$; elle est stable si et seulement si a et b sont de même signe, qui est donc aussi le signe de c.
- si $\Delta = 0$, on est en régime critique ; il faut aussi que $ac > 0$ donc a et c sont de même signe. La racine double est $-\frac{b}{2a}$ et les solutions $(At + B)e^{-\frac{b}{2a}t}$ ne seront stables que si a et b sont de même signe, qui est aussi le signe de c.
- si $\Delta > 0$, on est en régime apériodique. Le système est stable si et seulement si les deux racines sont négatives (sinon on a une exponentielle qui diverge). Or on sait que le produit des deux racines d'un polynôme vaut $\frac{c}{a}$ et leur somme $-\frac{b}{a}$. Pour qu'elles soient négatives toutes les deux, il faut que leur somme soit négative et leur produit positif, ce qui aboutit à conclure que a, b et c sont de même signe.

Il faut bien distinguer deux choses différentes :

- les solutions sont **stables** si et seulement si les 3 coefficients sont de même signe
- les solutions sont **oscillantes** si et seulement si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif

La figure E4.8 montre les divers comportement possibles.

FIGURE E4.8 : Types de solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.



(a) Solutions oscillantes stables : $Q > \frac{1}{2}$

(b) Solutions oscillantes instables : $Q < -\frac{1}{2}$

(c) Solutions non oscillantes stables : $0 < Q < \frac{1}{2}$

(d) Solutions non oscillantes instables : $-\frac{1}{2} < Q < 0$

E4.E. Résolution numérique

On va maintenant apprendre à résoudre numériquement une équation linéaire d'ordre 2 à l'aide d'une méthode d'Euler. Pour cela, on part de l'équation $a.\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + b.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + c.u(t) = e(t)$ qu'on reécrit sous la forme $\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e(t) - b.\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} - c.u_c}{a}$.

La méthode d'Euler (et aussi celle de Runge-Kutta) ne s'applique qu'aux équations différentielles d'ordre 1. L'astuce consiste alors à introduire une nouvelle variable de manière à transformer une équation d'ordre 2 et 2 équations d'ordre 1.

Méthode : Transformation d'une ED d'ordre 2 en 2 ED d'ordre 1

Quand on a une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = f\left(u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, t\right)$$

alors on pose une fonction $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et on obtient le système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u' \\ \dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} = f(u, u', t) \end{cases}$$

Exemple : Résolution du RLC soumis à une marche de tension

À connaître

On suppose que le RLC avec $R = 70\,\Omega$, $L = 20\,\mathrm{mH}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$ est soumis à une tension passant à l'instant $t = 0$ de la valeur nulle à la valeur $E = 5\,\mathrm{V}$. En admettant les CI : $u_c(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 1\,\mathrm{V\cdot s^{-1}}$, résoudre $u_c(t)$ par la méthode d'Euler sur 15 périodes propres.

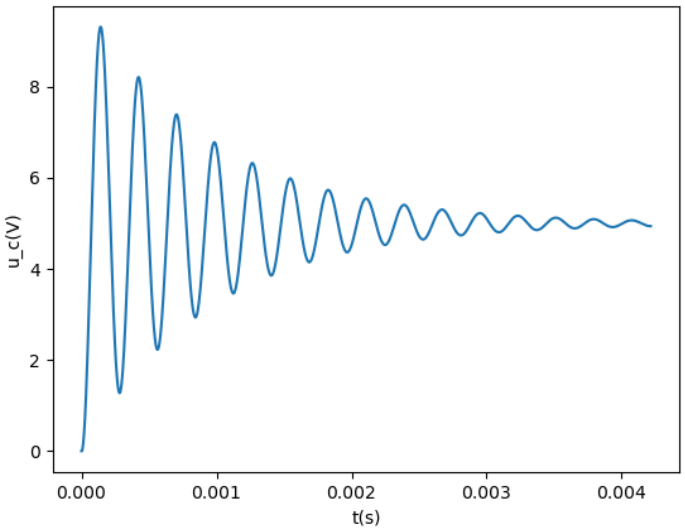
On suppose qu'on a déjà établi l'équation $LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = E$.
Dans cette résolution numérique, il est inutile d'introduire le discriminant et les racines du polynôme caractéristique. Par contre, on a besoin de connaître la période propre pour avoir une durée caractéristique. Ici on a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. On va donc effectuer un schéma d'Euler avec un pas de $\frac{T_0}{1000}$ au maximum [a]. On aura deux inconnues : u_c et $u_c' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On va écrire une fonction `deriveeseconde(uc,ducdt,t)` qui renvoie la dérivée seconde.
On commence donc par reécrire l'ED sous la forme $\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{E}{LC} - \frac{u_c}{LC} - \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. On pose alors $u_c' = \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ et on écrit le système sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = u_c' \\ \dfrac{\mathrm{d}u_c'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{LC} - \dfrac{u_c}{LC} - \dfrac{R}{L}u_c' = \texttt{deriveeseconde}(u_c, u_c', t) \end{cases}$$

Voici donc un exemple de script :

```
import numpy as np
E,R,L,C=5,70,20e-3,100e-9 # constantes
T0=2*np.pi*np.sqrt(L*C) # période propre
def deriveeseconde(uc,ducdt,t):
    return E/(L*C)-uc/(L*C)-R/L*ducdt
h=T0/1000 # pas temporel
tmax=15*T0 # durée de simulation
N=int(tmax/h) # nombre de points
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_uc=np.zeros(N+1)
tab_ducdt=np.zeros(N+1)
tab_t[0],tab_uc[0],tab_ducdt[0]=0,0,1 # CI
for i in range(N):
    tab_t[i+1]=tab_t[i]+h
    tab_uc[i+1]=tab_uc[i]+h*tab_ducdt[i]
    tab_ducdt[i+1]=tab_ducdt[i]+h*deriveeseconde(tab_uc[i],tab_ducdt[i],tab_t[i])
# tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("u_c(V)")
plt.show()
```

On obtient le résultat suivant :



a. Grand maximum, parce que, pour des solutions oscillantes, la méthode d'Euler est vraiment peu précise.

Il est facile de changer la valeur de R et d'observer les modifications de la courbe. En particulier, on remarque que le discriminant de l'équation caractéristique vaut $\Delta = R^2C^2 - 4LC$ donc $\Delta < 0 \Leftrightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = 894\,\Omega$. On peut vérifier facilement que le comportement de la courbe change lorsque R devient supérieur à cette valeur.

Pour avoir des calculs plus précis, on peut utiliser `odeint`, qui prend comme argument non pas la fonction `derivee seconde`, mais une fonction `derivee(liste,t)` ayant comme argument la **liste** des inconnues (ici u_c et u_c'), et renvoyant la **liste** des dérivées. Voici un exemple de la même résolution avec `odeint` :

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
E,R,L,C=5,70,20e-3,100e-9 # constantes
T0=2*np.pi*np.sqrt(L*C) # période propre
def derivee(inconnues,t): # inconnues=[uc,ducdt]
    uc=inconnues[0]
    ducdt=inconnues[1]
    d2ucdt2=E/(L*C)-uc/(L*C)-R/L*ducdt
    return [ducdt,d2ucdt2] # liste des dérivées
tab_t=np.linspace(0,15*T0,300) # temps de simulation
CI=[0,1] # [uc(0),ducdt(0)]
solution=odeint(derivee,CI,tab_t)
tab_uc=solution[:,0] # colonne 0
tab_ducdt=solution[:,1] # colonne 1
# tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("u_c(V)")
plt.show()
```

Remarque : Si on veut être puriste, l'inconnue qu'on introduit doit avoir un sens physique. Ainsi, ici, au lieu de poser $u' = \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, on aurait pu poser $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$.

Grâce à ces méthodes numériques, on est capable de résoudre quasiment toutes les ED, qu'elles soient linéaires ou pas, quel que soit le terme de droite, et aussi quel que soit son ordre, car il est facile de généraliser la méthode qu'on a vue à des équations d'ordre supérieur à 2.

E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circuits linéaires du second ordre	
Modèle du circuit LC. Oscillations harmoniques. Pulsation, fréquence et période propres d'oscillations. Amplitude, phase.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'un système d'ordre 2 non amorti ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales. Caractériser la solution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.
Modèle du circuit RLC série.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'un système d'ordre 2 amorti afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série. **Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la réponse d'un système linéaire du deuxième ordre à une excitation de forme quelconque.**
Stockage et dissipation de l'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Quelques conseils

✎ La forme canonique sert essentiellement pour les études théoriques, pas pour la résolution. Dans un exercice ou un devoir, ne mettez sous forme canonique que si on vous le demande ; il existe d'ailleurs d'autres formes canoniques qu'on peut vous proposer.

✎ Dans les exercices ou les devoirs, s'il y a des valeurs numériques, alors le calcul de Δ et des racines doit être fait numériquement ; littéralement, les expressions manipulés seraient trop volumineuses. De plus, si $\Delta < 0$, utilisez toujours la forme avec cosinus et sinus.

✎ Pour trouver les CI, il faut toujours partir de ce qui est continu mathématiquement : les tensions aux bornes des condensateurs, et les intensités à travers les bobines ; puis appliquer les lois des composants et des circuits pour aboutir à une condition sur la grandeur recherchée ou sur sa dérivée.

✎ Il faut savoir repérer une courbe correspondant à Q grand (au moins 3 oscillations) et mesurer dessus la pulsation propre ω_0 (à partir de la pseudo-période) et le facteur de qualité (à partir du temps caractéristique τ de l'enveloppe).

✎ Ne confondez par le critère d'oscillation ($\Delta < 0$) et celui de stabilité (coefficients du premier membre de même signe).

E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

QCMs

réponses page 340

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. La forme canonique d'une ED linéaire homogène d'ordre 2 est :

(a). $\omega_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = 0$
(b). $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$
(c). $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$
(d). $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$

Q2. Les solution quand l'amortissement est nul ($Q = \infty$) sont de la forme :

(a). $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
(b). $Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$
(c). $De^{-\omega_0 t}\cos(\omega_0 t)$
(d). $D\cos(\omega_0 t + \phi)$

Q3. S'il n'y a pas d'amortissement :

(a). l'énergie électrique est constante
(b). la solution est constante
(c). l'intensité tend vers l'infini
(d). les oscillations durent indéfiniment

Q4. Le retour à l'équilibre est le plus rapide lorsque :

(a). on est en régime apériodique
(b). $\Delta < 0$
(c). on est en régime critique
(d). $\Delta = 0$
(e). on est en régime pseudo-périodique
(f). $\Delta > 0$

Q5. On est en régime pseudo-périodique si et seulement si :

(a). $|Q| > \frac{1}{2}$
(b). $\Delta < 0$
(c). les 3 coefficients ne sont pas de même signe
(d). l'amortissement est nul

Q6. En régime pseudo-périodique, la courbe a l'allure de :

(a). une courbe avec une bosse
(b). un cosinus
(c). une exponentielle
(d). un cosinus amorti exponentiellement

Q7. Les solution d'une ED linéaire d'ordre 2 sont stable si et seulement si :

(a). $\Delta > 0$
(b). le terme d'amortissement est non nul
(c). les 3 coefficients sont de même signe
(d). $\Delta < 0$

✓ QCM : ED linéaires d'ordre 2 ✗

Q8. Les solutions de l'ED $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 100x = 0$ sont de la forme :

(a). $x(t) = e^{-2t}\left[A\cos(10t) + B\sin(10t)\right]$
(b). $x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-100t}$
(c). $x(t) = e^{-t}\left[A\cos(9{,}95t) + B\sin(9{,}95t)\right]$
(d). $x(t) = e^{-t}\left[A\cos(100t) + B\sin(100t)\right]$

Q9. Les solutions de l'ED $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 10x = 0$ sont de la forme :

(a). $x(t) = e^{-10t}\left[A\cos(3{,}1t) + B\sin(3{,}1t)\right]$ (b). $x(t) = e^{-1{,}13t}\left[A\cos(10t) + B\sin(10t)\right]$
(c). $x(t) = Ae^{-2{,}31t} + Be^{-7{,}83t}$ (d). $x(t) = Ae^{-1{,}13t} + Be^{-8{,}87t}$

Q10. Les solutions de l'ED $8\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 30\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2000x = 0$ sont de la forme :

(a). $x(t) = e^{-15{,}2t}\left[A\cos(7{,}3t) + B\sin(7{,}3t)\right]$ (b). $x(t) = e^{-5{,}7t}\left[A\cos(14{,}2t) + B\sin(14{,}2t)\right]$
(c). $x(t) = e^{-2{,}3t}\left[A\cos(3{,}1t) + B\sin(3{,}1t)\right]$ (d). $x(t) = e^{-1{,}9t}\left[A\cos(15{,}7t) + B\sin(15{,}7t)\right]$

✓ QCM : Types de solutions ✗

Q11. Les solutions de l'ED $3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 12\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 60x = 0$ sont :

(a). Instables et non-oscillantes (b). Stables et non-oscillantes
(c). Instables et oscillantes (d). Stables et oscillantes

Q12. Les solutions de l'ED $2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 14x = 0$ sont :

(a). Instables et non-oscillantes (b). Stables et oscillantes
(c). Instables et oscillantes (d). Stables et non-oscillantes

Q13. Les solutions de l'ED $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 60\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 60x = 0$ sont :

(a). Stables et oscillantes (b). Instables et oscillantes
(c). Stables et non-oscillantes (d). Instables et non-oscillantes

Q14. Les solutions de l'ED $-0{,}5\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 6{,}4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 14{,}2x = 0$ sont :

(a). Instables et non-oscillantes (b). Instables et oscillantes
(c). Stables et oscillantes (d). Stables et non-oscillantes

Q15. Les solutions de l'ED $-12\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 16\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 480x = 0$ sont :

(a). Instables et oscillantes (b). Stables et oscillantes
(c). Instables et non-oscillantes (d). Stables et non-oscillantes

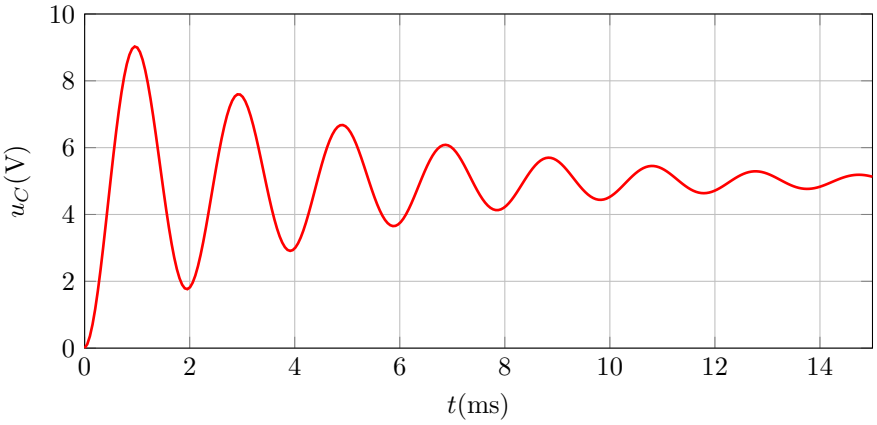
E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Exercices

réponses page 341

Exercice E4.1 : Analyse d'une courbe

On réalise un circuit RLC série avec $C = 220\,\text{nF}$ et on le soumet à une marche de tension. On enregistre la courbe de $u_C(t)$:



1. Évaluez grossièrement la valeur de Q.
2. Mesurez une valeur approchée de ω_0. Déduisez-en la valeur de L.
3. Évaluez grossièrement la valeur de R.

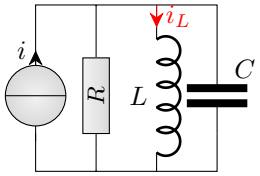
Exercice E4.2 : RLC série [*]

On reprend un RLC série soumis à une marche de tension passant de 0 à E, mais on s'intéresse à l'intensité. Initialement, il n'y a pas d'intensité et le condensateur est déchargé.

1. Établissez l'ED vérifiée par i.
2. Déterminez $i(0^+)$ et montrez que $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}$
3. Résolvez $i(t)$ pour $L = 40\,\text{mH}$, $C = 330\,\text{nF}$, $R = 1\,\text{k}\Omega$ et $E = 10\,\text{V}$; on donnera les valeurs numériques des coefficients.

Exercice E4.3 : Circuit RLC parallèle [**]

On considère le circuit RLC parallèle ci-contre. À $t < 0$, le générateur est éteint : $i = 0\,\text{A}$ depuis très longtemps, et le condensateur est déchargé ; on allume le générateur à $t = 0$, de sorte que $i = I_0 = 200\,\text{mA}$ à $t > 0$.

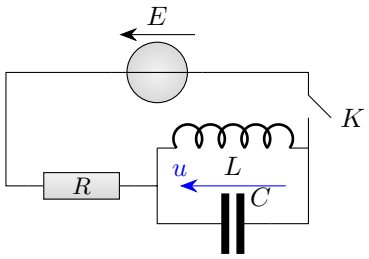


1. Établissez l'ED vérifiée par i_L à $t > 0$.
2. Mettez l'équation sous la forme suivante : $\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_L = K$ en déterminant ω_0, α et K (il n'est pas nécessaire, dans la suite, d'utiliser ces notations).
3. On prend $L = 20\,\text{mH}$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$ et $R = 200\,\Omega$; déterminez le régime de ce circuit (pseudo-périodique, critique ou apériodique). Déduisez-en $i_L(t)$ à deux constantes près.
4. Déterminez, en la justifiant, la valeur de $i_L(0^+)$; montrez aussi que $\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$. Déduisez-en la solution numérique exacte de $i_L(t)$, et tracez sa courbe.

Exercice E4.4 : Étude d'un circuit $R, L \,/\!/\, C$ [**]

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps et le condensateur est déchargé. On le ferme à $t = 0$.

1. Établissez l'équation différentielle que vérifie u à $t > 0$.
2. Déterminez $u(0^+)$; montrez que $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC}$.
3. On prend $E = 5\,\mathrm{V}$, $R = 800\,\Omega$, $L = 40\,\mathrm{mH}$ et $C = 2{,}3\,\mu\mathrm{F}$. Calculez $u(t)$, tracez sa courbe à l'aide de votre calculatrice.
4. Reprenez les mêmes questions avec l'intensité qui traverse la bobine.

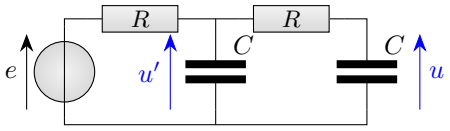


Exercice E4.5 : Double R-C [**]

On considère le circuit ci-contre, avec deux résistances R et deux condensateurs C identiques.

1. Montrez que la tension u vérifie l'équation différentielle $\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e$ avec τ à exprimer.
2. Le générateur est allumé depuis longtemps à la valeur $e = E = \text{cst}$. Que valent alors u et u' ?
3. À $t = 0$, on éteint le générateur. Déterminez $u(t)$.

   Indication : admettez que $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$ si vous n'arrivez pas à le démontrer.

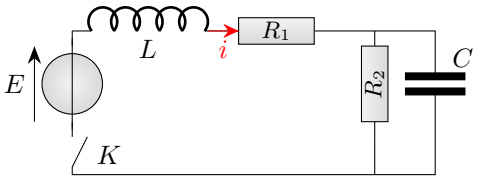


Exercice E4.6 : Circuit d'ordre 2 [**]

On considère le circuit ci-contre où les valeurs des composants sont : $L = 20\,\mathrm{mH}$, $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 3{,}3\,\mathrm{k}\Omega$ et $C = 220\,\mathrm{nF}$. À $t = 0$, alors que le condensateur est déchargé, on ferme K. On s'intéresse à i.

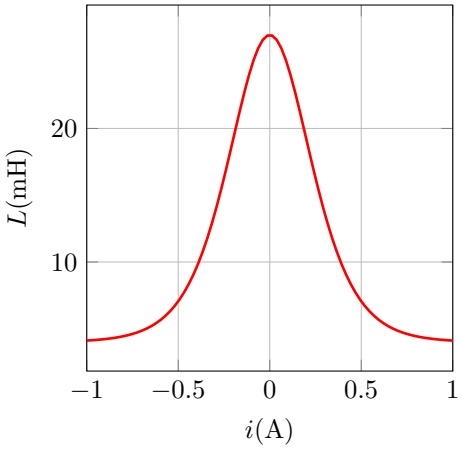
1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par i.
2. Trouvez la forme des solutions à deux constantes près (on mettra les valeurs numériques des racines).
3. [***] À l'aide des conditions initiales, trouvez les deux constantes.

   On admettra si besoin que $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}$
4. Tracez avec votre calculatrice ou avec Python la courbe $i(t)$ pour $E = 10\,\mathrm{V}$.



Exercice E4.7 : RLC avec une bobine non linéaire [***] EDO

On considère un circuit RLC série alimenté par une tension $e(t)$, avec une bobine contenant un noyau en fer doux : ce noyau augmente les effets magnétiques, mais rend l'inductance variable : L dépend de i selon la loi $L(i) = L_0 + \frac{L_1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{i}{I_0}\right)}$ avec $L_1 = 4\,\mathrm{mH}$, $L_0 = 23\,\mathrm{mH}$, $I_0 = 300\,\mathrm{mA}$ et ch la fonction cosinus hyperbolique (si vous ne la connaissez pas, peu importe, on l'obtient avec `numpy.cosh`). L'inductance diminue alors avec le courant (figure ci-contre) et l'équation de la bobine devient $u_L = \frac{\mathrm{d}(L.i)}{\mathrm{d}t}$. Les autres composants valent $C = 330\,\mathrm{nF}$ et $R = 25\,\Omega$.

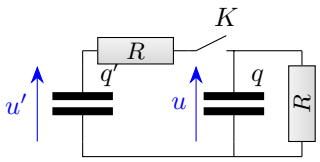


1. Dessinez le circuit. Établissez l'équation différentielle à laquelle obéit la tension u_C aux bornes du condensateur.
2. La tension qui alimente le circuit était à $e = 5\,\mathrm{V}$ à $t < 0$ depuis longtemps, le condensateur était chargé, le courant était nul, et e passe à $0\,\mathrm{V}$ pour $t > 0$. Que valent les CI : $u_C(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)$? Résolvez alors $u_C(t)$ par une méthode d'Euler. Tracez $u_c(t)$ et $i(t)$.
3. On recommence la même chose mais la tension e vaut $100\,\mathrm{V}$ au départ. Tracez les nouvelles courbes. Quels changements voyez-vous ?

Exercice E4.8 : Décharge d'un condensateur [***]

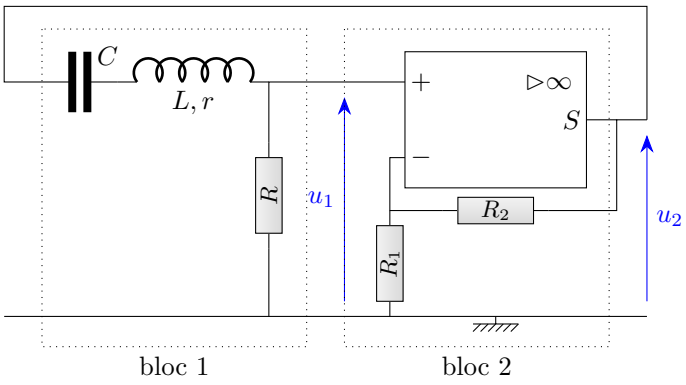
Initialement, le condensateur de droite est déchargé, celui de gauche a pour charge q'_0, et K est ouvert. On ferme K à $t = 0$.

1. Lorsque $t \to \infty$, plus aucun courant ne circule. Déterminez alors sans équation différentielle les valeurs q_∞ et q'_∞ des charges lorsque $t \to \infty$.
2. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On posera $\tau = RC$.
3. Déterminez $u(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)$.
4. Déduisez-en alors $u(t)$.



Exercice E4.9 : Oscillateur à base d'un RLC série [**]

On construit le circuit rebouclé ci-dessous avec $C = 100\,\mathrm{nF}$, $L = 32\,\mathrm{mH}$, $r = 5{,}1\,\Omega$ (résistance de la bobine) et $R = 20\,\Omega$.

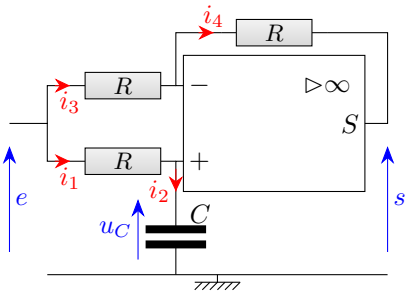


1. À l'aide des composants du bloc 1, établissez une équation différentielle reliant u_1 à u_2.

2. Quel est le montage du bloc 2 ? Rappeler sa relation en régime linéaire sous la forme $u_2 = \alpha.u_1$.
3. En déduire que u_1 vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_1 = 0$ en précisant K et ω_0. Calculez numériquement la période propre T_0.
4. Pour quelles valeur de α les solutions de cette équation sont-elles oscillantes et instables ? (on fera l'AN)
5. Dessiner l'allure de $u_1(t)$ pour $\alpha = 2$, en tenant compte de la saturation de l'AO (alimenté en $\pm 12\,\mathrm{V}$).

Exercice E4.10 : Oscillateur à double déphaseur [***] EDO

On étudie le circuit suivant (circuit déphaseur) constitué d'un Amplificateur Linéaire, de 3 résistances identiques et d'un condensateur :

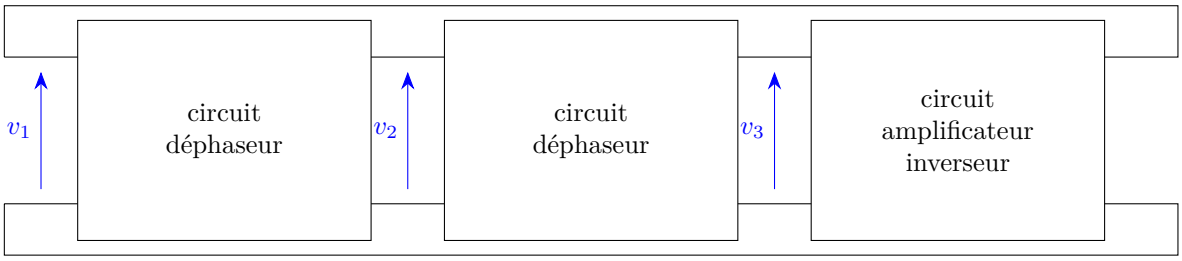


1. Justifiez que certaines intensités sont égales.
2. À l'aide de la loi des mailles, reliez e, u_C et i_2, puis u_C à e et à $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
3. À l'aide de la loi des mailles (deux fois) et de la linéarité de l'amplificateur, reliez u_C à i_3 et e, puis u_C à i_3 et s. Déduisez-en une relation entre u_C, e et s.
4. En éliminant u_C dans les relations précédentes, montrez que s et e sont reliés par l'équation différentielle

$$\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -\tau\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + e \qquad \text{(E4.7)}$$

   en exprimant τ.
5. **Oscillateur à circuit déphaseur**

   On met maintenant trois montages à AO à la suite l'un de l'autre, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Les deux circuits déphaseurs ont le même temps caractéristique τ, et on note $-\alpha$ le coefficient d'amplification du montage amplificateur inverseur (avec $\alpha > 0$).



   (a) Montrez que v_3 est relié à v_1 par l'équation différentielle

$$\tau^2\frac{\mathrm{d}^2v_3}{\mathrm{d}t^2} + 2\tau\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + v_3 = \tau^2\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}t^2} - 2\tau\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + v_1 \qquad \text{(E4.8)}$$

   On pourra admettre cette question très calculatoire pour continuer.

   (b) Le montage amplificateur impose alors $v_1 = -\alpha v_3$. Déduisez-en l'ED vérifiée par v_1.

   (c) Discutez de la forme des solutions (stabilité, oscillations ou non).

   (d) Résolvez cette équation à l'aide d'un schéma d'Euler ou de `odeint`, pour $\tau = 1\,\mathrm{ms}$ et $\alpha = 1{,}5$. Pour voir l'instabilité, il ne faut pas des conditions initiales rigoureusement nulles : c'est toujours une perturbation qui fait démarrer les solutions. On prendra par exemple $v_1(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Simulez sur 50τ environ.

   Commentez la courbe obtenue.

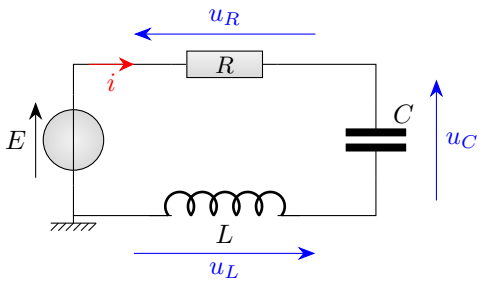
E4. Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

TDs numériques

réponses page 349

TD numérique : RLC série .py EDO

On considère un circuit RLC série :

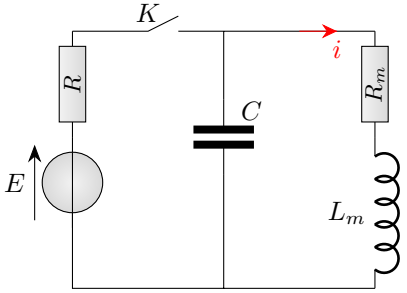


1. Reétablissez l'ED d'ordre 2 vérifiée par u_C.
2. Exprimez la valeur R_c de la résistance pour laquelle le retour à l'équilibre est le plus rapide, en fonction de L et C. AN pour $L = 32\,\text{mH}$, $C = 100\,\text{nF}$.
3. On pose $u'_C = \frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}$. Reécrivez l'ED de départ en un système de deux ED d'ordre 1 portant sur u_C et u'_C.
4. On va résoudre numériquement ce système pour e valant $E = 5\,\text{V}$ à $t < 0$ et $0\,\text{V}$ à $t > 0$; on prendra $R = 50\,\Omega$, les valeurs de L et C précédentes, et on admettra les conditions initiales $u_C(0^+) = E$ et $\frac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}(0^+) = 0$.
   Pour cela :
   - calculez la période propre T_0 du circuit ; on prendra alors comme temps de simulation $10T_0$ et comme pas $\frac{T_0}{1000}$
   - calculez le nombre de points. Créez 3 tableaux de zéros, un pour t, un pour u_C et un pour u'_C
   - appliquez alors les relations de récurrence de la méthode d'Euler

   Tracez $u_C(t)$.
5. Calculez aussi trois tableaux contenant les valeurs de i, u_R et u_L ; tracez $u_R(t)$ et $u_L(t)$.
   Indication : cette question se fait simplement par des calculs vectorisés sur les tableaux de u_C et u'_C, sans besoin de boucles.
6. Calculez les énergies $E_C(t)$, $E_L(t)$ et $E_{total}(t)$. Tracez les courbes d'énergie et commentez.
7. Observez ce qui se passe si $R = 0\,\Omega$ (commentaire ?), $R = 100\,\Omega$, $200\,\Omega$, $500\,\Omega$, $1\,\text{k}\Omega$, $5\,\text{k}\Omega$.

TD numérique : Moteur électrique protégé par un condensateur .py EDO

On considère un moteur qui est équivalent à une inductance $L_m = 3{,}1\,\text{H}$ en série avec une résistance $R_m = 32\,\Omega$. On le place dans le circuit ci-dessous avec $E = 220\,\text{V}$ et $R = 2\,\Omega$:



On choisit d'allumer le moteur ou de l'éteindre à l'aide d'un interrupteur K.

1. Si on ne mettait pas le condensateur C, que se passerait-il à l'ouverture de K ?

2. Montrez que i obéit aux équations différentielles

$$RL_mC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + (L_m + RR_mC)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R_m + R)i = E \qquad \text{lorsque } K \text{ est fermé} \qquad (1a)$$

$$L_mC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R_mC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0 \qquad \text{lorsque } K \text{ est ouvert} \qquad (1b)$$

3. Quelle valeur de C donnerait un régime critique lorsque K est ouvert ? Calculez sa valeur $C_{critique}$.
Remarque : Cette valeur est élevée mais atteignable avec de gros condensateurs dans des usines.
4. **Mise en marche**
On suppose qu'à $t < 0$, il n'y a ni courant ni tension dans la partie de droite, et à $t = 0$ on ferme K. Les CI seront alors $i(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
   (a) On va prendre $C = C_{critique}$. Calculez la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
   (b) Résolvez numériquement $i(t)$ par une méthode d'Euler, sur une durée de $3T_0$. Évaluez la durée du régime transitoire.
5. **Extinction**
On suppose que le régime permanent est atteint, et on ouvre K ; on admettra que les CI seront $i(0^+) = \frac{E}{R+R_m}$ et $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
   (a) Résolvez numériquement $i(t)$. Combien de temps met le courant pour s'arrêter ?
   (b) Tracez les courbes pour $C = 10C_{critique}$ puis pour $C = \frac{1}{10}C_{critique}$. Observez les changements.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(a) ET (d)
Q3.(d)
Q4.(c) ET (d)
Q5.(a) ET (b)
Q6.(d)
Q7.(c)

Réponses au QCM : ED linéaires d'ordre 2

Q8.(c)
$\Delta = -396$ donc les racines sont $-1 \pm 9{,}95j$
Q9.(d)
$\Delta = 60$ donc les racines sont $-1{,}13$ et $-8{,}87$
Q10.(d)
$\Delta = -63\,100$ donc les racines sont $-1{,}9 \pm 15{,}7j$

Réponses au QCM : Types de solutions

Q11.(d)
$\Delta = -576 < 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.
Q12.(c)
$\Delta = -108 < 0$ et les 3 coefficients ne sont pas de même signe.
Q13.(c)
$\Delta = 3360 > 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.
Q14.(c)
$\Delta = 69{,}4 > 0$ et les 3 coefficients ne sont pas de même signe.
Q15.(b)
$\Delta = -22\,784 < 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.

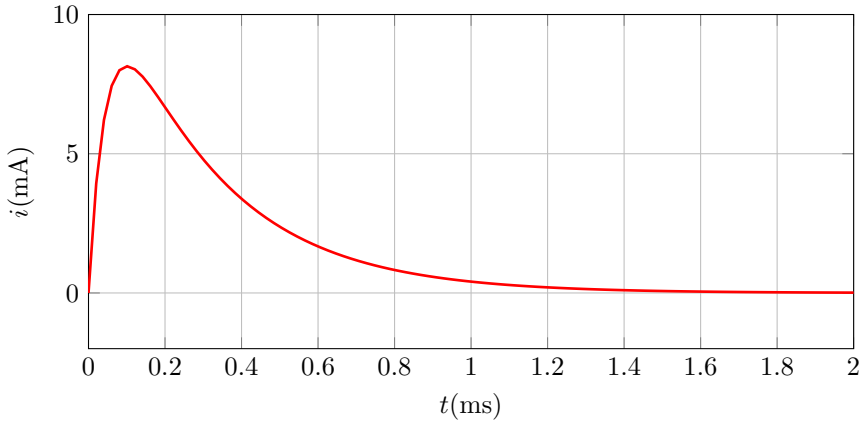
Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E4.1 : Analyse d'une courbe

1. La courbe oscille environ 7 fois, c'est la valeur approchée de Q.
2. $Q \gg 1$ donc $\frac{2\pi}{T} \approx \omega_0$. Or on mesure une période $T = \frac{13{,}7}{7} = 1{,}96\,\text{ms}$ donc $\omega_0 = 3200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On en déduit que $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 440\,\text{mH}$.
3. $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 200\,\Omega$.

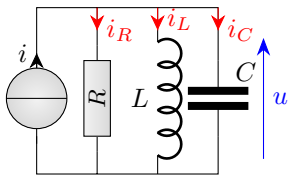
Corrigé de l'exercice E4.2 : RLC série [*]

1. Je reprends les notations du cours. Par la loi des mailles : $u_L(t)+u_R(t)+u_C(t) = E$ donc $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+R.i(t)+u_C(t) = E$. Or $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ donc on dérive l'équation précédente : $L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$. On en déduit que $L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i(t) = 0$
2. $i(0^+) = 0$ à cause de la bobine, et $u_C(0^+) = 0$. Par la loi des mailles, on en déduit que $u_L(0^+) = E - R.i(0^+) - u_C(0^+) = E$ donc $L\frac{\mathrm{d}i((t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = E$ soit $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}$.
3. $\Delta > 0$ et on trouve les racines du polynome caractéristique : $r_1 = -3530\,\text{s}^{-1}$ et $r_2 = -21\,470\,\text{s}^{-1}$. On a donc des solutions de la forme $i(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}$; et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = r_1 Ae^{r_1 t} + r_2 Be^{r_2 t}$. Avec les CI, on trouve donc $A + B = 0$ et $r_1 A + r_2 B = \frac{E}{L}$ d'où on tire $A = -B = 13{,}9\,\text{mA}$.
   On a donc $i(t) = 13{,}9\left(e^{-3530t} - e^{-21\,470t}\right)$ en mA avec t en secondes.



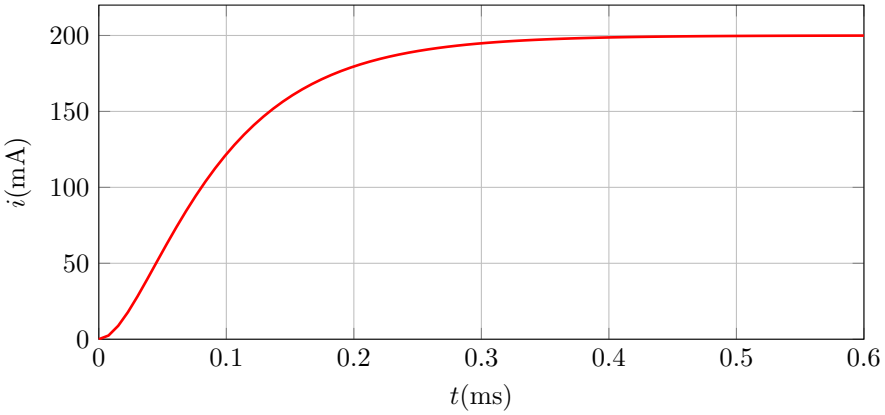
Corrigé de l'exercice E4.3 : Circuit RLC parallèle [**]

1. On place les inconnues ; u est commun à tous les dipôles :



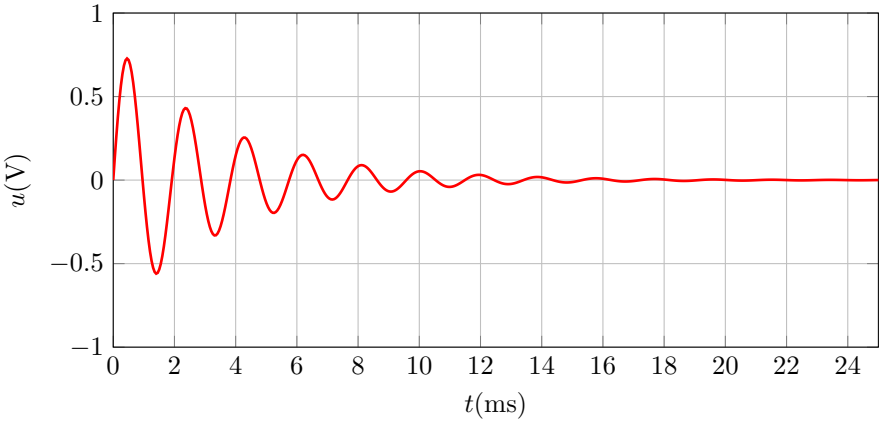
   On écrit les lois : $\begin{cases} i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = I_0 \\ u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \\ u(t) = Ri_R(t) \\ i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ Donc $i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ et $i_C(t) = CL\frac{\mathrm{d}^2i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}$. On en déduit que $LC\frac{\mathrm{d}^2i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = I_0$ à $t > 0$.
2. On divise par LC : $\frac{\mathrm{d}^2i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_L(t) = \frac{1}{LC}I_0$ à $t > 0$.
   Par identification : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\alpha = \frac{1}{2\omega_0 RC} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$; $K = \frac{I_0}{LC}$.

3. On part par exemple de la première équation ; alors $\Delta = \frac{L^2}{R^2} - 4LC = 2{,}0 \times 10^{-9} > 0$: le régime est apériodique.
4. On calcule les racines de l'équation caractéristique et on trouve $r_1 = -13\,800\,\mathrm{s}^{-1}$ et $r_2 = -36\,200\,\mathrm{s}^{-1}$. L'équation homogène a donc pour solutions $i_L(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. De plus, on peut trouver une solution particulière constante, c'est $i_L = I_0$. Donc $i_L(t) = I_0 + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
5. Le courant à travers la bobine est continu mathématiquement, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$. De même la tension u est continue à cause du condensateur, donc $u(0^+) = u(0^-) = 0$. Or $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où on déduit que $\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
   Or $i_L(t) = I_0 + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ à $t > 0$ donc $i_L(0^+) = I_0 + A + B = 0$. On peut aussi dériver : $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = r_1 Ae^{r_1 t} + r_2 Be^{r_2 t}$ donc $\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = r_1 A + r_2 B = 0$. De ces deux équations, on tire $B = -\frac{r_1}{r_2}A$ puis $I_0 + A - \frac{r_1}{r_2}A$ donc $A = \frac{I_0}{\frac{r_1}{r_2} - 1} = -324\,\mathrm{mA}$ et $B = 124\,\mathrm{mA}$.
   La solution est donc $i_L(t) = 200 - 324e^{-13\,800t} + 124e^{-36\,200t}$ avec t en secondes et i_L en milliampères.



Corrigé de l'exercice E4.4 : Étude d'un circuit $R, L \,/\!/\, C$ [**]

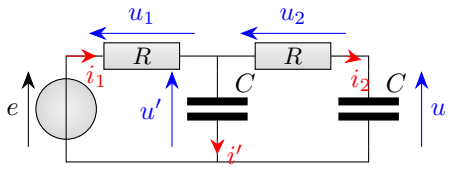
1. Soit u_R la tension aux bornes de R orienté vers la gauche, et i_R, i_C et i_L les courants à travers les trois composants, orientés vers le droite. Alors par la loi des mailles : $u(t) + u_R(t) = E$ donc $u(t) + R.i_R(t) = E$ donc par la loi des nœuds $u(t) + R.i_C(t) + R.i_L(t) = E$. On dérive : $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u(t) = 0$.
2. $u(0^+) = 0$ et $u_R(0^+) = E$ d'où on tire le courant i_C qui traverse le condensateur, puis $\frac{\mathrm{d}u(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}$.
3. $\Delta < 0$ ce qui donne comme racines du polynome caractéristique $(-217 - 3300j)\mathrm{s}^{-1}$; on en déduit que $u(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]$ avec $\tau = \frac{1}{271\mathrm{s}^{-1}} = 3{,}7\,\mathrm{ms}$ et $\omega = \frac{\sqrt{4LC - \frac{L^2}{R^2}}}{2LC} = 3300\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
   Après on trouve avec les CI : $u(t) = \frac{E}{RC\omega}e^{-t/\tau}\sin\omega t$



4. L'équation différentielle est $LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = \frac{E}{R}$.
   Les CI sont $i_L(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0$.
   On trouve finalement $i_L(t) = \frac{E}{R}\left[1 - (\cos\omega t + \omega\tau\sin\omega t)\,e^{-t/\tau}\right]$

Corrigé de l'exercice E4.5 : Double R-C [**]

1. Avec les notations ci-contre :



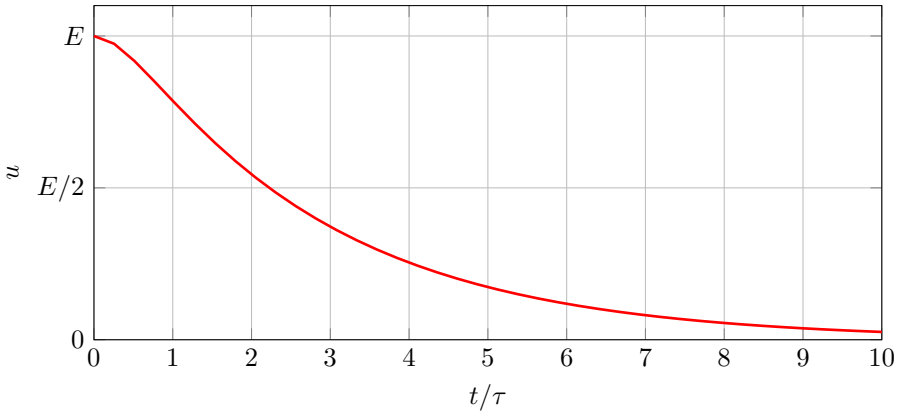
$$\begin{cases} e(t) = u'(t) + u_1(t) \text{(loi des mailles à gauche)} \\ u'(t) = u(t) + u_2(t) \text{(loi des mailles à droite)} \\ i_1(t) = i'(t) + i_2(t) \text{ (loi des nœuds)} \\ u_1(t) = Ri_1(t) \text{ et } u_2(t) = Ri_2(t) \text{ et } i'(t) = C\frac{\mathrm{d}u'(t)}{\mathrm{d}t} \text{ et } i_2(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \text{(lois des composants)} \end{cases}$$

On en déduit que $\frac{u_1(t)}{R} = C\frac{\mathrm{d}u'(t)}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ or $u_1(t) = e(t) - u'(t)$ et $u'(t) = u(t) + u_2(t) = u(t) + Ri_2(t) = u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. On en déduit que $\frac{e(t)-u(t)-RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}{R} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + RC^2\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où $R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t)$ donc $\tau = RC$.

2. En régime continu, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, donc aucun courant ne circule. Selon la loi d'Ohm, les tensions aux bornes des résistances sont donc nulles, ce qui implique que $u = u' = E$.

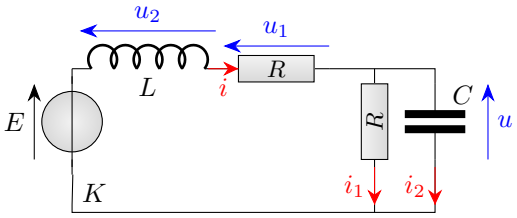
3. L'équation caractéristique a pour discriminant $5\tau^2$ et pour racines $r_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}$ et $r_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}$ donc les solutions sont de la forme $u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ (car $e = 0$: générateur éteint). Or par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, $u(0^+) = u'(0^+) = E$ ce qui implique que $u_2(0^+) = 0$ donc $i_2(0^+) = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$. On en déduit donc que $A + B = E$ et aussi que $r_1A + r_2B = 0$ d'où on tire $A = \frac{E}{1-\frac{r_1}{r_2}} = \frac{E}{1-\frac{-3+\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}E$ et $B = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Au final,

$$u(t) = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Ee^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Ee^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t}$$



Corrigé de l'exercice E4.6 : Circuit d'ordre 2 [**]

1.



Par la loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{u(t)}{R_2} + C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. Or par la loi des mailles, $u(t) = E - u_1(t) - u_2(t) = E - R_1i(t) - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$, ce qui implique que $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -R_1\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}$. En remplaçant dans l'équation de la loi des nœuds, on obtient $i(t) = \frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2}i(t) - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - R_1C\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}$; en rangeant les termes, on obtient

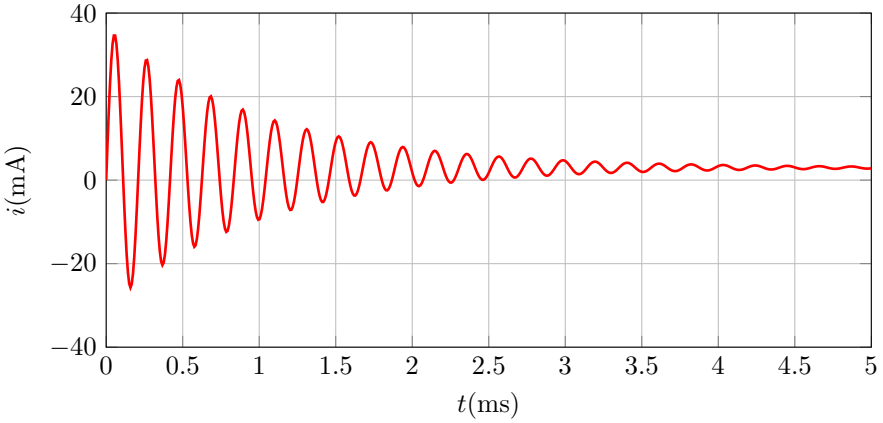
$$LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)i(t) = \frac{E}{R_2}$$

2. $\Delta = -1{,}76 \times 10^{-8} < 0$ donc les racines sont $-r \pm j\omega$ avec $r = 990\,\mathrm{s}^{-1}$ et $\omega = 15\,000\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. La solution particulière constante vaut $i = \frac{E}{R_1+R_2}$ donc $i(t) = \frac{E}{R_1+R_2} + e^{-rt}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$.
3. Par continuité du courant dans une bobine : $i(0^+) = 0$. Donc $A = -\frac{E}{R_1+R_2}$

   De plus, $u(0^+) = 0$ donc $u_2(0^+) = E$ d'où $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}$. On en déduit que $-rA+\omega B = \frac{E}{L}$ donc $B = \frac{\frac{E}{L}+r\frac{E}{R_1+R_2}}{\omega}$. Donc numériquement

$$i(t) = 3 + e^{-990t}\left[-3\cos(15000t) + 33{,}5\sin(15000t))\right] \text{ avec } t \text{ en s et } i \text{ en mA}$$

4.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
L,R1,R2,C,E=20e-3,12,3.3e3,220e-9,10
delta=(L/R2+R1*C)**2-4*L*C*(1+R1/R2)
re,im=-(L/R2+R1*C)/2/L/C,np.sqrt(-delta)/2/L/C
A=-E/(R1+R2)
B=(E/L-re*A)/im
t=np.linspace(0,5e-3,1000)
i=-A+np.exp(re*t)*(A*np.cos(im*t)+B*np.sin(im*t))
plt.plot(t*1000,i*1000)
plt.xlabel("t(ms)")
plt.ylabel("i(mA)")
plt.show()
```



Corrigé de l'exercice E4.7 : RLC avec une bobine non linéaire [***]

1. Je ne refais pas le schéma ici, je prends les notations du cours : $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t)$ donc $\frac{\mathrm{d}(L(i).i)(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + u_C(t) = e$ donc $L(i(t))\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}L(i)}{\mathrm{d}i}(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.i(t) + R.i(t) + u_C(t) = e(t)$ en utilisant la formule de dérivation de la fonction composée $L(i(t))$. Comme $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ on trouve

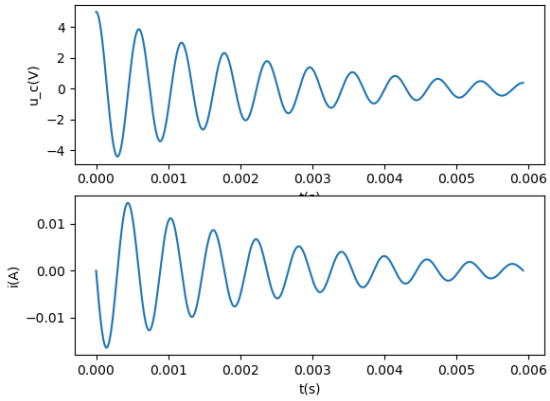
$$L\left(C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right).C\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + C^2.\frac{\mathrm{d}L(i)}{\mathrm{d}i}(t)\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = e(t)$$

2. Par continuité à cause du condensateur et de la bobine : $u_c(0^+) = 5\,\mathrm{V}$ et $i(0^+) = 0$ ce qui implique $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$. Pour résoudre par la méthode d'Euler, on écrit que $\left[L\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right).C + C^2.\frac{\mathrm{d}L(i)}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = -u_C - RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ donc on pose $u_c' = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et on a le schéma d'Euler :

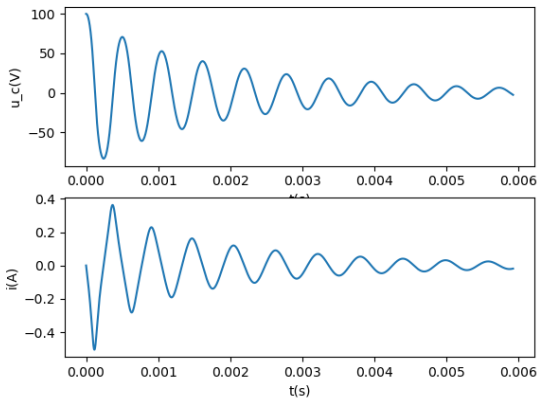
$$\begin{cases} t[n+1] = t[n] + h \\ u_C[n+1] = u_C[n] + h.u_C'[n] \\ u_C'[n+1] = u_C'[n] + h\dfrac{-u_C[n] - RCu_C'[n]}{L(Cu_n').C + C^2u_n'.\frac{\mathrm{d}L(i)}{\mathrm{d}i}} \text{ avec } i = C.u_C'[n] \end{cases}$$

```
import numpy as np
E,R,L0,L1,I0,C=5,25,4e-3,23e-3,0.3,330e-9 # constantes
T0=2*np.pi*np.sqrt(L0*C) # période propre aux faibles i
```

```
def L(i):
    return L0+L1/np.cosh(i/I0)**2
def dLdi(i):
    return -2*L0*np.sinh(i/I0)/I0/np.cosh(i/I0)**3
def deriveeseconde(uc,ducdt,t):
    i=C*ducdt
    return (-uc-R*C*ducdt)/(L(i)*C+C*i*dLdi(i))
h=T0/1000 # pas temporel
tmax=10*T0 # durée de simulation
N=int(tmax/h) # nombre de points
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_uc=np.zeros(N+1)
tab_ducdt=np.zeros(N+1)
tab_t[0],tab_uc[0],tab_ducdt[0]=0,E,0 # CI
for i in range(N):
    tab_t[i+1]=tab_t[i]+h
    tab_uc[i+1]=tab_uc[i]+h*tab_ducdt[i]
    tab_ducdt[i+1]=tab_ducdt[i]+h*deriveeseconde(tab_uc[i],tab_ducdt[i],tab_t[i])
# tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(tab_t,tab_uc)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("u_c(V)")
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(tab_t,C*tab_ducdt)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("i(A)")
plt.show()
```



3. En changeant $E = 100\,\mathrm{V}$ on obtient :



On constate au début une forte déformation de la courbe d'intensité, qui prend une forme triangulaire au lieu de sinusoïdale, à cause de la modification de la valeur de L.

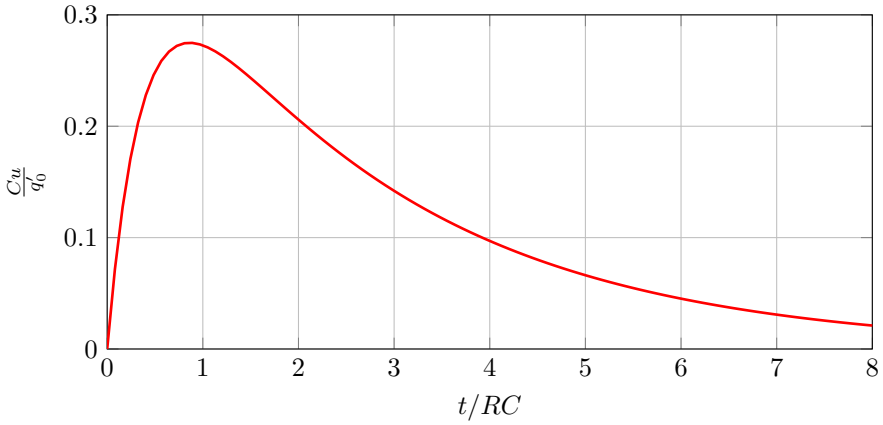
Corrigé de l'exercice E4.8 : Décharge d'un condensateur [***]

1. Lorsque $t \to \infty$, plus aucun courant ne circule, donc les tensions aux bornes des résistances sont nulles. On en déduit facilement que $u = u' = 0\,\text{V}$.
2. Soit i le courant qui entre dans C (côté q), i' dans C' (côté q') et $i'' = \frac{u}{R}$ le courant qui descend à travers R. Alors on peut écrire les relations :

$$\begin{cases} i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(t) \text{ (condensateur de droite)} \\ i'(t) = C\frac{\mathrm{d}u'(t)}{\mathrm{d}t}(t) \text{ (condensateur de gauche)} \\ i(t) + i'(t) + \frac{u(t)}{R} = 0 \text{ (loi des nœuds)} \\ u'(t) + Ri'(t) - u(t) = 0 \text{ (loi des mailles)} \end{cases}$$

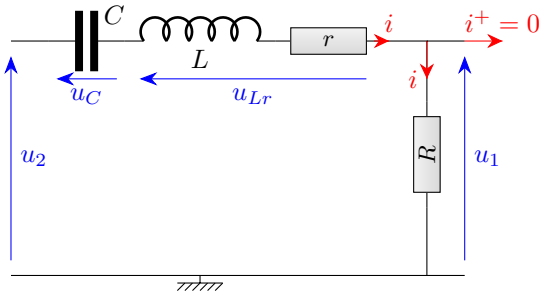
Donc $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u'(t)}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i'(t)}{C} + R\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{i(t)}{C} - \frac{u(t)}{RC} - R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{u(t)}{RC} - RC\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ ce qui donne l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau^2}u(t) = 0$

3. $\Delta = \frac{5}{\tau^2}$; donc $u(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$ avec $r_+ = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}$ et $r_- = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}$. Les conditions initiales sont d'une part $u(0^+) = 0$; d'autre part $u'(0^+) = \frac{q_0'}{C}$, donc on en déduit que $i'(0^+) = -\frac{q_0'}{RC}$, d'où on tire $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{q_0'}{RC^2}$.
4. Donc $A + B = 0$ et $r_+A + r_-B = \frac{q_0'}{RC^2}$, d'où finalement
$u(t) = \dfrac{q_0'}{\sqrt{5}C}\left[-e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t\right)} + e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t\right)}\right]$



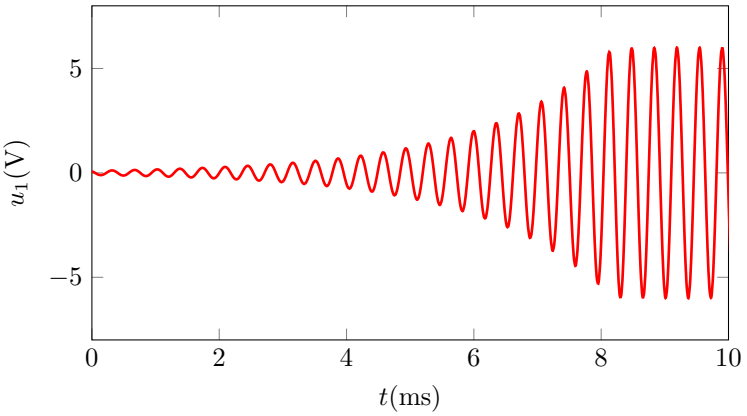
Corrigé de l'exercice E4.9 : Oscillateur à base d'un RLC série [**]

On place les notations, et on décompose la bobine en deux dipôles :



1. Par la loi d'additivité : $u_2(t) = u_1(t) + u_C(t) + u_{Lr}(t) = u_1(t) + u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) = u_1(t) + u_C(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{R}u_1(t)$ (par la loi d'Ohm + la loi des nœuds qui indique que la même intensité traverse C, L, r et R). Pour utiliser la loi du condensateur $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i(t)}{C}$, on dérive : $\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{C} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}$. On termine avec la loi d'Ohm : $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1(t)}{RC} = \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$.

2. C'est un amplificateur non inverseur : $\alpha = \frac{R_1+R_2}{R_1}$ (à savoir redémontrer).
3. En mettant les deux équations ensembles, on trouve $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1(t)}{RC} = \alpha\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}$ ce qui donne après quelques calculs $\frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\left(1+\frac{r}{R}-\alpha\right)\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1(t)}{LC} = 0$ donc $K = \frac{R}{L}\left(1+\frac{r}{R}-\alpha\right)$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 17\,700\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ donc $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 355\,\mu\mathrm{s}$.
4. Les solutions sont oscillantes $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow \frac{R^2}{L^2}\left(1+\frac{r}{R}-\alpha\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$
$$\Leftrightarrow \frac{R^2}{L^2}\left(1+\frac{r}{R}-\alpha\right)^2 < \frac{4}{LC}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{LC}} < \frac{R}{L}\left(1+\frac{r}{R}-\alpha\right) < \frac{2}{\sqrt{LC}}$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{r}{R}-\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \alpha < 1+\frac{r}{R}+\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$\Leftrightarrow -55,3 < \alpha < 57,8$$
Comme $\alpha > 1$, il suffit donc que $\alpha < 57,8$.
Les solutions sont stables $\Leftrightarrow K > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1+\frac{r}{R} = 1,26$.
Les solutions sont donc instables et oscillantes pour $1,26 < \alpha < 57,8$.
5. Pour $\alpha = 2$, on va avoir des oscillations à une période proche de T_0, qui vont croître jusqu'à la saturation de l'AO, soit $|u_2| = 12\,\mathrm{V}$ donc $u_1 = \frac{12}{\alpha} = 6\,\mathrm{V}$. Ensuite, les oscillations vont continuer, mais en ne grandissant plus.



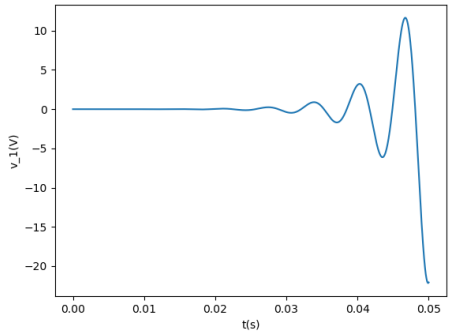
Corrigé de l'exercice E4.10 : Oscillateur à double déphaseur [***]

1. Les courants de polarisation sont nuls, donc d'après la loi des nœuds, $i_1(t) = i_2(t)$ et $i_3(t) = i_4(t)$.
2. $u_C(t) + R.i_1(t) = e(t)$ donc $u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$
3. $u_C(t) - \varepsilon(t) + R.i_3(t) = e(t)$ donc $u_C(t) + R.i_3(t) = e(t)$. De même $u_C(t) - R.i_3(t) = s(t)$. En ajoutant, on trouve $u_C(t) = \frac{e(t)+s(t)}{2}$
4. On remplace dans la première équation : $\frac{1}{2}\left[e(t) + s(t) + RC\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right] = e(t)$ d'où on tire $RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = -RC\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + e(t)$ et on pose $\tau = RC$.
5. **Oscillateur à circuit déphaseur**
   (a) En appliquant l'équation (E4.7) deux fois on trouve les relations $\begin{cases}\tau\frac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t} + v_3(t) = -\tau\frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t} + v_2(t)\\ \tau\frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t} + v_2(t) = -\tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + v_1(t)\end{cases}$
   En faisant la somme et la différence, on trouve : $\begin{cases}\tau\frac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t} + v_3(t) = -2\tau\frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t} - \tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + v_1(t)\\ \tau\frac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t} + v_3(t) = 2v_2(t) + \tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} - v_1(t)\end{cases}$
   On élimine alors $v_2(t)$ en dérivant la seconde équation, en la multipliant par τ et en ajoutant le résultat obtenu à la première :
$$\tau\frac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t} + v_3(t) + \tau^2\frac{\mathrm{d}^2v_3(t)}{\mathrm{d}t^2} + \tau\frac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t} = -\tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + v_1(t) + \tau^2\frac{\mathrm{d}^2v_1(t)}{\mathrm{d}t^2} - \tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t}$$
   et on trouve l'équation demandée.
   (b) En remplaçant $v_3(t)$ par $-\frac{1}{\alpha}v_1(t)$, en regroupant tous les termes du même côté et en multipliant par α, on trouve
$$(1+\alpha)\tau^2\frac{\mathrm{d}^2v_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2(1-\alpha)\tau\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + (1+\alpha)v_1(t) = 0$$

(c) Les solutions sont stables si les 3 coefficients sont de même signe, donc ici, si $1-\alpha>0$ donc $\alpha<1$. Elle deviennent instables dès que $\alpha>1$.
De plus $\Delta=4\tau^2(1-\alpha)^2-4\tau^2(1+\alpha)^2=-16\tau^2\alpha<0$ donc les solutions sont oscillantes.

(d) On commence par isoler : $\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{2(1-\alpha)}{\tau(1+\alpha)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\frac{v_1}{\tau^2}$:

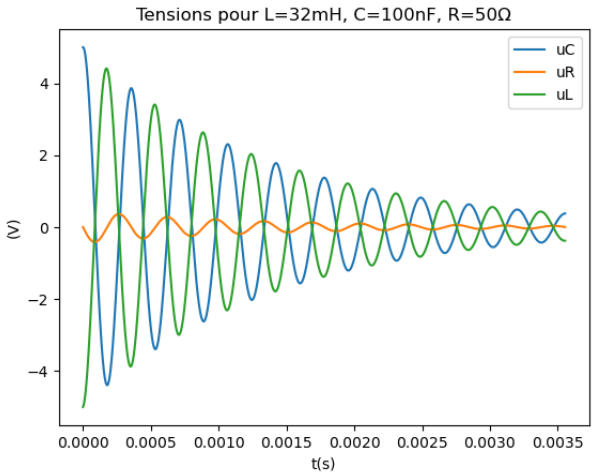
```
import numpy as np
tau,alpha=1e-3,1.5 # constantes
def deriveeseconde(v,dvdt,t):
    return -2*(1-alpha)/(1+alpha)/tau*dvdt-v/tau**2
h=tau/1000 # pas temporel
tmax=50*tau # durée de simulation
N=int(tmax/h) # nombre de points
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_v=np.zeros(N+1)
tab_dvdt=np.zeros(N+1)
tab_t[0],tab_v[0],tab_dvdt[0]=0,0,1 # CI
for i in range(N):
    tab_t[i+1]=tab_t[i]+h
    tab_v[i+1]=tab_v[i]+h*tab_dvdt[i]
    tab_dvdt[i+1]=tab_dvdt[i]+h*deriveeseconde(tab_v[i],tab_dvdt[i],tab_t[i])
# tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_v)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("v_1(V)")
plt.show()
```

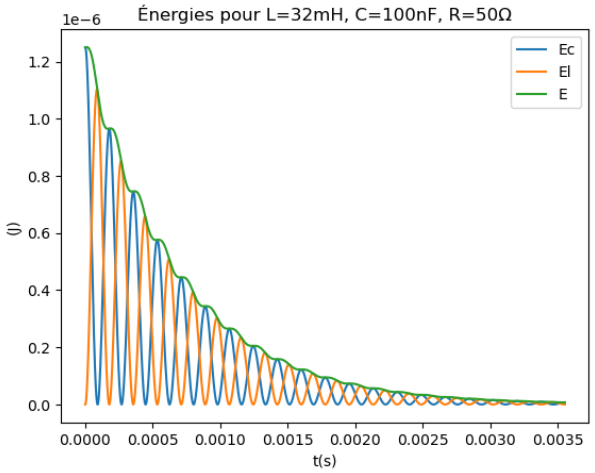


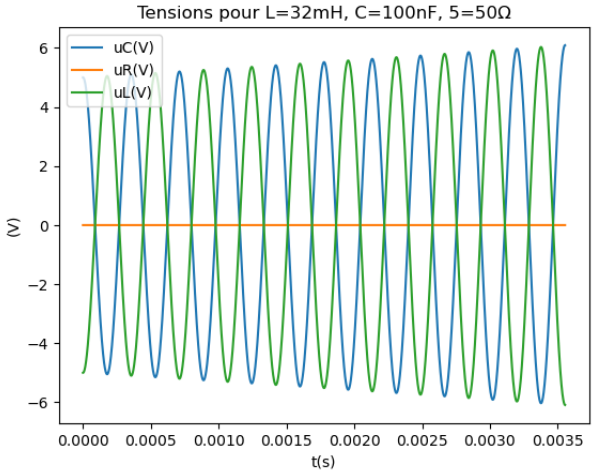
Les oscillations apparaissent et croissent ; quand elles dépassent 15 V, l'AO va saturer en réalité et ne fonctionnera plus en régime linéaire.

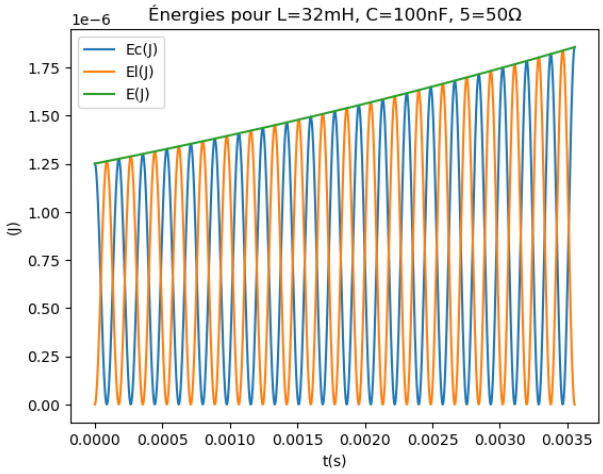
Réponses aux TDs numériques

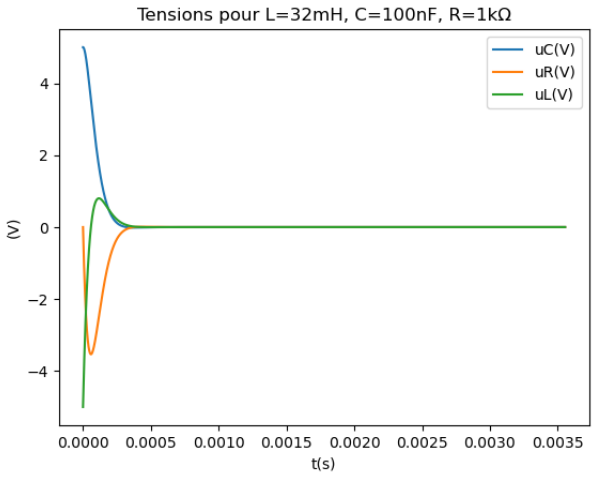
Réponses au TD d'info : RLC série

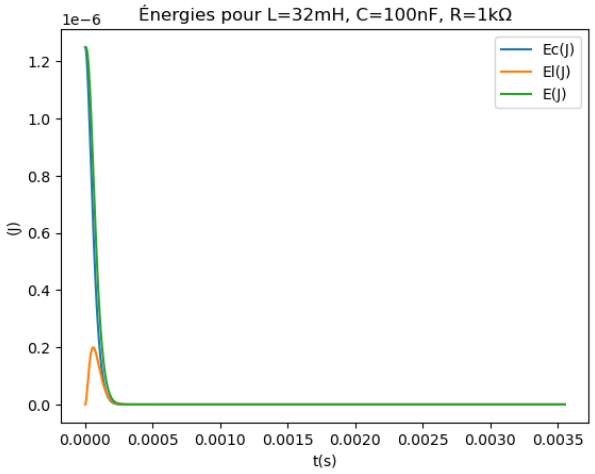








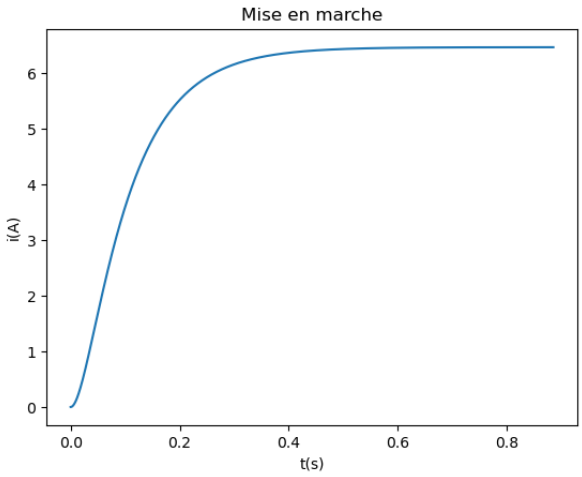


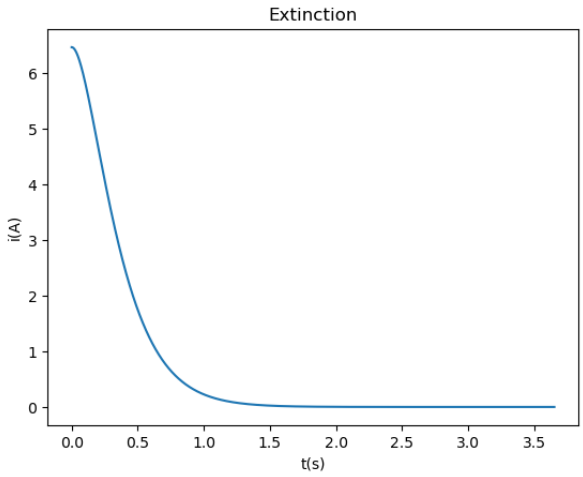


Dans le cas $R = 0\,\Omega$ on constate un problème de la méthode d'Euler : l'énergie croît alors qu'elle devrait être constante.

Réponses au TD d'info : Moteur électrique protégé par un condensateur

$C_{\text{critique}} = \frac{4L_m}{R_m^2} = 12{,}1\,\text{mF}$ permet d'obtenir l'atténuation la plus rapide du courant.


Mise en marche
i(A)
t(s)
0
1
2
3
4
5
6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8


Extinction
i(A)
t(s)
0
1
2
3
4
5
6
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5

Mécanique

Chapitre M0 Prérequis mathématiques pour la mécanique

Cours p.354
M0.A. Vecteurs
M0.B. Dérivées
M0.C. Cercles

QCMs p.358

M0. Prérequis mathématiques pour la mécanique

Cours

M0.A. Vecteurs

A.1. Vecteurs et base

En mécanique, le repérage de points va utiliser des vecteurs.

Définition : Vecteur

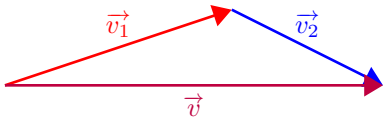
Un vecteur $\vec{v}$ (du plan ou de l'espace) est un objet mathématique caractérisé par une longueur (sa norme, notée $\|\vec{v}\|$), une direction et un sens ; on le représente avec une flèche.

Propriété : Multiplication d'un vecteur par un scalaire

On peut multiplier un vecteur $\vec{v}$ par un nombre (un *scalaire*) λ : cela multiplie sa norme par $|\lambda|$, ne change pas sa direction, et inverse son sens si $\lambda < 0$.

Propriété : Addition de vecteurs

On peut ajouter deux vecteurs : $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$.



Remarque : Souvent, les vecteurs sont repérés par deux points (point de départ et d'arrivée) et dans ce cas, la relation précédente prend le nom de relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

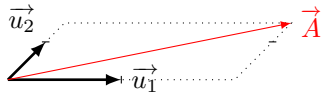
Néanmoins, il est important de se souvenir qu'un vecteur n'est pas lié à un point particulier. Un vecteur peut être déplacé, il est toujours le même vecteur.

Les vecteurs sont peu pratiques à dériver. On va donc ramener chaque vecteur à 1, 2 ou 3 nombres grâce à une base de projection.

Définition : Base

Une base est un ensemble de vecteurs (2 dans le plan, 3 dans l'espace) grâce auxquels on peut décomposer tout vecteur sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base ; les coefficients de la décomposition s'appellent les *coordonnées du vecteur dans la base*.

Par exemple, les deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ci-contre forment une base du plan ; le vecteur $\vec{A}$ peut se décomposer comme $\vec{A} = 2\vec{u_1} + 1{,}5\vec{u_2}$. Les coordonnées de $\vec{A}$ dans cette base sont donc $(2; 1, 5)$.



Définition : Base orthonormée

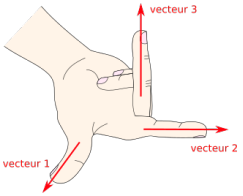
Une base orthonormée est une base telle que :

- les vecteurs de la base ont pour norme 1
- les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux

Remarque : Dans l'espace, on ajoute une notion supplémentaire :

Définition : Base orthonormée directe

Une base orthonormée dans l'espace est *directe* si les 3 vecteurs sont placés dans le même ordre que les trois premiers doigts de la main droite (pouce, index, majeur).



On verra l'utilité de cette notion plus tard, avec le produit vectoriel. Un dernier point concernant les notations :

Propriété : Vecteur orthogonal au plan de la figure

Un vecteur orthogonal au plan de la figure et sortant vers l'observateur est représenté par un cercle avec un point : $\odot\,\vec{v}$
Un vecteur orthogonal au plan de la figure et fuyant l'observateur est représenté par un cercle avec une croix : $\otimes\,\vec{v}$

A.2. Produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le **nombre**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \qquad \text{(M0.1)}$$

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

Propriété : Produit scalaire et orthogonalité

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Démonstration

Évident à partir de (M0.1) : si les normes sont non nulles, le produit scalaire est nul si et seulement si $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Propriété : Produit scalaire et norme

La norme d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur avec lui-même :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2} \qquad \text{(M0.2)}$$

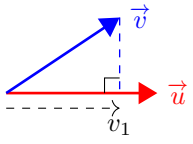
Démonstration

Évident d'après (M0.1) puisque l'angle entre un vecteur et lui-même est nul.

Propriété : Produit scalaire et projection

Le produit scalaire entre deux vecteurs est égal à norme de l'un multiplié par la longueur de la projection de l'autre sur le premier :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,.v_1$$



Démonstration

Sur la figure ci-dessus, on voit bien que la projection v_1 vaut $\|\vec{v}\|\,.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ par définition du cosinus, ce qui ramène à la définition du produit scalaire.

À partir de maintenant, on suppose qu'on a une base orthonormée $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ en 3D (les résultats se déduisent facilement en 2D).

Propriété : Produit scalaire des vecteurs de la base

Par définition d'une base orthonormée,

* $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{c} = 1$ (car la norme des vecteurs vaut 1)
* $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ (car les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2)

Propriété : Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée, la coordonnée d'un vecteur suivant un des vecteurs de la base (aussi appelée *projection du vecteur sur le vecteur de la base*) est égale au produit scalaire entre le vecteur et le vecteur de la base.
Ainsi, on peut écrire $\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{u}\cdot\vec{b})\vec{b} + (\vec{u}\cdot\vec{c})\vec{c}$.

Démonstration

Notons $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$; alors $\vec{u}\cdot\vec{a} = x\vec{a}\cdot\vec{a} + y\vec{b}\cdot\vec{a} + z\vec{c}\cdot\vec{a} = x$ d'après les règles précédentes. Il en va de même pour les autres vecteurs de la base.

Propriété : Produit scalaire dans une base orthonormée

Soient deux vecteurs $\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}$ et $\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}$. Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 \tag{M0.3a}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \tag{M0.3b}$$

Démonstration

Il suffit pour la première d'utiliser la linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}\right)\cdot\left(v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\right)\\ &= u_1.v_1.\vec{a}\cdot\vec{a} + u_1.v_2.\vec{a}\cdot\vec{b} + u_1.v_3.\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &\quad + u_2.v_1.\vec{b}\cdot\vec{a} + u_2.v_2.\vec{b}\cdot\vec{b} + u_2.v_3.\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &\quad + u_3.v_1.\vec{c}\cdot\vec{a} + u_3.v_2.\vec{c}\cdot\vec{b} + u_3.v_3.\vec{c}\cdot\vec{c}\\ &= u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3\end{aligned}$$

en remplaçant les produits scalaires par leur valeur (car la base est orthonormée).
En l'appliquant à $\vec{u}\cdot\vec{u}$, on obtient la seconde formule.

M0.B. Dérivées

En mécanique, on va étudier des mouvements, c'est-à-dire des variations de positions au cours du temps. On va donc souvent avoir à manipuler des dérivées par rapport au temps. On a alors une notation compacte :

Définition : Notation des dérivées temporelles

Soit $f(t)$ une fonction du temps. On note $\dot{f}(t)$ la dérivée de f par rapport au temps (c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$) et $\ddot{f}(t)$ sa dérivée seconde (c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}$).

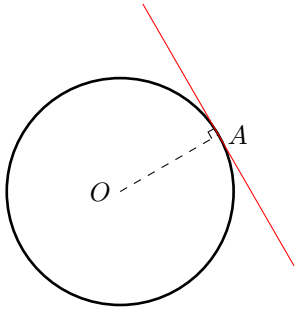
Remarque : On pourrait faire la même chose en électricité…mais pas avec l'intensité, parce qu'entre $i(t)$ et $\dot{i}(t)$, la confusion est garantie !

M0.C. Cercles

Quelques rappels sur les cercles :

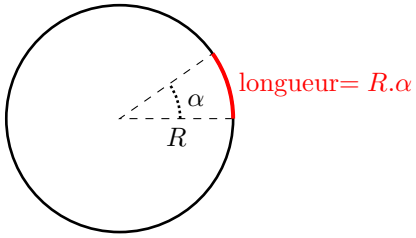
Propriété : Tangente à un cercle

La tangente à un cercle en un de ses points est orthogonale au rayon du cercle aboutissant à ce point.



Propriété : Longueur d'un arc de cercle

Un arc de cercle de rayon R et d'angle α a pour longueur $R.\alpha$ **avec** α **en radians**.



Remarque : Pour un cercle complet, on retrouve le périmètre $2\pi.R$.

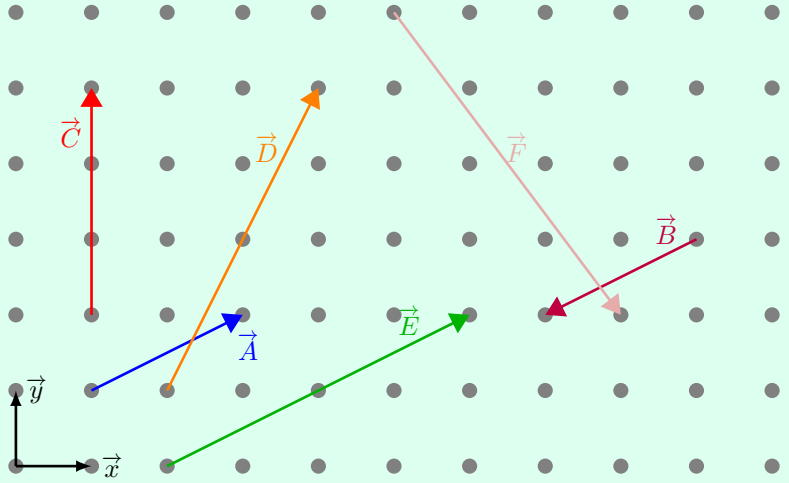
M0. Prérequis mathématiques pour la mécanique

QCMs

réponses page 359

✓ QCM : Calculs sur les vecteurs ✗

On considère les vecteurs du plan suivants :



Q1. Quelles sont les coordonnées de $\vec{D}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y})$?

(a). $(2\,;1)$
(b). $(4\,;5)$
(c). $(2\,;5)$
(d). $(2\,;4)$

Q2. Que vaut $\vec{A}.\vec{C}$?

(a). $6\vec{x} + 3\vec{y}$
(b). 0
(c). 3
(d). 6

Q3. Que vaut la norme de $\vec{F}$?

(a). 4
(b). 5
(c). $\sqrt{7}$
(d). 7

Q4. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{F} + \frac{1}{2}\vec{D}$?

(a). $(-4\,;2)$
(b). $(4\,;-2)$
(c). $(5\,;0)$
(d). $(3\,;-1)$

Q5. Le vecteur $\vec{F} + \frac{1}{2}\vec{D}$ est-il orthogonal au vecteur $\vec{D}$?

(a). Oui
(b). Non

Q6. Quelles égalités sont vraies ?

(a). $\vec{F} - \vec{E} = -2\vec{C}$
(b). $\vec{A} + \vec{C} = \vec{D}$
(c). $2\vec{D} + \vec{F} = 2\vec{E}$
(d). $\vec{D} + \vec{F} = 5\vec{x}$
(e). $\vec{B} = -\vec{A}$
(f). $\vec{E} = 2\vec{A}$

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Calculs sur les vecteurs

Q1.(d)
Q2.(c)
$2 \times 0 + 1 \times 3$
Q3.(b)
$\sqrt{(-4)^2 + 3^2}$
Q4.(b)
Q5.(a)
Le produit scalaire vaut $4 \times 2 + (-2) \times 4 = 0$
Q6.(b) ET (d) ET (e) ET (f)

Chapitre M1 Cinématique du point

Programme p.370

Conseils p.371

Cours p.362
- M1.A. Référentiel
- M1.B. Position, vitesse, accélération

QCMs p.372

Exercices p.375

M1. Cinématique du point

Cours

Nous allons, avec ce chapitre, commencer la mécanique, c'est-à-dire l'étude du mouvement de objets. Dans ce premier chapitre, nous allons commencer par une question très simple : comment décrire le mouvement des objets ? Avec quels outils le faire ?

M1.A. Référentiel

La première chose à faire pour décrire le mouvement d'un objet, c'est de préciser le point de vue qu'on prend pour décrire son mouvement. Par exemple, lorsqu'un train roule, la vache qui rumine immobile dans un champ voit le train qui bouge, tandis que le voyageur, assis dans le train, voit le train immobile et la vache se déplaçant rapidement. Ces deux points de vue sont justes ; mais quand on veut faire de la mécanique, il faut en choisir un.

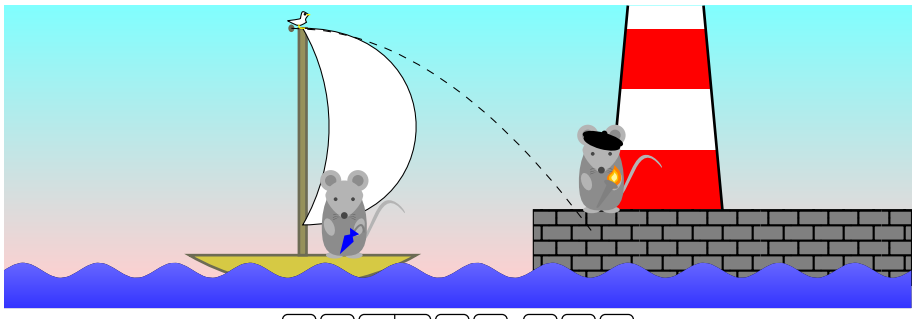
Définition : Référentiel

Le mouvement d'un point est repéré par rapport à un référentiel. Un référentiel est constitué d'une horloge et

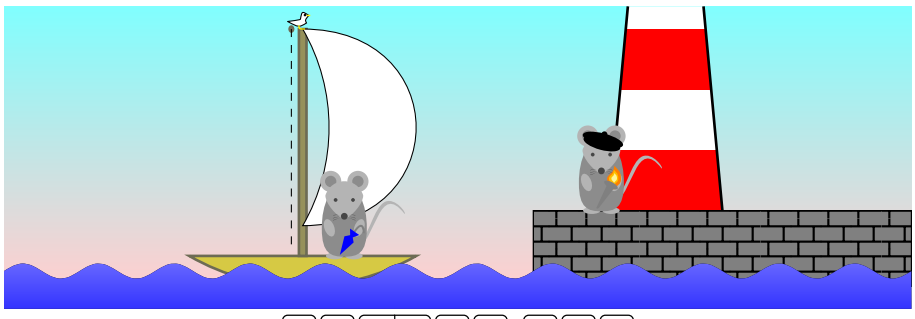
- d'un repère indéformable, ou bien
- d'un solide indéformable.

Remarque : En mécanique non-relativiste, le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels ; du coup, on ne précisera pas l'horloge utilisée. On dira donc simplement : le référentiel lié au champ, ou le référentiel lié au train.

FIGURE M1.1 : Entrée d'un bateau dans un port ; la trajectoire de l'œuf pondu par le goéland dépend du référentiel.



(a) Référentiel lié à la jetée

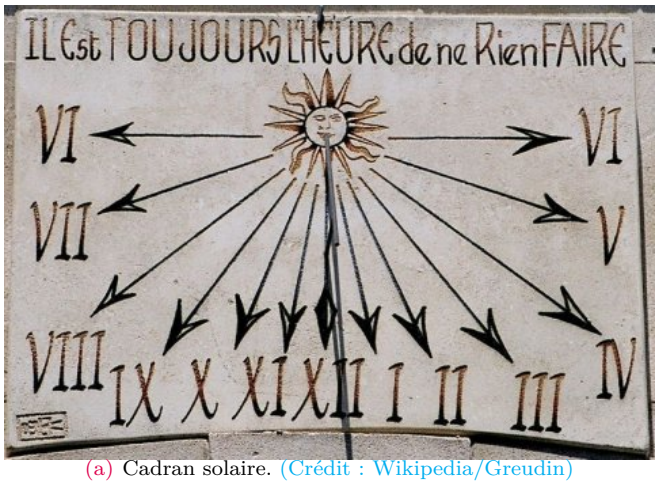


(b) Référentiel lié au voilier

Remarque : L'horloge permet de mesurer les durées. Une durée se mesure en la comparant avec la durée d'un phénomène cyclique régulier. Ainsi, on a utilisé au cours des âges (figure M1.2) :

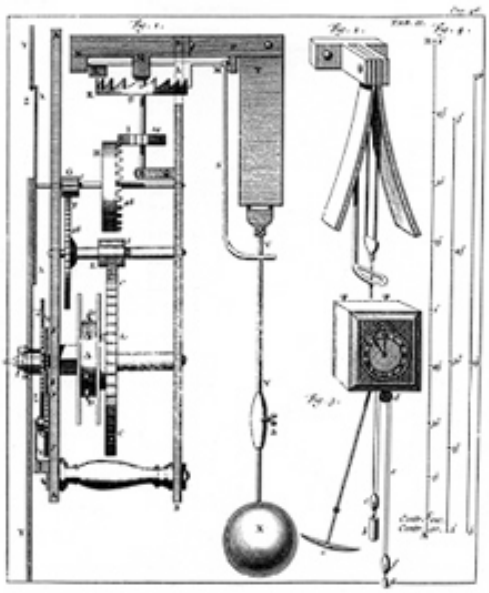
— l'alternance jour/nuit, d'une période de 24 h, permettant des mesures à la demi-heure près
— le battement d'un pendule, permettant des mesures à la seconde près
— les vibrations d'un diapason de quartz, permettant des mesures à la milliseconde près, voire moins
— les vibrations d'un atome de césium dans une horloge atomique, permettant des mesures à la femtoseconde près.

FIGURE M1.2 : Mesures du temps.



(a) Cadran solaire. (Crédit : Wikipedia/Greudin)


(b) Horloge atomique à césium.


(c) Pendule de Huygens.(Crédit : Wikipedia)



(d) Oscillateur à quartz.(Crédit : Wikipedia/M.r)

Définition : Définition officielle de la seconde

Un atome de Césium 133 isolé oscille entre ses deux états fondamentaux hyperfins à 9 192 631 770 Hz.

De même, pour les longueurs, on a longtemps utilisé toutes sortes de mesures, jusqu'à ce que le système métrique s'impose, définissant le mètre comme $\frac{1}{40\,000}$ de la longueur de l'équateur terrestre. Pour faciliter les mesures, on a longtemps utilisé un mètre étalon en platine, mais désormais le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière dans le vide :

Définition : Définition officielle du mètre

La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Il n'est pas nécessaire de retenir cette valeur exacte, mais il faut savoir que $c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

M1.B. Position, vitesse, accélération

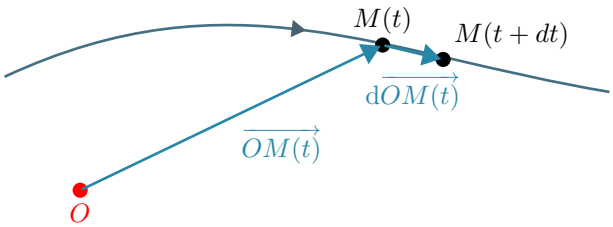
B.1. Relations générales

Définition : Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel est la courbe orientée formée de toutes positions occupées par ce point au cours du temps.

Dans l'espace, le point peut se déplacer en 3 dimensions, et son repérage nécessite l'utilisation de vecteurs :

FIGURE M1.3 : Repérage d'un point qui se déplace dans l'espace.



Définition : Vecteur position

La position d'un point est repérée par rapport à un point O **fixe** dans le référentiel d'étude par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ qui dépend du temps.

Définition : Vitesse instantanée

On définit la vitesse (instantanée) du point M par la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{M1.1}$$

On définit parfois la *vitesse absolue* comme la norme de la vitesse : $v = \|\vec{v}\|$

Que signifie, au juste, la dérivée d'un vecteur ? Pour le comprendre, il faut, à l'aide de la figure M1.3, revenir à la définition de la dérivée à l'aide d'un taux d'accroissement : $\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{OM(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$ avec $\mathrm{d}t$ petit. Or par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OM(t+\mathrm{d}t)} + \overrightarrow{M(t)O} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$: c'est le vecteur dont s'est déplacé le point M entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$; on l'appelle souvent le *petit déplacement*, noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. La vitesse est donc égale à $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}}{\mathrm{d}t}$; c'est un vecteur qui est tangent à la trajectoire. On retiendra surtout ceci, que pendant un temps $\mathrm{d}t$, le point M se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}.\mathrm{d}t$.

Remarque : Si $\vec{v}$ est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$, alors $\overrightarrow{OM}$ est une primitive de $\vec{v}$: ainsi, si on connaît $\vec{v}(t)$, on peut retrouver la position $\overrightarrow{OM}(t)$ en écrivant que $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}(t)\mathrm{d}t + \overrightarrow{\mathrm{cst}}$. Si on connaît une condition initiale, par exemple $\overrightarrow{OM}(0)$, alors on peut trouver la constante. Néanmoins, on ne sait pas vraiment intégrer un vecteur. On aura donc besoin d'abord de projeter les vecteurs sur une base (cf. plus loin).

Définition : Accélération

On définit l'accélération comme

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{M1.2}$$

Remarque : L'accélération est la dérivée du vecteur $\vec{v}$, non pas de $\|\vec{v}\|$: même si la vitesse absolue est constante, le vecteur vitesse ne l'est pas forcément, donc l'accélération n'est pas forcément nulle.

Remarque : De même, $\vec{v}$ est une primitive de l'accélération : $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t).\mathrm{d}t + \overrightarrow{\mathrm{cst}}$.

Définition : Mouvement rectiligne

Un mouvement est rectiligne si la direction de la vitesse est constante.

Définition : Mouvement uniforme

Un mouvement est uniforme si la norme de la vitesse est constante.

Remarque : Attention aux confusions fréquentes entre ces deux définitions. Un tramway en ligne droite à vitesse constante a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cst}}$. S'il freine en ligne droite, son mouvement est rectiligne mais n'est plus uniforme. S'il prend un virage à vitesse constante, son mouvement est uniforme mais n'est plus rectiligne.

B.2. Repérage en coordonnées cartésiennes

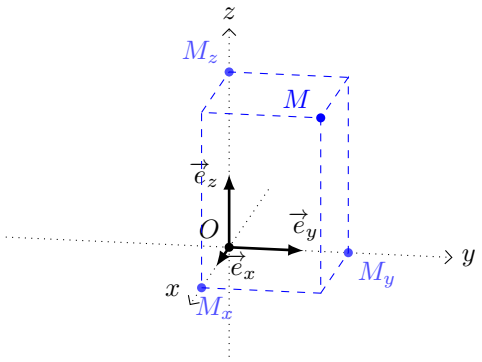
Nous avons vu des définitions générales permettant de repérer un point dans l'espace, à l'aide de vecteurs. Mais pour travailler sur les vecteurs, il faut les décomposer sur une base de l'espace pour se ramener à l'étude de fonctions non vectorielles (fonctions scalaires). On va donc définir une base fixe pour exprimer les vecteurs, et un système de coordonnées robuste.

Définition : Système de coordonnées

Un système de coordonnées est un ensemble de nombres (1, 2 ou 3) qui permet de repérer de façon univoque un point dans l'espace.

Le système de coordonnées le plus simple est le système cartésien, qui s'appuie sur une origine O et trois axes de l'espace orthogonaux deux à deux ; on les notera souvent x, y et z. Considérons alors un point M (figure M1.4) ; on peut projeter orthogonalement ce point M sur les trois axes, et obtenir les points M_x, M_y et M_z. Les positions de ces trois points suffisent à reconstruire la position de M.

FIGURE M1.4 : Coordonnées cartésiennes.



Définition : Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont définies par $(x, y, z) = \left(\overline{OM_x}, \overline{OM_y}, \overline{OM_z}\right)$.

À partir de ces axes, on va créer une *base orthonormée directe*.

Définition : Base cartésienne

La base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est formée de trois vecteurs unitaires dirigés selon les trois axes Ox, Oy et Oz. Elle est orthonormée directe et constante au cours du temps.

On a donc les propriétés suivantes :
- $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$
- $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$

Une fois cette base posée, on peut repérer le vecteur position :

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \qquad \text{(M1.3)}$$

Démonstration

Notons H le point en bas à droite du parallélépipède bleu de la figure M1.4. Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = \overrightarrow{OM_x}.\vec{e}_x + \overrightarrow{OM_y}.\vec{e}_y + \overrightarrow{OM_z}.\vec{e}_z$.

Propriété : Vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \qquad \text{(M1.4)}$$

Démonstration

Les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont constants donc seuls x, y et z varient au cours du temps et sont dérivés. Donc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$. En mécanique, on a l'habitude d'utiliser la notation concise du point au-dessus d'un symbole pour indiquer la dérivation par rapport au temps.

Propriété : Accélération

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z \qquad \text{(M1.5)}$$

Démonstration

Identique à la précédente.

Enfin, il reste l'expression du petit déplacement du point M lorsque les trois variables varient d'une petite quantité dx, dy et dz :

Propriété : Petit déplacement

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z \qquad \text{(M1.6)}$$

Démonstration

Si x varie de $\mathrm{d}x$, on voit bien que le point M se déplace de $\mathrm{d}x$ dans la direction $\vec{e}_x$. Idem pour les autres variables. On ajoute alors les 3 déplacements.

Exemple : Mouvement à accélération constante — À connaître

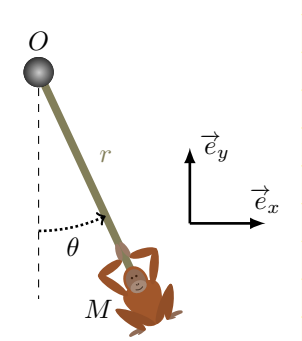
Un point se déplace en 1D selon la direction $\vec{e}_x$; il est repéré par sa coordonnée $x(t)$. Sa position initiale vaut $x_0\vec{e}_x$ et sa vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$. Il est accéléré avec une accélération constante $\vec{a} = a_0\vec{e}_x$. Exprimez sa vitesse et sa position.

On ne sait pas intégrer des vecteurs, mais on admet qu'on peut toujours sortir les vecteurs constants des intégrales, comme une constante classique.
$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ donc $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t).\mathrm{d}t + \overrightarrow{\text{cst}} = \int a_0\vec{e}_x.\mathrm{d}t + \overrightarrow{\text{cst}} = \left(\int a_0.\mathrm{d}t\right)\vec{e}_x + \overrightarrow{\text{cst}} = a_0.t\vec{e}_x + \overrightarrow{\text{cst}}$ or $\vec{v}(0) = \vec{0} + \overrightarrow{\text{cst}} = v_0.\vec{e}_x$ donc $\vec{v}(t) = (a_0.t + v_0).\vec{e}_x$.
De même pour la position : $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}(t).\mathrm{d}t + \overrightarrow{\text{cst}} = \int (a_0.t + v_0).\mathrm{d}t.\vec{e}_x = \left(a_0.\frac{t^2}{2} + v_0.t\right)\vec{e}_x + \overrightarrow{\text{cst}}$ or $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} + \overrightarrow{\text{cst}} = x_0.\vec{e}_x$ donc $\overrightarrow{OM}(t) = \left(a_0.\frac{t^2}{2} + v_0.t + x_0\right)\vec{e}_x$.

Jusque-là, ça a l'air simple. Mais le problème, c'est que les variables décrivant le système ne sont pas toujours $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$; dans plusieurs exercices, on aura des mouvements repérés par des angles, et alors il faut exprimer les coordonnées du point dans la base à l'aide de projections.

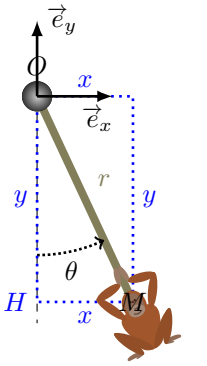
Exemple : Projection sur la base cartésienne

On considère un orang-outan M suspendu au bout d'une liane de longueur r constante. Cette liane est fixée en un point O, et peut tourner autour ; on repère sa position par l'angle θ par rapport à la verticale.



1. Exprimez le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
2. Exprimez la vitesse de M dans la base cartésienne ; on prendra en compte que θ varie mais r est fixe.
3. Exprimez l'accélération de M.

1. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est penché, il n'est ni selon $\vec{e}_x$, ni selon $\vec{e}_y$, il va donc falloir le projeter, c'est-à-dire l'exprimer sous la forme $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$, mais en exprimant $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de l'inconnue qui décrit le mouvement, à savoir $\theta(t)$ ici.
Pour cela, il faut commencer par dessiner le « rectangle de projection » (en bleu pointillé sur la figure ci-contre) qui a des côtés parallèles aux axes, et le vecteur position pour diagonale. Il fait apparaître les longueurs x et y recherchées.
On voit aussi apparaître un triangle rectangle OHM possédant l'angle θ. Dans ce triangle, r est l'hypothénuse, $|y|$ le côté adjacent à l'angle et $|x|$ le côté opposé (on met des valeurs absolues pour le moment, car x et y sont algébriques, ils ont un signe). On sait alors, par les relations des fonctions trigonométriques, que le côté adjacent est égal à l'hypothénuse multipliée par $\cos\theta$, et le côté opposé à l'hypothénuse multipliée par $\sin\theta$. On a donc $|x| = r.\sin\theta$ et $|y| = r.\cos\theta$.



Reste à mettre les signes. On voit que la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{e}_x$ va vers la droite, comme $\vec{e}_x$, donc $x > 0$; et que la projection verticale va vers le bas, tandis que $\vec{e}_y$ va vers le haut, donc $y < 0$. [a]
Conclusion : $x(t) = r.\sin\theta(t)$ et $y(t) = -r.\cos\theta(t)$, donc $\overrightarrow{OM}(t) = r.\sin\theta(t)\vec{e}_x - r.\cos\theta(t)\vec{e}_y$.

> **!** En physique, on écrit un peu indifféremment θ ou $\theta(t)$. Néanmoins, en mécanique, il y a toujours plein de paramètres, certains varient au cours du temps, d'autre sont constants. Je vous conseille donc, pour le moment, de bien mettre les (t) pour les paramètres qui varient, sinon, quand vous allez dériver, vous allez vous tromper et prenant des grandeurs variables pour des constantes, et vice-versa.

2. Pour avoir la vitesse, il faut dériver par rapport au temps. Attention cependant à la dérivée de $\sin\theta(t)$ et $\cos\theta(t)$: on sait que $\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$, mais ici on dérive par rapport au temps ; il s'agit d'une dérivée composée car θ dépend du temps : $\frac{\mathrm{d}\sin\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}.\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}(t) = \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$. De même $\frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$. Donc finalement, $\vec{v} = r\dot{\theta}(t)\left(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y\right)$.
3. On redérive encore une fois, mais attention, $\dot{\theta}$ varie aussi, donc on a un produit à dériver : $\vec{a} = r\ddot{\theta}(t)\left(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y\right) + r\dot{\theta}(t).\left(-\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_x + \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\vec{e}_y\right)$

a. Attention, ces raisonnements avec les signes supposent que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont positifs, donc que l'angle est compris entre 0° et 90°. Il faut **toujours faire des dessins avec des angles compris entre 0° et 90°.**

B.3. Repérage le long d'une trajectoire

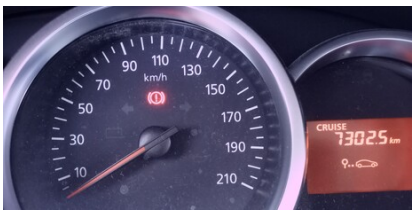
Parfois, on connaît bien la trajectoire que va suivre le point, et on peut se contenter de le repérer par sa position le long de cette trajectoire.

Si $M(t)$ représente le point à l'instant t et O est le point de départ, alors on peut repérer la position de M sur la trajectoire par la distance parcourue depuis le départ :

FIGURE M1.5 : Description d'un mouvement sur une trajectoire.



(a) Trajectoire d'un point M



(b) Tableau de bord d'une voiture : on y lit la distance parcourue (abscisse curviligne) et la vitesse.

Définition : Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne représente la distance parcourue depuis un point donné en suivant la trajectoire : $s(t) = \overset{\frown}{OM}(t)$ avec O un point fixe.

Propriété : Vitesse absolue

La vitesse absolue du point vaut la dérivée de son abscisse curviligne :

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overset{\frown}{OM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{M1.7}$$

Remarque : Si v est la dérivée de s, alors s est une primitive de $v(t)$: ainsi, si on connaît $v(t)$, on peut retrouver la distance $s(t)$ en écrivant que $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + \text{cst}$. Si on connaît une condition initiale, par exemple $s(0)$, alors on peut trouver la constante.

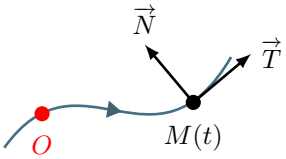
On peut aussi utiliser une intégrale : $\int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t = [s(t)]_{t_0}^{t} = s(t) - s(0)$ donc $s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v\,(t)\,\mathrm{d}t$

Mais v ne contient que l'information sur la norme de la vitesse, pas sur sa direction. Pour avoir aussi la direction, il faut connaître le *vecteur* $\vec{v}$. Pour exprimer ce vecteur, on introduit une base orthonormée mobile.

Définition : Base de Frenet

On introduit à chaque instant une base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$:

- $\vec{T}$ est le vecteur de norme 1 tangent à la trajectoire
- $\vec{N}$ est le vecteur de norme 1 orthogonal à $\vec{T}$ et dirigé du côté vers lequel la trajectoire s'incurve



Remarque : On peut même écrire $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ pour se souvenir que ces deux vecteurs vont être modifiés au cours du mouvement et vont donc dépendre du temps ; ce n'est pas obligatoire, pour ne pas surcharger l'écriture.

Propriété : Vitesse dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet, la vitesse du point s'écrit

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\vec{T}(t) \tag{M1.8}$$

Propriété : Accélération dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet, l'accélération d'un point s'écrit

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\vec{T}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\vec{N}(t) = \frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{T}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\vec{N}(t) \tag{M1.9}$$

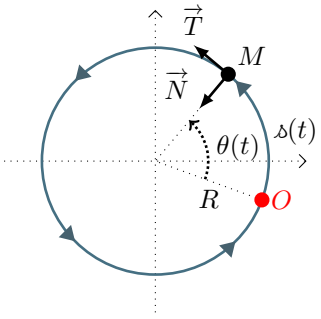
où $R(t)$ est le *rayon de courbure* de la trajectoire, c'est-à-dire le rayon du cercle qui s'approche le plus de la trajectoire à l'instant t.

Ainsi, on voit que l'accélération contient 2 termes : un terme tangent à la trajectoire, qui traduit le fait que la vitesse augmente ou diminue ; et un terme perpendiculaire, qu'on ressent dans les virages, qui traduit le changement de la direction de la vitesse ; il varie comme la vitesse au carré.

Remarque : La base de Frenet est très difficile à utiliser, sauf dans le cas d'un mouvement circulaire : si un point se déplace sur un cercle de rayon R, alors en notant $\theta(t)$ son angle par rapport au point de départ O, son abscisse curviligne vaudra simplement

$$\text{ɹ}(t) = R.\theta(t) \text{ avec } \theta \text{ en radians}$$

par définition des radians. Le vecteur $\vec{T}$ est tangent au cercle, et le vecteur $\vec{N}$ passe par le centre.
Néanmoins, quand nous aurons étudié les coordonnées polaires au chapitre COORDONNÉES CYLINDRIQUES, la base de Frenet ne sera plus utile.



M1. Cinématique du point

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Repérage dans l'espace et dans le temps	
Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point	
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Système de coordonnées cartésiennes.	Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes Identifier les degrés de liberté d'un mouvement.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.

M1. Cinématique du point

Quelques conseils

✎ Il faut toujours faire un schéma du système étudié ; s'il y a un angle, choisissez si possible avec un angle positif et pas trop grand, autour de 20°.

✎ Il faut prendre du temps pour faire des projections justes, sinon à la fin tout l'exercice est faux. Une possibilité est de vérifier après coup le résultat qu'on a obtenu en prenant des angles simples : 0° (cosinus égal à 1, sinus égal à 0) ou 90° (cosinus égal à 0, sinus égal à 1).

✎ N'oubliez pas les dérivations composées quand vous dérivez des expressions comme $\cos\theta$ par rapport au temps.

M1. Cinématique du point

QCMs

réponses page 377

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un référentiel peut être formé par :

(a). une horloge et un repère indéformable
(b). une horloge et un objet quelconque
(c). une horloge et un solide indéformable
(d). une horloge et un point

Q2. Si on connaît la vitesse $v(t)$ d'un point, alors on peut retrouver sa distance parcourue par le calcul :

(a). $s(t) = v(0) + \int_0^t s(t).\mathrm{d}t$
(b). $s(t) = s(0) + \int_0^t v(t).\mathrm{d}t$
(c). $s(t) = \int_0^t v(t).\mathrm{d}t$
(d). $s(t) = s(0) + \int_0^t v(t).\mathrm{d}t + \text{cst}$

Q3. En un temps $\mathrm{d}t$, le point M parcourt :

(a). $\vec{v}.\mathrm{d}t$
(b). $\vec{v}$
(c). $\mathrm{d}t$
(d). $\overrightarrow{OM}.\mathrm{d}t$

Q4. Dans la base de Frenet :

(a). $\vec{T}$ est vertical
(b). $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire
(c). $\vec{N}$ est dirigé vers l'arrière
(d). $\vec{N}$ est perpendiculaire à la trajectoire

Q5. Dans la base de Frenet, l'accélération vaut :

(a). $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T}$
(b). $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v}{R^2}\vec{N}$
(c). $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} - v\vec{N}$
(d). $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

Q6. La base cartésienne est une base fixe :

(a). Vrai
(b). Faux

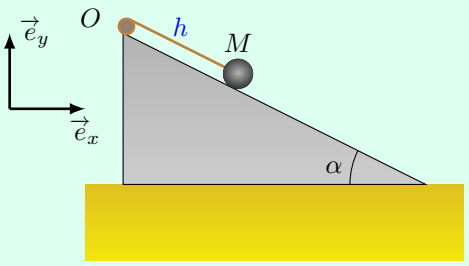
Q7. En coordonnées cartésiennes, le petit déplacement s'exprime comme :

(a). $\dot{x}.\vec{e}_x + \dot{y}.\vec{e}_y + \dot{z}.\vec{e}_z$
(b). $x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$
(c). $dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$
(d). $(dx + dy + dz)\overrightarrow{OM}$

✓ QCM : Position et vitesse ✗

Un QCM pour travailler les projections. Sur chaque schéma, les valeurs en noir sont constantes et les valeurs en bleu sont des variables, elles dépendent donc du temps. Attention, dans les réponses, je n'ai mis aucun (t), mais pensez à les mettre dans vos calculs pour le moment afin de ne pas vous tromper en dérivant.

Q8. Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude. Alors $\overrightarrow{OM} =$

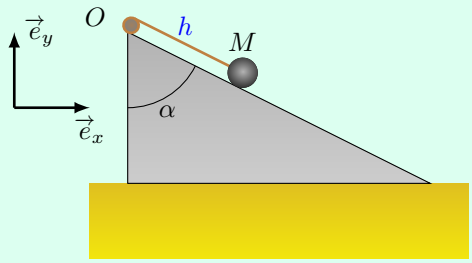


(a). $h\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)$
(b). $h\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(c). $h\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(d). $h\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$

Q9. et la vitesse de M vaut :

(a). $\dot{h}\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)$
(b). $\dot{h}\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(c). $\dot{h}\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(d). $\dot{h}\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$

Q10. Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude. Alors $\overrightarrow{OM} =$

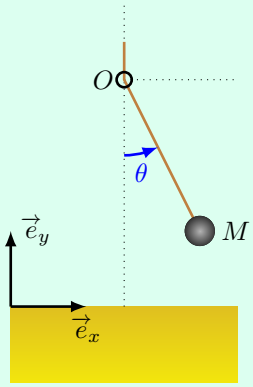


(a). $h\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(b). $h\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)$
(c). $h\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(d). $h\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$

Q11. et la vitesse de M vaut :

(a). $\dot{h}\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)$
(b). $\dot{h}\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(c). $\dot{h}\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
(d). $\dot{h}\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$

Q12. Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude, et $\ell = OM = \text{cst}$. Alors $\overrightarrow{OM} =$

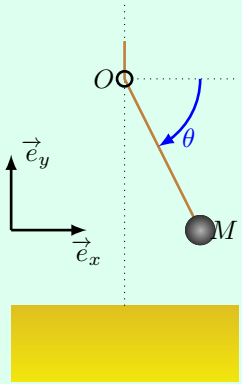


(a). $\ell\sin\theta\,\vec{e}_x - l\cos\theta\,\vec{e}_y$
(b). $-\ell\sin\theta\,\vec{e}_x - l\cos\theta\,\vec{e}_y$
(c). $\ell\cos\theta\,\vec{e}_x + l\sin\theta\,\vec{e}_y$
(d). $\ell\cos\theta\,\vec{e}_x - l\sin\theta\,\vec{e}_y$

Q13. et la vitesse de M vaut :

(a). $\ell\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$
(b). $\ell\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y)$
(c). $\dot{\ell}\,(\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y)$
(d). $\ell\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$

Q14. Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude, et $\ell = OM = \text{cst}$. Attention, sur la figure, l'angle θ est négatif. Alors $\overrightarrow{OM} =$



(a). $\ell \sin\theta \vec{e}_x - \ell \cos\theta \vec{e}_y$
(b). $\ell \cos\theta \vec{e}_x - \ell \sin\theta \vec{e}_y$
(c). $-\ell \sin\theta \vec{e}_x - \ell \cos\theta \vec{e}_y$
(d). $\ell \cos\theta \vec{e}_x + \ell \sin\theta \vec{e}_y$

Q15. et la vitesse de M vaut :

(a). $\ell\dot{\theta}\,(-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$
(b). $\ell\dot{\theta}\,(\sin\theta \vec{e}_x - \cos\theta \vec{e}_y)$
(c). $\dot{\ell}\,(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$
(d). $\ell\dot{\theta}\,(\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y)$

✓ QCM : Mouvement uniformément accéléré ✗

Avant de démarrer ce QCM, il faut redémontrer que, si l'accélération est une constante a_0, alors la vitesse vaut $v = v_0 + a_0.t$ et la distance parcourue vaut $s = v_0.t + \frac{1}{2}a_0t^2$. Attention, plusieurs réponses sont parfois possibles dans différentes unités.

Q16. Une voiture démarre sans vitesse initiale et accélère avec une accélération $a = 1{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ constante. Sa vitesse au bout de 10 s vaut :

(a). $42\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
(b). $18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
(c). $9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
(d). $65\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

Q17. et elle a alors parcouru une distance égale à :

(a). 90 m
(b). 61 m
(c). 120 m
(d). 162 m

Q18. Une voiture roule à $80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Elle freine et subit une accélération constante $a = -7{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le temps nécessaire pour s'arrêter vaut :

(a). 11 s
(b). 4,2 s
(c). 6,1 s
(d). 3 s

Q19. et la distance d'arrêt vaut :

(a). 51 m
(b). 48 m
(c). 34 m
(d). 64 m

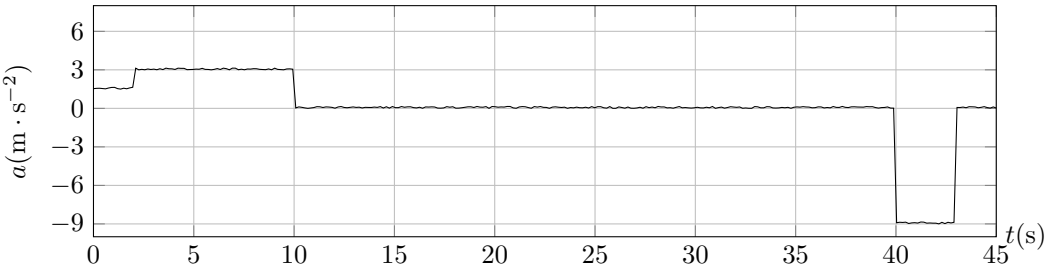
M1. Cinématique du point

Exercices

réponses page 378

Exercice M1.1 : Graphe d'accélération d'une voiture [*]

Monsieur D. prend sa voiture et roule pendant 43 s. Un accéléromètre embarqué à bord enregistre les données représentées sur le graphique :



1. Pour les domaines $0\,\mathrm{s} < t < 2\,\mathrm{s}$, $2\,\mathrm{s} < t < 10\,\mathrm{s}$, $10\,\mathrm{s} < t < 40\,\mathrm{s}$ et $40\,\mathrm{s} < t < 43\,\mathrm{s}$, donnez l'expression de l'accélération $a(t)$.
2. Déduisez-en la vitesse $v(t)$ sur chacun de ces domaines, puis la distance parcourue $s(t)$.
   Attention ! pensez aux constantes d'intégration.
3. Déduisez-en la distance totale parcourue. Commentez.

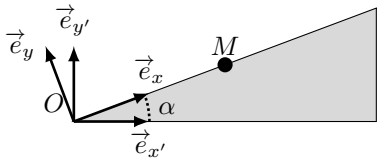
Exercice M1.2 : Arrêts avec décélération uniforme [**]

Dans cet exercice, on admet les formules d'un mouvement à accélération uniforme a qui sont $v(t) = v(0) + a.t$ et $d(t) = v(0).t + \frac{1}{2}a.t^2$ (avec $a < 0$ ici) où v est la vitesse et d la distance parcourue.

1. Un pétrolier plein navigue à $30\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Suite à une avarie, on cherche à l'arrêter d'urgence. Il subit alors une décélération constante qui lui permet de s'arrêter au bout de 20 min. Calculez la décélération puis la distance parcourue.
2. Une balle de fusil, tirée à une vitesse de $300\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, est interceptée par un sac de sable et s'y enfonce de 15 cm après avoir subi une décélération uniforme. Calculez cette décélération.
   indication : soit t_a le temps d'arrêt de la balle, établissez un système d'équations vérifiées par t_a et a.

Exercice M1.3 : Mouvement sur un plan incliné [*]

Un objet M se déplace sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note d la distance OM.



1. Exprimez la position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse et l'accélération de M dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en fonction de d et de ses dérivées.
2. Exprimez la position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse et l'accélération de M dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$, en fonction de d et de ses dérivées, et de α.

Exercice M1.4 : Mouvement circulaire [*]

O est un point fixe du référentiel d'étude. M a un mouvement circulaire de centre O et de rayon R.
On repère le point M par l'angle θ entre $\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OM}$.

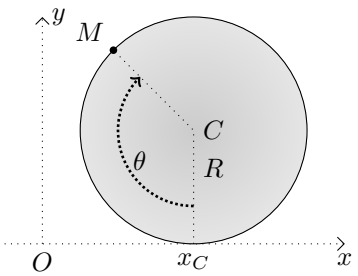
1. Exprimez la position de M ; introduisez une base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ pour exprimer les coordonnées du vecteur en fonction de R et θ.

Calculez alors la vitesse et l'accélération de M en fonction de R, θ et ses dérivées.

2. À quelle condition le mouvement est-il uniforme ?
   Montrez que, dans ce cas, l'accélération de M peut s'écrire $\vec{a} = \lambda \overrightarrow{OM}$ avec λ à exprimer.
   Montrez aussi que, dans ce cas, $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$. Faites le lien avec la base de Frenet.

Exercice M1.5 : Trajectoire de la valve d'une roue de vélo [***]

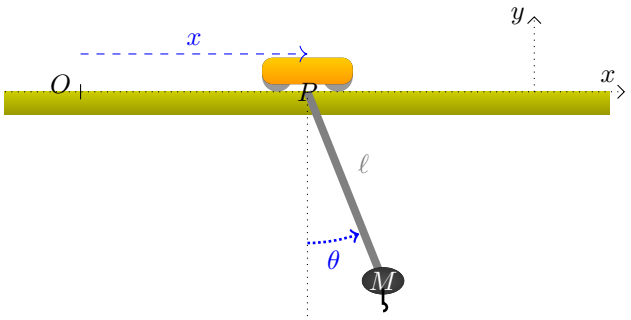
Une roue de vélo, de rayon R et de centre C, roule sans glisser sur un axe Ox. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont a tourné la roue à partir de sa position initiale.
On admettra que l'abscisse x_c du centre de la roue est donnée par $x_c = -R\theta$.



1. Essayez de justifier la relation donnée pour x_c.
2. Quelles sont, en fonction de R et de θ, les coordonnées du point M correspondant à la valve de la roue (supposée située sur sa périphérie) ? le point O ?
3. La trajectoire de M est appelée une cycloïde. Tracez cette trajectoire sur une calculatrice, ou avec Python, pour θ allant de 0 à 4π ; une telle courbe où on connaît les fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ s'appelle une *courbe paramétrée*. Pour les valeurs numériques, on prendra $R = 1$.
4. Exprimez, en fonction de R, θ et ses dérivées, les composantes de la vitesse et de l'accélération de M.
5. Donnez les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de M au moment où celui-ci touche l'axe Ox ($\theta = 0\,[2\pi]$)).

Exercice M1.6 : Grue sur un portique [**]

Une grue est constituée d'un portique Ox fixe. Un chariot repéré par le point P peut glisser sur le portique. À ce chariot est suspendue un bras de longueur l au bout duquel se trouve un crochet repéré par le point M.



Dans cet exercice, on considère que $x = \overline{OP}$ et $\theta = \widehat{(-\vec{e}_y, \overrightarrow{PM})}$ varient au cours du temps, tandis que $\ell = PM$ est constant.

1. Exprimez le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$
2. Exprimez la vitesse et l'accélération du point M sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$
3. On suppose que le mouvement suit les lois $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ et $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec x_0, θ_0, ω des constantes, et $\theta_0 \ll 1$
   Déduisez-en l'expression de la vitesse et de l'accélération (on éliminera les termes en θ_0^2 qui sont très très petits).
4. À quelle condition sur x_0 et θ_0 le point M est-il immobile ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (c)
Q2.(b)
Q3.(a)
Q4.(b)
Q5.(d)
Q6.(a)
Q7.(c)

Réponses au QCM : Position et vitesse

Q8.(a)
Q9.(a)
Q10.(a)
Q11.(c)
Q12.(a)
Q13.(b)
Q14.(d)
Q15.(a)

Réponses au QCM : Mouvement uniformément accéléré

Q16.(b) ET (d)
$v = a.t$
Q17.(a)
$s = \frac{1}{2}at^2$
Q18.(d)
$v = v_0 + a.t = 22{,}2 - 7{,}3.t$
Q19.(c)
$s = 22{,}2.t - \frac{7{,}3}{2}t^2$

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M1.1 : Graphe d'accélération d'une voiture [*]

1. $a(t) = \begin{cases} 1{,}5 \text{ si } 0\,\text{s} < t < 2\,\text{s} & 3 \text{ si } 2\,\text{s} < t < 10\,\text{s} \\ 0 \text{ si } 10\,\text{s} < t < 40\,\text{s} & -9 \text{ si } 40\,\text{s} < t < 43\,\text{s} \end{cases}$
2. Il faut intégrer en prenant soin des consitions initiales. Par exemple, entre 0 et 2 s, on a facilement $v(t) = 1{,}5t$; donc à $t = 2\,\text{s}$ la vitesse vaut $3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ qui sert de CI pour l'étape suivante, pour laquelle on trouve $v(t) = 3t + \text{cst} = 3t - 3$ de sorte à avoir $v(2) = 3$.
   On trouve alors $v(t) = \begin{cases} 1{,}5t \text{ si } 0\,\text{s} < t < 2\,\text{s} & 3t - 3 \text{ si } 2\,\text{s} < t < 10\,\text{s} \\ 27 \text{ si } 10\,\text{s} < t < 40\,\text{s} & -9t + 387 \text{ si } 40\,\text{s} < t < 43\,\text{s} \end{cases}$
   puis $s(t) = \begin{cases} 0{,}75t^2 \text{ si } 0\,\text{s} < t < 2\,\text{s} \\ 1{,}5t^2 - 3t + 3 \text{ si } 2\,\text{s} < t < 10\,\text{s} \\ 27t - 147 \text{ si } 10\,\text{s} < t < 40\,\text{s} \\ -4{,}5t^2 + 387t - 7347 \text{ si } 40\,\text{s} < t < 43\,\text{s} \end{cases}$
3. $s(43) = 973{,}5\,\text{m}$: à vélo c'est mieux, c'est l'éco-délégué qui vous le dit !

Corrigé de l'exercice M1.2 : Arrêts avec décélération uniforme [**]

1. $v(0) = 8{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v(20\,\text{min}) = v(1200\,\text{s}) = 0$ donc $8{,}3 + 1200a = 0$ donc $a = -6{,}9 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
   La distance d'arrêt vaut alors $d(1200) = 8{,}3 \times 1200 - 6{,}9 \times 10^{-3} \times \frac{1200^2}{2} = 5000\,\text{m} = 5\,\text{km}$
2. Ici $v(t) = 300 + a.t$ et $d(t) = 300t + \frac{1}{2}at^2$. En posant t_a le temps d'arrêt de la balle, on peut écrire $v(t_a) = 300 + a.t_a = 0$ et $d(t_a) = 300t_a + \frac{1}{2}ar_a^2 = 0{,}15$. On en déduit que $t_a = -\frac{300}{a}$ puis en renvoyant dans l'autre : $-\frac{300^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{300^2}{a} = 0{,}15$ d'où on tire $a = -3 \times 10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $t_a = 1\,\text{ms}$

Corrigé de l'exercice M1.3 : Mouvement sur un plan incliné [*]

1. $\overrightarrow{OM} = d(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{d}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{d}(t)\vec{e}_x$
2. $\overrightarrow{OM} = d(t)\cos\alpha\,\vec{e}_{x'} + d(t)\sin\alpha\,\vec{e}_{y'}$. Or α est constant, donc $\vec{v} = \dot{d}(t)\cos\alpha\,\vec{e}_{x'} + \dot{d}(t)\sin\alpha\,\vec{e}_{y'}$ et $\vec{a} = \ddot{d}(t)\cos\alpha\,\vec{e}_{x'} + \ddot{d}(t)\sin\alpha\,\vec{e}_{y'}$

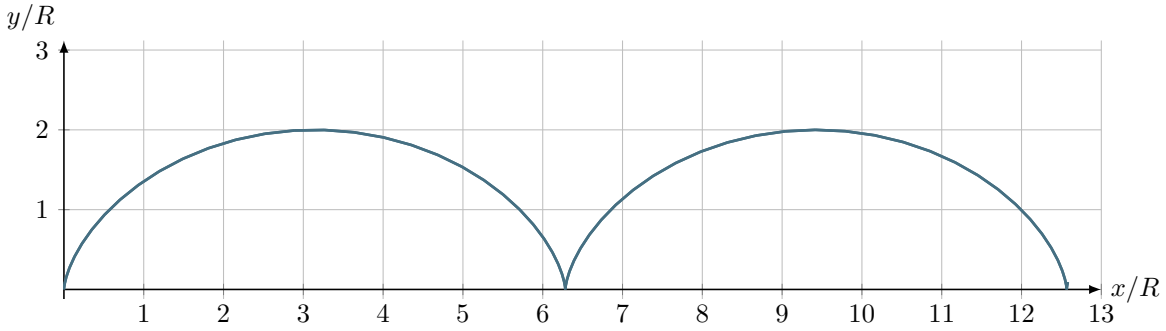
Corrigé de l'exercice M1.4 : Mouvement circulaire [*]

Pensez à toujours faire un dessin.

1. On prend une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ du plan. Pour simplifier, on peut prendre $\vec{e}_x$ parallèle à l'axe correspondant à $\theta = 0$ (sinon, on a une constante en plus : remplacez θ par $\theta - \theta_0$ dans tous les résultats suivants).
   On reconnaît alors le cercle trigonométrique. En projetant $\overrightarrow{OM}$, on trouve $\overrightarrow{OM} = R(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y)$.
   On dérive : $\vec{v} = R\dot{\theta}(t)(-\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y)$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}(t).(-\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y) + R\dot{\theta}(t)^2.(-\cos\theta(t)\vec{e}_x - \sin\theta(t)\vec{e}_y)$
2. $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\dot{\theta}(t)^2(\sin^2\theta(t) + \cos^2\theta(t))} = R\dot{\theta}(t)$ donc le mouvement est uniforme ssi $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$.
   Remarque : $\dot{\theta}$ est appelé *vitesse angulaire* ; quand il est constant, on le note souvent ω.
   On a alors $\vec{a} = R\omega^2(-\cos\theta(t)\vec{e}_x - \sin\theta(t)\vec{e}_y) = -\omega^2\overrightarrow{OM}$.
   De plus, $\|\vec{a}\| = \omega^2 R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$

Corrigé de l'exercice M1.5 : Trajectoire de la valve d'une roue de vélo [***]

1. La roue roule sans glisser sur l'axe Ox, donc la distance parcourue est égale à l'arc de cercle $\widehat{OM} = -R\theta$ (le $-$ parce que, sur la figure, $\theta < 0$).

2. On se place dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ de la figure. On connaît les coordonnées du centre de la roue : $\overrightarrow{OC} = (x_c(t) = -R\theta(t), R)$. Le vecteur $\overrightarrow{CM}$ vaut initialement $(0, -R)$ (car initialement $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$). Il tourne ensuite, d'un angle θ, et vaut donc $\overrightarrow{CM} = (R\sin\theta(t), 0, -R\cos\theta(t))$ (c'est le cercle trigonométrique tourné de $-\frac{\pi}{2}$; pensez à faire un schéma avec $\theta(t)$ positif et petit). D'où $\overrightarrow{OM} = R.\left(-\theta(t) + \sin\theta(t)\right)\vec{e}_x + R.\left(1 - \cos\theta(t)\right)\vec{e}_y$
3. 

4. $\begin{cases} \vec{v}_M = R\dot{\theta}(t).(-1 + \cos\theta(t))\vec{e}_x + R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_y \\ \vec{a}_M = R.\left(\ddot{\theta}(t).(-1 + \cos\theta(t)) - \dot{\theta}(t)^2\sin\theta(t)\right)\vec{e}_x + R.\left(\dot{\theta}(t)^2\cos\theta(t) + \ddot{\theta}(t)\sin\theta(t)\right)\vec{e}_y \end{cases}$
5. M touche Ox lorsque $\theta = n \times 2\pi, n \in \mathbb{N}$, donc $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$. D'où $\overrightarrow{OM} = 2n\pi\vec{e}_x, \vec{v}_M = \vec{0}, \vec{a}_M = R\dot{\theta}^2\vec{e}_y$
On a donc bien un roulement sans glissement (vitesse de contact nulle).

Corrigé de l'exercice M1.6 : Grue sur un portique [**]

1. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = (x(t) + \ell\sin\theta(t))\vec{e}_x - \ell\cos\theta(t)\vec{e}_y$
2. $\vec{v} = \left(\dot{x}(t) + \ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\vec{e}_x + \ell\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_y$
$\vec{a} = \left(\ddot{x}(t) + \ell\ddot{\theta}(t)\cos\theta(t) - \ell\dot{\theta}(t)^2\sin\theta(t)\right)\vec{e}_x + \left(\ell\ddot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \ell\dot{\theta}(t)^2\cos\theta(t)\right)\vec{e}_y$
3. $\vec{v} = -\left(x_0\omega + \ell\theta_0\omega\right)\sin(\omega t)\vec{e}_x$
$\vec{a} = -\left(x_0 + \ell\theta_0\right)\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_x$
4. $x_0 = -\ell\theta_0$

Chapitre M2 Dynamique newtonienne

Programme p.395

Conseils p.396

Cours p.382
- M2.A. Référentiels galiléens
- M2.B. Principe fondamental de la dynamique
- M2.C. Modèle pour quelques forces
- M2.D. Exemples

QCMs p.397

Exercices p.398

TDs numériques p.403

M2. Dynamique newtonienne

Cours

Le chapitre précédent nous a appris à repérer le mouvement d'un point ; cela se fait à l'aide de variables qui dépendent du temps. Maintenant que cela est fait, il va falloir déterminer la loi vérifiée par ces variables, et pour cela, il va falloir établir les équations différentielles vérifiées par ces variables : c'est l'objet de la dynamique.

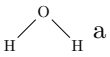
Les lois de la dynamique les plus simples ont été établies par Newton. Elles expliquaient bien les phénomènes observés par ses prédécesseurs, en particulier Galilée et Képler. Néanmoins, les lois de la physique avançant, et les observations aussi, il est apparu à la fin du XIXe siècle que les lois de la dynamique newtonienne ne s'appliquaient plus dans certains cas. Ces observations ont amené Einstein à proposer les lois de la mécanique relativiste. Ces lois conduisent à des corrections aux lois de Newton, mais qui ne sont sensibles que dans le domaine des grandes vitesses. Pour nous, cette année, nous nous contenterons de vitesses petites devant celles de la lumière, et les lois de Newton seront bien valables.

Les lois de Newton en mécanique sont au nombre de 3 ; nous n'en étudierons que deux dans ce chapitre.

De plus, pour le moment, nous n'étudierons que des objets petits, laissant l'étude des solides à plus tard.

Définition : Point matériel

Un point matériel est un objet de petite taille n'ayant pas de propriétés internes anisotropes, donc pas de direction privilégiée.

Par exemple, un électron peut être considéré comme un point matériel. Par contre, une molécule d'eau  a une direction particulière (l'axe de symétrie) qui fait qu'elle n'est pas modélisable par un point matériel.

Nous admettrons qu'un objet plus gros, tant que son mouvement de rotation est peu important, peut être modélisé aussi par un point matériel. Nous préciserons ce point plus tard dans l'année.

M2.A. Référentiels galiléens

La mécanique est un domaine de la physique très ancien, car les observations qui la concernent se font dans la vie de tous les jours. Néanmoins, ceux qui s'y sont penchés ont longtemps très mal compris les lois de la nature, à cause d'un postulat faux à la base. Ce postulat était le suivant : si on n'agit pas sur un objet, alors il est immobile.

Les savants grecs ont alors essayé tant bien que mal de répondre à cette question : pourquoi une flèche, une fois qu'elle a quitté son arc, continue-t-elle d'avancer, alors qu'on n'exerce plus de force sur elle ?

Il a fallu attendre Galilée et Newton pour comprendre que l'immobilité ne caractérise par un objet qu'on laisse tranquille, mais plutôt la conservation de la vitesse qu'il a. La flèche a une vitesse initiale lorsqu'elle quitte l'arc, et s'il n'y avait ni frottements ni poids, elle continuerait ainsi sans jamais s'arrêter. Mais ce raisonnement ne convient que si on est capable de bien distinguer le référentiel dans lequel on travaille. En effet, on a tous constaté un jour que, si on est dans un véhicule qui freine, alors tous les objets qui sont libres de leurs mouvements partent vers l'avant. Ces objets, auparavant immobiles, sont soudain mis en mouvement dans le référentiel du véhicule, sans qu'une action extérieure agisse sur eux. Le référentiel d'un véhicule qui freine se comporte donc différemment du référentiel lié au sol.

Définition : Point matériel isolé

Un point matériel est isolé s'il n'est soumis à aucune interaction mécanique avec l'extérieur.

1ère loi de Newton ou Principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels appelés *galiléens*, tels qu'un point matériel isolé a dans ces référentiels un mouvement rectiligne et uniforme $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cst}}$.

Le référentiel le plus courant dans lequel on va travailler est celui lié à la Terre (ou au sol). Ce référentiel est apparemment galiléen, comme on l'a illustré sur la question de la flèche. Néanmoins, une étude plus approfondie (sur les obus par exemple) montre qu'un projectile (en plus d'être freiné par les frottements avec l'air) a tendance à dévier de sa trajectoire pour aller vers la droite dans l'hémisphère nord (vers la gauche dans l'hémisphère sud), mais cet effet n'est sensible que sur des grandes distances. De même, l'expérience du pendule Foucault a prouvé que le référentiel lié

à la Terre fait apparaître des phénomènes inattendus sur des expériences longues. Ces effets sont dus à la rotation de la Terre.

Définition : Référentiel terrestre

Le référentiel terrestre est le référentiel lié à la Terre.
Il est galiléen si l'on effectue des expériences de durée très petites devant 1 jour et sur des distances très petites devant le rayon de la Terre (qui vaut 6400 km).

En pratique, pour des durées inférieures à 15 min et des distances inférieures à 1 km, c'est bon.

Ce référentiel porte aussi parfois le nom de « référentiel du laboratoire » (sous-entendu, le laboratoire est accroché à la Terre et ne bouge pas…).

Si on veut étudier des phénomènes sur de grandes distances et de grandes durées, par exemple le mouvement d'un satellite autour de la Terre, il faudra se placer dans un référentiel différent :

Définition : Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique est le référentiel lié au centre de la Terre et à 3 étoiles lointaines fixes (qui donnent 3 directions fixes).
Il est galiléen si l'on effectue des expériences de durée très petites devant 1 an et sur des distances très petites devant la distance Terre-Soleil (qui vaut 1 u.a., soit 150 000 000 km).

Ce référentiel tourne donc avec la Terre autour du Soleil, mais n'accompagne par la Terre dans son mouvement de rotation sur elle-même.

Si enfin on veut étudier la rotation des planètes autour du Soleil, on peut utiliser :

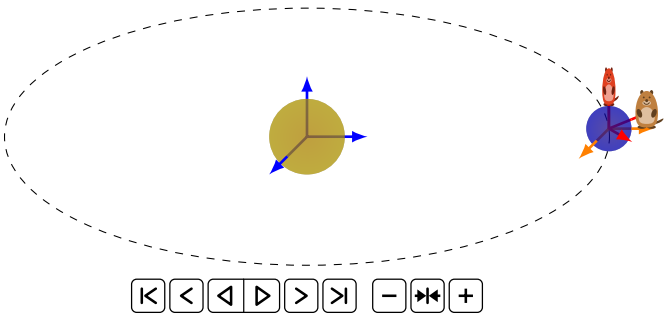
Définition : Référentiel héliocentrique

Le référentiel héliocentrique est le référentiel lié au centre du Soleil et à 3 étoiles lointaines fixes.
Il est galiléen dans tous les cas qui nous intéresseront.

Le référentiel de Copernic est légèrement différent du référentiel héliocentrique, mais la distinction est trop compliquée pour le moment.

La figure M2.1 illustre les mouvements relatifs de ces trois référentiels ; les échelles ne sont bien sûr pas respectées.

FIGURE M2.1 : Référentiels héliocentrique (en bleu), géocentrique (en orange) et terrestre (en rouge).



M2.B. Principe fondamental de la dynamique

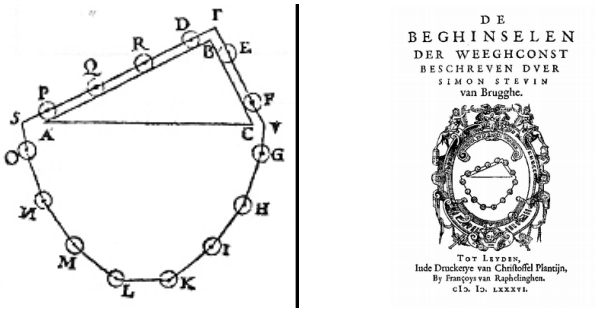
Une fois posé ce principe d'inertie, qui définit les référentiels dans lesquels nous allons faire de la dynamique (les référentiels galiléens), nous pouvons aller un peu plus loin que les points matériels isolés, et nous intéresser aux interactions mécaniques que peut subir ce point.

Définition : Force

Les interactions mécaniques s'appellent des forces. Une force est capable d'accélérer ou de freiner un point matériel, ou bien de dévier son mouvement.

Stevin, prédécesseur de Galilée, est le premier à avoir eu l'intuition que les forces se comportent comme des flèches qui s'« ajoutent ». Ses expériences de pensée (figure M2.2) seront reprises et détaillées par d'autres auteurs, entre autres Varignon.

FIGURE M2.2 : L'expérience de pensée de Stévin : « clootcransbewijs », prouve la « loi du parallélogramme des forces ».(Crédit : Wikipedia)



Propriété : Représentation des forces

Les forces peuvent être représentées par des vecteurs

Nous avons donc d'un côté un point matériel dont le mouvement est décrit par des vecteurs (position, vitesse, accélération) et de l'autre des forces qui sont aussi décrites par des vecteurs. Nous avons compris qu'une force *modifie* le mouvement, donc elle est reliée à l'accélération du point. Reste à expliquer pourquoi, quand je pousse un objet à roulettes comme un skate, il part avec une certaine vitesse, mais quand je pousse une voiture (frein à main desserré !) avec la même force, elle ne bouge que très peu.

Définition : Masse inerte

À tout objet matériel, on peut associer un scalaire [a] appelé *masse* qui caractérise la résistance qu'il offre à toute modification de son mouvement. Cette masse augmente avec la quantité de matière.

a. Un *scalaire* est un nombre, par opposition à un vecteur.

Remarque : On dit ici *masse inerte* car on verra plus tard l'existence d'une autre masse, la masse gravitationnelle. En terme de définition, ces deux masses n'ont rien à voir ; mais en pratique, elles sont rigoureusement égales. On parlera donc le plus souvent simplement de la masse d'un point.

Voilà donc la différence : la voiture a une masse bien supérieure au skate, donc il est beaucoup plus difficile de modifier son mouvement : si elle est immobile, il faut une grande force pour la pousser, et si elle avance, il faut une grand force pour l'arrêter. Ces considérations ont poussé Newton à émettre sa seconde loi :

Définition : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse : $\vec{p} = m\vec{v}$

2ème loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\,(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} \qquad \text{(M2.1a)}$$

Pour un système fermé (dont la quantité de matière est constante), $m = \text{cst}$ donc on obtient :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \qquad \text{(M2.1b)}$$

Remarque : On admet que, pour un objet non ponctuel, on peut appliquer le PFD pour décrire un point particulier de cet objet appelé son *centre de masse*. On précisera cela plus tard.

Remarque : Un point matériel est *pseudo-isolé* si la somme des forces qui s'exercent sur lui est **toujours nulle**. Dans ce cas, $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cst}}$: son mouvement est rectiligne uniforme. C'est le cas approximativement par exemple d'un palet de curling sur la glace.

Remarque : Une position d'équilibre d'un point matériel est une position où, si on place le point matériel à cette position avec une vitesse nulle, il reste immobile. Cela implique que son accélération est nulle, donc que la somme des forces est nulle **à cette position**.

M2.C. Modèle pour quelques forces

Pour le moment, on connaît une loi reliant l'accélération à des forces, mais on ne sait exprimer aucune force. On va, dans ce qui suit, donner des modèles de quelques forces. Les raisonnements ne seront pas à connaître, il ne faut retenir que le résultat.

C.1. Poids

Galilée a effectué de nombreux essais de chute libre. Il en a tiré deux lois expérimentales :

— des objets de masses différentes tombent à la même vitesse

— un objet en chute libre parcourt en un temps t une distance proportionnelle à t^2

Si on place un axe z vertical vers le haut, on en déduit alors que $z \propto t^2$ donc $\dot{z} \propto t$ donc, en dérivant encore une fois, $\ddot{z} = \text{cst}$: l'accélération d'un objet en chute libre est donc constante, verticale et indépendante de la masse ; on va noter $\vec{g}$ sa valeur.

Propriété : Poids

Tout objet à la surface de la Terre subit de la part de celle-ci une force de pesanteur (ou poids)

$$\overrightarrow{\text{poids}} = m\vec{g} \tag{M2.2}$$

avec $\vec{g}$ un vecteur appelé *accélération de la pesanteur*, dirigé vers le bas et dont la norme vaut environ $9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ à nos latitudes.

FIGURE M2.3 : Galilée montrant la loi de la chute des corps à Don Giovanni de Medici.(Crédit : Museo Galilei)



C.2. Attraction gravitationnelle

Le poids n'est qu'une manifestation à la surface de la Terre d'une force d'attraction plus universelle entre tous les objets massifs. Pour trouver l'expression de la force d'attraction gravitationnelle, on peut partir de la troisième loi de Képler, qui dit que pour les planètes tournant autour du Soleil, la période de révolution au carré est proportionnelle au demi grand-axe (sorte de rayon moyen) au cube.

Considérons donc deux planètes, une de demi grand-axe a_1, et l'autre de demi grand-axe k fois plus grand : $a_2 = k.a_1$. Notons T_1 et T_2 leurs périodes, alors $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2}{a_2^3} = \frac{T_2^2}{k^3 a_1^3}$ donc $T_2^2 = k^3 T_1^2$ soit $T_2 = T_1 k^{3/2}$: pour la deuxième planète, le temps d'avancement sur la trajectoire est $k^{3/2}$ fois plus grand. Par conséquent, l'accélération de la deuxième planète est, par rapport à celle de la première, multipliée par $\frac{k}{(k^{3/2})^2}$: en effet, une accélération est une longueur divisée par un temps au carré. Au final, on constate que l'accélération a été multipliée par k^{-2} lorsque les distances ont été multipliées par k, ce qui indique que la force d'attraction gravitationnelle varie comme la distance puissance -2.

D'autres observations montrent qu'elle est radiale (dirigée selon la direction allant de l'objet qui attire vers l'objet qui est attiré) et proportionnelle aux deux masses :

Force d'attraction gravitationnelle

Un objet A de masse m_A exerce sur un objet B de masse m_B une force gravitationnelle

$$\vec{f}_{A\to B} = -\frac{G m_A m_B}{AB^2}\vec{u}_{AB} \qquad \text{(M2.3)}$$

avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI (constante de gravitation universelle) et $\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ un vecteur unitaire dirigé de A vers B. Cette force est toujours attractive.

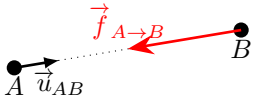
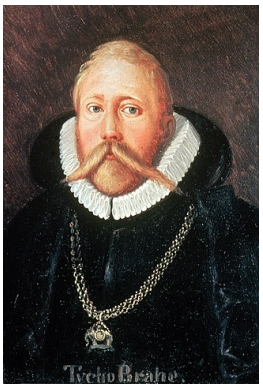
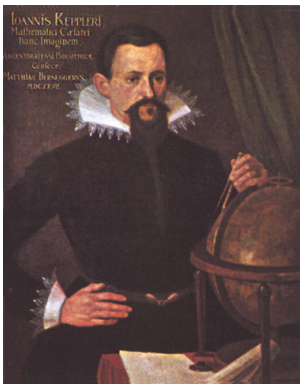


FIGURE M2.4 : Les mesures astronomiques de Tycho Brahé, complétées par Képler, ont permis à Isaac Newton d'établir la loi de l'attraction universelle.*(Crédit : Wikipedia/Kepler Museum/National Portrait Gallery)*







C.3. Force électrique

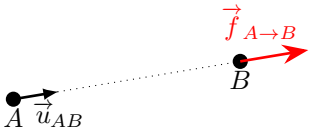
Lorsqu'on frotte certains objets comme une règle en plexiglass® (ou de l'ébonite au XVIIIe siècle), on constate qu'ils deviennent capables d'attirer des poussières ou de petits objets légers. On a compris qu'il apparaissait sur ces objets des *charges électriques*, et qu'il en existait de deux signes : positives ou négatives ; les charges de même signe se repoussent, tandis que les charges de signes opposés s'attirent. En transférant ces charges vers des boules métalliques, Charles-Augustin Coulomb a énoncé en 1786 la loi fondamentale de l'électrostatique :

Force d'attraction électrostatique ou Force de Coulomb

Un objet A de charge q_A exerce sur un objet B de charge q_B une force électrostatique

$$\vec{f}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{AB^2}\vec{u}_{AB} \qquad \text{(M2.4)}$$

avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI une constante et $\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ un vecteur unitaire dirigé de A vers B. Cette force est attractive entre des charges de signes opposés, et répulsives entre des charges de même signe.



On reparlera plus en détail de cette loi dans un prochain chapitre sur les MOUVEMENTS DE PARTICULES CHARGÉES.

C.4. Poussée d'Archimède

Quand on lâche un objet dans l'air, il tombe, mais quand on le lâche dans l'eau, parfois il coule au fond, d'autres fois il flotte. La différence de comportement met en évidence une force qui s'oppose au poids.

Poussée d'Archimède

Tout objet au repos immergé dans un fluide (liquide ou gaz) au repos subit une force appelée poussée d'Archimède, qui est égale à l'opposé du poids du fluide dont l'objet a pris la place.

Ainsi, un objet de volume V placé dans l'eau subira une poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_{eau}.V.\vec{g}$ en notant ρ_{eau} la masse volumique de l'eau. Si on note ρ la masse volumique de l'objet, alors son poids vaut $\rho.V.\vec{g}$. On observe alors que :

— si $\rho > \rho_{eau}$ (objet plus dense que l'eau) le poids l'emporte et l'objet coule

— si $\rho < \rho_{eau}$ (objet moins dense que l'eau) la poussée d'Archimède l'emporte et l'objet flotte

C.5. Forces de frottements fluides

Les forces de frottements sont présentes dans tout système mécanique en mouvement. On distingue deux catégories de forces de frottements :

— les *frottements secs* entre deux solides

— les *frottements fluides* entre un solide et un fluide

Nous étudierons en détails les frottements secs dans le chapitre LIAISONS MÉCANIQUES. Pour ce qui est des frottements fluides, l'expérience montre que :

— la force de frottements est opposée au mouvement

— la force de frottements augmente avec la vitesse.

Une étude plus approfondie montre qu'il existe deux domaines de comportement différent pour cette force, en fonction de la vitesse :

Force de frottements fluide

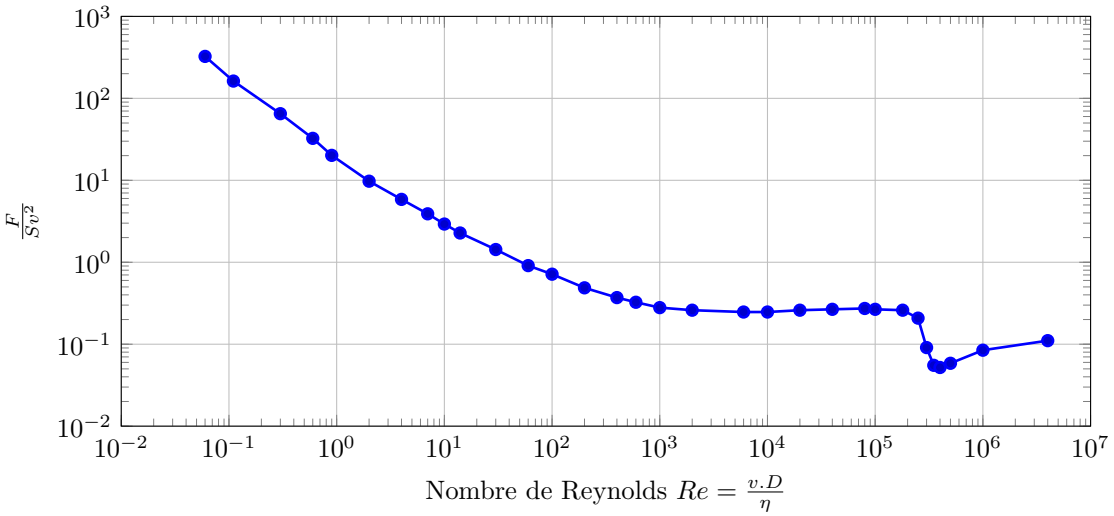
Un objet se déplaçant dans un fluide à la vitesse $\vec{v}$ subit une force de frottements modélisable par la loi :

$$\vec{f}_{frottements} = \begin{cases} -\lambda\vec{v} & \text{à basse vitesse} \\ -\lambda\,\|\vec{v}\|\,\vec{v} & \text{à grande vitesse} \end{cases} \qquad \text{(M2.5)}$$

le coefficient λ dépendant de la forme de l'objet et de la nature du fluide.

Remarque : Nous n'avons pas pour le moment d'outils permettant de savoir où se situe la limite entre les deux modèles ; contentez-vous de la loi que l'énoncé vous donnera forcément.

FIGURE M2.5 : Mesures expérimentales du rapport $\frac{\text{force de frottements}}{\text{vitesse}^2\times\text{surface}}$ pour une sphère lisse, en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{\text{vitesse}\times\text{diamètre}}{\text{viscosité du fluide}}$. À basse vitesse, ce rapport varie comme $\frac{1}{v}$ donc la vitesse varie proportionnellement à v ; ensuite, ce rapport est constant, donc la vitesse varie comme v^2 ; à encore plus haute vitesse, cette loi reste vraie mais le coefficient de proportionnalité change.



C.6. Tension d'un ressort

Les ressorts sont des objets que nous allons beaucoup étudier, soit en tant que tels, soit comme modèles de forces plus compliquées ; nous verrons cela plus tard au chapitre Oscillateurs mécaniques. Dans la vie de tous les jours, on trouve des ressorts dans les suspensions de véhicules, les serrures,...Nous ne nous occuperons pour le moment que des ressorts en traction/compression (hélicoïdaux, à lames,... ; figure M2.6) ; nous reparlerons plus tard des ressorts en rotation (spiraux, fils de torsion,...).

Figure M2.6 : Exemples de ressorts.

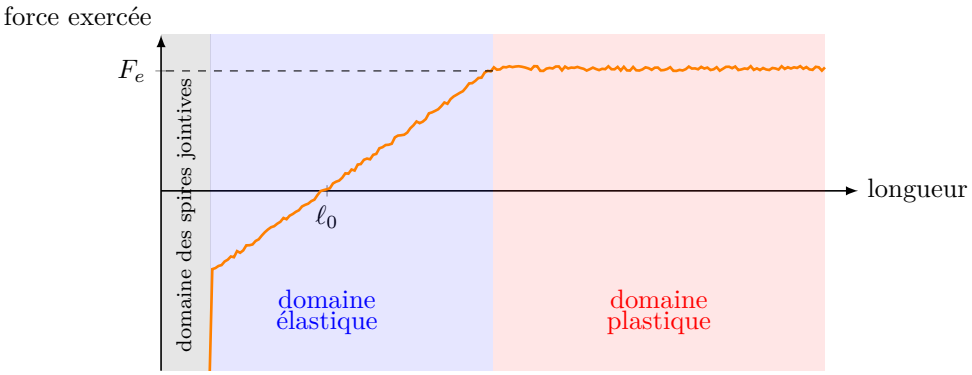


(a) Ressort hélicoïdal (b) Ressort à lames

Un ressort exerce une force lorsque sa longueur est modifiée. La loi du ressort n'est pas une loi fondamentale, c'est une loi expérimentale obtenue à partir de mesures. Si on tire ou comprime un ressort hélocoïdal avec différentes forces, et qu'on mesure sa longueur, on obtient un graphique qui a l'allure de la figure M2.7. On y constate 3 zones :

- pour des forces modérées, un *domaine élastique* où la force varie linéairement avec longueur ; dans ce domaine, si on lâche le ressort, il revient à sa longueur initiale ℓ_0
- pour des forces de traction trop fortes (supérieures à la limite élastique F_e), on passe dans le *domaine plastique*, où le ressort s'allonge beaucoup, la force n'augmentant quasiment plus ; si on lâche le ressort, il ne revient pas à sa longueur initiale, il a été irréversiblement déformé
- pour des forces de compression trop forte, les spires du ressort se touchent, et alors la longueur ne diminue plus.

Figure M2.7 : Courbe de réponse d'un ressort en fonction de l'allongement.



Tension d'un ressort

Pour des déformations faibles, un ressort exerce à chacun de ses deux bouts une force

$$\vec{F}_{ressort} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u} \qquad \text{(M2.6)}$$

avec k la *raideur* du ressort (en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$), ℓ sa longueur, ℓ_0 sa *longueur au repos* (appelée aussi *longueur à vide*) et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du ressort vers le point d'application de la force ; son sens est tel qu'elle cherche à ramener le ressort vers sa longueur au repos.
La différence $\ell - \ell_0$ s'appelle *l'allongement* du ressort.



Remarque : Pourquoi ce − dans la formule ? Dans la figure M2.7 on a tracé la force avec laquelle on tire sur le ressort ; la force du ressort est opposée à celle-ci.

Nous travaillerons cette année uniquement dans le domaine élastique, mais il est bon de savoir qu'il y a des limites à sa validité.

M2.D. Exemples

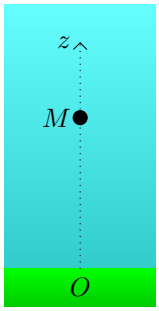
À l'aide des modèles de forces que nous avons introduits, nous allons étudier quelques exemples simples mais essentiels à connaître.

D.1. Chute libre sans frottements

Exemple : Chute libre sans frottements **À connaître**

Un point M de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h. Il tombe en étant soumis uniquement à son poids (les frottements sont négligés) ; on prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ pour les AN.

1. Déterminer son accélération.
2. En déduire $z(t)$.
3. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre le sol ? quelle sera sa vitesse au sol ?
   AN pour $h = 30\,\mathrm{m}$.



1. Même si ce problème est simple, il faut prendre l'habitude de bien rédiger les problèmes de mécanique en 5 points : définition du système, référentiel, étude cinématique, bilan des forces et PFD.
   - Le système étudié est le point M
   - On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
   - Étude cinématique : le mouvement est unidimensionnel, selon l'axe $\vec{e}_z$, donc on a simplement $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   - Bilan des forces : le point n'est soumis qu'à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
   - On applique alors le PFD : $m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$. On projette alors sur les axes de la base, ici il n'y a que $\vec{e}_z$. Projeter, c'est multiplier scalairement tous les termes par un des vecteurs de la base. Ici, on multiplie tous les termes par $\vec{e}_z$, et comme $\vec{e}_z.\vec{e}_z = 1$, on obtient $m\ddot{z}(t) = -mg$ soit $\ddot{z} = -g$
2. Le PFD peut donner trois types d'équations :
   - les équations différentielles d'ordre 2 qui relient $\ddot{z}(t)$ à $z(t)$ et éventuellement à $\dot{z}(t)$;
   - les équations différentielles d'ordre 2 qui relient $\ddot{z}(t)$ à $\dot{z}(t)$ uniquement, et qui peuvent se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 par changement de variable (cf. exemple suivant) ;
   - les « fausse équations différentielles », où on a simplement $\ddot{z}(t) = \ldots$ sans inconnues à droite.

   Ici, on est dans le dernier cas ; il n'y a alors qu'à intégrer : $\dot{z}(t) = \dot{z}(0) + \int_0^t \ddot{z}\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (-g)\mathrm{d}t = -gt$ puis $z(t) = z(0) + \int_0^t \dot{z}(t)\mathrm{d}t = h + \int_0^t (-gt)\mathrm{d}t = h - \frac{1}{2}gt^2$.
3. Soit t_c le temps de chute, alors $z(t_c) = 0$ donc $h - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0$ soit $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et $\dot{z}(t_c) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$.
   AN : le temps de chute vaut 2,5 s et la vitesse au sol $24\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (vers le bas).

L'analyse de ce mouvement peut se faire en traçant les courbes $z(t)$ et $\dot{z}(t)$. Mais il existe un outil très performant − mais difficile à appréhender au début −, le portrait de phase.

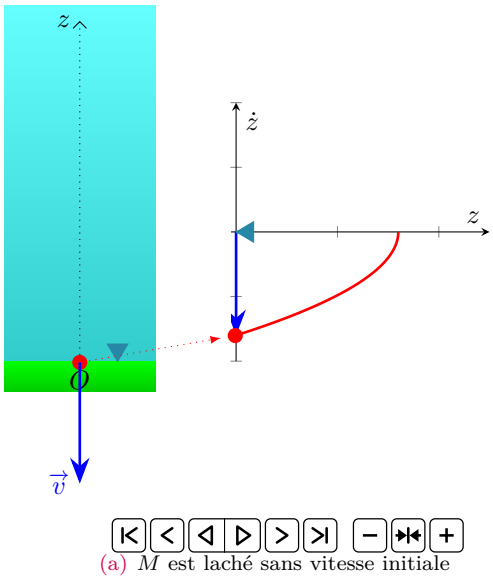
Définition : Portrait de phase

Pour un système possédant un seul degré de liberté, z par exemple, le *plan de phase* est le plan avec z en abscisse en $\dot{z}$ en ordonnée.
Une *trajectoire de phase* est une courbe qui représente l'ensemble des points de coordonnée $(z(t), \dot{z}(t))$ du système au cours du temps, pour une condition initiale donnée.
Un *portrait de phase* est un ensemble de trajectoires de phase permettant d'illustrer le comportement général du système étudié.

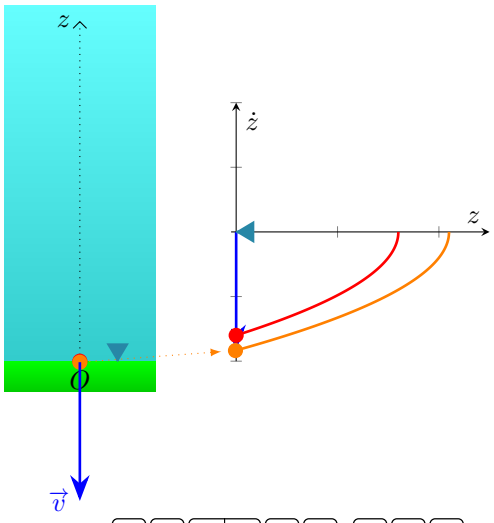
Voyons cela sur l'exemple de la chute libre sans frottements. On a vu la résolution du cas d'une chute depuis une altitude h sans vitesse initiale ; le point de départ dans le plan de phase est donc $(h, 0)$, sur l'axe des abscisses. Ensuite, on peut calculer les valeurs de z et $\dot{z}$ aux temps $t = 0{,}1\,\text{s}$; $t = 0{,}2\,\text{s}$; ...et à chaque fois placer les points correspondants sur le portrait de phase ; on obtient une courbe (figure M2.8(a)) dont on pourrait montrer qu'il s'agit d'une parabole [1].

En recommençant les mêmes calculs pour différentes conditions initiales, on voit apparaître petit à petit un portrait de phase complet (figure M2.8(b-d)).

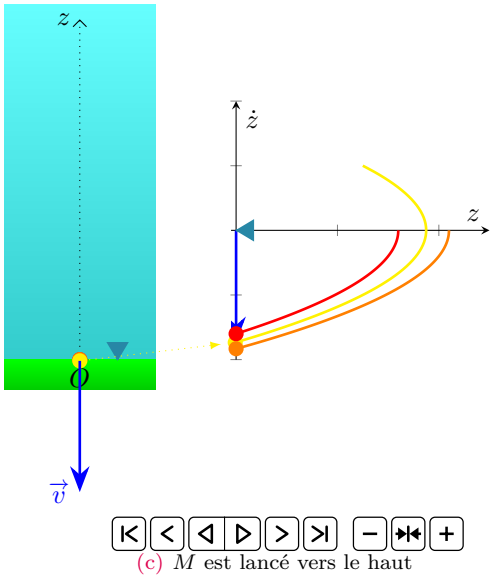
FIGURE M2.8 : Construction du portrait de phase de la chute libre, par différentes simulations.



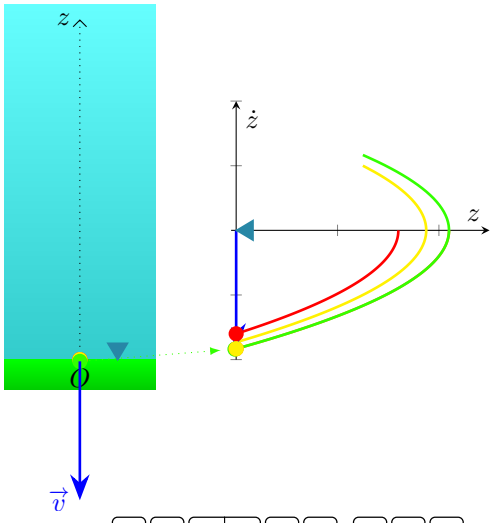
(a) M est laché sans vitesse initiale



(b) M est laché sans vitesse initiale, mais de plus haut



(c) M est lancé vers le haut



(d) M est lancé plus fort vers le haut

L'observation de ce portrait de phase nous permet d'énoncer quelques propriétés universelles à connaître des

1. Mais vous n'avez pas à savoir construire les trajectoires de phase, seulement à savoir les lire et les comprendre.

trajectoires de phase.

Propriété : Propriétés des trajectoires de phase

Les trajectoires de phase ont les propriétés suivantes :

- elles ne se croisent jamais
- elles tournent toujours dans le sens horaire
- elles coupent toujours l'axe des abscisses verticalement

Démonstration

La première propriété est due à une propriété mathématique qu'on admet.
La deuxième et la troisième proviennent simplement du fait que l'ordonnée ($\dot{z}$) est la dérivée temporelle de l'abscisse (z). Du coup :

- quand le système est au-dessus de l'axe des abscisse, alors $\dot{z} > 0$ donc z augmente, donc le point part vers la droite
- quand le système est sur l'axe des abscisse, alors $\dot{z} = 0$ donc z ne change pas, donc le point ne peut se déplacer que verticalement
- quand le système est au-dessous de l'axe des abscisse, alors $\dot{z} < 0$ donc z diminue, donc le point part vers la gauche

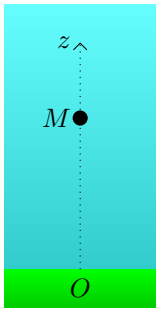
D.2. Chute libre avec frottements

La chute libre sans frottements a donné lieu à une fausse équation différentielle de la forme $\ddot{z} = \dots$ qu'on a intégrée deux fois ; reprenons le même problème avec des frottements linéaires.

Exemple : Chute libre avec frottements linéaires — **À connaître**

Un point M de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h.
Il tombe en étant soumis à son poids et à une force de frottements de la forme $-\lambda.\vec{v}$ avec λ une constante.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par z.
2. On pose $v = \dot{z}$; déterminer l'équation différentielle vérifiée par v, et en déduire $v(t)$.
3. En déduire $z(t)$.

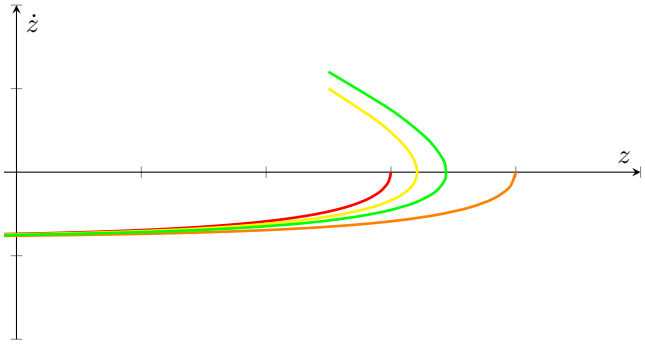


1. On procède comme précédemment :
   - Le système étudié est le point M
   - On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
   - Étude cinématique : le mouvement est unidimensionnel, selon l'axe $\vec{e}_z$, donc on a simplement $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   - Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ et à la force de frottements $-\lambda.\vec{v}(t) = -\lambda.\dot{z}(t).\vec{e}_z$
   - On applique alors le PFD : $m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - \lambda.\dot{z}(t)\vec{e}_z$. On projette sur $\vec{e}_z$: $m\ddot{z}(t) = -mg - \lambda.\dot{z}(t)$ soit $m\ddot{z}(t) + \lambda\dot{z}(t) = -mg$
2. Cette ED est d'ordre 2 en z, mais comme z tout seul n'y apparaît pas, on pose $v(t) = \dot{z}(t)$ et on trouve $m\dot{v}(t) + \lambda v(t) = -mg$ soit $\tau\dot{v}(t) + v(t) = -\tau g$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$: une ED d'ordre 1, plus facile à résoudre.
   La solution particulière constante est $v(t) = -\tau.g$.
   La solution générale de l'équation homogène est de la forme $v(t) = K.e^{-t/\tau}$.
   Donc $v(t) = -\tau g + K.e^{-t/\tau}$. Or $v(0) = 0$ donc $-\tau g + K = 0$ soit $K = \tau.g$.
   On a donc $v(t) = \tau g\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$
3. $v(t) = \dot{z}(t)$ donc en intégrant : $z(t) = z(0) + \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = h + \int_0^t \tau g\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\mathrm{d}t = h + \tau g\left[-\tau e^{-t/\tau} - t\right]_0^t$ soit finalement $z(t) = h + \tau g\left[\tau - \tau e^{-t/\tau} - t\right]$

Après, on peut effectuer différents calculs avec cette formule : temps de chute,...L'allure du portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous. On voit l'effet des frottements, qui rend la courbe asymétrique entre le haut et le bas.

Le portrait de phase de la chute libre avec frottements est représenté sur la figure M2.9 ; on voit que les courbes convergent vers l'asymptote $\dot{z} = -\tau g$

FIGURE M2.9 : Portrait de phase de la chute libre avec frotements linéaires.



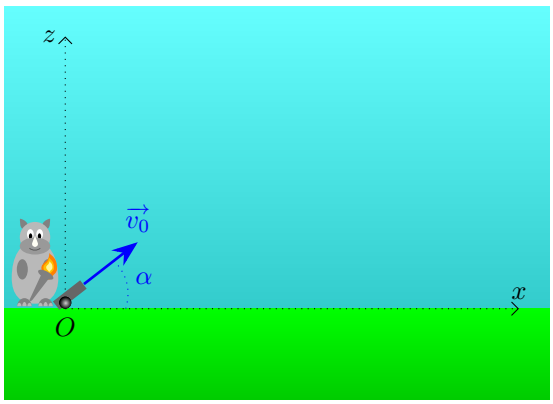
Le plus souvent, lors d'une chute, les vitesses atteintes font que la force de frottements devient quadratique ; il faut alors résoudre l'éqaution différentielle numériquement (cf. les TDs numériques).

D.3. Tir balistique

Reprenons le cas d'une chute sans frottements, mais maintenant dans le cas d'un mouvement en 2D : une vitesse initiale horizontale non nulle est communiquée au point M. C'est le principe du tir balistique.

Exemple : Tir balistique — À connaître

Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



On prend l'origine O du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Établir les équations différentielles du mouvement.
2. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$?
   En déduire alors $x(t)$ et $z(t)$ par intégration des ED précédentes.
3. En éliminant la variable temps, établir l'équation de la trajectoire sous la forme $z(x)$. À quelle courbe cela correspond-il ?

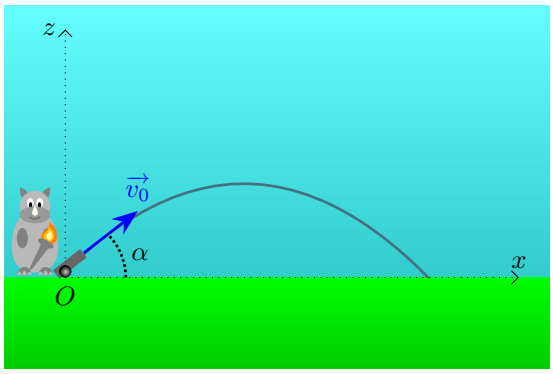
1. — Le système étudié est le point M
   — On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
   — Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_z + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_z + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   — Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
   — On applique alors le PFD : $m\ddot{x}(t)\vec{e}_x + m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$. On projette sur les deux axes du repère :
      — projection sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x}(t) = 0$
      — projection sur $\vec{e}_z$: $m\ddot{z}(t) = -mg$

   Donc les deux équations du mouvement sont $\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases}$
2. Initialement, on a $x(0) = z(0) = 0$ (car on est à l'origine du repère). La vitesse initiale $\vec{v_0}$ se projette selon les deux axes : $\vec{v_0} = v_0\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z)$ donc $\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha$ et $\dot{z}(0) = v_0\sin\alpha$.
   Avec ces CI, on peut intégrer les équations précédentes :
   — on a vu que $\ddot{x}(t) = 0$ donc $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t 0\mathrm{d}t = v_0.\cos\alpha$ puis $x(t) = x(0) + \int_0^t v_0\cos\alpha\mathrm{d}t = v_0\cos\alpha t$
   — on a vu que $\ddot{z}(t) = -g$ donc $\dot{z}(t) = \dot{z}(0) + \int_0^t (-g)\mathrm{d}t = v_0.\sin\alpha - g.t$ puis $z(t) = z(0) + \int_0^t (v_0\sin\alpha - g.t)\mathrm{d}t = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

   On a donc $\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha.t \\ z(t) = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$
3. On peut en déduire que $t(x) = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ et remplacer cela dans $z(t)$ pour trouver $z(x) = v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$ soit

$$z(x) = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

   ce qui est l'équation d'une parabole.



On observe cette parabole par exemple sur des jets d'eau (figure M2.10).

FIGURE M2.10 : Trajectoire parabolique de jets d'eau.



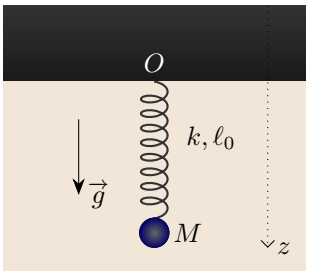
Les équations différentielles d'ordre 2 obtenues peuvent évidemment être aussi résolues numériquement grâce à la méthode d'Euler. Cela permet d'étudier des modèles plus réalistes, en prenant en compte par exemple les frottements.

D.4. Masse-ressort vertical

Le dernier exemple à connaître est celui du masse-ressort vertical.

Exemple : Masse-ressort vertical — À connaître

Un objet M de masse m est suspendu au plafond par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On note son altitude par z comptée vers le bas à partir du plafond (point O).

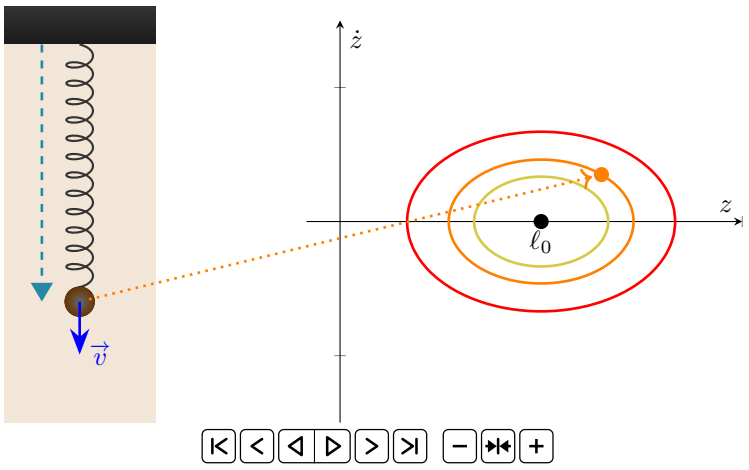


1. Établir l'équation différentielle vérifiée par z.
2. Quelle est la position d'équilibre ?
3. Déterminer $z(t)$ si $z(0) = \ell_0$ et $\dot{z}(0) = 0$.

1. — Le système étudié est le point M
   — On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
   — Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   — Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$ (attention au signe, $\vec{e}_z$ est vers le bas) et à la force du ressort, qui vaut $-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}$ avec $\ell(t)$ la longueur du ressort, qui vaut ici $z(t)$, et $\vec{u}$ le vecteur qui va du ressort vers M, et qui vaut ici $+\vec{e}_z$, donc la force du ressort vaut $-k(z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$.
   — On applique alors le PFD : $m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - k(z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$. On projette sur $\vec{e}_z$ et on trouve $m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - \ell_0)$ soit
   $$m\ddot{z}(t) + kz(t) = k\ell_0 + mg$$
2. À l'équilibre, $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$ donc $kz = k\ell_0 + mg$ soit $z = \ell_0 + \frac{mg}{k}$: le ressort est un peu tendu.
3. La solution particulière constante est $z = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. L'équation homogène est de la forme $\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les solutions de cette équation sont de la forme $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. On a donc la solution complète : $z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
   On sait que $z(0) = \ell_0$ donc $\ell_0 = \ell_0 + \frac{mg}{k} + A$ soit $A = -\frac{mg}{k}$.
   On sait que $\dot{z}(0) = 0$ or $\dot{z} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ donc $\dot{z}(0) = B\omega_0$ d'où on tire $B = 0$.
   Finalement :
   $$z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)$$

La figure M2.11 montre le portrait de phase du masse-ressort : des ellipses de même centre, parcourues dans le sens horaire.

FIGURE M2.11 : Portrait de phase du masse-ressort vertical.



M2. Dynamique newtonienne

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Quantité de mouvement	
Masse. Quantité de mouvement d'un point matériel.	
Lois de Newton	
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Notion de force.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Théorème de la quantité de mouvement.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen.
Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire.
Modèle linéaire d'une force de frottements fluides. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.

M2. Dynamique newtonienne

Quelques conseils

✎ Avant de commencer un exercice de mécanique, on fait un schéma et on place toutes les forces.

✎ Rédigez soigneusement les exercices de mécanique : précisez toujours clairement le système et le référentiel (ce sera très important plus tard) ; faites toujours l'étude cinématique **avant** le bilan des forces, pour pouvoir par exemple y remplacer la position ou la vitesse ; et exprimez toujours les forces sur la base choisie ; enfin, projetez bien le PFD sur les axes pour n'avoir plus que des équations scalaires à la fin (plus de vecteurs).

L'étude cinématique sert à indiquer quelles sont les inconnues ; **les forces doivent être exprimées en fonction de ces inconnues**, en particulier, dans la force de rappel élastique du ressort, la longueur est à exprimer en fonction des inconnues. Dans le masse-ressort vertical, par exemple, on voit souvent des élèves arriver à $m\ddot{z} = k\ell_0 - k\ell + mg$ et intégrer 2 fois, sans voir que ℓ est en fait z.

✎ Retenez bien les 3 façons de résoudre l'ED obtenue par le PFD :

— une équation de la forme $\ddot{x}(t) = f(t)$ s'intègre 2 fois

— une équation de la forme $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = f(t)$ se résout comme une ED d'ordre 1 en posant $v = \dot{x}$

— une équation de la forme $a\ddot{x}(t)\,[+b\dot{x}(t)] + cx(t) = f(t)$ se résout comme une ED d'ordre 2

M2. Dynamique newtonienne

QCMs

réponses page 405

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé a une vitesse :

(a). nulle
(b). constante

Q2. Le référentiel terrestre est approximativement galiléen si l'expérience étudiée a lieu :

(a). sur des distances inférieures à 1 km
(b). sur des durées inférieures à 1 j
(c). sur des durées inférieures à 15 min
(d). sur des distances inférieures à 10 000 km

Q3. Le poids d'un objet de masse m :

(a). est vertical
(b). ne dépend pas de m
(c). vaut $m.\vec{g}$
(d). est dirigé vers le bas

Q4. La tension d'un ressort sur un point M :

(a). est proportionnelle à son allongement
(b). est proportionnelle à sa longueur
(c). est toujours dirigée de M vers le ressort
(d). ramène le ressort vers sa longueur à vide

Q5. Quand on veut appliquer le PFD, on doit toujours faire l'étude cinématique **avant** le bilan des forces :

(a). Vrai
(b). Faux

M2. Dynamique newtonienne

Exercices

réponses page 406

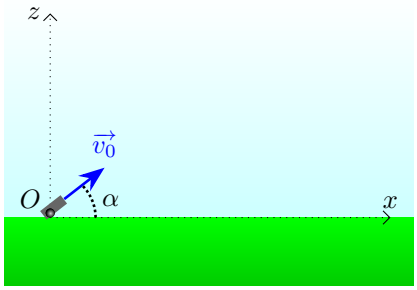
Exercice M2.1 : Chute d'un caillou dans l'eau [**]

Un caillou ayant la forme d'une sphère de rayon $R = 0{,}6\,\text{mm}$ et de masse volumique $\mu = 3500\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ tombe dans l'eau ; il entre dans l'eau (altitude $z = 0\,\text{m}$) au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale $-v_0\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ l'axe vertical vers le haut et $v_0 = 3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il est alors soumis à trois forces : son poids, la poussée d'Archimède et une force de frottements qui s'écrit $-6\pi R\eta\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente sa vitesse et $\eta = 1\times10^{-3}\,\text{USI}$.
Tout le mouvement est vertical dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Calculez la masse m du caillou.
   Indication : si vous ne connaissez pas le volume d'une sphère, il faut vite l'apprendre.
2. La poussée d'Archimède sur le caillou est égale à l'opposé du poids correspondant à une sphère d'eau (masse volumique $1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) de rayon R.
   Calculez numériquement la masse m_e de cette sphère d'eau. La poussée d'Archimède s'écrira alors $m_e.g.\vec{e}_z$.
3. En appliquant le PFD au caillou, établissez l'ED vérifiée par son altitude z.
4. On pose $w(t) = \dot{z}(t)$; déterminez l'ED vérifiée par $w(t)$ puis résolvez-la.
5. Déduisez-en $z(t)$.
6. Calculez numériquement le temps mis par le caillou pour atteindre le fond à 2,6 m de profondeur, et la vitesse qu'il a à ce moment-là.

Exercice M2.2 : Tir balistique [**]

Cet exercice reprend l'exemple du cours, mais pousse les calculs plus loin.
Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



On prend l'origine O du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Établir les équations différentielles du mouvement.
2. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$?
   En déduire alors $x(t)$ et $z(t)$ par intégration des ED précédentes.
3. En éliminant la variable temps, établir l'équation de la trajectoire sous la forme $z(x)$. À quelle courbe cela correspond-il ?
4. Exprimez la portée de la trajectoire, c'est-à-dire la distance à laquelle l'objet touchera le sol.
   Si v_0 est fixé, et qu'on peut faire varier l'angle α, quelle portée maximale peut-on atteindre ? pour quel angle de tir ?
5. Exprimez la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire la hauteur maximale atteinte.
   Quelle hauteur maximale peut-on atteindre à v_0 fixé ? pour quel angle ?
6. On désire atteindre une cible de coordonnées (x_c, z_c) . On suppose que v_0 est fixé, et qu'on peut agir uniquement sur l'angle de tir.

(a) En écrivant que le point cible doit faire partie de la trajectoire, trouvez une équation sur α.

(b) Pour la résoudre, exprimez $\cos^2\alpha$ en fonction de $\tan\alpha$, et mettez l'équation précédente sous la forme d'une équation du second degré en $\tan\alpha$.

(c) En exprimant la condition pour que l'équation du second degré ait une solution, montrez que :

— si la cible est en-dessous d'une certaine courbe, il existe deux angles de tir possible (appelés tir tendu ou direct, et tir en cloche).

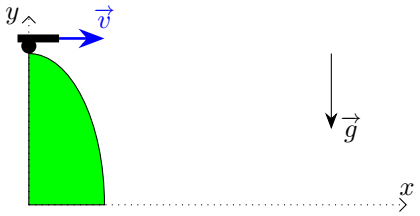
— si la cible est exactement sur cette courbe, il existe un seul angle possible.

— si la cible est au-dessus de cette courbe, on ne peut pas l'atteindre.

Cette courbe s'appelle la parabole de sûreté ; on en donnera l'équation.

Exercice M2.3 : Tir horizontal [**] EDO

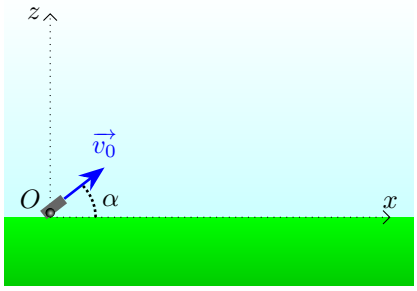
Un boulet de canon est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale d'une hauteur h. On néglige les frottements.



1. Établissez les équations de la trajectoire : $x(t)$ et $y(t)$.
2. À quelle distance va-t-il toucher le sol, et à quel instant t_1 ?
3. On va simuler cela avec Python. Quels tableaux de variables va-t-on créer ? Quel est le schéma d'Euler associé ?
   Choisissez un pas temporel à partir de t_{sol}, puis simulez le tir entre 0 et t_{sol}, pour $h = 50\,\text{m}$ et $v_0 = 400\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
4. Ajoutez des frottements de la forme $-\lambda.\vec{v}$ avec $\lambda = 0{,}5$ USI et observez la nouvelle trajectoire.

Exercice M2.4 : Tir balistique avec frottements de l'air [**]

Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



On prend l'origine du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. On suppose que l'obus subit une force de frottements de l'air qu'on peut modéliser ainsi : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec $\vec{v}$ sa vitesse.

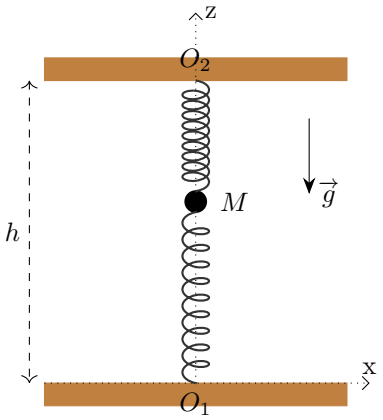
1. Écrivez les équations différentielles du mouvement.
2. Écrivez la forme générale des solutions $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$.
3. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$? Déduisez-en alors $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$, puis $x(t)$ et $z(t)$.
4. On prend pour les AN : $m = 15\,\text{kg}$, $v_0 = 250\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\alpha = 35°$, $\lambda = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
   (a) Calculez numériquement le temps caractéristique qui apparaît dans l'exponentielle.

(b) Résolvez numériquement sur votre calculatrice l'équation $z(t) = 0$ pour trouvez le temps t où l'obus touchera le sol.

(c) Déduisez-en la portée de ce tir. Comparez avec la portée dans le cas où il n'y a pas de frottements.

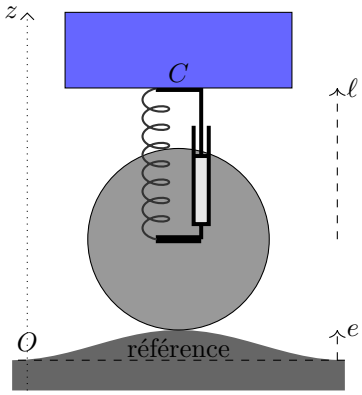
Exercice M2.5 : Masse entre deux ressorts [**]

Deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, sont suspendus l'un au plafond à l'altitude h, l'autre au sol d'altitude nulle. Leurs extrémités sont jointes, et une masse m y est accrochée. Elle est repérée par la distance z au-dessus du sol. Le référentiel terrestre est galiléen. On suppose que la masse ne bouge que verticalement (axe $\vec{e}_z$).



1. Exprimez la force exercée par chaque ressort sur la masse.
2. Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par z.
3. Déterminez d'équilibre z_e de la masse, et la période des oscillations.
4. Résolvez $z(t)$ si $z(0) = \frac{h}{2}$ et $\dot{z}(0) = 0$.

Exercice M2.6 : Suspension de voiture [***]

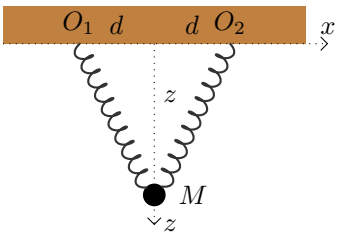


Les irrégularités du sol, transmises à une voiture via ses roues, sont filtrées par une suspension reliant la roue à la caisse de la voiture. Pour étudier une seule de ces suspensions, on va travailler sur un quart de la voiture. Entre le quart de voiture (en haut, de masse $m = 300\,\text{kg}$) et la roue en bas (de rayon $R = 20\,\text{cm}$), on place un ressort (de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = 34\,\text{cm}$) et un amortisseur (composant qui exerce une force proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de sa longueur et opposée au mouvement ; on notera f le coefficient de proportionnalité).
On note $\ell(t)$ la longueur du ressort (et aussi de l'amortisseur) et $e(t)$ l'altitude de la route par rapport à une altitude de référence. On tiendra compte du poids de la voiture. L'axe z est vertical, vers le haut. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Exprimez l'altitude z du bas de la caisse (point C) par rapport à l'altitude de référence, en fonction de e, R et ℓ. Exprimez alors la position, la vitesse et l'accélération de la caisse dans le référentiel terrestre.
2. Grâce au PFD projeté selon $\vec{e}_z$, établissez l'ED vérifiée par ℓ ; elle dépendra de e au second membre.
3. Exprimez la pulsation propre T_0 de ce système. Calculez k pour avoir $T_0 = 0{,}5\,\text{s}$.
4. Quelle valeur f_0 de f permet d'avoir un retour à l'équilibre le plus rapide possible lors d'une perturbation ?
5. Si la voiture est au repos, que vaut la longueur à l'équilibre ? on la notera ℓ_{eq}.
6. On règle $f = 1,2 f_0$. La voiture aborde un dos d'âne de forme parabolique ; on a alors $e(t) = e_0 - \alpha(t - t_1)^2$ avec $\alpha = 80\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$ (les autres paramètres importent peu ici). Les conditions initiales sont $\ell(0) = \ell_{eq}$ et $\dot{\ell}(0) = 0$. Calculez la solution numérique complète de l'ED.
7. Reprendre la même question si la voiture est lourdement chargée : $m = 460\,\text{kg}$ désormais.

Exercice M2.7 : Masse suspendue à deux ressorts [***]

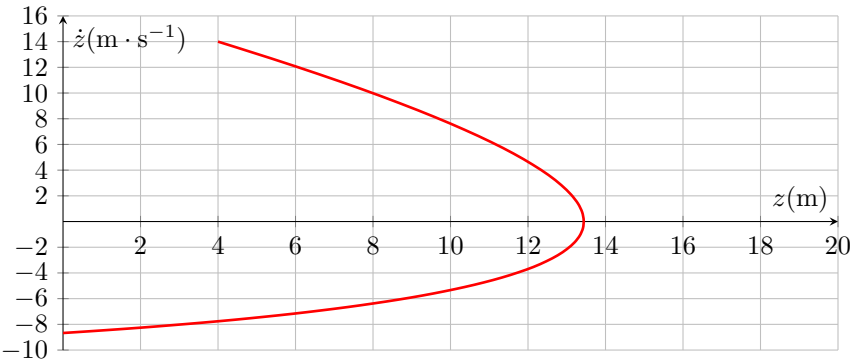
Deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, sont suspendus au plafond, séparés d'une distance $2d$. Leurs extrémités sont jointes, et une masse m y est accrochée. Elle est repérée par la distance z au plafond. Le référentiel lié au plafond est galiléen. On suppose que la masse reste sur la médiatrice des deux points de fixation des ressorts, et ne se déplace que suivant l'axe $\vec{e}_z$ vertical.



1. Exprimez la force exercée par chaque ressort sur la masse.
   Conseil : pour le ressort i, commencez par exprimer $\overrightarrow{O_iM}$, puis O_iM.
2. Écrivez le PFD projeté sur $\vec{e}_z$. L'ED obtenue est-elle linéaire ?
3. Écrivez l'équation vérifiée par la position d'équilibre z_e de la masse.

Exercice M2.8 : Lecture d'une trajectoire de phase [*]

On lance un objet verticalement et on trace sa trajectoire dans le plan de phase où z représente son altitude au-dessus du sol.

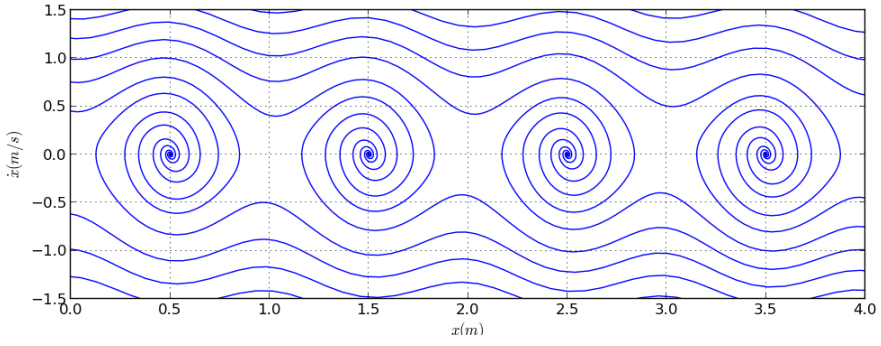


1. Décrivez brièvement le mouvement.
2. Mesurez l'altitude et la vitesse initiale.
3. Mesurez l'altitude maximale atteinte, et la vitesse au sol.

Exercice M2.9 : Portrait de phase [**]



Un point matériel se déplace sur un support ondulé. Il est soumis à des frottements. Le portrait de phase calculé par ordinateur est donné ci-dessous :



1. On lance un objet depuis $x(0) = 0$ avec une vitesse égale à $0{,}75\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Décrivez le mouvement.
2. On lance un objet depuis $x(0) = 0$; quelle vitesse doit-on approximativement lui donner pour qu'il aille se bloquer dans le trou $x = 2{,}5\,\mathrm{m}$?
   Si on le lance de $x(0) = 1\,\mathrm{m}$, quelle vitesse doit-on donner pour obtenir le même résultat ?

Exercice M2.10 : Chute d'un pot de fleurs [***]

Exercice totalement inutile, mais si vous aimez les casse-tête…
Vous voyez tomber un pot de fleur par votre fenêtre. Réflexe de physicien : vous estimez qu'il met $\Delta t = 0{,}10\,\mathrm{s}$ pour parcourir les $l = 1{,}4\,\mathrm{m}$ de hauteur de votre fenêtre.
De quelle altitude a-t-il été lâché ?

M2. Dynamique newtonienne

TDs numériques

réponses page 412

TD numérique : Chute avec frottements quadratiques

py EDO

Dans ce TD, on travaille sur un objet de masse m qui se déplace dans l'air en étant soumis :

— à son poids $-m.g.\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ vertical vers le haut

— à une force de frottements $-\lambda.\|\vec{v}\|.\vec{v}$

1. **Chute verticale avec frottements**

   On considère un grêlon de masse $m = 17\,\text{g}$ qui tombe verticalement depuis une altitude $h = 600\,\text{m}$ sans vitesse initiale. On prendra $\lambda = 9{,}2 \times 10^{-4}$ USI.

   (a) Établir l'équation différentielle

   $$\ddot{z} + k.|\dot{z}|.\dot{z} = -g \tag{1}$$

   avec k à déterminer.

   (b) Résoudre $z(t)$ par une méthode d'Euler. On prendra un pas de 0,1 s et une durée de simulation initiale de 20 s, qu'on ajustera ensuite pour que le grêlon arrive au sol.

   (c) Que vaut la vitesse limite, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

   (d) Tracer la trajectoire de phases $\dot{z}(z)$.

2. **Tir balistique avec frottements**

   On reprend maintenant l'exemple du tir balistique vu en cours, avec une position initiale $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ et une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_0\cos\alpha\,\vec{e}_x + v_0\sin\alpha\,\vec{e}_z$; on prendra un obus de masse $m = 7\,\text{kg}$ tiré avec une vitesse initiale $v_0 = 1500\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et un angle $\alpha = 40°$. Pour cet obus, $\lambda = 3 \times 10^{-3}$ USI.

   (a) Établissez les équations :

   $$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}.\dot{x} = 0 \tag{2}$$

   $$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}.\dot{z} = -g \tag{3}$$

   (b) Résolvez $x(t)$ et $z(t)$ par une méthode d'Euler avec un pas de 0,01 s.

   (c) Tracez la trajectoire, mesurez sa portée.

   (d) Tracez la courbe donnant la portée de la trajectoire en fonction de l'angle.

TD numérique : Portraits de phase

py plot(champ)

Ce TD implémente des méthodes qui ne sont pas essentielles.

1. **Portrait de phase de la chute libre**

   Un objet de masse m est repéré par son altitude z ; il n'est soumis qu'à son poids.

   (a) En appliquant le PFD, déterminez $\ddot{z}$.

   (b) Dans le plan de phase, l'état du système à un instant t est repéré par un point de coordonnées $(z, \dot{z})$. Pour savoir comment ce point va évoluer, on regarde où il sera à un instant $\text{d}t$ ultérieur :

   — sa position z aura varié de $dz = \dot{z}.\text{d}t$

   — sa vitesse $\dot{z}$ aura varié de $d\dot{z} = \ddot{z}.\text{d}t$

   Il suffit donc de tracer le vecteur de coordonnées $(\dot{z}, \ddot{z})$: cela se fait à l'aide d'une *carte de champ*. Le principe est le suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# création des listes d'abscisses et d'ordonnées où on veut tracer le portrait
tab_z=np.linspace(zmin,zmax,nb_de_points_z)
tab_zpoint=np.linspace(zpointmin,zpointmax,nb_de_points_zpoint)
```

```
# création de deux grilles contenant les coordonnées des points
mesh_z,mesh_zpoint=np.meshgrid(tab_z,tab_zpoint)
# calcul des valeurs de zpointpoint sur cette grille
mesh_zpointpoint=... # calcul à écrire
plt.plot()
# tracé: les coordonnée des points, puis les coordonnées des vecteurs
plt.quiver(mesh_z,mesh_zpoint,mesh_zpoint,mesh_zpointpoint)
plt.show()
```

Modifiez ce programme pour tracer la carte de champ correspondant au portrait de phase de la chute libre, pour z compris entre 0 m et 10 m et $\dot{z}$ entre $-20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Remarque : pour créer un tableau de même dimension que `mesh_z` mais ne contenant que des 1, on peut utiliser la commande `np.ones_like(mesh_z)`.

(c) Avec cette méthode, on imagine les trajectoires de phase, mais si on veut les tracer, on peut utiliser la commande `streamplot` à la place de `quiver`. Faites-le et observez le résultat.

Remarque : on pourra ajouter un paramètre optionnel `density` qui contrôle la densité de lignes ; sa valeur par défaut est 1, ne dépassez pas 3.

2. Tracez de même le portrait de phase de la chute libre avec frottements quadratiques de la forme $-f.\|\vec{v}\|.\vec{v}$; on testera différentes valeurs du rapport f/m.
3. Tracez le portrait de phase d'un masse-ressort tel que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$, sans frottements.
4. Deux atomes d'une molécule diatomique sont reliés par une force qu'on peut modéliser ainsi :

$$\frac{F}{m} = -\frac{4{,}2\times10^{13}}{r^7} + \frac{2{,}4\times10^{10}}{r^{13}}$$

où r est la distance en nm entre les atomes.

Tracez le portrait de phase de ce système pour r compris entre 0,1 nm et 1 nm, et les vitesses entre $\pm 4\times10^{8}\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

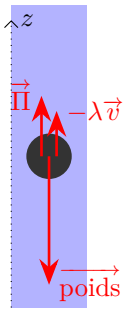
Q1.(b)
Q2.(a) ET (c)
Q3.(a) ET (c) ET (d)
Q4.(a) ET (d)
Q5.(a)

TOUJOURS, et cela pour deux raisons. D'abord, l'étude cinématique permet de poser la base dans laquelle il faudra projeter les forces ; ensuite, les forces peuvent faire intervenir la position ou la vitesse de l'objet étudié, auquel cas on a besoin de l'étude cinématique.

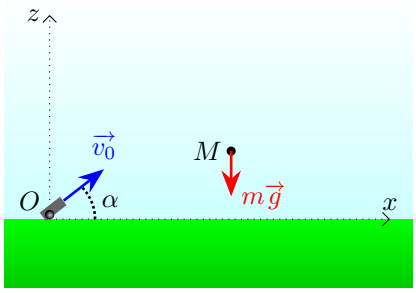
Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M2.1 : Chute d'un caillou dans l'eau [**]

1. $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = 3{,}2\,\text{mg}$
2. $m_e = 0{,}9\,\text{mg}$
3. On étudie le caillou dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$.
   Le caillou est soumis à son poids $-mg\vec{e}_z$, à la poussée d'Archimède $+m_e g\vec{e}_z$, et à la force de frottements $-6\pi R\eta\vec{v}(t) = -6\pi R\eta\dot{z}(t)\vec{e}_z$.
   Le PFD projeté sur $\vec{e}_z$ donne alors l'équation $m\ddot{z}(t) = -mg + m_e g - 6\pi R\eta\dot{z}(t)$
4. Donc $\tau\dot{w}(t) + w(t) = \frac{-mg+m_e g}{6\pi R\eta}$ avec $\tau = \frac{m}{6\pi R\eta} = 0{,}28\,\text{s}$. Donc après quelques calculs $w(t) = -W + (W - v_0)\,e^{-t/\tau}$ avec $W = \frac{(m-m_e)g}{6\pi R\eta} = 1{,}96\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
5. On intègre : $z(t) = -W.t + (W - v_0)\,\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$
6. $z(t) = -2{,}6\,\text{m}$ lorsque $t = 1{,}2\,\text{s}$ et $w(t) = -2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: l'eau a bien ralenti le caillou.



Corrigé de l'exercice M2.2 : Tir balistique [**]



1. — on étudie l'obus dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   — Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   — Bilan des forces : le poids $-mg\vec{e}_z$
   — PFD : $m\ddot{x}(t)\vec{e}_x + m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$
   On projette sur les deux axes : $\begin{cases}\ddot{x}(t) = 0\\ \ddot{z}(t) = -g\end{cases}$
2. $x(0) = z(0) = 0$; $\vec{v_0} = v_0\cos\alpha\vec{e}_x + v_0\sin\alpha\vec{e}_z = \dot{x}(0)\vec{e}_x + \dot{z}(0)\vec{e}_z$.
   On en tire $\begin{cases}\dot{x}(t) = v_0\cos\alpha\\ \dot{z}(t) = v_0\sin\alpha - g.t\end{cases}$ et $\begin{cases}x(t) = v_0\cos\alpha.t\\ z(t) = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}g.t^2\end{cases}$
3. $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ donc $z\,(x) = x.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$
4. Pour cette question, on cherche à résoudre $z\,(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x_{max} - \frac{1}{2}g\frac{x_{max}^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0$ qui a deux solutions : $x = 0$ (départ) et $x_{max} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ (portée).
   La portée est maximale quand $\sin 2\alpha$ est maximal, donc quand $\alpha = 45°$ et elle vaut alors $\frac{v_0^2}{g}$.
5. Pour cette question, on a deux solutions :
   — soit trouver x tel que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0$, ce qui donne $x = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$, puis déduire z pour cette valeur de x ;
   — soit trouver t tel que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$, ce qui donne $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$, et en déduire z.
   Dans les deux cas, on trouve la flèche $z_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.
   La flèche est maximale quand $\sin^2\alpha$ est maximal, donc pour $\alpha = 90°$, auquel cas elle vaut $\frac{v_0^2}{2g}$.
6.

(a) La cible appartient à la trajectoire ssi $z_c = \tan\alpha x_c - \frac{1}{2}g\frac{x_c^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$

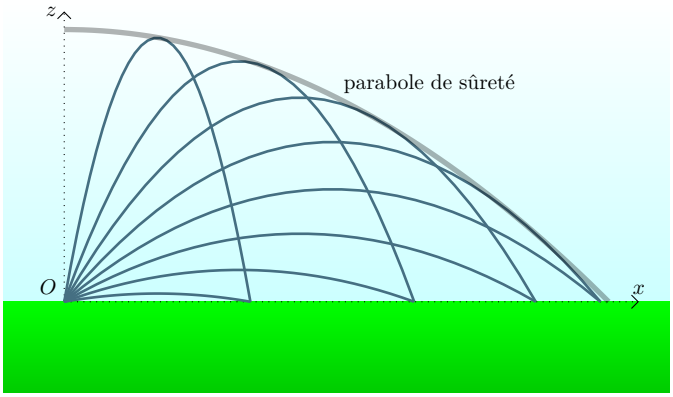
(b) $-\frac{gx_c^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + x_c\tan\alpha - \frac{gx_c^2}{2v_0^2} - z_c = 0$
Il s'agit bien d'une équation du second degré en $\tan\alpha$ (il faut bien comprendre que x_c et z_c sont ici fixés : on n'ajuste que l'angle).

(c) $\Delta = x_c^2 - \frac{g^2x_0^4}{v_0^4} - \frac{2gx_c^2z_c}{v_0^2}$

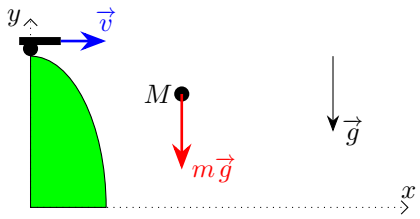
— L'équation a deux solutions réelles ssi $\Delta > 0$, soit $z_c < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x_c^2$: les points situés en-dessous de cette courbe peuvent être atteints pour deux angles (en effet, on peut vérifier que les deux solutions sont positives, donc il existe bien pour chacune d'entre elles un angle entre 0 et $\pi/2$).

— Si $z_c = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x_c^2$, il y a un seul angle solution.

— Si $z_c > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x_c^2$, il n'y a aucune solution : un point situé en-delà de la parabole de sûreté ne peut être atteint.



Corrigé de l'exercice M2.3 : Tir horizontal [**]



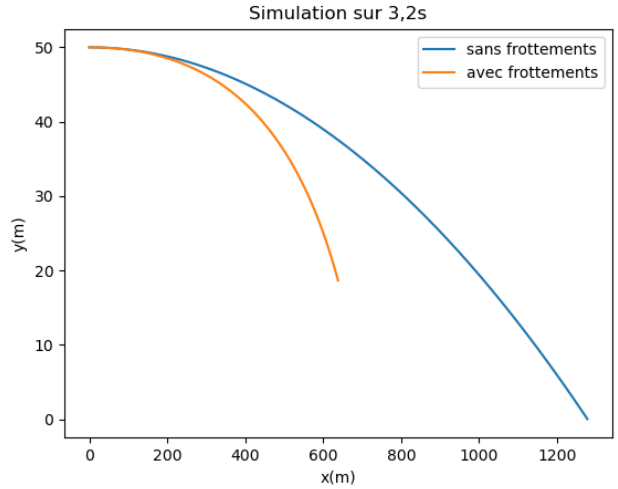
1. Comme dans l'exercice précédent, ou dans le cours : $\dot{x}(t) = v_0$ et $\dot{y}(t) = -gt$, puis $x(t) = v_0t$ et $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$
2. L'obus touche le sol en $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ à une distance $x_1 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.
3. L'équation $\ddot{x} = 0(t)$ d'ordre 2 nécessite deux inconnues : `x` et `vx`.
L'équation $\ddot{y}(t) = -g$ d'ordre 2 nécessite deux inconnues : `y` et `vy`.
On aura alors le schéma d'Euler suivant : $\begin{cases} t[n+1] = t[n] + pas \\ x[n+1] = x[n] + pas * vx[n] \\ vx[n+1] = vx[n] + pas * 0 \\ y[n+1] = y[n] + pas * vy[n] \\ vy[n+1] = vy[n] + pas * (-g) \end{cases}$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
v0,h,g=400,50,9.8
def derivee_seconde_x(x,y,vx,vy,t):
    return 0
def derivee_seconde_y(x,y,vx,vy,t):
    return -g
tsol=np.sqrt(2*h/g)
pas=tsol/1000
N=int(tsol/pas)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_x,tab_y=np.zeros(N+1),np.zeros(N+1)
```

```
tab_vx,tab_vy=np.zeros(N+1),np.zeros(N+1)
tab_vx[0],tab_y[0]=v0,h # ci non nulles
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    tab_x[n+1]=tab_x[n]+pas*tab_vx[n]
    tab_y[n+1]=tab_y[n]+pas*tab_vy[n]
    tab_vx[n+1]=tab_vx[n]+pas*derivee_seconde_x(tab_x[n],tab_y[n],tab_vx[n],tab_vy[n],tab_t[n])
    tab_vy[n+1]=tab_vy[n]+pas*derivee_seconde_y(tab_x[n],tab_y[n],tab_vx[n],tab_vy[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_x,tab_y)
plt.xlabel("x(m)")
plt.ylabel("y(m)")
plt.show()
```

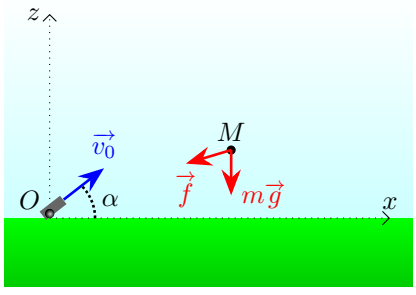
4. Il faut juste changer les dérivées :

```
lam=0.5
def derivee_seconde_x(x,y,vx,vy,t):
    return -lam*vx
def derivee_seconde_y(x,y,vx,vy,t):
    return -g-lam*vy
```



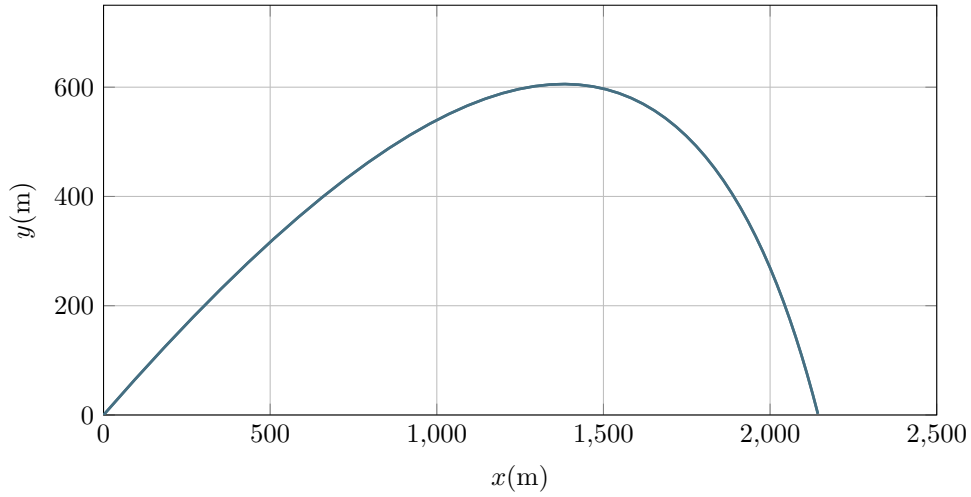
On constate que la portée est réduite, et la chute ralentie (dans le même temps, l'obus n'a pas encore atteint le sol).

Corrigé de l'exercice M2.4 : Tir balistique avec frottements de l'air [**]



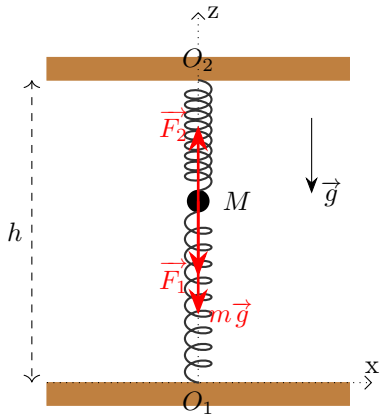
1. Système : obus.
   Référentiel : terrestre, qui est galiléen.
   Étude cinématique : $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   Forces : le poids $-mg\vec{e}_z$ et les frottements $-\lambda\vec{v}(t) = -\lambda\dot{x}(t)\vec{e}_x - \lambda\dot{z}(t)\vec{e}_z$.
   Le PFD donne alors : $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z}(t) = -g \end{cases}$

2. À résoudre comme deux équations d'ordre 1 en $\dot{x}(t)$ et en $\dot{z}(t)$. On trouve $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t},\ A \in \mathbb{R} \\ \dot{z}(t) = -\dfrac{mg}{\lambda} + Be^{-\frac{\lambda}{m}t},\ B \in \mathbb{R} \end{cases}$
3. $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$ donc $A = v_0 \cos\alpha$. De même, $\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha$ donc $B = \frac{mg}{\lambda} + v_0 \sin\alpha$.
   Donc $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ \dot{z}(t) = -\dfrac{mg}{\lambda} + \left(\dfrac{mg}{\lambda} + v_0 \sin\alpha\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t} \end{cases}$
   On a ensuite $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$ ce qui donne $\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_0 \cos\alpha}{\lambda}\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] \\ z(t) = -\dfrac{mg}{\lambda}t + \left(\dfrac{m^2 g}{\lambda^2} + \dfrac{mv_0 \sin\alpha}{\lambda}\right)\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right] \end{cases}$



4. (a) $\tau = \frac{m}{\lambda} = 12{,}5\,\text{s}$
   (b) L'équation s'écrit numériquement : $0 = -122{,}5t + 3324\left[1 - e^{-0{,}08t}\right]$. On trouve numériquement $t = 22{,}7\,\text{s}$ (attention à ne pas prendre la solution $t = 0\,\text{s}$, c'est le départ !).
   (c) On a alors $x(22{,}7\,\text{s}) = 2140\,\text{m}$. Sans frottements, on aurait eu une portée égale à $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 6000\,\text{m}$

Corrigé de l'exercice M2.5 : Masse entre deux ressorts [**]

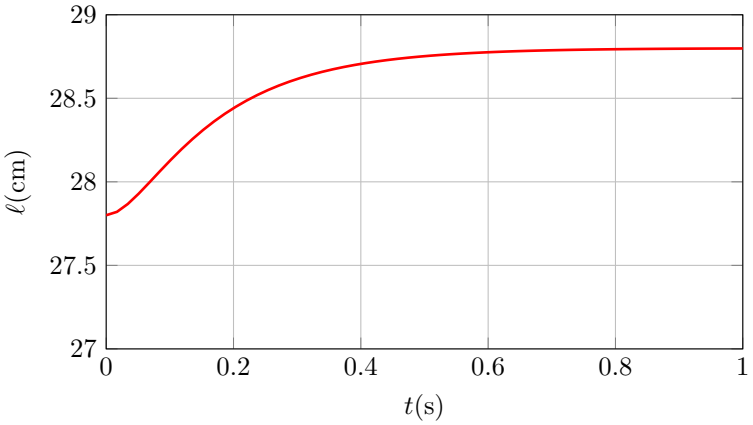


1. Le ressort du bas a pour longueur $z(t)$ et le vecteur unitaire du ressort vers la masse est $\vec{e}_z$. Donc sa force est $\vec{F_1} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$.
   Le ressort du haut a pour longueur $h - z(t)$ et le vecteur unitaire du ressort vers la masse est $-\vec{e}_z$. Donc sa force est $\vec{F_2} = +k(h - z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$
2. On étudie la masse dans le référentiel terrestre, galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$; $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   Forces : en plus de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, il y a le poids $-mg\vec{e}_z$.
   Le PFD projeté sur $\vec{e}_z$ donne $m\ddot{z}(t) = -mg - kz(t) + k\ell_0 + kh - kz(t) - k\ell_0 = -mg - 2kz(t) + kh$ soit $\ddot{z}(t) + \frac{2k}{m}z(t) = \frac{kh - mg}{m}$

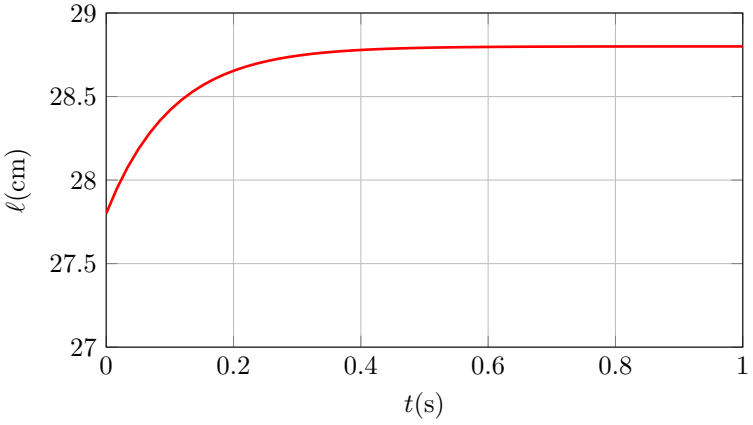
3. La position d'équilibre est donnée par $\ddot{z} = 0$; on trouve $z_e = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}$
   La pulsation propre vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
4. Les solutions sont de la forme $z(t) = z_e + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les CI : $z_e + A = \frac{h}{2}$ donc $A = \frac{mg}{2k}$ et $B = 0$. Donc $z(t) = \frac{h}{2} + \frac{mg}{2k}(\cos(\omega_0 t) - 1)$

Corrigé de l'exercice M2.6 : Suspension de voiture [***]

1. On voit facilement que $z(t) = e(t) + R + \ell(t)$.
2. On étudie la caisse de la voiture, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + (e(t) + R + \ell(t))\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + (\dot{e}(t) + \dot{\ell}(t))\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + (\ddot{e}(t) + \ddot{\ell}(t))\vec{e}_z$.
   Les forces s'appliquant à la caisse sont son poids $-mg\vec{e}_z$, la tension du ressort $-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z$ et la force de l'amortisseur $-f.\dot{\ell}(t)\vec{e}_z$.
   Le PFD projeté selon $\vec{e}_z$ donne donc l'équation $m\ddot{\ell}(t) + f\dot{\ell}(t) + k\ell(t) = k\ell_0 - mg - m\ddot{e}(t)$
3. En divisant par m on identifie avec la forme canonique : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. On en tire $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0} = 47\,400\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$
4. Le retour à l'équilibre le plus rapide a lieu en régime critique, lorsque $\Delta = f^2 - 4km = 0$ soit $f = 2\sqrt{km} = 7540\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.
5. À l'équlibre, toutes les dérivées sont nulles, donc $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} = 27{,}8\,\mathrm{cm}$
6. L'équation devient $m\ddot{\ell}(t) + f\dot{\ell}(t) + k\ell(t) = k\ell_0 - mg + 2m\alpha$. On a une solution particulière constante $\ell_p = \ell_0 - \frac{mg}{k} + \frac{2m\alpha}{k} = 0{,}288\,\mathrm{m}$ et une solution générale $\ell(t) = \ell_p + Ae^{-6,75t} + Be^{-23,4t}$. Par les conditions initiales, on trouve que $A + B = \ell_{eq} - \ell_p = -\dfrac{2m\alpha}{k}$ et $-6,75A - 23,4B = 0$ d'où on tire $A = -0{,}014\,\mathrm{m}$ et $B = 0{,}004\,\mathrm{m}$. Au final, $\ell(t) = 28,8 - 1,4e^{-6,75t} + 0,4e^{-23,4t}$ avec ℓ en cm et t en s.

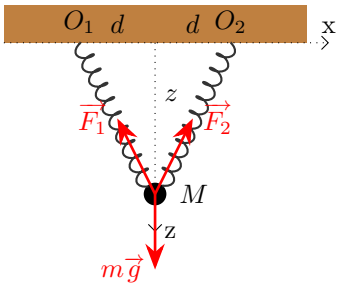


7. Cette fois les racines sont imaginaires ; on trouve $\ell(t) = [-1,0\cos(2,5t) - 4,1\sin(2,5t)]\,e^{-9,8t} + 28,8$ en centimètres.



L'oscillation est amortie immédiatement.

Corrigé de l'exercice M2.7 : Masse suspendue à deux ressorts [***]



1. Pour le ressort 1 : $\overrightarrow{O_1M} = d\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$ donc $O_1M = \sqrt{d^2 + z(t)^2}$. La force du ressort sur la masse a donc pour intensité $k(\sqrt{d^2 + z(t)^2} - \ell_0)$ et est dirigée suivant le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M} = \frac{d\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z}{\sqrt{d^2+z(t)^2}}$. Il ne reste qu'à mettre le signe pour trouver la force : $\overrightarrow{F_1} = -k\dfrac{\sqrt{d^2 + z(t)^2} - \ell_0}{\sqrt{d^2 + z(t)^2}}(d\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z)$.

   On trouve facilement que $\overrightarrow{F_2} = -k\dfrac{\sqrt{d^2 + z(t)^2} - \ell_0}{\sqrt{d^2 + z(t)^2}}(-d\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z)$.

2. Étude cinématique (rapide) : $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$.

   Dans le référentiel lié au plafond, la masse (repérée par z) est soumise à trois forces : $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et son poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$. Le PFD appliqué à m dans le référentiel lié au plafond, qui est galiléen, donne $m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = (-2k\frac{\sqrt{d^2+z(t)^2}-\ell_0}{\sqrt{d^2+z(t)^2}}z(t) + mg)\vec{e}_z$ (les deux termes sur $\vec{e}_x$ s'annulent).

   En projetant : $m\ddot{z}(t) = -2k\frac{\sqrt{d^2+z(t)^2}-\ell_0}{\sqrt{d^2+z(t)^2}}z(t) + mg$ qui est non-linéaire.

3. La position d'équilibre est celle qui vérifie $-2k\dfrac{\sqrt{d^2 + z_e^2} - \ell_0}{\sqrt{d^2 + z_e^2}}z_e + mg = 0$.

Corrigé de l'exercice M2.8 : Lecture d'une trajectoire de phase [*]

1. On rappelle qu'une trajectoire de phase est parcourue dans le sens horaire. Par conséquent, on voit que l'objet est lancé avec une vitesse vers le haut ; il s'élève, puis redescend et s'écrase par terre.
2. $z(0) = 4\,\text{m}$ et $\dot{z}(0) = 14\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
3. $z_{max} = 13{,}3\,\text{m}$ et $v_{sol} = 8{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (vers le bas).

Corrigé de l'exercice M2.9 : Portrait de phase [**]

1. On part du point $(x = 0, \dot{x} = 0{,}75)$ et on suit la courbe vers la droite ; on voit que l'objet va avancer vers la gauche puis se faire piéger dans le trou de centre $x = 1{,}5$. Il va alors osciller autour de $x = 1{,}5\,\text{m}$ avec une amplitude d'oscillation qui diminue jusqu'à l'immobilisation au fond.
2. On voit que la trajectoire qui va s'enrouler autour du trou $x = 2{,}5\,\text{m}$ est celle qui a pour vitesse $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en $x = 0$.

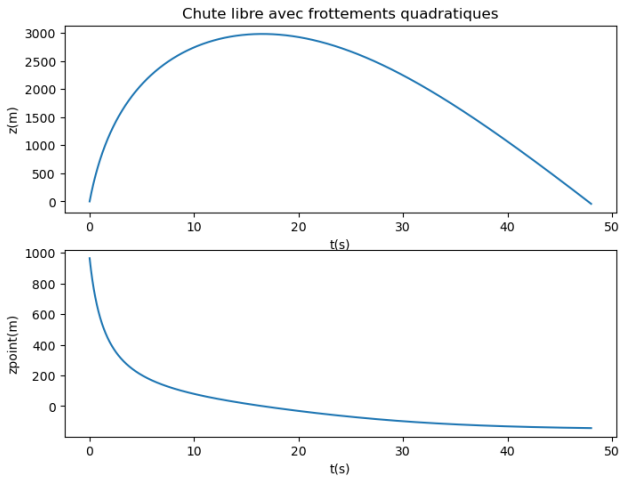
   En $x = 1\,\text{m}$, cette trajectoire a pour vitesse $0{,}75\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

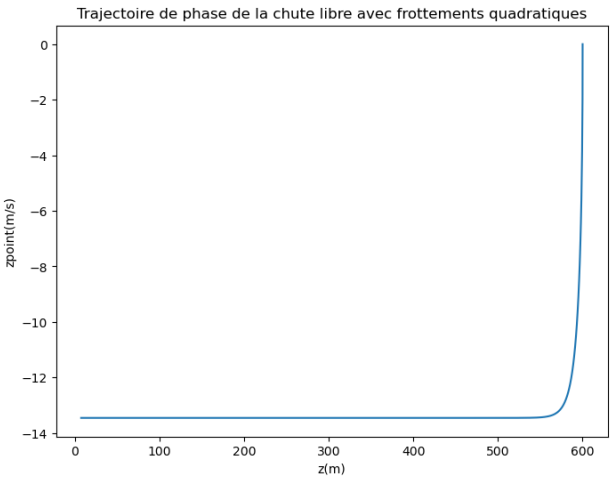
Corrigé de l'exercice M2.10 : Chute d'un pot de fleurs [***]

Il faut écrire les équations de la chute libre en prenant $z = 0$ en bas de la fenêtre.
On trouve qu'il a été lâché de $h = 10{,}5\,\text{m}$ au-dessus du bas de la fenêtre.

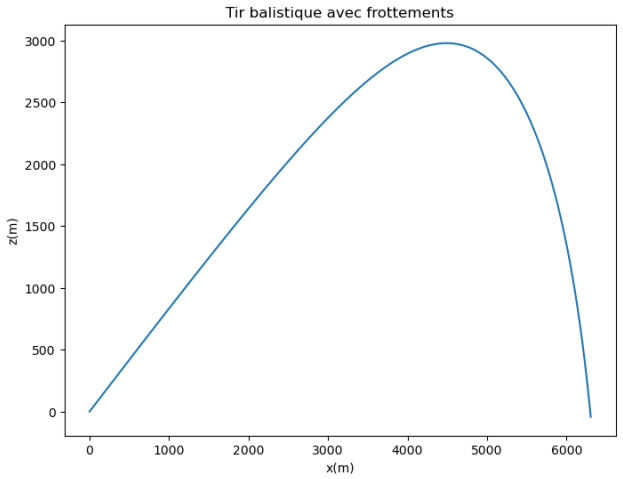
Réponses aux TDs numériques

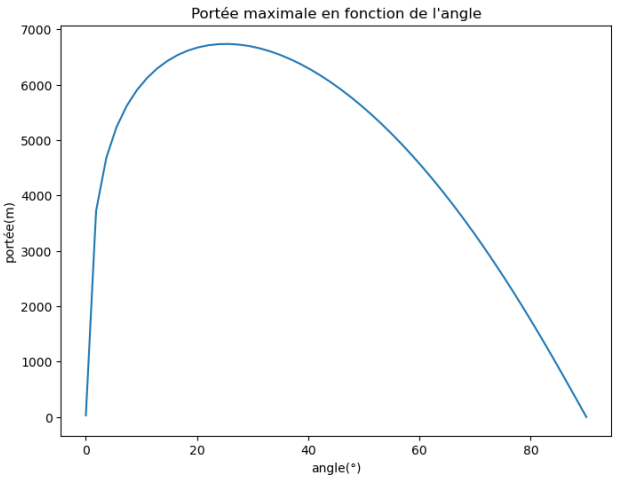
Réponses au TD d'info : Chute avec frottements quadratiques





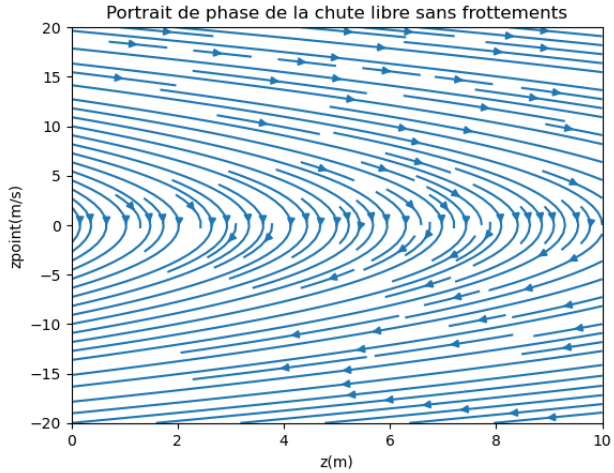
Avec la chute libre, les frottements quadratiques font rapidement converger la vitesse vers une limite valant $13{,}4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 48\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ vers le bas, quelle que soient les conditions initiales.

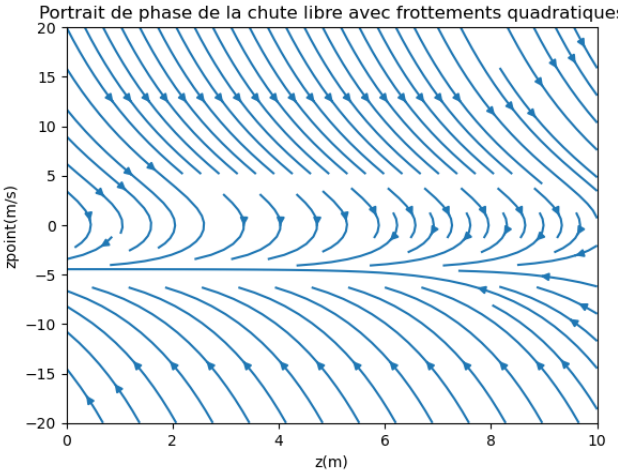


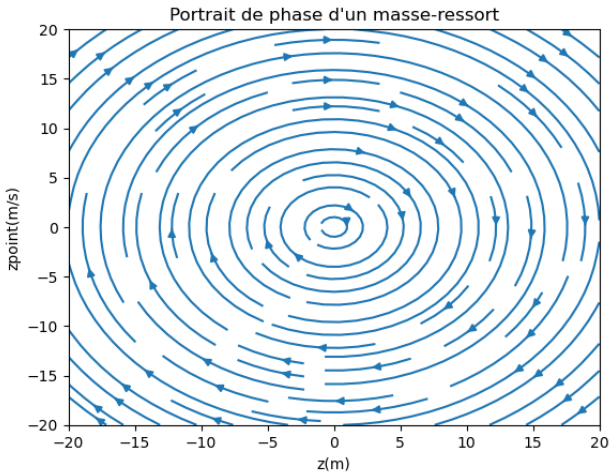


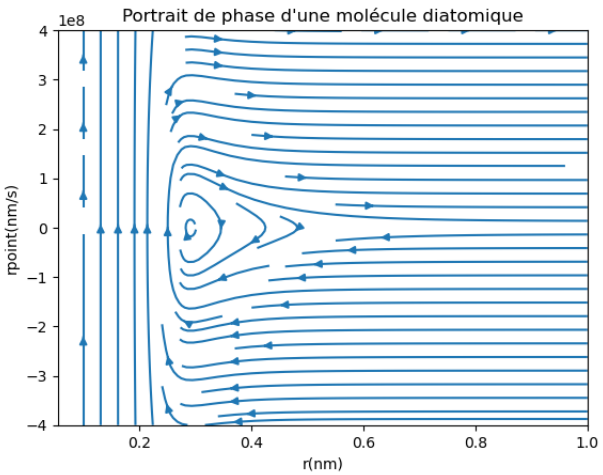
Par rapport au tir balistique sans frottements, la portée est diminuée ; elle est maximale pour un angle plus faible que 45°.

Réponses au TD d'info : Portraits de phase






Portrait de phase d'un masse-ressort
zpoint(m/s)
z(m)
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20


Portrait de phase d'une molécule diatomique
1e8
rpoint(nm/s)
r(nm)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Chapitre M3 Liaisons mécaniques

Programme p.427

Conseils p.428

Cours p.416
- M3.A. Contact sans frottements avec un support
- M3.B. Contact avec frottements avec un support
- M3.C. Oscillateur harmonique

QCMs p.429

Exercices p.430

TDs numériques p.434

M3. Liaisons mécaniques

Cours

Jusqu'à présent, nous avons étudié des mouvements d'objets libres de leurs mouvements : certes, des forces (poids, ressort) modifiaient leur mouvement, mais ils n'étaient pas contraints à suivre une trajectoire particulière à cause d'un support. Dans ce chapitre, nous allons étudier les mouvements contraints, où une liaison oblige le point matériel étudié à suivre une trajectoire précise. Nous allons dans un premier temps nous intéresser uniquement à la contrainte imposée à la trajectoire, puis nous verrons comment traiter les forces de frottements qui apparaissent. Enfin, nous terminerons ce chapitre en étudiant un modèle d'oscillateur : le masse-ressort horizontal, aussi appelé oscillateur harmonique.

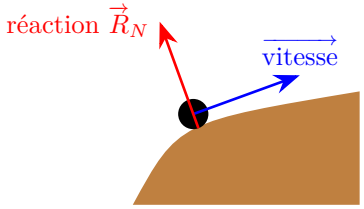
M3.A. Contact sans frottements avec un support

Un support oblige l'objet posé sur lui à suivre la forme de sa surface. Par exemple, si je pose un livre sur une table, ce livre ne peut pas passer à travers la table[1]. Tant qu'il est posé, je peux le déplacer horizontalement en le faisant glisser sur la table : le livre peut se déplacer parallèlement à la table, mais pas perpendiculairement à celle-ci. Or, si la table n'était pas là, le livre tomberait sous l'effet de son poids ; s'il ne tombe pas, c'est que la table exerce une force qui compense le poids ; cette force est verticale, c'est-à-dire orthogonale à la table.

Propriété : Réaction sans frottements d'un support

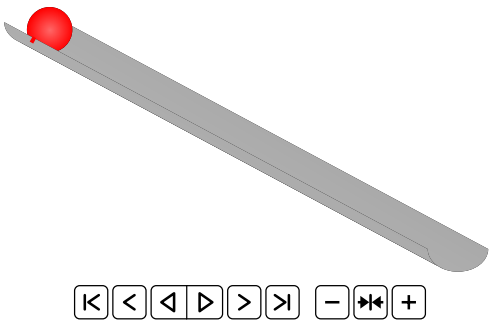
Si on objet est en contact **sans frottements** avec un support :

- le mouvement est forcément parallèle au support
- le support exerce sur l'objet une *réaction normale* $\vec{R}_N$ qui est orthogonale au support



La première étude des mouvements sur un support a été faite par Galilée. Comme la chute libre était trop rapide pour les moyens de mesures de l'époque, Galilée a eu l'idée de faire glisser des boules sur un plan incliné, dans une glissière qui contraint le mouvement dans une seule direction. En faisant varier l'angle entre la glissière et l'horizontale, Galilée a constaté que la distance parcourue par la boule est toujours proportionnelle au carré du temps, quel que soit l'angle (figure M3.1). Il a pu alors en déduire que la chute libre (qui correspond à une glissière à la verticale) vérifie la même loi ; on l'a montré dans le chapitre précédent.

Figure M3.1 : Expérience de Galilée.

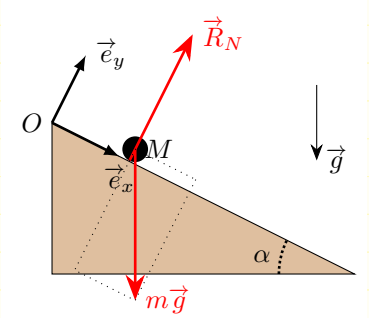


Remarque : En réalité, la boule ne glisse pas sur le support, elle roule. On admettra que pour le moment, on peut traiter une boule qui roule comme un objet se déplaçant sans frottements sur le support. Vous verrez l'an prochain une description plus précise du *roulement sans glissement*.

1. Sauf si la table casse…dans ce chapitre on supposera toujours que le support est indéformable, mais dans la réalité il faudra vérifier si le support est capable de supporter les contraintes qui s'y appliquent.

Exemple : Glissement sans frottements d'un objet sur un plan incliné À connaître

Dans l'expérience de Galilée de chute sur un plan incliné, déterminer la distance x parcourue en fonction du temps par la boule lâchée sans vitesse initiale, en fonction de l'angle α entre l'horizontale et la glissière.



On modélise l'expérience de Galilée en choisissant une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ avec $\vec{e}_x$ parallèle à la glissière, vers le bas, et $\vec{e}_y$ orthogonal, vers le haut. On prend comme origine le point O d'où est lâché l'objet à $t = 0$.

- on étudie la balle comme un point M de masse m
- on travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen
- dans l'étude cinématique, on traduit le fait que le mouvement est contraint de se faire parallèlement au support : pas de mouvement selon $\vec{e}_y$! Donc $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x$ puis $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$
- le point M est soumis à deux forces : son poids et la réaction du support. Il faut projeter ces forces sur la même base que l'étude cinématique. Pour la réaction, c'est facile : $\vec{R}_N = R_N(t)\vec{e}_y$ où $R_N(t)$ est une inconnue, qui peut dépendre du temps ; pour le poids, il faut projeter avec l'angle α ; on trouve $m\vec{g} = mg\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
- le PFD projeté sur les deux vecteurs de la base donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N(t) \end{cases}$$

On obtient donc deux équations ; la première est l'équation du mouvement, celle qui donne $\ddot{x}(t) = g\sin\alpha$; la seconde permet de calculer N.
En intégrant deux fois, on trouve $\dot{x}(t) = g\sin\alpha.t$ puis $x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha.t^2$.

Néanmoins, il y a un phénomène qu'on n'a pas pris en compte. Si un livre est posé sur une table horizontale, je peux le faire glisser sur la table, mais je peux aussi le soulever. La table empêche le livre de se déplacer vers le bas, mais pas vers le haut. De même, un train posé sur des rails peut, en principe, décoller ; ça arrive rarement, certes, sauf lorsqu'il effectue un looping dans une montagne russe ; dans ce cas, les wagons pourraient tomber, et on est obligé de modifier la liaison pour que les wagons ne soient pas seulement posés sur les rails, mais attachés aux rails.

Propriété : Liaison unilatérale et bilatérale

- une liaison bilatérale oblige l'objet à rester attaché au support à tout instant ; la réaction normale peut alors avoir n'importe quel sens ;
- une liaison unilatérale empêche l'objet de pénétrer dans le support, mais ne l'empêche pas de décoller ; la réaction normale est alors toujours dirigée du support vers l'objet.

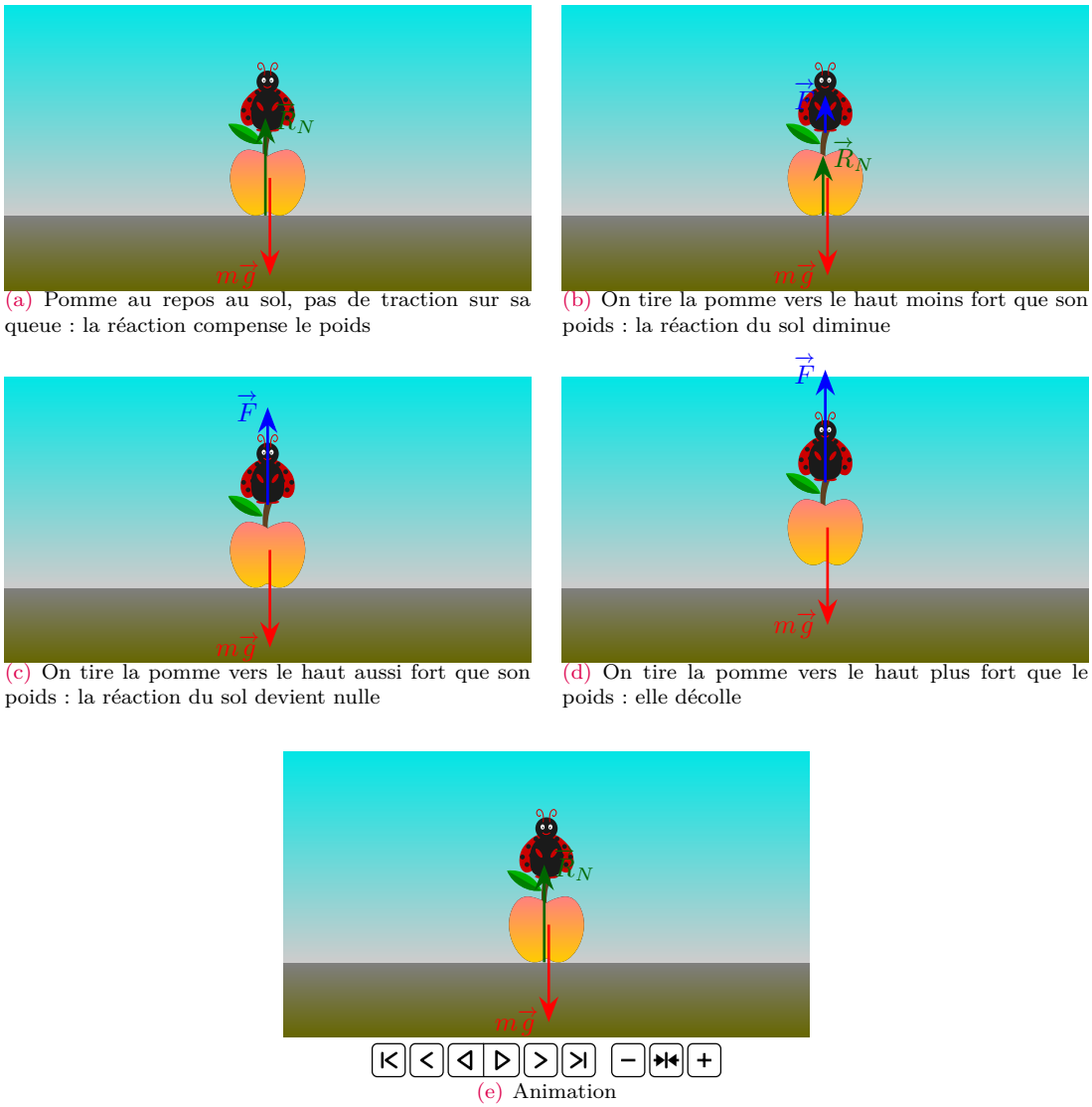
La figure M3.2 illustre cela avec une pomme posée sur le sol, soulevée par une minuscule® coccinelle.

(a) Au départ, la pomme est posée sur le sol : la réaction normale compense son poids ;
(b) la coccinelle commence à tirer sur la queue de la pomme : la réaction diminue, de façon à ce que la somme traction+réaction compense toujours le poids ;
(c) lorsque la traction devient égale au poids, la réaction s'annule ; c'est à ce moment-là que la pomme commence à décoller du sol ;
(d) si la coccinelle tire encore plus fort, la pomme s'élève.

Dans les exercices, on pourra rencontrer différentes liaisons :

- un train sur des rails (1D, unilatéral) ou un train de montagnes russes (1D, bilatéral)
- une bille dans une gouttière (1D, unilatéral) ou dans un tuyau (1D, bilatéral)
- une perle sur un fil (1D, bilatéral)
- un objet posé sur un plan (2D, bilatéral)…

FIGURE M3.2 : Minuscule® coccinelle soulevant une pomme.



(a) Pomme au repos au sol, pas de traction sur sa queue : la réaction compense le poids

(b) On tire la pomme vers le haut moins fort que son poids : la réaction du sol diminue

(c) On tire la pomme vers le haut aussi fort que son poids : la réaction du sol devient nulle

(d) On tire la pomme vers le haut plus fort que le poids : elle décolle

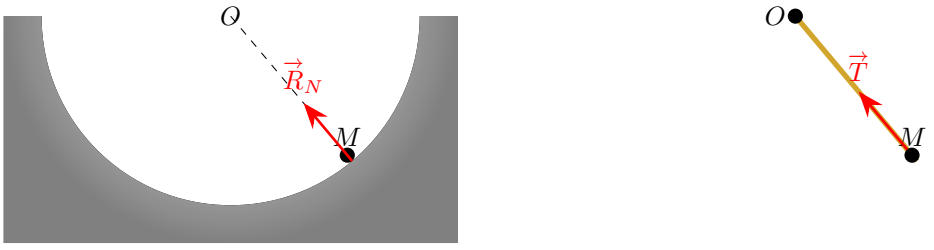
(e) Animation

Il existe un autre type de liaisons qui s'apparente, dans les faits, à une liaison unilatérale sans frottements : ce sont les fils. Un fil inextensible peut servir à tirer un objet. Considérons ainsi les deux schémas de la figure M3.3 :

— à gauche, un objet M peut se déplacer sans frottements sur un support circulaire de rayon R et de centre O

— à droite, un objet M peut se déplacer au bout d'un fil inextensible de rayon R attaché en un point O

FIGURE M3.3 : Support et fil inextensible.



(a) Objet sur un support circulaire

(b) Objet attaché à un fil

Ces deux situations sont identiques : dans les deux cas, le point M doit décrire un cercle de centre O et de rayon R. À gauche, le support exerce une force orthogonale au cercle, donc parallèle au rayon, dirigée vers l'intérieur, vers

le centre ; il en est donc de même à droite : un fil tendu exerce une force appelée *tension du fil*, notée ici $\vec{T}$ (attention, ce n'est pas le $\vec{T}$ de la base de Frenet) et dirigée du point vers le fil.

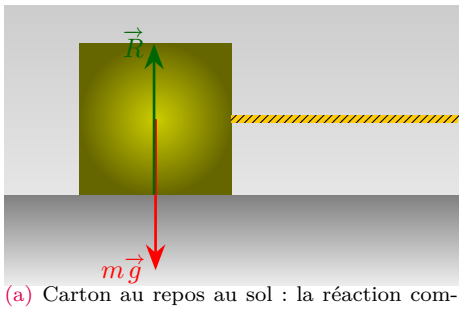
Propriété : Fil inextensible

Un fil inextensible a une longueur constante ; il exerce sur un objet attaché en un de ses bouts une force parallèle au fil, et dirigée de l'objet vers le fil.

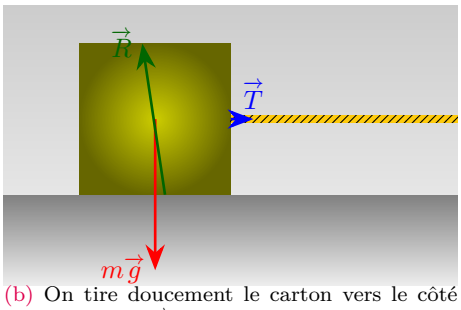
M3.B. Contact avec frottements avec un support

Jusque-là, on a négligé tout frottements ; cela modélise assez bien un palet de curling glissant sur la glace. Mais quand on essaie de déplacer un carton sur le sol, on sent bien qu'il y a quelque chose qui s'oppose au mouvement libre du carton sur le sol. Il faut pousser ou tirer avec une force suffisamment grande pour que le carton se mette en mouvement. La figure M3.4 montre ce qui se passe quand on tire un carton posé sur le sol :

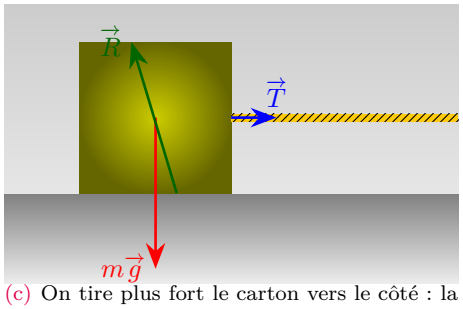
FIGURE M3.4 : Déplacement d'un carton sur le sol.



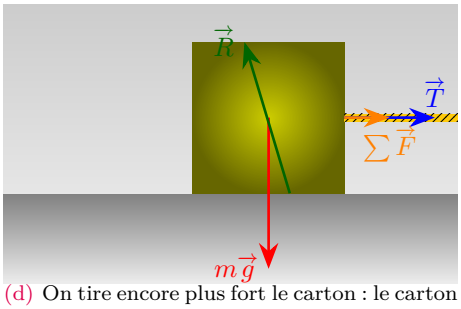
(a) Carton au repos au sol : la réaction compense le poids et est verticale



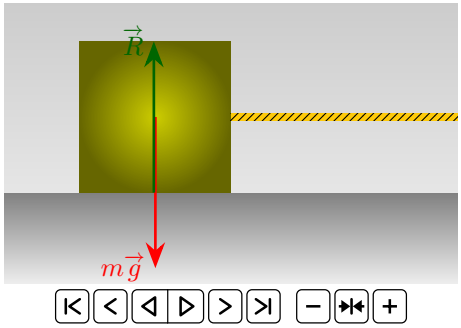
(b) On tire doucement le carton vers le côté avec une force $\vec{T}$: la réaction du sol s'incline



(c) On tire plus fort le carton vers le côté : la réaction du sol s'incline encore plus



(d) On tire encore plus fort le carton : le carton se met en mouvement



(e) Animation

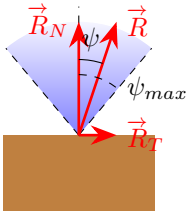
(a) au départ, le carton est immobile, et la réaction $\vec{R}$ compense le poids ;

(b) si on tire doucement sur le côté, le carton ne bouge pas : on en déduit que la réaction compense maintenant le poids **et** la force de traction. Il apparaît donc une composante horizontale à la réaction du sol ;

(c) si on tire plus fort, il arrive un moment où le carton se met en mouvement. Il s'agit alors de la force horizontale maximale que peut exercer le support sur le carton ;

(d) si on continue à tirer plus fort, le carton bouge, mais il y a toujours une force horizontale qui s'oppose au mouvement, car dès qu'on arrête de tirer, le carton s'immobilise très vite.

Géométriquement, si on décompose la réaction $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, on peut placer l'angle ψ entre la normale et la réaction ; alors on voit facilement que $\tan\psi = \frac{\left\|\vec{R}_T\right\|}{\left\|\vec{R}_N\right\|}$. C'est Charles-Augustin Coulomb qui, à partir de diverses expériences, a mis en évidence que l'angle ψ a une valeur limite qui dépend de la nature des deux solides en contact ; en notant ψ_{max} cet angle maximal, on peut en déduire que le carton ne bouge pas tant que $\left\|\vec{R}_T\right\| \leq \tan\psi_{max}.\left\|\vec{R}_N\right\|$.
On peut donc tracer un cône de sommet l'objet considéré, et de demi-angle au sommet ψ_{max}. Les lois de Coulomb indiquent que l'objet reste immobile tant que la réaction reste à l'intérieur de ce cône, appelé *cône de frottements* (en bleu ci-contre).



En étudiant aussi le cas où il y a mouvement, Coulomb a établi les lois suivantes du frottement solide :

Lois de Coulomb des frottements solides

Quand un objet est posé sur un support solide, le support exerce une réaction $\vec{R}$ que l'on peut décomposer en une réaction normale $\vec{R}_N$ orthogonale au support, et une réaction tangentielle $\vec{R}_T$ parallèle au support, aussi appelée *force de frottements solides* (ou secs). On peut alors définir un coefficient sans dimensions f (ou parfois μ), appelé *coefficient de frottements*, dépendant des deux surfaces en contact, reliant $\vec{R}_T$ à $\vec{R}_N$:

— l'objet reste immobile tant que $\left\|\vec{R}_T\right\| < f.\left\|\vec{R}_N\right\|$

— si l'objet se déplace, alors $\left\|\vec{R}_T\right\| = f.\left\|\vec{R}_N\right\|$ et la force de frottements est opposée au déplacement de l'objet

On voit la cohérence de ce modèle avec l'exemple du carton vu précédemment. Il faut bien remarquer que, dans ce modèle, la force de frottements reste constante une fois que le carton est en mouvement.
Les coefficients de frottements typiques varient entre 0,05 et 1 (cf. tableau M3.1).

Tableau M3.1 : Coefficients de frottements de divers matériaux.

matériaux en contact	f
pneu/route	0,6 à 1,0
bois/béton	0,6
bois/bois	0,2 à 0,6
verre/verre	0,4
peau de banane/sol [2]	0,07
ski/neige	0,04
cartilage/cartilage	0,01

Il faut cependant bien réaliser que cette loi de Coulomb est un modèle très simple. D'abord, il ne traduit pas le fait qu'on a tous constaté, qu'une fois qu'un objet est mis en mouvement, il est plus facile de continuer à le déplacer. Une modèle plus compliqué permet de traduire cette propriété, et définissant deux coefficients différents, un *coefficient statique* lorsque l'objet est immobile, et un *coefficient dynamique* lorsqu'il bouge, légèrement inférieur au coefficient statique.

Ensuite, dans le modèle de Coulomb, la surface de contact n'importe pas. Or on sait bien qu'une voiture tient mieux la route avec des pneus larges qu'avec des pneus étroits. Mais cela n'est pas contradictoire avec les lois de Coulomb. Quand une voiture est posée sur un sol horizontal, on peut penser que la réaction su sol sur chaque pneu compense un quart du poids de la voiture. En fait, entre le pneu et la route, il existe des forces d'attraction, de type *forces de Van der Waals*, qui augmentent la force normale, et donc, par conséquent, la force tangentielle maximale. On retrouve le même effet entre deux surfaces très lisses : le coefficient de frottement verre/verre n'est pas énorme, mais si on plaque deux vitres l'une contre l'autre, il est difficile de les faire coulisser car les forces de Van der Waals entre ces deux surfaces très lisses sont grandes.

2. D'après l'excellent article Frictional Coefficient under Banana Skin (récompensé par le prix igNobel en 2014) où l'on apprend que ce coefficient monte à 0,12 si on la tourne dans l'autre sens, et à 0,33 si la peau est sèche.

Enfin, il faut bien comprendre que ce modèle ne s'applique strictement qu'à des contacts secs ; si le contact entre les solides est lubrifié, les lois changent. C'est le cas par exemple des frottements métal/métal dans les moteurs, lubrifiés avec de l'huile, ou encore du ski qui glisse sur la neige.

Remarque : Le science qui étudie les frottements s'appelle la tribologie. C'est un domaine très important de la physique pratique, cas la réduction des frottements solides concerne de très nombreux domaines de l'ingénierie.

Méthode : Résolution d'un problème de mécanique avec des frottements solides

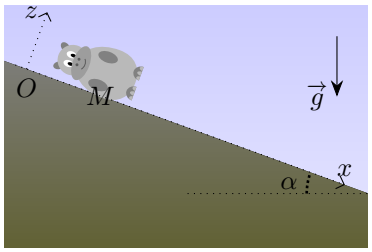
Pour résoudre un problème de mécanique avec des frottements solides, il faut absolument commencer par faire une hypothèse, la plus plausible en fonction de l'énoncé :

— si on suppose que l'objet est immobile, alors son étude cinématique est évidente : $\vec{a} = \vec{0}$. Le PFD projeté permet alors de connaître les deux composantes $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ de la réaction. On vérifie alors la condition de validité $\left\|\vec{R}_T\right\| < f.\left\|\vec{R}_N\right\|$.

— si on suppose que l'objet bouge, on fait aussi une supposition quand au sens du mouvement. L'étude cinématique possède alors une inconnue, mais en échange, on gagne une relation entre les composantes $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ de la réaction grâce aux lois de Coulomb. En combinant les deux relations données par le PFD, on arrive alors à l'équation du mouvement ; on vérifie alors que l'objet bouge dans le sens prévu.

Exemple : Glissement sur un plan incliné avec frottements — À connaître

Un objet de masse m est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; l'origine est choisie au point de départ de l'objet. On note f le coefficient de frottements entre l'objet et le plan.



1. On suppose que l'objet glisse vers le bas. Déterminer $x(t)$. À quelle condition sur α est-ce possible ?
2. On suppose que l'objet ne glisse pas. Déterminer la réaction du sol. À quelle condition sur α est-ce possible ?

1. On suppose dans cette question que le point M est en mouvement vers le bas.
   — On étudie le pont M de masse m dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.
   — Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$.
   — Bilan des forces : l'objet est soumis à son poids $m\vec{g} = mg\left(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_z\right)$, à la réaction normale du support : $\vec{R}_N = R_N(t)\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$ et à la réaction tangentielle (force de frottements) $\vec{R}_T = R_T(t)\vec{e}_x$ avec $R_T < 0$ puisque l'objet bouge vers les x croissants. De plus, d'après les lois de Coulomb, $\|R_T\vec{e}_x\| = f.\|R_N\vec{e}_z\|$ donc $|R_T| = f.|R_N|$ d'où on tire $R_T = -f.R_N$.
   — le PFD s'écrit donc $m\ddot{x}(t)\vec{e}_x = mg\left(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_z\right) + R_N(t)\vec{e}_z - f.R_N(t)\vec{e}_x$. En projetant, on obtient
   $$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha - f.R_N(t) \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N(t) \end{cases}$$
   On en déduit que $R_N(t) = mg\cos\alpha$ (constante) puis $\ddot{x}(t) = g\left(\sin\alpha - f.\cos\alpha\right)$. Après double intégration, on obtient $x(t) = \frac{1}{2}g\left(\sin\alpha - f.\cos\alpha\right)t^2$
   Pour que ce soit valide, il faut que le mouvement soit bien vers le bas, comme supposé. Pour cela, il faut que la vitesse soit selon $+\vec{e}_x$, donc que $(\sin\alpha - f.\cos\alpha)$ soit positif, ce qui revient à $\sin\alpha > f.\cos\alpha$ soit $\tan\alpha > f$ ou encore $\alpha > \arctan f$.
2. On suppose dans cette question que l'objet est immobile. L'objet et le référentiel ne changent pas.
   — Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = 0\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = 0\vec{e}_x$ et $\vec{a} = 0\vec{e}_x$.

— Bilan des forces : l'objet est soumis à son poids $m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_z)$, à la réaction normale du support : $\vec{R}_N = R_N(t)\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$ et à la réaction tangentielle (force de frottements) $\vec{R}_T = R_T(t)\vec{e}_x$. De plus, d'après les lois de Coulomb, $\|R_T\vec{e}_x\| < f.\|R_N\vec{e}_z\|$ donc $|R_T| < f.R_N$; ce sera la condition de validité à vérifier à la fin.
— le PFD s'écrit donc $\vec{0} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_z) + R_N(t)\vec{e}_z + R_T(t)\vec{e}_x$. En projetant, on obtient

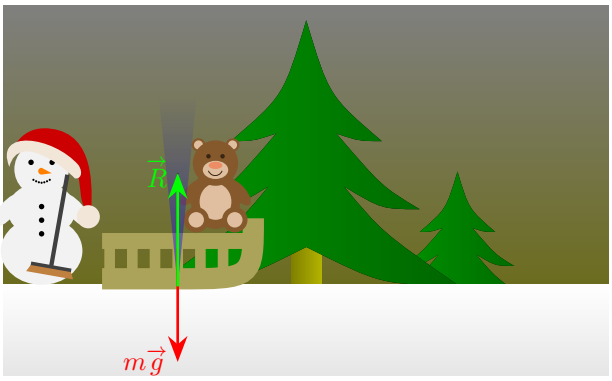
$$\begin{cases} 0 = mg\sin\alpha + R_T(t) \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N(t) \end{cases}$$

On en déduit que $R_T(t) = -mg\sin\alpha$ et $R_N(t) = mg\cos\alpha$ (les deux sont constants). La condition de validité est que $|R_T| < f.R_N$ soit $mg\sin\alpha < f.mg\cos\alpha$ d'où on tire $\tan\alpha < f$ ou $\alpha < \arctan f$.

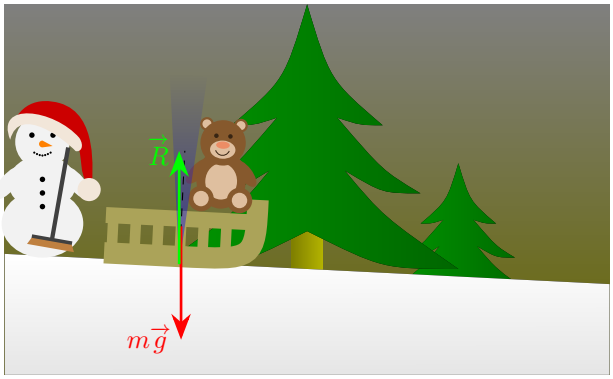
Remarque : on constate que les deux conditions de validité sont complémentaires ; mais si on prend des coefficients statique et dynamique différents, ce n'est plus le cas.

Le résultat précédent (immobilité tant que $\tan\alpha < f$) se visualise bien à l'aide du cône de frottements, représenté dans le cas d'une luge sur la figure M3.5. Quand on incline le sol, la réaction tend à compenser le poids ; elle reste donc verticale, et s'incline par rapport au sol ; quand l'angle devient trop important, la luge se met à glisser.

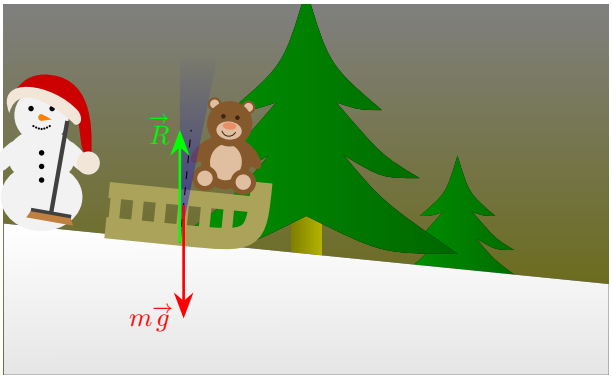
FIGURE M3.5 : Glissement d'une luge sur un plan incliné.



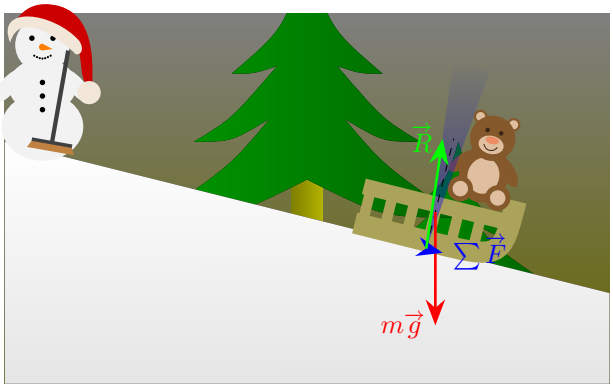
(a) Luge sur un sol horizontal : la réaction est orthogonale au sol



(b) Luge sur un sol peu incliné : la réaction s'incline et compense le poids



(c) Luge sur un sol un peu plus incliné : la réaction est à la limite de compenser le poids



(d) Luge sur un sol encore plus incliné : la réaction ne peut plus compenser le poids

M3.C. Oscillateur harmonique

Nous avons déjà étudié en exercices le mouvement d'une masse attachée à un ressort : la longueur du ressort est alors solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, semblable à un circuit RLC série.

Dans cette section, nous allons étudier plus en détail ce système masse-ressort, appelé aussi *oscillateur harmonique*, et établir ses analogies avec le RLC série.

C.1. Modèle et équations

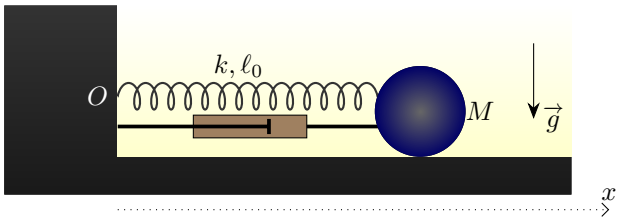
On appelle *oscillateur harmonique* une masse attachée à un ressort, et soumise éventuellement à une force de frottements linéaires. Plusieurs géométries existent pour réaliser cela, mais le système le plus simple à étudier est le masse-ressort horizontal (figure M3.6) :

— une masse m glisse sans frottements[3] sur un plan horizontal

— elle est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0

— un amortisseur attaché à la masse exerce sur elle une force de type frottements fluide, de la forme $-f.\vec{v}$ où f est un coefficient réglable (dureté de l'amortisseur)

FIGURE M3.6 : Oscillateur harmonique horizontal.



Propriété : ED vérifiée par l'oscillateur harmonique

L'allongement du ressort vérifie, dans le modèle de la figure M3.6, l'équation

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad \text{(M3.1)}$$

qui peut se mettre sous forme canonique $\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{f} \qquad \text{(M3.2)}$$

Démonstration

— On étudie l'objet de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen

— On note ℓ la longueur du ressort. Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{\ell}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{\ell}(t)\vec{e}_x$

— Bilan des forces : la masse est soumise :

  * à son poids, orthogonal à $\vec{e}_x$,
  * à la réaction du support, orthogonale à $\vec{e}_x$ aussi (pas de frottements solides),
  * à la force du ressort $-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x$
  * et à la force de l'amortisseur $-f.\vec{v} = -f.\dot{\ell}(t)\vec{e}_x$

— Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne $m\ddot{\ell}(t) = -k\ell(t) + k\ell_0 - f\dot{\ell}(t)$ soit $m\ddot{\ell}(t) + f\dot{\ell}(t) + k\ell(t) = k\ell_0$

Pour pouvoir comparer les systèmes, il est bon de se ramener à un second membre nul. Pour cela, on cherche la valeur de ℓ à l'équilibre : si $\dot{\ell} = 0$ et $\ddot{\ell} = 0$ alors on voit que $k\ell = k\ell_0$ donc $\ell = \ell_0$. On pose alors $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ (c'est l'allongement) ; alors $\dot{x}(t) = \dot{\ell}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \ddot{\ell}(t)$. On voit alors facilement que l'équation précédente devient $m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = 0$

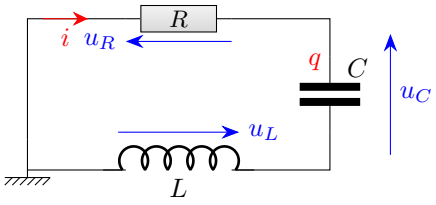
On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2, semblable à ce qu'on a obtenu lorsqu'on a étudié le circuit modèle du RLC série en électricité. On va pousser la comparaison un peu plus loin.

C.2. Analogies électromécaniques

On a déjà considéré le circuit RLC série dans les chapitres d'électricité ; ici, on va reprendre rapidement son étude en régime libre, c'est-à-dire sans générateur (figure M3.7) :

3. Sous-entendu ici : sans frottements *solides*.

FIGURE M3.7 : Circuit RLC série.



Calcul : ED vérifiée par la charge du condensateur

Par la loi des mailles, $u_L(t)+u_R(t)+u_C(t)=0$ soit $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+u_C(t)=0$ d'où on tire $L\ddot{u}_C(t)+R\dot{u}_C(t)+\frac{1}{C}u_C(t)=0$. Pour faire l'analogie avec l'oscillateur harmonique, on va introduire la charge q du condensateur ; on sait par définition que $q=C.u_C$. En multipliant toute l'équation précédente par C, on obtient donc

$$L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=0 \qquad \text{(M3.3)}$$

Ces deux équations (M3.1) et (M3.3) se ressemblent ; on peut identifier terme à terme selon le tableau M3.2. Identifier, cela ne veut pas dire que les grandeurs sont égales, mais qu'elles jouent le même rôle mathématique. On constate que l'analogie va même assez loin, car lorsqu'on identifie les énergies du condensateur et de la bobine, on tombe sur deux expressions qu'on verra bientôt : l'énergie cinétique du point $E_{cin}=\frac{1}{2}mv^2$, et l'énergie potentielle du ressort $E_{él}=\frac{1}{2}kx^2$.

TABLEAU M3.2 : Analogies électromécaniques.

grandeur	Osc. Harmonique	RLC série
variable	allongement $x(t)$	charge $q(t)$
dérivée	vitesse $v(t)=\dot{x}(t)$	intensité $i(t)=\dot{q}(t)$
inertie	m	L
amortissement	f	R
rappel	k	$\frac{1}{C}$
pulsation propre ω_0	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
facteur de qualité Q	$\frac{\sqrt{km}}{f}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
énergies	$E_{cin}=\frac{1}{2}mv^2$	$E_L=\frac{1}{2}Li^2$
	$E_{él}=\frac{1}{2}kx^2$	$E_C=\frac{1}{2C}q^2$

Propriété : Analogies électromécaniques

L'oscillateur harmonique horizontal et le RLC série obéissent aux mêmes équations à condition de faire correspondre :

- l'allongement avec la charge du condensateur
- la masse avec l'inductance (termes d'inertie)
- le coefficient de frottements avec la résistance (termes qui dissipent de l'énergie)
- la raideur du ressort avec l'inverse de la capacité (termes de rappel)

Par conséquent, **tous les résultats qu'on a vus avec le RLC série sont transposables à l'oscillateur harmonique horizontal**, par transposition des grandeurs, ou bien en utilisant les expressions $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q=\frac{\sqrt{km}}{f}$.

Remarque : Il existe d'autres analogies possibles, entre autres avec le RLC parallèle.

C.3. Solutions temporelles

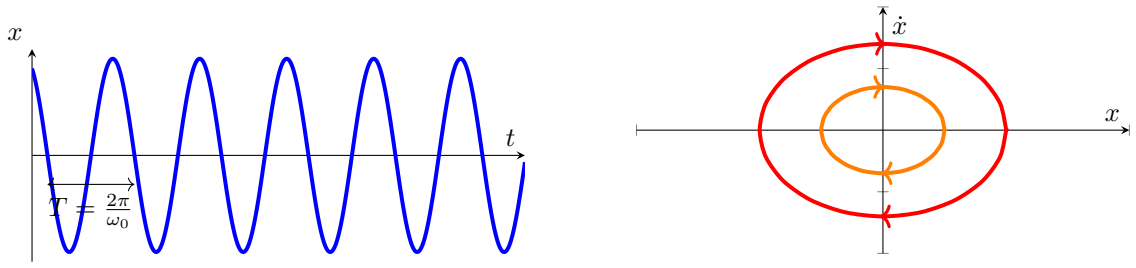
Propriété : Solutions en régime non amorti

S'il n'y a pas d'amortisseur ($f = 0$, soit $Q = \infty$), les solutions de l'oscillateur harmonique non amorti sont de la forme

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \text{ ou } D\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{(M3.4)}$$

Les solutions sont représentées figure M3.8, ainsi que le portrait de phase, constitué d'ellipses tournant dans le sens horaire.

FIGURE M3.8 : Oscillateur harmonique non amorti.



(a) Solutions temporelles (b) Portrait de phase

Propriété : Solutions en régime peu amorti

Si l'amortissement est faible ($Q > \frac{1}{2}$, soit $f < 2\sqrt{km}$), les solutions de l'oscillateur harmonique sont de la forme

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \text{ avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{(M3.5)}$$

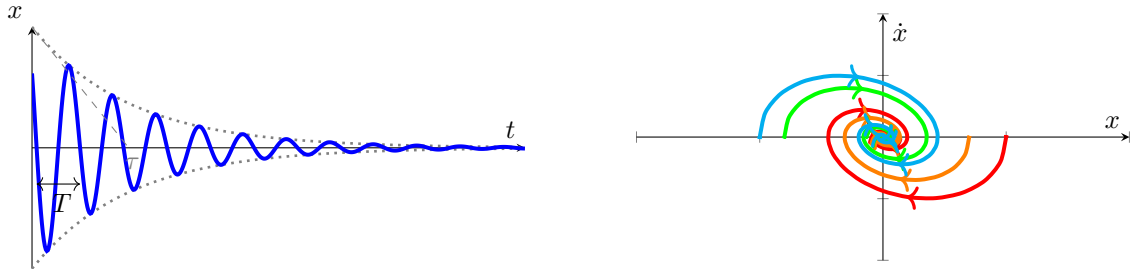
Ce sont des oscillations de pseudopériode $\frac{2\pi}{\omega}$ qui s'amortissent en un temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Le portrait de phase est alors constitué de spirales qui tendent vers l'origine (figure M3.9).

Propriété : Nombre d'oscillations

Lorsque Q est grand, le nombre de fois que le système oscille avant de l'arrêter est approximativement égal à Q.

FIGURE M3.9 : Oscillateur harmonique en régime pseudo-périodique.



(a) Solutions temporelles (b) Portrait de phase pour $Q = 2$

Propriété : Solutions en régime très amorti

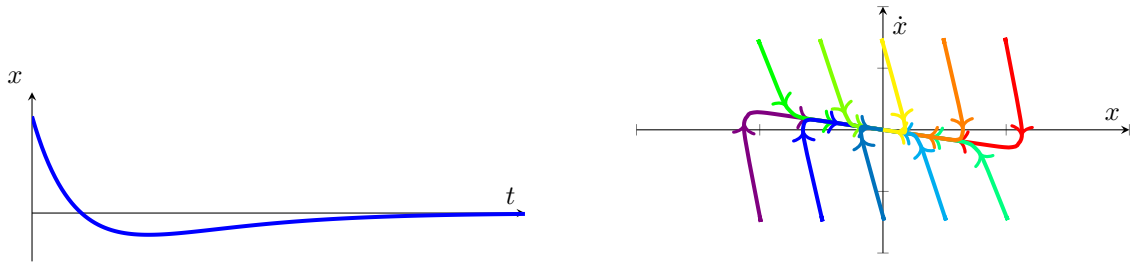
Si l'amortissement est fort ($Q < \frac{1}{2}$, soit $f > 2\sqrt{km}$), les solutions de l'oscillateur harmonique sont de la forme

$$x(t) = A.e^{r_+.t} + Be^{r_-.t} \text{ avec } r_\pm = \omega_0\frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} \text{ (solutions de l'équation caractéristique)} \qquad \text{(M3.6)}$$

La courbe est apériodique.

Le portrait de phase est alors constitué de courbes qui tendent vers l'origine sans tourner autour (figure M3.10).

FIGURE M3.10 : Oscillateur harmonique en régime apériodique.



(a) Solutions temporelles

(b) Portrait de phase pour $Q = 0,2$

M3. Liaisons mécaniques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système modèle masse-ressort sans frottement.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter les analogies avec un oscillateur harmonique électrique.
Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

M3. Liaisons mécaniques

Quelques conseils

- ✎ Dans le cas d'un mouvement contraint par un support, il faut toujours choisir les axes pour que la description du mouvement soit simple. Dans le cas d'un support plan, il faudra prendre un axe parallèle au support et un orthogonal. L'étude cinématique doit traduire qu'il n'y a pas de mouvement orthogonalement au support.
- ✎ L'équation différentielle du mouvement est une ED qui ne contient comme inconnue que l'inconnue décrivant le mouvement. On l'obtient le plus souvent en projetant le PFD parallèlement au support.
- ✎ La réaction normale n'a aucune raison d'être constante. Elle n'a aucune raison non plus de compenser le poids, même si c'est souvent le cas.
- ✎ Lisez bien les énoncés pour savoir si on tient compte des frottements solides et des frottements fluides. Ne confondez pas les deux.
- ✎ La force de frottements solides correspond à la réaction tangentielle ; écrivez l'une ou l'autre, mais pas les deux.

M3. Liaisons mécaniques

QCMs

réponses page 436

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. S'il n'y a pas de frottements, la réaction d'un support est orthogonale à celui-ci :

(a). Vrai (b). Faux

Q2. Un support contraint l'objet à avoir un mouvement rectiligne :

(a). Faux (b). Vrai

Q3. La réaction tangentielle correspond à ce qu'on appelle couramment la force de frottements :

(a). Vrai (b). Faux

Q4. Si l'objet est immobile, alors la force de frottements est nulle :

(a). Vrai (b). Faux

Q5. La pulsation propre d'un masse-ressort vaut :

(a). $\sqrt{\frac{m}{k}}$ (b). $\sqrt{\frac{1}{k.m}}$
(c). $\sqrt{\frac{k}{m}}$ (d). $\sqrt{k.m}$

Q6. Le portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti est formé :

(a). d'ellipses (b). de spirales
(c). de cercles (d). de paraboles

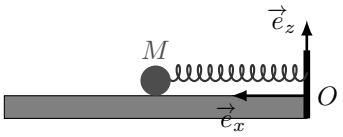
M3. Liaisons mécaniques

Exercices

réponses page 437

Exercice M3.1 : Masse-ressort horizontal amorti [*]

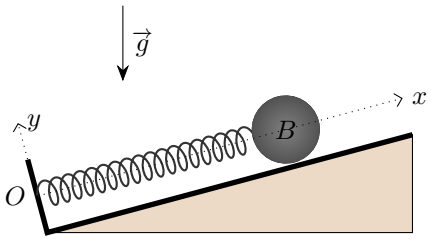
Une masse m peut glisser sur un rail à coussin d'air. Elle est reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à un bord fixe ; il y a aussi en parallèle du ressort un amortisseur produisant sur la masse m une force $-f.\vec{v}$ avec f une constante. On néglige les frottements avec le sol.
On repère par x l'**allongement** du ressort ; $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire dirigé du ressort vers la masse. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ le champ de pesanteur. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



1. Établissez l'ED vérifiée par x.
2. On lance la masse depuis $x(0) = 0$ avec une vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$. On prend les valeurs numériques suivantes : $l_0 = 12\,\text{cm}$, $k = 280\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $m = 400\,\text{g}$, $f = 28\,\text{USI}$ et $v_0 = 24\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminez $x(t)$.

Exercice M3.2 : Flipper [**]

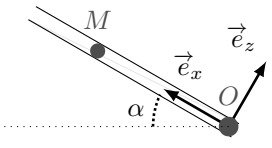
On va étudier le lancement d'une bille de flipper. Le flipper est modélisé par un plan incliné d'un angle $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontale. En bas (point O) est fixé un ressort de raideur $k = 40\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 5\,\text{cm}$. Une bille B de masse $m = 5\,\text{g}$ est posée au bout de ce ressort ; pour le moment, on supposera que la bille touche le bout du ressort.
On place les axes x et y comme sur la figure, et on note ℓ la distance OB. On suppose que la bille se déplace sans frottements sur le plan incliné. On notera $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



1. Établir l'équation différentielle du mouvement (ED vérifiée par ℓ).
2. Initialement, on comprime le ressort à la longueur $\frac{\ell_0}{2}$, et on lâche la bille à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminez $\ell(t)$.
3. En réalité, la bille n'est pas attachée au ressort, elle est juste posée dessus. Par conséquent, dès que la force du ressort devient nulle, la bille se détache du ressort.
   Calculez numériquement la position ℓ_1 où la bille se détache, l'instant t_1 correspondant, ainsi que la vitesse v_1.
4. À partir de ce moment-là, la bille continue d'avancer sans frottements sur le plan incliné, mais n'est plus soumise à la force du ressort. Déterminez $\ell(t)$ en fonction de ℓ_1, v_1, t_1, t, g et α.
5. Quelle est la vitesse v_2 de la bille lorsqu'elle atteint le sommet du flipper ($\ell = 80\,\text{cm}$) ?

Exercice M3.3 : Aimant glissant dans un tube [**]

Un aimant M de masse $m = 80\,\text{g}$ peut glisser sans frottements dans un tube incliné d'un angle $\alpha = 12°$ par rapport à l'horizontale. Un autre aimant est fixé en O, en bas de la pente. L'aimant en O exerce alors sur M une force répulsive $\vec{f} = \frac{K}{x^3}\vec{e}_x$ où x est la distance OM et K une constante positive.
On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur de norme $9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par x.
2. Montrez qu'il existe une position d'équilibre x_{eq} à exprimer.
   AN : on mesure $x_{eq} = 4{,}2\,\text{cm}$; calculez numériquement K.
3. On va s'intéresser aux mouvements au voisinage de l'équilibre ; on va donc poser $x = x_{eq} + \varepsilon$ où x_{eq} est la valeur à l'équilibre (c'est donc une constante) et $\varepsilon \ll x_{eq}$.

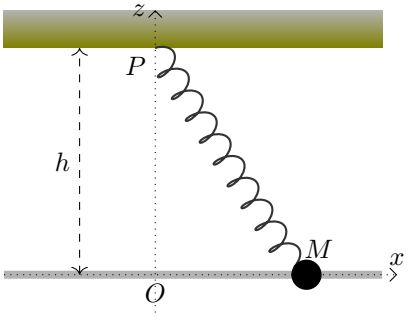
À partir de l'ED vérifiée par x, déterminez l'ED vérifiée par ε en fonction de m, g, α et x_{eq} uniquement (plus de K).

4. [***] On admet le développement limité suivant que vous verrez bientôt en maths : $\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{x_{eq}}\right)^3} \approx 1-3\frac{\varepsilon}{x_{eq}}$.

   Déduisez-en l'ED vérifiée par ε sous la forme $\ddot{\varepsilon}+\omega_0^2\varepsilon=0$ en exprimant (en fonction de g, α et x_{eq}) puis en calculant la pulsation propre ω_0 des petites oscillations de l'aimant autour de sa position d'équilibre.

Exercice M3.4 : Position d'équilibre d'une masse fixée à un ressort [***]

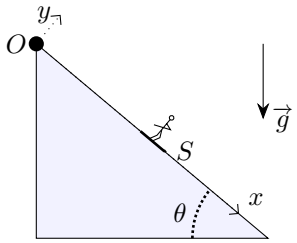
Un objet M de masse m peut se déplacer sans frottements sur une tige horizontale. On repère sa position par $x=\overline{OM}$. Un ressort est fixé entre M et le point P fixe de coordonnées $(0,h)$. Ce ressort a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0 ; on suppose que $h<\ell_0$.
Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



1. Exprimez la longueur du ressort en fonction de x et des constantes, puis la force exercée par le ressort sur la masse.
2. Établissez l'ED vérifiée par x.
3. Trouvez la position d'équilibre de la masse (autre que $x=0$).

Exercice M3.5 : Descente à skis [**] EDO

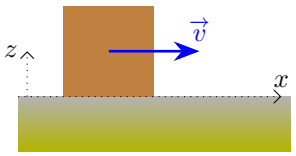
Une skieuse S de masse $m=67\,\text{kg}$ descend une piste inclinée d'un angle $\theta=40°$ par rapport à l'horizontale. Elle démarre depuis l'origine avec une vitesse nulle. Elle est soumise à son poids avec $g=9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; le contact avec la piste enneigée se fait avec un coefficient de frottements solides $\mu=0,06$.



1. On néglige pour le moment les frottements de l'air ; on suppose que la skieuse glisse vers le bas. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par $v(t)=\dot{x}(t)$. Que vaut alors $v(t)$? Commentez le réalisme de ce modèle.
2. On ajoute alors dans le modèle une force de frottements de la forme $-k.\|\vec{v}\|.\vec{v}$. Déterminez la nouvelle équation différentielle vérifiée par v.
3. Exprimez la vitesse limite atteinte par la skieuse.
   AN : sachant que cette vitesse vaut $v_{lim}=162\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, calculez numériquement k.
4. À l'aide d'une méthode d'Euler, tracez $x(t)$ et mesurez le temps nécessaire pour parcourir 1 km.

Exercice M3.6 : Carton lancé sur un sol plan horizontal [**]

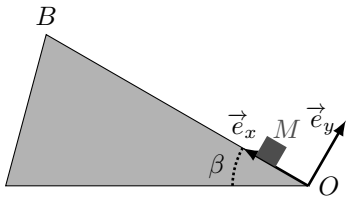
Un carton de masse m est lancé sur le sol horizontal avec une vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$ avec $v_0=3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il glisse avec un coefficient de frottements $f=0{,}3$.
Pour les AN on prendra $g=10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1. Déterminez sa vitesse $v(t)$.
2. À quel instant s'arrête-t-il ?
3. Quelle distance a-t-il parcourue ?

Exercice M3.7 : Glissement d'un carton sur un plan incliné [**]

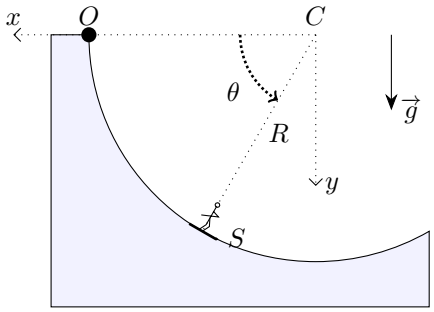
Un carton est posé en bas d'un plan incliné d'un angle $\beta = 15°$ par rapport à l'horizontale. On le lance depuis le point O avec une vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$. On repère la position du carton au cours du temps par $x = \overline{OM}$.
Le but est de faire arriver le carton jusqu'au point B tel que $OB = 4\,\text{m}$.



1. On suppose pour le moment que le carton glisse sans frottements sur le sol. Établir l'expression de $\ddot{x}(t)$, puis de $x(t)$ en intégrant deux fois.
2. Montrez que le carton n'atteint le point B que si la vitesse v_0 est supérieure à une valeur minimale v_1 à exprimer.
3. On suppose qu'il y a maintenant des frottements solides avec le sol ; on note f le coefficient de frottements. Établir la nouvelle expression de $x(t)$.
4. On constate que la vitesse minimale pour que le carton atteigne B vaut $v_2 = 7{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Déduisez-en la valeur de f.

Exercice M3.8 : Saut à ski [***] EDO

Un skieur S de masse $m = 73\,\text{kg}$ descend une piste ayant la forme d'un arc de cercle de rayon $R = 85\,\text{m}$. On repère sa position par l'angle θ placé sur la figure ; il démarre depuis $\theta = 20°$ avec une vitesse nulle. Il est soumis à son poids avec $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; le contact avec la piste enneigée se fait avec un coefficient de frottements solides $\mu = 0{,}06$; il est aussi soumis à une force de frottements avec l'air $-k\,\|\vec{v}\|\,\vec{v}$ avec $k = 0{,}16$ USI.



1. Placez la base de Frenet. Exprimez la longueur de l'arc parcouru $s(t) = \widehat{OS}(t)$, puis la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du skieur.
2. Écrivez le PFD dans l'hypothèse où le skieur glisse, puis projetez-le sur les deux axes de la base de Frenet. La réaction normale compense-t-elle le poids ?
3. Déduisez-en l'équation différentielle du mouvement.
4. Résolvez $\theta(t)$ par une méthode d'Euler et déterminer le temps où le skieur atteint le bout du tremplin de saut ($\theta = 120°$) et sa vitesse à ce moment-là.

Exercice M3.9 : Masse-ressort horizontal avec frottements secs [***] EDO

Une masse m peut glisser avec frottements sur un plan horizontal ; on note f le coefficient de frottements. Elle est accrochée au bout d'un ressort horizontal de raideur k (on ne tiendra pas compte dans cet exercice du problème de la longueur finie du ressort). Le problème est unidimensionnel, sur l'axe $\vec{e}_x$, l'origine $x = 0$ étant prise à la longueur au repos du ressort.
L'étude est faite dans le référentiel terrestre, galiléen. On note $\vec{g}$ la pesanteur, et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.
On place la masse en $x = \ell_0 > 0$ (ressort tendu). On immobilise la masse, puis on la lâche.

1. Calculez la norme de la réaction normale du plan sur la masse au cours du mouvement.
2. Montrez que, si ℓ_0 est inférieur à une valeur x_0 qu'on précisera, la masse reste immobile.
   AN : calculez x_0 si $m = 100\,\text{g}$, $k = 30\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $f = 0{,}1$.
3. On suppose que $\ell_0 > x_0$; la masse se met alors en mouvement. Écrivez l'équation différentielle vérifiée par x tant que la masse ne s'arrête pas.
   Résolvez-la, et déduisez-en la valeur ℓ_1 de x quand la masse s'arrête.
4. À quelle condition sur ℓ_1 la masse reste-t-elle immobile ? déduisez-en une condition sur ℓ_0.

5. Si la masse repart en sens inverse, devinez sans calculs la valeur ℓ_2 de x à l'arrêt suivant, et la condition sur ℓ_0 pour qu'elle s'immobilise.
6. Pour une valeur ℓ_0 donnée, combien d'allers-retours fera la masse avant de s'immobiliser ?
7. Simulez ce mouvement pour $\ell_0 = 8\,\text{cm}$. Attention, la modélisation de la force de frottements est assez compliquée.

M3. Liaisons mécaniques

TDs numériques

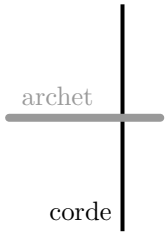
réponses page 444

TD numérique : Le phénomène de glissé-décolé (stick-slip) py EDO

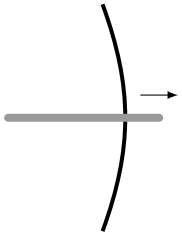
Une craie qui crisse, une porte qui grince, une corde de violon qui vibre…Tous ces phénomènes ont un point commun : ils font apparaître une vibration lors du déplacement de deux objets en contact [a]. Ce phénomène se passe sous plusieurs conditions :

- les deux solides se déplacent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse à peu près constante
- les frottements entre les deux solides diminuent fortement lorsque ces solides glissent l'un par rapport à l'autre
- l'un des solides n'est pas entièrement indéformable : il peut se déformer légèrement et alors une force de rappel le ramène à sa position initiale

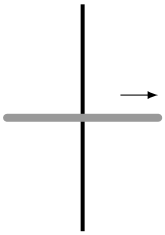
La figure ci-dessous illustre ce qui se passe avec la corde du violon :



Initialement, la corde est au repos ; l'archet s'appuie dessus.



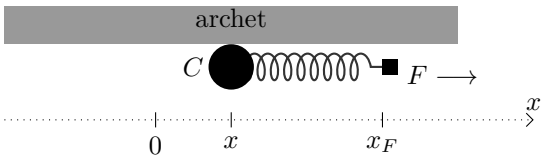
L'archet avance : la corde suit son mouvement et se tend.



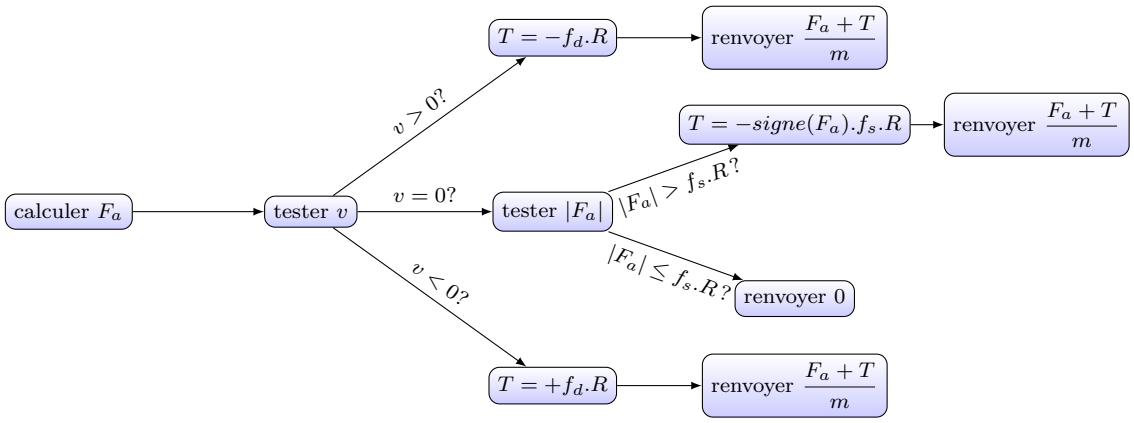
Quand la corde est trop tendue, elle se met à glisser sous l'archet et reprend sa position initiale.

On va proposer la modélisation suivante dans le référentiel de l'archet (ou du tableau pour la craie) :

- l'archet est représenté comme un support immobile en-dessus
- la corde C de masse m est posée sous l'archet au contact de celui-ci
- la force normale entre la corde et l'archet est due à la pression de l'archet sur la corde ; on notera R cette force qu'on supposera connue.
- le poids de la corde et la force $\vec{R}$ sont compensées par une force verticale qui tient la corde ; ces forces n'importeront pas ici car on va projeter le PFD selon $\vec{e}_x$
- il y a des frottements solides entre la corde et l'archet modélisés par des lois de Coulomb avec deux coefficients de frottements : un coefficient statique f_s lorsque la corde est immobile et un coefficient dynamique $f_d < f_s$ lorsqu'elle est en mouvement
- la tension de la corde cherche à la ramener à sa position d'équilibre, ce qu'on modélise par un ressort « virtuel » de raideur k et de longueur à vide nulle, exerçant une force de rappel $+k.\ell.\vec{e}_x$ avec ℓ la longueur du ressort ; mais comme on se place dans le référentiel de l'archet, la fixation de la corde bouge : on supposera que le point F où est fixé le ressort bouge selon la loi $x_F(t) = v_a t$ où v_a est la vitesse de l'archet
- les frottements avec l'air créent sur la corde une force de la forme $-\lambda.\vec{v}$



1. Effectuez un bilan des 3 forces s'exerçant sur C selon la direction $\vec{e}_x$ (on notera $T\vec{e}_x$ la force de frottements solides, pour le moment).
2. Pour une première simulation, on va prendre : $m = 1{,}2\,\text{g}$; $R = 0{,}8\,\text{N}$; $f_s = 0{,}2$; $f_d = 0{,}1$; $k = 2500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $v_a = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$; $\lambda = 0{,}0$ USI pour commencer. Définissez ces constantes sous Python.
   Écrivez une fonction `acceleration(x,v,t)` qui renvoie l'accélération de C. On utilisera l'arbre suivant, où F_a représente la somme de toutes les forces autres que $\vec{T}$, projetées selon $\vec{e}_x$:



La fonction *signe* s'obtient avec `numpy.sign`.

3. Pour appliquer cela à un schéma d'Euler, il faut faire attention : quand l'objet est en mouvement et s'arrête, le fait d'avoir un pas temporel non infiniment petit fait qu'il va osciller autour d'une vitesse nulle sans jamais s'arrêter. Pour éviter cela, on va ajouter une étape au schéma d'Euler : après avoir calculé `tab_v[n+1]`, on va tester si `tab_v[n+1]` est de signe strictement opposé à `tab_v[n]`, et si c'est le cas, on impose `tab_v[n+1]=0`.
   Simulez alors le système sur une durée de 50 ms avec un pas de 1×10^{-5} s ; tracez $x(t)$ et vous devez voir que la corde avance pas à-coups.
4. Si on se place dans le référentiel du violon, il faut enlever le mouvement de l'archet ; tracez alors $x(t) - v_a.t$ et observez l'oscillation de la corde.
5. On ajoute maintenant les frottements de l'air : $\lambda = 0{,}2$ USI. Retracez les courbes ; y aura-t-il du son ?
6. On met sur l'archet une substance appelée *collophane* qui augmente f_s sans modifier f_d. Augmentez progressivement f_s jusqu'à ce que les oscillations ne s'amortissent plus.
7. On prendra $f_s = 2{,}0$ dans la suite.
   Observez l'effet sur la fréquence si on modifie un peu ($\times 2$ au maximum) :
   - la raideur k de la corde
   - la vitesse v_a de l'archet
   - la pression R de l'archet

   Pourquoi casse-t-on une craie pour qu'elle ne crisse plus ? Pourquoi huile-t-on les gonds d'une porte ?

a. C'est aussi le principe des tremblement de terre dus à des glissement de plaques, mais à une fréquence beaucoup plus basse.

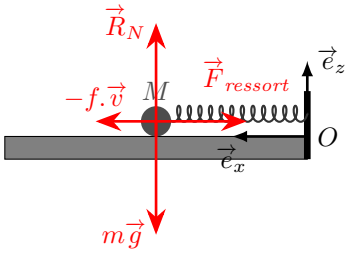
Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Q2.(a)
Si le support est 2D, le mouvement peut être très varié ; si le support est 1D, il n'est pas forcément rectiligne, comme par exemple un chemin de fer.
Q3.(a)
Mais c'est la force de frottements solides ; il peut aussi y avoir des frottements avec l'air, qui n'ont rien à voir et sont modélisés par une autre force.
Q4.(b)
Imaginez que vous êtes debout, immobile, dans une rue inclinée.
Q5.(c)
Q6.(a)

Réponses aux exercices

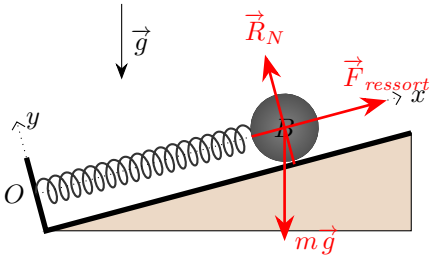
Corrigé de l'exercice M3.1 : Masse-ressort horizontal amorti [*]



1. Facile : le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$
2. On a comme solution particulière constante $x = 0\,\text{cm}$.
   On trouve deux racines réelles pour le polynome caractéristique : $-12{,}1$ et $-57{,}9$. Donc $x(t) = Ae^{-12{,}1t} + Be^{-57{,}9t}$ en cm. Avec les CI on trouve $A + B = 0$ et $-12{,}1A - 57{,}9B = 24$ donc $A = 0{,}5 = -B$. Donc $x(t) = 0{,}5\left[e^{-12{,}1t} - e^{-57{,}9t}\right]$

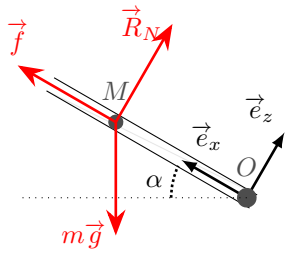
Corrigé de l'exercice M3.2 : Flipper [**]

1. On étudie la bille B dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



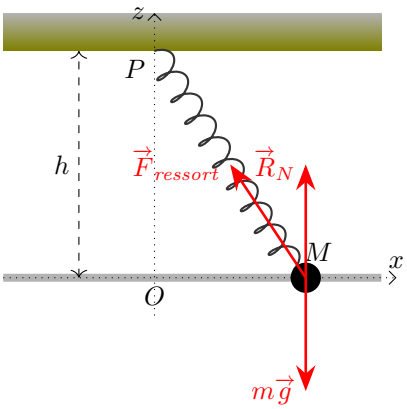
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OB} = \ell(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{\ell}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{\ell}(t)\vec{e}_x$.
   Bilan des forces : le poids $m\vec{g} = mg\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$, la réaction du support $R_N(t)\vec{e}_y$ et la force du ressort $-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x$.
   Le PFD fournit deux équations après projection : $\begin{cases} m\ddot{\ell}(t) & = -mg\sin\alpha - k(\ell(t) - \ell_0) \\ 0 & = R_N(t) - mg\cos\alpha \end{cases}$. En en déduit l'équation différentielle recherchée : $\ddot{\ell}(t) + \frac{k}{m}\ell(t) = \frac{k}{m}\ell_0 - g\sin\alpha$.
2. Les solutions sont de la forme $\ell(t) = \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. À l'aide des conditions initiales, on trouve que $\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} + A = \frac{\ell_0}{2}$ et $B\omega_0 = 0$.
   Au final : $\ell(t) = \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} + \left(\frac{mg\sin\alpha}{k} - \frac{\ell_0}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$
3. La force du ressort vaut $-k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x$, elle s'annule lorsque $\ell = \ell_0$ soit $\frac{mg\sin\alpha}{k} = \left(\frac{mg\sin\alpha}{k} - \frac{\ell_0}{2}\right)\cos(\omega_0 t_1)$ d'où on tire $t_1 = \frac{1}{\omega_0}\arccos\frac{2mg\sin\alpha}{2mg\sin\alpha - k\ell_0} = 17{,}7\,\text{ms}$.
   En calcule alors $v_1 = \dot{\ell}(t_1) = 2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et on a dit que $\ell_1 = \ell_0 = 5\,\text{cm}$.
4. La force du ressort ayant disparu, $\ell(t)$ obéit à l'équation différentielle $\ddot{\ell}(t) = -g\sin\alpha$ d'où on tire après deux intégrations $\ell(t) = \ell_1 + v_1.(t - t_1) - \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$
5. On résout $\ell(t) = 80\,\text{cm}$ et on trouve $t_2 = 0{,}466\,\text{s}$ puis $v_2 = 1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice M3.3 : Aimant glissant dans un tube [**]



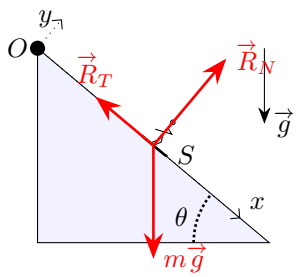
1. On étudie le point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'étude cinématique est simple, $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$. Le point est soumis à la réaction normale $R_N(t)\vec{e}_y$, à son poids $-mg\sin\alpha\vec{e}_x - mg\cos\alpha\vec{e}_y$, et à la force $\vec{f}$. Le PFD projeté selon $\vec{e}_x$ donne donc $m\ddot{x}(t) = -mg\sin\alpha + \frac{K}{x(t)^3}$
2. $-mg\sin\alpha + \frac{K}{x_{eq}^3} = 0$ donc $x_{eq} = \sqrt[3]{\frac{K}{mg\sin\alpha}}$
   On en déduit que $K = mg\sin\alpha x_{eq}^3 = 1{,}2\times10^{-5}\,\mathrm{N\cdot m^{-3}}$
3. En remplaçant K, et en notant que $\ddot{x}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$, on trouve $m\ddot{\varepsilon}(t) = mg\sin\alpha\left(\frac{x_{eq}^3}{(x_{eq}+\varepsilon(t))^3} - 1\right)$
4. $m\ddot{\varepsilon}(t) = mg\sin\alpha\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon(t)}{x_{eq}}\right)^3} - 1\right) \approx -3mg\sin\alpha\frac{\varepsilon(t)}{x_{eq}}$ donc $\ddot{\varepsilon}(t) + \omega_0^2\varepsilon(t) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{x_{eq}}} = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ soit une période propre de 0,5 s environ.

Corrigé de l'exercice M3.4 : Position d'équilibre d'une masse fixée à un ressort [***]



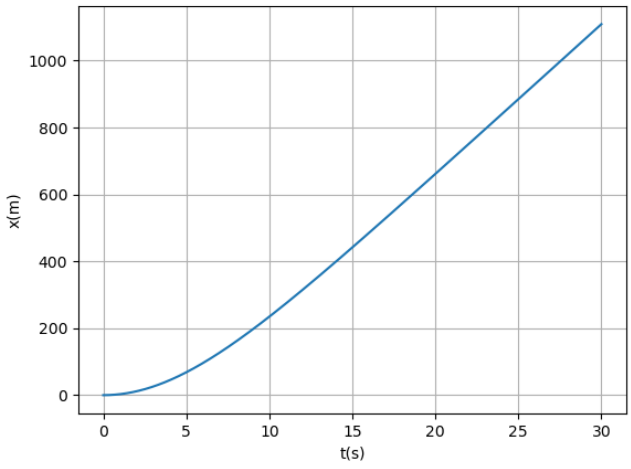
1. Si on note L le point d'attache du ressort, et M la position de la masse, alors $\overrightarrow{LM}(t) = -h\vec{e}_z + x(t)\vec{e}_x$, $LM(t) = \sqrt{h^2+x(t)^2}$, et la force du ressort sur la masse vaut $-k(\sqrt{h^2+x(t)^2} - \ell_0)\frac{-h\vec{e}_z + x(t)\vec{e}_x}{\sqrt{h^2+x(t)^2}}$.
2. Le système {masse} ne se déplace dans le référentiel du laboratoire que suivant $\vec{e}_x$, et on a $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$. Il est soumis à son poids qui est vertical, à la réaction du support qui est verticale aussi (pas de frottements ici), et à la force du ressort. Le référentiel d'étude étant galiléen, le PFD projeté suivant $\vec{e}_x$ indique que $m\ddot{x}(t) = -k(\sqrt{h^2+x(t)^2} - \ell_0)\frac{x(t)}{\sqrt{h^2+x(t)^2}}$
3. L'équilibre est atteint lorsque $\ddot{x}(t) = 0$ donc ici $-kx\frac{(\sqrt{h^2+x^2}-\ell_0)}{\sqrt{h^2+x^2}} = 0$. On voit que $x = 0$ est une solution, l'autre est $\sqrt{h^2+x^2} = \ell_0$, qui existe bien puisque $h < \ell_0$, ce qui donne $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$.

Corrigé de l'exercice M3.5 : Descente à skis [**]



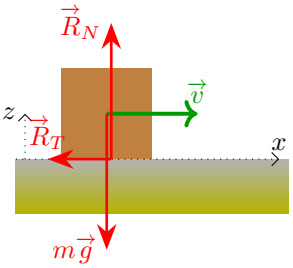
1. Le système est la skieuse S étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OS} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$.
   Bilan des forces : le poids, $mg\sin\theta\vec{e}_x - mg\cos\theta\vec{e}_y$; la réaction normale $\vec{R}_N = R_N(t)\vec{e}_y$ avec $R_N > 0$; la réaction tangentielle (ou force de frottements) $\vec{R}_T = -R_T(t)\vec{e_x}$ avec $R_T = \mu.R_N$ (car la skieuse glisse).
   Le PFD projeté sur les deux axes donne $\begin{cases} m\ddot{x}(t) & = mg\sin\theta - \mu.R_N(t) \\ 0 & = -mg\cos\theta + R_N(t) \end{cases}$ d'où on tire $R_N = mg\cos\theta$ et $m\ddot{x}(t) = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$ d'où $\dot{v}(t) = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$.
   En intégrant : $v(t) = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$; une AN montre facilement que le terme de droite est positif ; son problème, c'est qu'il tend vers l'infini : la skieuse accélère sans vitesse limite, ce qui n'est pas réaliste.
2. On ajoute une force $-k\,|\dot{x}(t)|\,\dot{x}(t)\vec{e}_x = -k\,|v(t)|\,v(t)\vec{e}_x$. Or $v(t) > 0$ par hypothèse, donc cette force vaut $-kv^2(t)\vec{e}_x$. L'équation différentielle devient alors $\dot{v}(t) + \frac{k}{m}v^2(t) = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$. Elle est non linéaire, ne cherchez pas à la résoudre analytiquement.
3. Lorsque la skieuse atteint une vitesse limite, $v(t) = v_{lim} = \text{cst}$ donc $\dot{v}(t) = 0$ donc $\frac{k}{m}v_{lim}^2 = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ d'où on tire $v_{lim} = \sqrt{\dfrac{mg}{k}(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$
   AN : on trouve $k = 0{,}194$ USI (penser à convertir la vitesse en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$).
4.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
m,g,k,mu,theta=67,9.8,0.194,0.06,40*np.pi/180
def ddxdtt(t,x,dxdt):
    return -k/m*dxdt**2+g*(np.sin(theta)-mu*np.cos(theta))
tmax=30
pas=0.01
N=int(tmax/pas)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_x=np.zeros(N+1)
tab_dxdt=np.zeros(N+1)
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    tab_x[n+1]=tab_x[n]+pas*tab_dxdt[n]
    tab_dxdt[n+1]=tab_dxdt[n]+pas*ddxdtt(tab_t[n],tab_x[n],tab_dxdt[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_x)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("x(m)")
plt.grid()
plt.show()
```



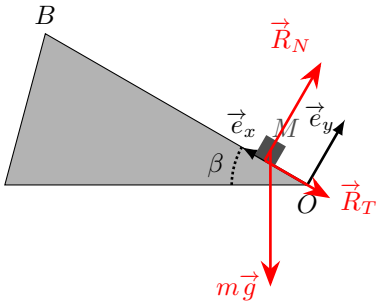
Il faut environ 27,5 s pour parcourir un kilomètre.

Corrigé de l'exercice M3.6 : Carton lancé sur un sol plan horizontal [**]



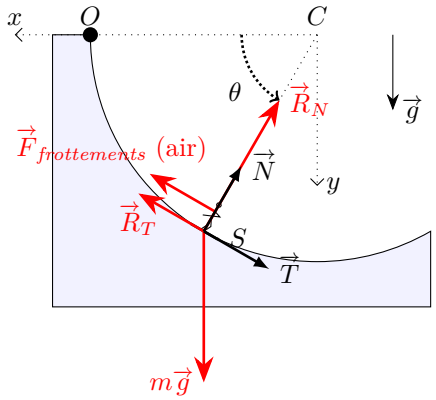
1. On étudie le carton dans le référentiel du sol supposé galiléen.
   Étude cinématique : sa vitesse vaut $v(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{a} = \dot{v}(t)\vec{e}_x$; on suppose que $v(t) > 0$.
   Forces : il y a le poids $-mg\vec{e}_z$, la réaction normale du sol $R_N(t)\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$, et la force de frottements solides $R_T(t)\vec{e}_x$ avec $R_T < 0$ (opposé au mouvement). De plus on a supposé qu'il y a mouvement, donc $|R_T| = f.|R_N|$ soit $-R_T = f.R_N$.
   Par le PFD : $m\dot{v}(t)\vec{e}_x = -mg\vec{e}_z - f.R_N(t)\vec{e}_x + R_N(t)\vec{e}_z$ ce qui donne par projection
   $$\begin{cases} m\dot{v}(t) = -f.R_N(t) \\ 0 = -mg + R_N(t) \end{cases}$$
   On en déduit que $R_N(t) = mg$ donc $m\dot{v}(t) = -f.mg$ soit $\dot{v}(t) = -f.g$.
   On intègre : $v(t) = v_0 - f.g.t$
2. Il s'arrête lorsque $v(t) = 0$ soit $t = \frac{v_0}{fg} = 1\,\text{s}$
3. Soit $x(t)$ la position du carton depuis le départ, alors par intégration $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2$.
   Il a donc parcouru $d = x\left(\frac{v_0}{fg}\right) = \frac{v_0^2}{2fg} = 1{,}5\,\text{m}$

Corrigé de l'exercice M3.7 : Glissement d'un carton sur un plan incliné [**]



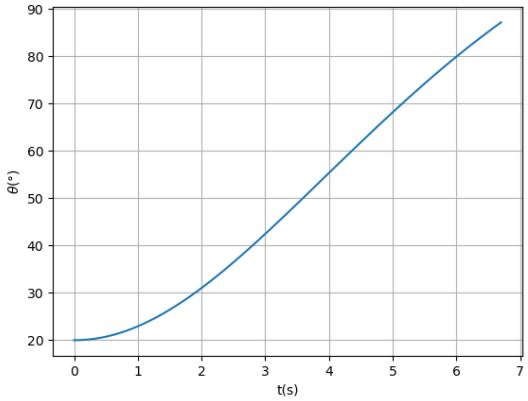
1. Comme en cours : $m\ddot{x}(t) = -mg\sin\beta$ donc après intégration : $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g\sin\beta t^2$
2. On cherche à résoudre $x(t) = OB$ soit $\frac{1}{2}g\sin\beta t^2 - v_0 t + OB = 0$. On calcule $\Delta = v_0^2 - 2g\sin\beta OB$. Il n'y a des solutions que si $\Delta > 0$ donc si $v_0 > v_1 = \sqrt{2g\sin\beta OB} = 4{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
3. On suppose qu'il y a mouvement selon $\vec{e}_x$.
   L'étude cinématique indique $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$. Les forces sont le poids $mg\,(-\sin\beta\vec{e}_x - \cos\beta\vec{e}_z)$, la réaction normale $R_N(t)\vec{e}_z$ et la force de frottements solide vaut $-f.R_N(t)\vec{e}_x$ d'après les lois de Coulomb. Le PFD projeté sur les deux axes donne alors deux équations :
   $$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -mg\sin\beta - f.R_N(t) \\ 0 = -mg\cos\beta + R_N(t) \end{cases}$$
   d'où on tire $R_N(t) = mg\cos\beta$ et $\ddot{x}(t) = -g\sin\beta - fg\cos\beta$
   Après intégration : $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g\,(\sin\beta + f\cos\beta)\,t^2$
4. $v_2 = \sqrt{2g(\sin\beta + f\cos\beta)OB}$ donc $f = \frac{v_2^2}{2g.OB.\cos\beta} - \tan\beta = 0{,}42$

Corrigé de l'exercice M3.8 : Saut à ski [***]



1. Par propriété de la longueur de l'arc : $\mathcal{s}(t) = R.\theta(t)$ donc $\vec{v} = R.\dot{\theta}(t).\vec{T}$ et $\vec{a} = R.\ddot{\theta}(t)\vec{T} + R.\dot{\theta}(t)^2\vec{N}$.
2. Le skieur S est soumis, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, à la réaction normale $R_N(t)\vec{N}$ avec $R_N > 0$, à la force de frottements solides $-R_T(t)\vec{T}$ avec $R_T > 0$ et $R_T = \mu.R_N$, à la force de frottements de l'air $-k.\|\vec{v}\|\,\vec{v} = -k.R^2\dot{\theta}(t)^2\vec{T}$, et à son poids $mg\cos\theta(t)\vec{T} - mg\sin\theta(t)\vec{N}$. Le PFD projeté selon $\vec{T}$ et $\vec{N}$ donne le système
$$\begin{cases} mR\ddot{\theta}(t) &= -\mu.R_N(t) - k.R^2\dot{\theta}(t)^2 + mg\cos\theta(t) \\ mR\dot{\theta}(t)^2 &= R_N(t) - mg\sin\theta(t) \end{cases}$$
On voit que $R_N(t) = mg\sin\theta(t) + mR\dot{\theta}(t)^2$: la réaction normale ne se contente pas de compenser le poids, elle compense aussi l'accélération selon $\vec{N}$.
3. En renvoyant $R_N(t)$ dans la première équation, on trouve
$$mR\ddot{\theta}(t) = -\left(k.R^2 + \mu mR\right)\dot{\theta}(t)^2 + mg(\cos\theta(t) - \mu\sin\theta(t))$$
4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
m,g,k,mu,R=73,9.8,0.16,0.06,85
def ddthetadtt(t,theta,dthetadt):
    return (-(k*R**2+mu*m*R)*dthetadt**2+m*g*(np.cos(theta)-mu*np.sin(theta)))/(m*R)
tmax=6.7
pas=0.01
N=int(tmax/pas)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_theta=np.zeros(N+1)
tab_dthetadt=np.zeros(N+1)
tab_theta[0]=20*np.pi/180
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    tab_theta[n+1]=tab_theta[n]+pas*tab_dthetadt[n]
    tab_dthetadt[n+1]=tab_dthetadt[n]+pas*ddthetadtt(tab_t[n],tab_theta[n],tab_dthetadt[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_theta*180/np.pi)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel(r"$\theta$(°)")
plt.grid()
plt.show()
```



Le skieur arrive au bout du tremplin au bout de 7,55 s ; à ce moment-là, on mesure $\dot{\theta} = 0{,}197\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $v = R.\dot{\theta} = 16{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 60{,}2\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice M3.9 : Masse-ressort horizontal avec frottements secs [***]

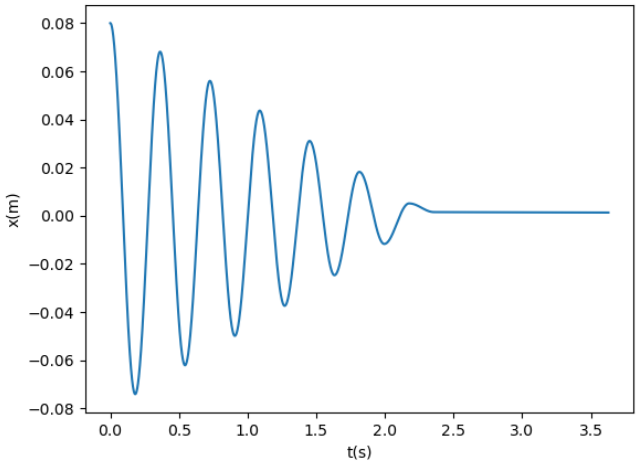
Pensez toujours à faire un dessin.

1. Système masse. Référentiel terrestre. Coordonnées cartésiennes, avec z vertical. Cinématique : $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$. Bilan des forces : le poids $m\vec{g}$, la force du ressort $-k.x(t)\vec{e}_x$, la réaction normale du support $R_N(t)\vec{e}_z$ et la force de frottements solides $R_T(t)\vec{e}_x$.
   PFD à la masse dans le ref. terrestre, projeté sur $\vec{e}_z$: $R_N(t) = mg$, constant au cours du mouvement.
2. On suppose que la masse reste immobile ; on a alors :
   — une conséquence : $\dot{x}(t) = 0$ donc d'après le PFD appliqué à la masse dans le ref. terrestre, $-k\ell_0 + R_T(t) = 0$.
   — une condition de validité : $|R_T| < f|R_N|$ donc $k\ell_0 < fmg$

   Donc la masse reste immobile si $\ell_0 < x_0 = \frac{fmg}{k}$.
   AN : $x_0 = 3{,}3\,\text{mm}$
3. Jusqu'au premier arrêt, on a $\dot{x}(t) < 0$ donc par conséquent $R_T(t) = +f|R_N(t)|\vec{e}_x = fmg\vec{e}_x$ (la force de frottements est opposée au mouvement ; il faut donc faire une hypothèse sur le sens du mouvement ; ici, elle est évidente). Le PFD appliqué à la masse dans le ref. terrestre donne maintenant $m\ddot{x}(t) + kx(t) = fmg$ soit $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = fg$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Cette équation est valide tant que la vitesse ne s'annule pas.
   La solution est de la forme $x(t) = \frac{fg}{\omega_0^2} + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec les CI $x(0) = \ell_0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On trouve alors après quelques calculs $x(t) = \frac{fg}{\omega_0^2} + \left(\ell_0 - \frac{fg}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t$. Le premier arrêt a lieu pour $\omega_0 t = \pi$ (annulation de la dérivée), et $\ell_1 = 2\frac{fg}{\omega_0^2} - \ell_0 = 2\frac{fmg}{k} - \ell_0$
4. La masse s'immobilise si $\ell_1 > -x_0$ (attention aux signes ; en fait, c'est $|\ell_1| < x_0$) : le raisonnement est le même qu'auparavant ; donc si $\ell_0 > x_1 = 3\frac{fmg}{k} = 3x_0$
5. En généralisant, on devine que $\ell_2 = 2\frac{fmg}{k} - \ell_1 = \ell_0 - 4\frac{fmg}{k}$ et que la masse s'immobilise si $\ell_0 > x_2 = 5x_0$
6. Le nombre d'allers-retours vaut 0 si $\ell_0 < x_0$, $\frac{1}{2}$ si $\ell_0 \in [x_0; 3x_0]$, 1 si $\ell_0 \in [3x_0; 5x_0]$, $\frac{3}{2}$ si $\ell_0 \in [5x_0; 7x_0]$,...soit $N_{ar} = \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{\ell_0 + x_0}{2x_0}\right\rfloor$ où $\lfloor\rfloor$ désigne la partie entière.
7.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
m,k,g,f,l0=0.1,30,10,0.1,8e-2
def acceleration(x,v,t):
    F=-k*x # force de rappel du ressort
    T=0 # force de frottements
    if v>0: # mouvement vers +x
        T=-f*m*g
    elif v<0: # mouvement vers -x
        T=+f*m*g
    else: # immobile
        T=-F # compense le ressort si possible
        if T>f*m*g:
            T=f*m*g
```

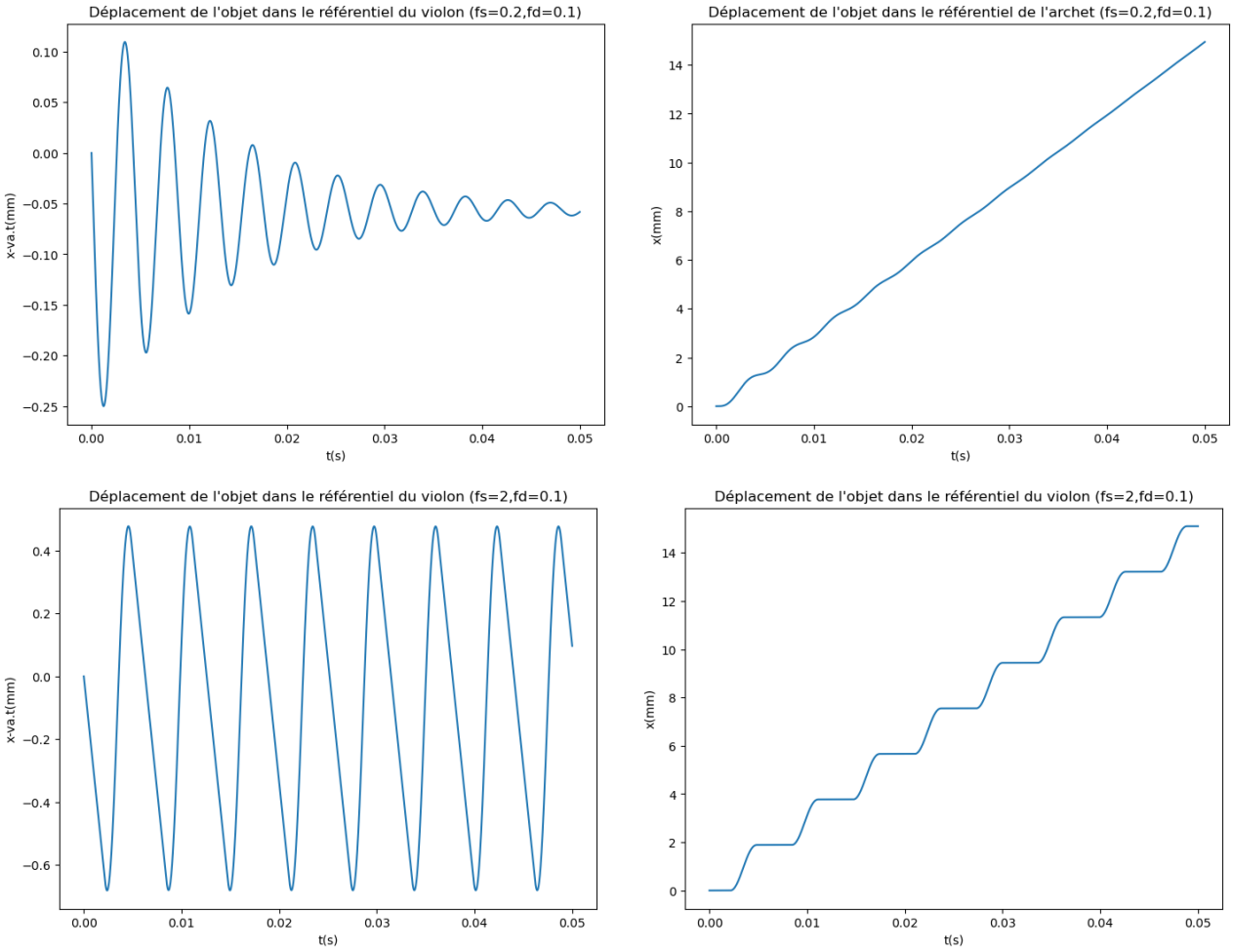
```
        if T<-f*m*g:
            T=-f*m*g
    return (F+T)/m
w0=np.sqrt(k/m)
T0=2*np.pi/w0
h=T0/1000
tmax=10*T0
N=int(tmax/h)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_x=np.zeros(N+1)
tab_v=np.zeros(N+1)
tab_x[0]=l0
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
    tab_x[n+1]=tab_x[n]+h*tab_v[n]
    tab_v[n+1]=tab_v[n]+h*acceleration(tab_x[n],tab_v[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_x)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("x(m)")
plt.show()
```



Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Le phénomène de glissé-décolé (stick-slip)

On résout l'équation $\ddot{x} = \frac{k(v_a t - x) + T - \lambda.\dot{x}}{m}$ avec $T = \begin{cases} -f_d.R \text{ si } v > 0 \\ -\sum_{\text{autres forces}} \vec{f} \text{ si } v = 0, \text{ majoré en norme par } f_s.R \\ +f_d.R \text{ si } v < 0 \end{cases}$



Avec des coefficients de frottements proches, on observe des oscillations sinusoïdales amorties lorsque $\lambda \neq 0$; mais quand le coefficient de frottements statiques augmente, on observe un seuil (ici $f_s = 0{,}7$ avec les valeurs proposées) au-delà duquel les oscillations ne s'atténuent plus : elles s'auto-entretiennent avec des phases de glissement et des phases d'adhérence (le tracé de $x(t)$ met cela en évidence). Les oscillations sont non sinusoïdales (ce qui donne un son riche en harmoniques) et leur fréquence augmente avec la vitesse de l'archet et la raideur du ressort, et diminue avec la force normale R. C'est le même phénomène qui fait crisser les craies. Si par exemple on casse la craie en deux (ce qui double sa raideur) ou si on appuie moins fort, la fréquence de vibration augmente et passe dans les ultrasons qu'on n'entend plus.

Chapitre M4

Énergie mécanique

Programme p.460

Conseils p.461

Cours p.446

- M4.A. Énergie cinétique et travaux des forces
- M4.B. Forces conservatives et énergie mécanique
- M4.C. Étude des systèmes conservatifs à 1 degré de liberté

QCMs p.462

Exercices p.465

TDs numériques p.469

M4. Énergie mécanique

Cours

Le Principe Fondamental de la Dynamique est le principe essentiel pour déterminer la dynamique des points matériels et même des systèmes. Mais son utilisation n'est pas toujours aisée. Nous allons donc établir, au cours des chapitres suivants, diverses lois tirées du PFD qui pourrons, dans certains cas, permettre d'obtenir plus simplement les équations dynamiques du système. Dans ce chapitre, nous allons travailler sur la notion d'énergie mécanique.

Pour « sentir » cette notion et son utilité, considérons deux exemples que nous avons déjà étudiés : le chute libre et l'oscillateur harmonique.

Calcul : Énergie d'un objet en chute libre

On a déjà étudié un objet de masse m en chute libre depuis l'altitude h : si on note $z(t)$ son altitude, on a trouvé que $\dot{z}(t) = -gt$ et $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. On peut donc en déduire que $t = -\frac{\dot{z}(t)}{g}$ donc $z(t) = h - \frac{1}{2}g\frac{\dot{z}(t)^2}{g}^2$; après quelques manipulations, on peut en déduire que $mgz(t) + \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 = mgh = \text{cst}$.

Calcul : Énergie d'un oscillateur harmonique

On a étudié un objet de masse m relié à un ressort de raideur k. On a vu que son allongement vaut $x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ donc $\dot{x}(t) = -X_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$. On peut alors en déduire que $x(t)^2 + \frac{m}{k}\dot{x}(t)^2 = X_0^2\left(\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) = X_0^2$ donc $\frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}kX_0^2 = \text{cst}$.

On constate donc que, dans les deux cas, il existe une grandeur de la forme $\frac{1}{2}m \times \text{vitesse}^2 + f(\text{position})$ qui est constante ou *conservée* à chaque instant du mouvement.

Cette quantité conservée nous donne des informations différentes du PFD. Il ne s'agit pas d'une équation différentielle (quoiqu'on verra qu'on peut en déduire une équation différentielle) mais d'une grandeur qui, si on la connaît au début, nous donne une relation vraie à chaque instant entre la vitesse et la position du point ; elle nous servira donc à répondre à des questions du genre : que vaut la vitesse de l'objet au sol ? ou que vaut l'élongation maximale du masse-ressort ?

Pour répondre à cela, il faut d'abord apprendre à établir cette grandeur qui est conservée.

M4.A. Énergie cinétique et travaux des forces

L'analyse préliminaire nous invite à une définition :

Définition : Énergie cinétique d'un point matériel

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \tag{M4.1}$$

où $v = \|\vec{v}\|$

Pour savoir comment évolue cette énergie cinétique, on va la dériver (en référentiel galiléen) :

Calcul : Dérivée temporelle de l'énergie cinétique

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m2\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \vec{v}\cdot\sum\vec{f} = \sum\vec{v}\cdot\vec{f} \text{ grâce au PFD qui indique que } m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{f}$$

FIGURE M4.1 : Émilie du Chatelet, qui a traduit en français les œuvres de Newton, a montré expérimentalement que l'énergie cinétique était proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse. (Crédit : Wikipedia)



On voit donc que, dans la dérivée de l'énergie cinétique, les forces interviennent sous une forme particulière, le produit scalaire de la force par la vitesse du point.

Définition : Puissance d'une force

Une force $\vec{f}$ qui s'applique sur un point M de vitesse $\vec{v}$ fournit une puissance

$$\mathcal{P}_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{v} \tag{M4.2a}$$

Une puissance s'exprime en Watts (W), c'est une énergie fournie par unité de temps : $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
On peut donc écrire la première version du Théorème de l'énergie cinétique :

Théorème de l'Énergie Cinétique (version dérivée)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{forces\ k} \mathcal{P}_{\vec{f}_k} \tag{M4.2b}$$

Remarque : Ce théorème est parfois appelé *Théorème de la Puissance Cinétique*.

Ainsi, on voit qu'une force permet de fournir de l'énergie cinétique à un point matériel (ou de lui en prendre si la puissance est négative).

Remarque : La puissance d'une force est non nulle uniquement si elle s'applique à un objet en mouvement. Pourtant, cela est contre-intuitif : si je tiens une masse de 3 kg immobile à bout de bras, je vais vite me fatiguer, alors que la puissance à fournir est censée être nulle. Pourquoi ? Parce que nos muscles ne sont jamais immobiles. Quand on tient quelque chose en l'air, nos muscles se contractent sans arrêt plus ou moins, selon un processus commandé par le cerveau, comme un système asservi. Du coup, notre main tremble toujours un peu, elle bouge donc, et nos muscles fournissent donc une puissance mécanique non nulle.

Si maintenant on intègre l'équation (M4.2b) entre deux instants t_1 et t_2, on va obtenir à droite l'intégrale de la puissance fournie, qui est l'énergie fournie ; en physique, une énergie échangée porte un nom : c'est un *travail*.

Définition : Travail d'une force

Une force $\vec{f}$ qui s'applique sur un point M fournit entre les instants t_1 et t_2 un travail

$$W_{\vec{f}}^{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\vec{f}}.\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \tag{M4.3a}$$

Démonstration

La première intégrale est une définition ; ensuite on écrit que $\mathcal{P}_{\vec{f}}.\mathrm{d}t = \vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t$ or $\vec{v}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ est égal au petit déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ qu'on a déjà vu en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Pour rappel, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x.\vec{e}_x + \mathrm{d}y.\vec{e}_y + \mathrm{d}z.\vec{e}_z$ en coordonnées cartésiennes.

Théorème de l'Énergie Cinétique (version intégrale)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces qui s'exercent sur ce point entre ces deux instants.

$$\Delta^{t_1\to t_2}E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_{\text{forces } k} W_{\vec{f}_k}^{t_1\to t_2} \qquad \text{(M4.3b)}$$

Démonstration

Évidente en intégrant (M4.2b) entre t_1 et t_2 : le terme de droite fait apparaître des travaux, tandis qu'à gauche, $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = [E_c]_{t_1}^{t_2} = E_c(t_2) - E_c(t_1)$. La notation mathématique $[E_c]_{t_1}^{t_2}$ est traduite par $\Delta^{t_1\to t_2}E_c$ en physique, et se lit « variation de E_c entre t_1 et t_2. »

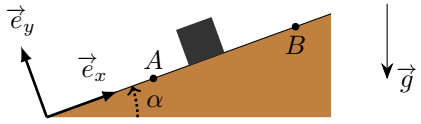
Remarque : Si on travaille entre t_1 et $t_1 + \mathrm{d}t$ avec $\mathrm{d}t$ petit, on peut établir le TEC en version infinitésimale. À gauche, la variation d'E_c est petite, on marque cela en remplaçant le Δ par un d ; à droite, sur un temps court, on peut considérer que ce qui est dans l'intégrale est constant, et on peut enlever l'intégrale. On obtient alors

$$\mathrm{d}E_c = \sum_{\text{forces } k} \delta W_{\vec{f}_k} = \sum \vec{f}_k\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

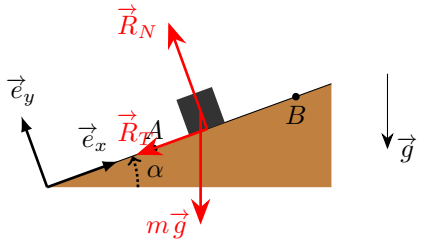
où $\mathrm{d}E_c$ est la petite variation d'énergie et $\delta W_{\vec{f}_k} = \vec{f}_k\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le travail infinitésimal de la force k (le δ signifie que ce travail n'est défini qu'entre 2 points, et ne peut pas être vu comme la variation d'une quantité définie à l'instant initial et à l'instant final). Cette expression sert assez peu, sauf pour certaines démonstrations.

Exemple : Carton sur un plan incliné

On considère un carton de masse m posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 12°$ par rapport à l'horizontale. On le lance depuis un point A avec une vitesse initiale $v_0 = 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ selon $\vec{e}_x$; il glisse sur le sol en étant soumis à son poids et à la réaction du sol sur lequel il frotte avec un coefficient $f = 0,19$, ce qui donne (on l'admettra) une force de frottements $-fmg\cos\alpha\,\vec{e}_x$. Il s'arrête en un point B ; on note $d = AB$.



1. Exprimez le travail de toutes les forces s'appliquant sur le carton entre A et B.
2. En appliquant le TEC, déterminez d.
3. Le carton redescend jusqu'au point A ; en appliquant de nouveau de TEC, calculer la vitesse v_1 en A.



1. Le carton se déplace selon $\vec{e}_x$, son petit déplacement vaut donc $\mathrm{d}x.\vec{e}_x$. Il est soumis aux actions suivantes :
   - la réaction normale $\vec{R}_N$ du sol : $W_{\vec{R}_N}^{A\to B} = \int_A^B R_N\vec{e}_y\cdot\mathrm{d}x\vec{e}_x = 0$
   - la force de frottements du sol : $W_{\vec{R}_T}^{A\to B} = \int_A^B -fmg\cos\alpha\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}x\vec{e}_x = \int_{x_A}^{x_B} -fmg\cos\alpha\mathrm{d}x = -fmg\cos\alpha.(x_B - x_A) = -fmgd\cos\alpha$

— le poids : $W_{m\vec{g}}^{A\to B} = \int_A^B mg.(-\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)\cdot \mathrm{d}x\,\vec{e}_x = \int_{x_A}^{x_B} -mg\sin\alpha \mathrm{d}x = -mgd\sin\alpha$

2. D'après le TEC appliqué entre A et B au carton, dans le référentiel terrestre galiléen,

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{\vec{R}_N}^{A\to B} + W_{\vec{R}_T}^{A\to B} + W_{m\vec{g}}^{A\to B}$$
$$\text{donc } 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(f\cos\alpha + \sin\alpha)m.g.d$$
$$\text{donc } d = \frac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha+\sin\alpha)} = 1{,}3\,\mathrm{m}$$

3. Au retour, la force de frottements change de sens. On a alors par le TEC :

$$E_c(A) - E_c(B) = W_{\vec{R}_N}^{B\to A} + W_{\vec{R}_T}^{B\to A} + W_{m\vec{g}}^{B\to A}$$
$$\text{donc } \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = 0 - fmgd\cos\alpha + mgd\sin\alpha$$
$$\text{donc } v_1 = \sqrt{2gd(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = 0{,}76\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

M4.B. Forces conservatives et énergie mécanique

L'utilisation du TEC en version intégrée oblige à calculer des intégrales parfois compliquées, souvent les mêmes. Ce théorème ne sera donc que peu utile tant qu'on n'aura pas trouvé un moyen de simplifier son terme de droite. Pour certaines forces, c'est possible.

B.1. Forces conservatives

Définition : Force conservative

Une force est conservative si son travail n'est pas toujours nul, et si, lorsque le point sur lequel elle s'applique se déplace d'un point A à un point B, ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, ni du temps mis, mais uniquement des *positions* de A et de B.

Remarque : Cette propriété nécessite que la force ne dépende que de la *position* du point ; en particulier elle ne doit dépendre ni de la vitesse, ni directement du temps. Cela ne veut pas dire qu'elle ne varie pas au cours du temps, mais cette variation est due au déplacement du point au cours du temps.

Propriété : Travail le long d'un chemin fermé

Le travail d'une force conservative le long d'un chemin fermé est nul.

Démonstration

Soit $\vec{f}$ une force conservative, et A le point de départ du chemin fermé. Pour calculer $W_{\vec{f}}^{A\to A}$, on peut choisir n'importe quel chemin ; entre autres, le chemin qui ne bouge pas. Le long de ce chemin, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ donc le travail est nul.

Propriété : Relation de Chasles

Les travaux des forces conservatives vérifient la relation de Chasles : $W_{\vec{f}}^{A\to B} + W_{\vec{f}}^{B\to C} = W_{\vec{f}}^{A\to C}$

Démonstration

Évident, puisque le travail est défini par une intégrale.

Une conséquence évidente de ces deux propriétés, c'est que si $\vec{f}$ est conservative, alors $W_{\vec{f}}^{A\to B} = -W_{\vec{f}}^{B\to A}$.

Définition : Énergie potentielle associée à une force conservative

Soit $\vec{f}$ une force conservative. On choisit un point O de référence. Alors pour tout point M de l'espace, on définit l'énergie potentielle associée à $\vec{f}$ en M par

$$E_{p,\vec{f}}(M) = -W_{\vec{f}}^{O\to M} \tag{M4.4a}$$

Remarque : L'énergie potentielle est définie en tout point ; on dit que c'est un *champ*. Cette énergie dépend de la force, mais aussi du point d'origine choisi. Si on prend une autre origine O', alors $W_{\vec{f}}^{O'\to M} = W_{\vec{f}}^{O'\to O} + W_{\vec{f}}^{O\to M}$, ce qui montre que toutes les énergies potentielles seront décalées d'une valeur constante. On dit parfois que « les énergies potentielles sont définies à une constante près. » On peut dire aussi qu'une valeur d'énergie potentielle n'a aucun sens physique, ce sont les différences d'énergie potentielle qui sont importantes.

Propriété : Travail d'une force conservative

Le travail d'une force conservative entre deux point A et B vaut

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = E_{p,\vec{f}}(A) - E_{p,\vec{f}}(B) = -\Delta^{A\to B} E_{p,\vec{f}} \tag{M4.4b}$$

Démonstration

Par la relation de Chasles : $W_{\vec{f}}^{A\to B} = -W_{\vec{f}}^{O\to A} + W_{\vec{f}}^{O\to B} = E_{p,\vec{f}}(A) - E_{p,\vec{f}}(B)$

Il faut maintenant illustrer cette définition sur des exemples concrets. Il y a pour le moment deux cas à connaître :

Énergie potentielle de pesanteur

Le poids est une force conservative, et son énergie potentielle (de pesanteur) vaut

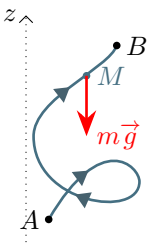
$$E_{p,p} = mg \times \text{altitude} + \text{cst} \tag{M4.5}$$

l'altitude étant comptée positivement vers le haut.

Démonstration

On va travailler avec un axe $\vec{e}_z$ orienté vers le haut ; z représente donc l'altitude du point M étudié. Calculons alors le travail du poids lorsque le point M se déplace de A à B :

$$\begin{aligned} W_{poids}^{A\to B} &= \int_A^B m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B (-mg\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}x.\vec{e}_x + \mathrm{d}y.\vec{e}_y + \mathrm{d}z.\vec{e}_z) \\ &= \int_A^B -mg\mathrm{d}z = -\Delta^{A\to B}(mgz) = -mgz(B) + mgz(A) \end{aligned}$$



On voit donc bien que le travail ne dépend que de l'altitude des points A et B et peut s'écrire $W = -\Delta E_p$ avec $E_p = mgz$. La constante éventuelle indique qu'on peut choisir l'origine des altitudes là où on veut.

Remarque : On rappelle que la notation $\Delta^{A\to B} f$ en physique correspond à la notation $[f]_A^B$ en maths : c'est $f(B) - f(A)$.

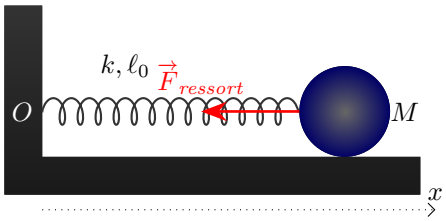
Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est conservative, et son énergie potentielle (élastique) vaut

$$E_{p,él} = \frac{1}{2} \times \text{raideur} \times \text{allongement}^2 \tag{M4.6}$$

Démonstration

On va effectuer la démonstration pour un mouvement 1D seulement ; la démonstration en 3D nécessite les coordonnées sphériques.



Considérons un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, placé selon l'axe $\vec{e}_x$, fixé à un bout à l'origine O et à l'autre bout à un point M mobile repéré par sa position x qui est donc aussi la longueur du ressort. Alors, lorsque le point M se déplace de A à B :

$$\begin{aligned} W_{ressort}^{A\to B} &= \int_A^B -k(x-\ell_0)\vec{e}_x \cdot (\mathrm{d}x.\vec{e}_x) \\ &= \int_A^B -k(x-\ell_0)\mathrm{d}x = -\Delta^{A\to B}\left(\frac{1}{2}kx^2 - kx\ell_0\right) \end{aligned}$$

donc la force est conservative et son énergie potentielle vaut $\frac{1}{2}kx^2 - kx\ell_0 + \text{cst}$.
Par convention, on choisit une énergie potentielle nulle lorsque $x = \ell_0$, ce qui donne cst $= \frac{1}{2}k\ell_0^2$ et finalement $E_p = \frac{1}{2}k\,(x-\ell_0)^2$.

Nous avons donc trouvé deux exemples de forces conservatives, et établi leur énergie potentielle. Parfois, nous rencontrerons de nouvelles forces, et il sera possible, par la même méthode, d'établir l'expression de leur énergie potentielle. Mais il existe un autre cas : parfois on connaît l'énergie potentielle ; comment alors en déduire la force dont dérive cette énergie ? On va expliciter cette relation, d'abord en 1D, puis en 3D dans le cas général.

Propriété : Relation entre force et énergie potentielle en 1D

Si une force $\vec{f}(x)$ selon la direction $\vec{e}_x$ est conservative et si on connaît son énergie potentielle $E_p(x)$, alors

$$\vec{f}(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x \qquad \text{(M4.7a)}$$

Démonstration

Pour cette démonstration, on va utiliser le travail infinitésimal lorsque le point M sur lequel s'applique la force se déplace de $\mathrm{d}x$: il va de x à $x+\mathrm{d}x$. On sait par définition que le travail de la force vaut alors $\delta W = \vec{f}\cdot(\mathrm{d}x.\vec{e}_x) = f(x).\mathrm{d}x$ en notant $\vec{f} = f(x).\vec{e}_x$. D'après la propriété (M4.4b), on peut aussi écrire $\delta W = E_p(x) - E_p(x+\mathrm{d}x)$. Or par un développement limité à l'ordre 1, $E_p(x+\mathrm{d}x) = E_p(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$, ce qui donne $\delta W = -\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$.
En mettant ensemble les deux expressions, on obtient $f(x).\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$ soit $f(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$.

Pour passer à la 3D, il faut introduire la notion de *dérivées partielles*.

Un peu de maths : Dérivées partielles

Soit $f(x,y,z)$ une fonction de plusieurs variables. On définit la dérivée partielle de f par rapport à la variable x (ou y, ou z), notée avec des « d ronds » : $\frac{\partial f}{\partial x}$, comme la dérivée de la fonction f par rapport à x si on maintient les autres variables constantes.
Par exemple, si $f(x,y,z) = x.y + 2z + \frac{z}{x}$, alors $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y - \frac{z}{x^2}$; de même $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x$ et $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2 + \frac{1}{x}$.

Définition : Gradient d'un champ scalaire

Soit $\mathcal{C}(M)$ un champ scalaire [a]. On lui associe un champ vectoriel appelé « gradient de $\mathcal{C}$ » calculé en coordonnées cartésiennes par la formule

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{C} = \frac{\partial \mathcal{C}(M)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{C}(M)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{C}(M)}{\partial z}\vec{e}_z$$

En tout point, le gradient est dirigé vers les zones où $\mathcal{C}$ est maximal.

a. C'est-à-dire une fonction de la position M qui a pour valeur un nombre, par opposition à un vecteur.

Par exemple, la température est un champ scalaire ; on parle d'un « gradient de température » lorsqu'elle est plus élevée en un point qu'en un autre. Le gradient de température est un champ vectoriel qui, en tout point, indique la direction du chaud.

Propriété : Relation entre force et énergie potentielle

Si une force $\vec{f}$ est conservative et si on connaît son énergie potentielle $E_p(x,y,z)$ en tout point, alors

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -\left(\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z\right) \quad \text{(M4.7b)}$$

Démonstration

On travaille encore sur un petit déplacement. Le travail vaut $\delta W = \vec{f}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Notons $\vec{f} = f_x.\vec{e}_x + f_y.\vec{e}_y + f_z.\vec{e}_z$. Alors $\delta W = (f_x.\vec{e}_x + f_y.\vec{e}_y + f_z.\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}x.\vec{e}_x + \mathrm{d}y.\vec{e}_y + \mathrm{d}z.\vec{e}_z) = f_x.\mathrm{d}x + f_y.\mathrm{d}y + f_z.\mathrm{d}z$.
On peut aussi écrire $\delta W = E_p(x,y,z) - E_p(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ en notant (x,y,z) les coordonnées de départ. Pour calculer $E_p(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$, on va admettre la généralisation de la formule de développement limité à l'ordre 1, pour les fonctions à plusieurs variables :

$$E_p(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) = E_p(x,y,z) + \mathrm{d}x.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x} + \mathrm{d}y.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y} + \mathrm{d}z.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}$$

(on somme les trois DL sur les trois variables, en utilisant les dérivées partielles). On en déduit que $\delta W = -\mathrm{d}x.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x} - \mathrm{d}y.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y} - \mathrm{d}z.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}$.
En identifiant les deux expressions, $f_x.\mathrm{d}x + f_y.\mathrm{d}y + f_z.\mathrm{d}z = -\mathrm{d}x.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x} - \mathrm{d}y.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y} - \mathrm{d}z.\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}$ pour tout $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. On a donc facilement $f_x = -\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}$; $f_y = -\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}$; $f_z = -\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}$.

B.2. Énergie mécanique

Définition : Classification des forces

On classe les forces en 3 catégories :

- les *forces conservatives*, qui dérivent d'une énergie potentielle
- les *forces qui ne travaillent jamais*, car elles sont toujours orthogonales au déplacement
- les autres forces, qu'on appelle *forces non conservatives*

Le tableau M4.1 rassemble quelques forces que nous avons déjà vues et donne leur caractère ; certaines énergies potentielles sont affirmées sans que nous les ayons démontrées pour le moment.

Définition : Énergie mécanique

On définit l'énergie mécanique d'un point comme la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles associées à toutes les forces conservatives qui s'appliquent sur lui :

$$E_m = E_c + \sum_{\substack{\text{forces } k \\ \text{conservatives}}} E_{p,\vec{f}_k} \quad \text{(M4.8)}$$

Théorème de l'Énergie Mécanique (version intégrale)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'exercent sur ce point entre ces deux instants.

$$\Delta^{t_1\to t_2}E_m = E_m(t_2) - E_m(t_1) = \sum_{\substack{\text{forces } k \text{ non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_k}^{t_1\to t_2} \quad \text{(M4.9)}$$

Démonstration

Par le TEC :

$$E_c(t_2)-E_c(t_1)=\sum_{\text{forces } k} W_{\vec{f}_k}^{t_1\to t_2}=\sum_{\substack{\text{forces } k'\\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_{k'}}^{t_1\to t_2}+\sum_{\substack{\text{forces } k''\ \text{ne}\\ \text{travaillant}\\ \text{pas}}} W_{\vec{f}_{k''}}^{t_1\to t_2}+\sum_{\substack{\text{forces } k'''\ \text{non}\\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_{k'''}}^{t_1\to t_2}$$

$$=\sum_{\substack{\text{forces } k'\\ \text{conservatives}}}\left(E_{p,\vec{f}_{k'}}(t_1)-E_{p,\vec{f}_{k'}}(t_2)\right)+0+\sum_{\substack{\text{forces } k'''\ \text{non}\\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_{k'''}}^{t_1\to t_2}$$

$$\text{donc } E_c(t_2)-E_c(t_1)+\sum_{\substack{\text{forces } k'\\ \text{conservatives}}}\left(E_{p,\vec{f}_{k'}}(t_2)-E_{p,\vec{f}_{k'}}(t_1)\right)=\sum_{\substack{\text{forces } k'''\ \text{non}\\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_{k'''}}^{t_1\to t_2}$$

$$\text{d'où } E_m(t_2)-E_m(t_1)=\sum_{\substack{\text{forces } k'''\ \text{non}\\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}_{k'''}}^{t_1\to t_2}$$

Théorème de l'Énergie Mécanique (version dérivée)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces non conservatives qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}=\sum_{\substack{\text{forces } k\ \text{non}\\ \text{conservatives}}}\mathcal{P}_{\vec{f}_k} \qquad \text{(M4.10)}$$

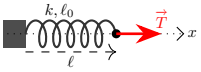
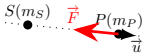
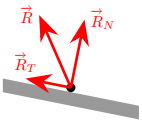
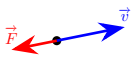
Démonstration

Appliquons le TEM entre t et $t+\mathrm{d}t$: $E_m(t+\mathrm{d}t)-E_m(t)=\sum_{\substack{\text{forces } k\ \text{non}\\ \text{conservatives}}}\delta W_{\vec{f}}^{0\to t}=\sum_{\substack{\text{forces}\ \text{non}\\ \text{conservatives}}}\mathcal{P}_{\vec{f}_k}.\mathrm{d}t$ donc en divisant par $\mathrm{d}t$ on obtient bien $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}-0=\sum_{\substack{\text{forces } k\ \text{non}\\ \text{conservatives}}}\mathcal{P}_{\vec{f}_k}$

Remarque : Ce théorème est parfois appelé *Théorème de la Puissance Mécanique*.

Remarque : Il ne faut pas mélanger le TEC et le TEM : si on utilise l'**énergie cinétique** ; on tient compte de **toutes les forces** ; si on utilise l'**énergie mécanique**, on ne tient compte que des **forces non conservatives**.

TABLEAU M4.1 : Aspect énergétique de différentes forces.

Force	Aspect vectoriel	Aspect énergétique
Poids 	$\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{e}_z$	Conservative $E_{p,p}=mgz+\text{cst}$
Tension d'un ressort 	$\vec{T}=-k(\ell-\ell_0)\vec{e}_x$	Conservative $E_{p,él}=\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$
Gravitation 	$\vec{F}=-\frac{Gm_Sm_P}{SP^2}\vec{u}$	Conservative $E_{pg}=-\frac{Gm_Sm_P}{SP}$
Réaction d'un support 	$\vec{R}=\vec{R}_N+\vec{R}_T$ $\vec{R}_T=\vec{0}$ en l'absence de frottements	$\vec{R}_N$ ne travaille jamais. $\mathcal{P}=0$ s'il n'y a pas de frottements **ou** s'il n'y a pas de mouvement de glissement $\mathcal{P}<0$ sinon : force non conservative
Frottements fluides 	$\vec{F}=-k\vec{v}$ à basse vitesse $\vec{F}=-k\Vert\vec{v}\Vert\vec{v}$ à grande vitesse	Force non conservative : $\mathcal{P}=-k\Vert\vec{v}\Vert^2\leq 0$ Force non conservative : $\mathcal{P}=-k\Vert\vec{v}\Vert^3\leq 0$
Moteur		Force non conservative : $\mathcal{P}>0$

Exemple : Tramway en montée

Un tramway de masse $m = 57\,\text{t}$ met $12\,\text{s}$ pour aller d'un arrêt à l'arrêt suivant situé $7\,\text{m}$ plus haut.

1. Quelle est sa vitesse ascentionnelle $\dot{z}$? (en notant z son altitude)
2. Calculer la puissance fournie par les moteurs si on néglige les frottements et s'il roule à vitesse constante.

1. $\dot{z} = \frac{7}{12} = 0{,}58\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
2. Le tramway est soumis à son poids d'énergie potentielle $mgz(t)$ et à la force motrice de puissance P inconnue. Le théorème de l'énergie mécanique indique donc que $\frac{\mathrm{d}E_m(t)}{\mathrm{d}t} = P$ donc $\frac{\mathrm{d}E_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(mgz(t))}{\mathrm{d}t} = P$.
   Or le tramway roule à vitesse constante, donc $\frac{\mathrm{d}E_c(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $P = mg\dot{z}(t) = 332\,\text{kW}$

B.3. Systèmes conservatifs

Ces théorèmes se simplifient si aucune force non conservative n'est présente :

Définition : Système conservatif

Un système matériel est conservatif si aucune force non conservative ne s'exerce sur lui.

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est constante au cours du temps.

Démonstration

Évidente en appliquant le TEM, puisque le terme de droite est nul.

Pour un système conservatif, la conservation de l'énergie mécanique permet, si on connaît les conditions initiales :

— soit de calculer la vitesse en un point de position connue

— soit de trouver la position correspondant à une vitesse particulière (souvent nulle)

Exemple : Chute libre

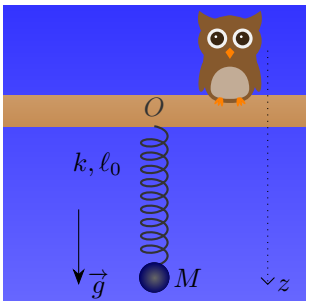
Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h. Il tombe et on néglige les frottements de l'air. Exprimer sa vitesse au sol ; AN pour $h = 40\,\text{m}$.

On étudie l'objet de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids, qui est conservatif, d'énergie potentielle $E_{p,p} = mgz(t)$ avec z l'altitude. Donc le système est conservatif, et $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t) = \text{cst}$.
Au début : $E_m = \frac{1}{2}m0^2 + mgh$. Au sol : $E_m = \frac{1}{2}mv_{sol}^2 + mg0$.
Donc $mgh = \frac{1}{2}mv_{sol}^2$ d'où on tire $v_{sol} = \sqrt{2gh} = 28\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Exemple : Élongation d'un ressort

Un objet de masse $m = 500\,\text{g}$ est suspendu à une branche par un ressort de raideur $k = 150\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 12\,\text{cm}$. On note son altitude par z comptée **vers le bas** à partir de la branche (point O).

1. Montrer que ce système est conservatif, et exprimer son énergie mécanique en fonction de z et $\dot{z}$.
2. On le lance depuis $z = \ell_0$ avec une vitesse initiale $v_0 = 50\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer son allongement maximal.



1. — On étudie le système {point M}.
   — On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen

— Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$ d'où $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2$
— Bilan des actions : le point est soumis à son poids qui est conservatif d'énergie potentielle $E_{p,p} = -mgz(t)$ (attention au $-$, car z est compté ici vers le bas) et à la force du ressort qui est conservative d'énergie potentielle $E_{p,él} = \frac{1}{2}k(z(t) - \ell_0)^2$. On néglige les frottements (l'énoncé n'en parle pas).
— Le système est donc conservatif, et son énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 - mgz(t) + \frac{1}{2}k(z(t) - \ell_0)^2 = \text{cst}$

2. Au départ : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 + 0$.
À allongement maximum, la vitesse est nulle donc $E_m = 0 - mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 = -mg(\ell_0 + x) + \frac{1}{2}kx^2$ en notant $x = z_{max} - \ell_0$ l'allongement maximal.
Donc $\frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 = -mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 = -mg(\ell_0 + x) + \frac{1}{2}kx^2$ soit $\frac{1}{2}kx^2 - mgx - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$.
On trouve deux racines, on garde la positive : $x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + mkv_0^2}}{k} = 7{,}7\,\text{cm}$ soit $z_{max} = 19{,}7\,\text{cm}$

M4.C. Étude des systèmes conservatifs à 1 degré de liberté

Nous allons voir dans cette section que, pour un système conservatif décrit par une seule variable, la connaissance de l'énergie potentielle suffit à tout connaître du mouvement de ce système.

Pour simplifier la description, nous supposerons dans la suite que le point matériel étudié, de masse m, se déplace selon l'axe x, et est un système conservatif ; supposons aussi qu'on connaisse son énergie potentielle $E_p(x)$. Alors sa vitesse vaut $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$, donc $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$. On en déduit que

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + E_p(x(t)) = \text{cst} \tag{M4.11}$$

À partir de cette relation, on va établir plusieurs résultats.

C.1. Description générale du mouvement

Propriété : Barrière d'énergie potentielle

Un système conservatif ne peut jamais aller dans une zone où l'énergie potentielle est supérieure à son énergie mécanique : on appelle cela une *barrière d'énergie potentielle* ou *barrière de potentiel*.
Si les conditions initiales placent le système entre deux barrières de potentiel, son mouvement sera borné et périodique ; sinon, il sera non borné.

Démonstration

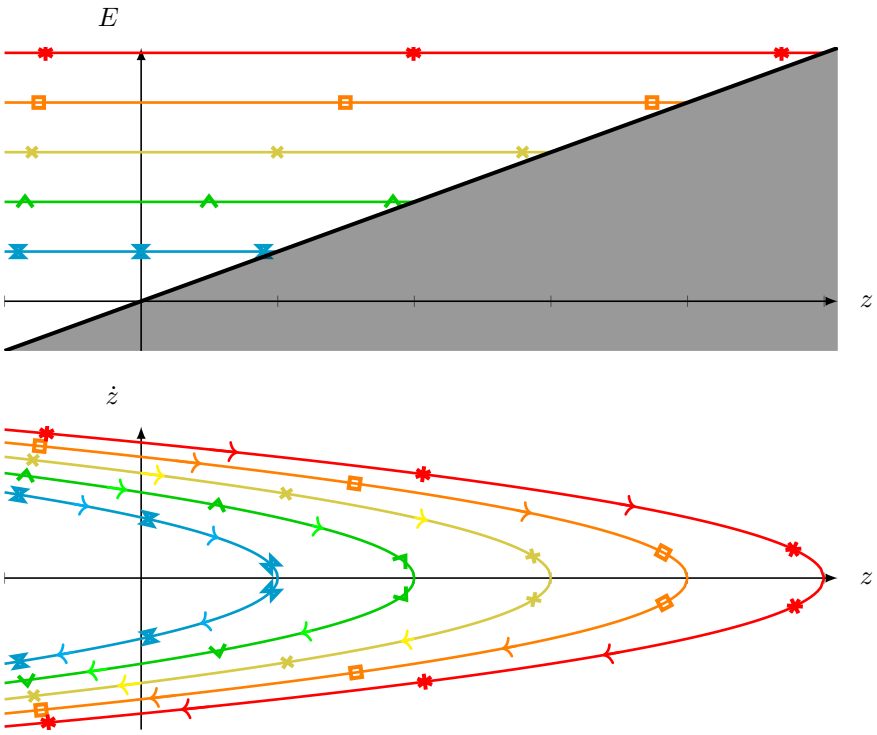
On sait que $E_m = E_c(t) + E_p(t)$ à chaque instant. Or $E_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 \geq 0$ donc $E_m \geq E_p(t)$ à chaque instant.
Le système ne peut donc pas atteindre de zone telles que $E_m < E_p$.

La situation est illustrée sur les figures M4.2 à M4.5 :

— sur la figure M4.2 est représentée la chute libre : l'énergie potentielle du point est mgz avec z l'altitude ; c'est une droite. Les traits horizontaux représentent différentes énergies mécaniques possibles (ce sont les conditions initiales qui déterminent la valeur de E_m). Pour chaque valeur de E_m, il apparaît une barrière de potentiel du côté des z grands : le système a une altitude maximale z_{max} qu'il peut atteindre, qui vérifie l'équation $E_p(z_{max}) = E_m$; pour cette valeur de z, l'énergie cinétique est nulle, donc la vitesse est nulle. Le mouvement est, par contre, non borné vers le bas, car dans ce modèle-là on ne tient pas compte du sol, et on considère qu'on peut descendre indéfiniment.
En-dessous du schéma d'énergie potentielle est représenté le portrait de phase, sur lequel on observe des trajectoires bornées à droite mais pas à gauche.

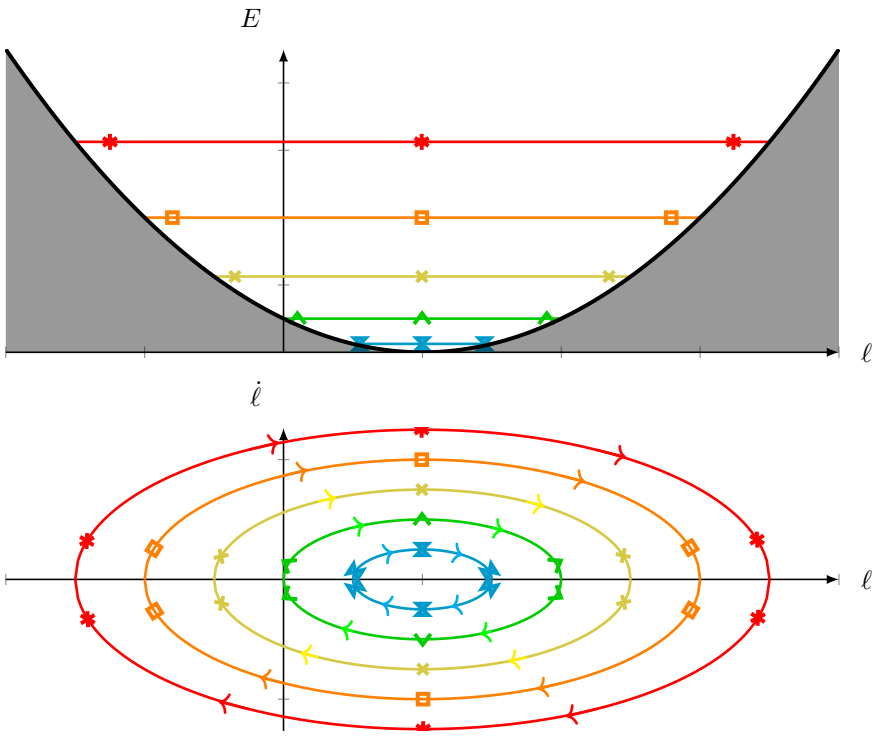
— sur la figure M4.3 est représentée un masse-ressort horizontal : l'énergie potentielle est $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ avec ℓ la longueur, ce qui donne un profil en parabole qui tend vers l'infini des deux côtés (bien évidemment, dans le cas d'un véritable ressort, ce modèle a des limites). Quelle que soit l'énergie mécanique initiale, le mouvement est

FIGURE M4.2 : Chute libre.



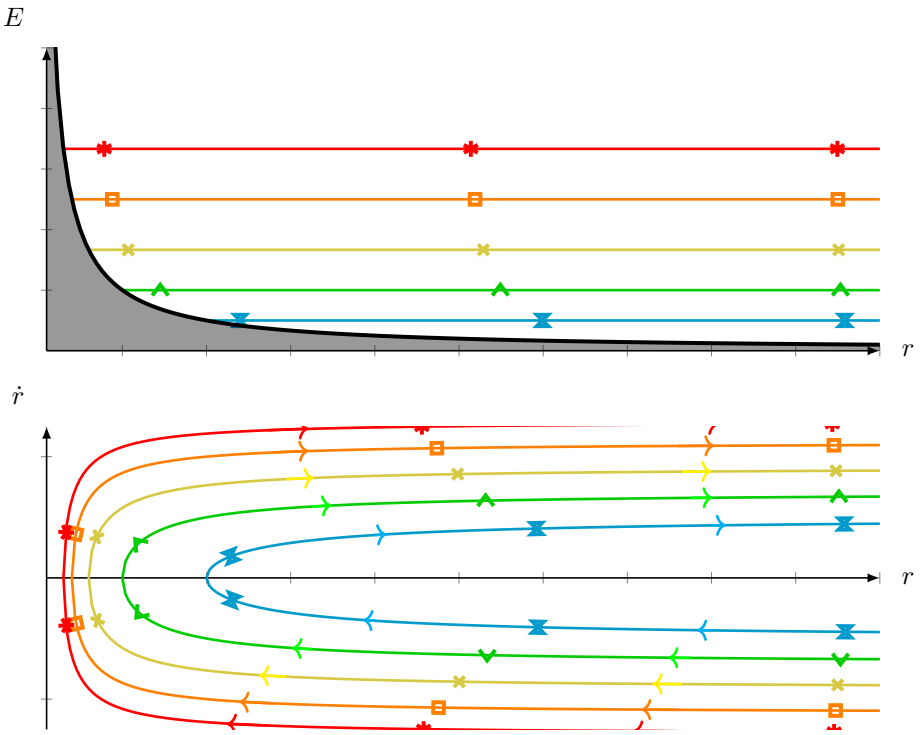
borné entre deux barrières de potentiel, et oscille périodiquement autour de la position $\ell = \ell_0$. Les trajectoires de phase sont alors refermées sur elle-mêmes.

FIGURE M4.3 : Masse-ressort (potentiel harmonique).



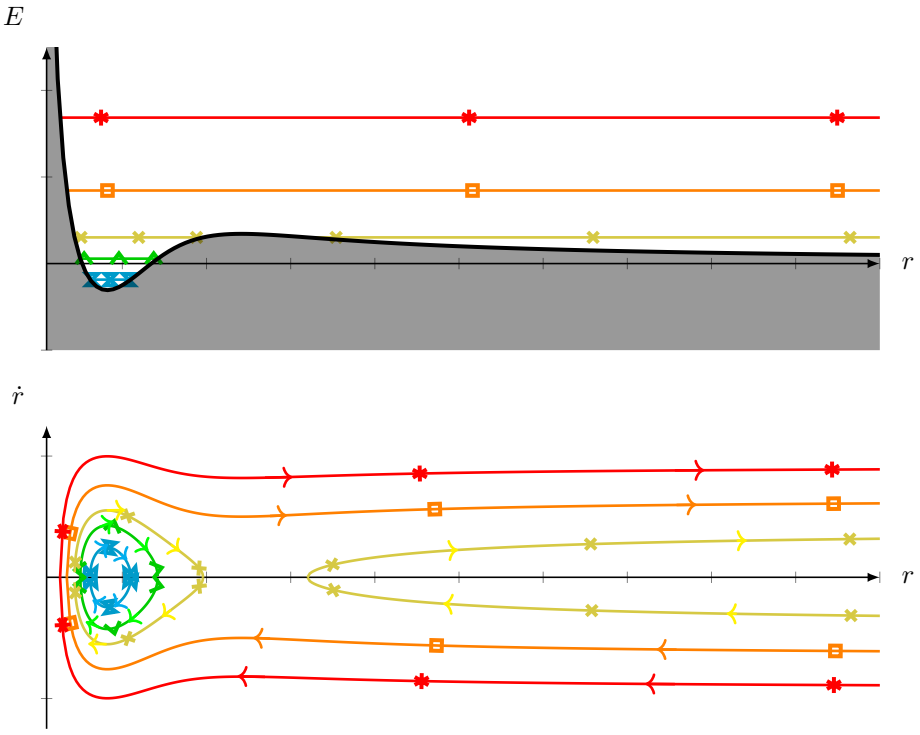
— sur la figure M4.4 est représentée l'énergie potentielle d'un électron qui s'approche d'un autre électron ; on verra plus tard que l'énergie potentielle électrique vaut alors $\frac{K}{r}$ avec K une constante et r la distance entre les électrons. Le mouvement est alors borné inférieurement : il existe une distance minimale d'approche entre les électrons.

FIGURE M4.4 : Répulsion entre deux électrons.



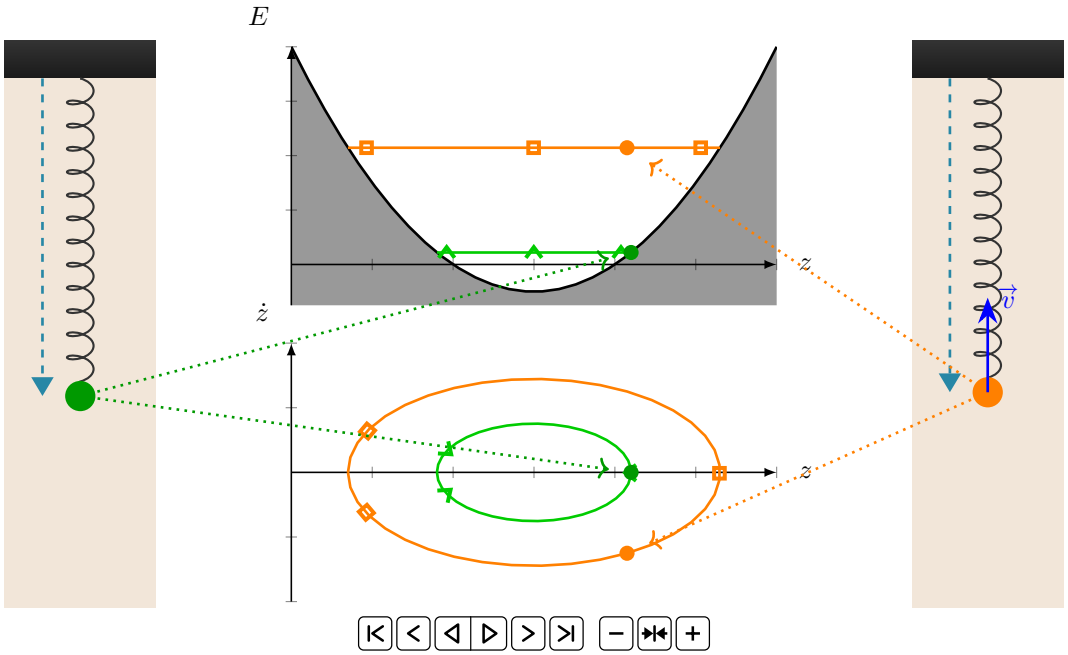
— sur la figure M4.5 est représentée la même chose mais pour deux protons : en plus de la force électrique qui les repousse, les protons ont à très courte distance une force attractive, l'interaction forte. La figure illustre le potentiel modélisé par la formule de Saxon-Woods. On constate que le type de mouvement (borné ou pas) dépend de l'énergie et des conditions initiales : pour une forte énergie, le mouvement est non borné ; pour une faible énergie, il est borné ; et pour une énergie intermédiaire (en jaune) les deux cas sont possibles. Ce modèle permet d'expliquer de nombreux comportements (fusion nucléaire, radioactivité,...) de façon simple.

FIGURE M4.5 : Répulsion entre deux protons.



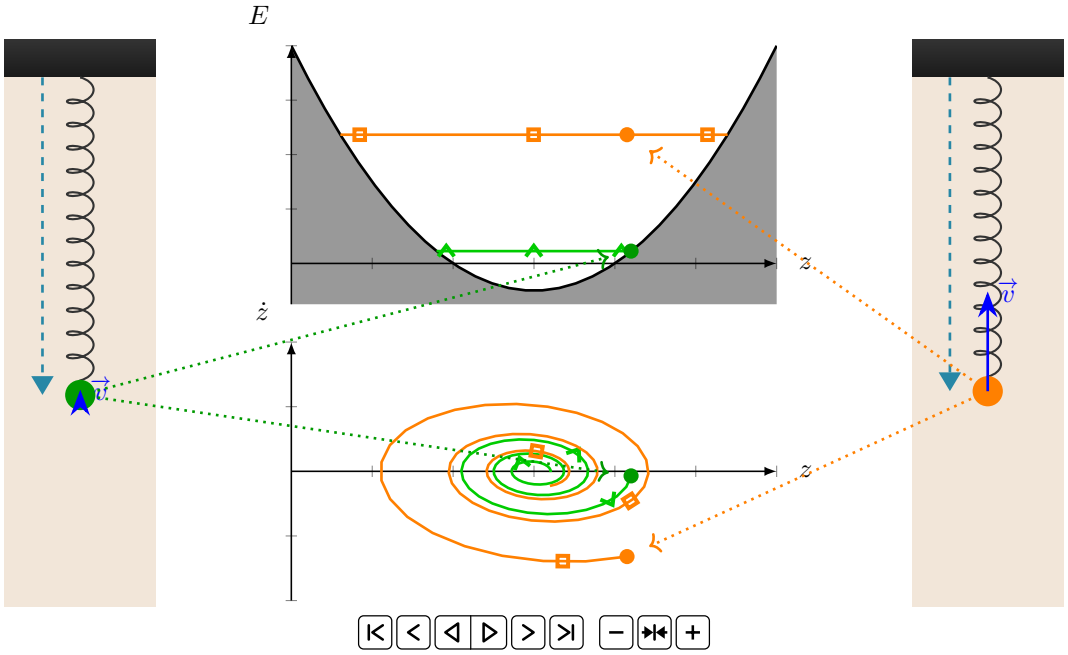
Il faut essayer de comprendre la dynamique du système représenté par ces figures. Pour vous aider, la figure M4.6 montre, dans le cas d'un masse-ressort, la dynamique du système pour deux conditions initiales différentes.

FIGURE M4.6 : Dynamique d'un masse-ressort vertical non amorti (système conservatif) dans le plan de phase et le diagramme énergétique.



Mais est-ce réaliste de supposer qu'il n'y a aucune force non conservative ? Non, en réalité, il y aura des frottements qui feront diminuer l'énergie mécanique. On peut alors, à partir des graphiques précédents, imaginer ce qui se passe si on fait décroître l'énergie mécanique du système (figure M4.7).

FIGURE M4.7 : Dynamique d'un masse-ressort vertical amorti (système non conservatif) dans le plan de phase et le diagramme énergétique.



On voit que la diminution de l'énergie mécanique disponible modifie les barrières de potentiel, entraînant une diminution de l'amplitude du mouvement au cours du temps.

C.2. Équation différentielle du mouvement

Propriété : Équation différentielle du mouvement

Un système conservatif à seul degré de liberté $x(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$m\ddot{x}(t) + \frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t) = 0 \qquad \text{(M4.12)}$$

Démonstration

On sait que $E_m = \text{cst}$, donc $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_p(x(t))}{\mathrm{d}t} = 0$. Pour dériver ces deux termes, il faut être soigneux :

- le premier terme dépend de $\dot{x}(t)$. On reconnaît la dérivée d'un carré : $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t)$
- le second terme est une dérivée composée ; en effet on dérive $E_p(x(t))$ par rapport au temps, ce qui donne $\dot{x}(t)\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t)$

On en déduit que $m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t) = 0$. On peut factoriser par $\dot{x}$; et comme il s'agit d'une équation $x(t)$ qui est vraie quelle que soit la fonction $x(t)$, et que celle-ci peut ne pas être nulle, on a le droit de simplifier par $\dot{x}(t)$ [a] et on obtient l'équation $m\ddot{x}(t) + \frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t) = 0$.

a. Bon, d'accord, vous avez peut-être l'impression que je vous arnaque, mais en fait ça marche, et on ne vous demandera pas plus d'explications que ça.

! Dans ce chapitre, il faut faire très attention aux dérivées : parfois on dérive par rapport au temps, parfois par rapport à la position.

Ainsi, à partir de l'énergie mécanique du système, on a pu retrouver l'équation que nous aurait donné le PFD si on l'avait appliqué directement. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne fait apparaître aucun vecteur ; dans certains cas, cela simplifie beaucoup les calculs.

M4. Énergie mécanique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance, travail et énergie cinétique	
Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
Champ de force conservative et énergie potentielle	
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
Énergie mécanique	
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Système conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension. Cas d'une situation modélisable par un système masse-ressort et d'un système soumis à un champ de force uniforme. Positions d'équilibre. Stabilité.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. **Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.**

M4. Énergie mécanique

Quelques conseils

✎ C'est un chapitre qui introduit beaucoup de nouvelles notions un peu abstraites, mais qui vont servir dans d'autres domaines de la physique (thermodynamique,...). L'énergie est une chose abstraite qu'on possède et qu'on peut échanger ; on a vu dans ce chapitre deux échanges possibles (force conservative : énergie cinétique $\leftrightarrow$ énergie potentielle ; force non conservative : énergie mécanique $\rightarrow$ on ne sait pas encore quoi).

✎ À partir de maintenant, vous connaissez plusieurs méthodes pour résoudre un problème de mécanique ; il faudra donc réfléchir à celle qui est la plus adaptée.

✎ Pour établir l'énergie mécanique d'un système à 1ddl, on garde les bonnes méthodes : système, référentiel, étude cinématique (jusqu'à E_c), bilan des actions (terme plus général que les forces : on ne cherche pas la force, mais son travail, sa puissance ou son énergie), puis TEM (ou TEC éventuellement).

Seuls certains exercices du genre : « Voici l'état initial, calculez la vitesse à tel instant » n'ont pas besoin d'une étude cinématique, puisqu'on cherche v et non pas $\vec{v}$.

✎ Entraînez-vous à dériver les fonctions composées !

M4. Énergie mécanique

QCMs

réponses page 472

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Le théorème de l'énergie cinétique est une loi indépendante du PFD :

(a). Faux (b). Vrai

Q2. La puissance d'une force peut être positive ou négative :

(a). Faux (b). Vrai

Q3. Le travail d'une force le long d'un trajet peut dépendre du temps mis pour effectuer le trajet :

(a). Vrai (b). Faux

Q4. Une force dont le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi est :

(a). une force constructive (b). une force conservative
(c). une force conservatrice (d). une force constante

Q5. Lesquelles de ces forces sont conservatives ?

(a). la réaction d'un support (b). les forces de frottements
(c). la force gravitationnelle (d). la force d'un moteur
(e). le poids (f). la tension d'un ressort

Q6. Un système est conservatif si et seulement si toutes les forces qui s'exercent sur lui sont conservatives :

(a). Faux (b). Vrai

Q7. La valeur de l'énergie mécanique d'un système conservatif est déterminée par les conditions initiales :

(a). Faux (b). Vrai

Q8. L'énergie potentielle d'un système conservatif dépend de sa position et de sa vitesse :

(a). Faux (b). Vrai

Q9. Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement d'un système conservatif, on dérive l'énergie mécanique par rapport :

(a). au temps (b). à la position

Q10. L'ensemble des positions accessibles par un système conservatif dépend de son énergie mécanique :

(a). Vrai (b). Faux

Q11. Une barrière de potentiel est une zone :

(a). inaccessible au système (b). où $E_p > E_m$
(c). où $E_p = \infty$ (d). où $E_p < E_m$

✓ QCM : Énergie potentielle ✗

Dans ce QCM et le suivant, on prend $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Q12. Un pot de fleur de masse 1 kg tombe de 20 m. Sa variation d'énergie potentielle de pesanteur vaut :

(a). $-20\,\mathrm{J}$ (b). $-200\,\mathrm{JJ}$
(c). $200\,\mathrm{J}$ (d). $20\,\mathrm{J}$

Q13. Une fourmi de masse 0,5 g veut grimper en haut de la tour Eiffel (hauteur 300 m). Son énergie potentielle de pesanteur va varier de :

(a). 15 J (b). 1,5 J
(c). 0,015 J (d). 0,15 J

Q14. Un ressort de raideur $1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est comprimé de 2 cm à partir de sa position au repos ; son énergie potentielle varie de :

(a). 2000 J (b). 400 J
(c). 0,2 J (d). 4 J

Q15. Un ressort de raideur $1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ était initialement comprimé de 3 cm ; on le détend jusqu'à ce qu'il soit allongé de 5 cm par rapport à sa position au repos. Son énergie potentielle varie de :

(a). 1,25 J (b). 1,7 J
(c). 0,8 J (d). 0,2 J

Q16. Un ressort de raideur $1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est au repos ; on le comprime avec une force de 150 N. Son énergie potentielle varie de :

(a). 113 kJ (b). 113 J
(c). 11,3 J (d). 11,3 MJ

Q17. Un amortisseur de voiture (équivalent à un ressort) supporte un quart de la voiture (soit une masse 300 kg) et se comprime de 12 cm. Son énergie potentielle vaut :

(a). 180 J (b). 20 kJ
(c). 1,8 MJ (d). 160 kJ

✓ QCM : Énergie et puissance ✗

Dans ce petit QCM, on calcule simplement des puissances moyennes, par la formule $\frac{\text{variation d'énergie}}{\text{temps}}$; on prend encore $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$..

Q18. Une personne 65 kg monte des escaliers ; elle grimpe d'un étage (3 m) en 7 s. Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?

(a). 45 W (b). 80 W
(c). 280 W (d). 140 W

Q19. Un écureuil de 130 g grimpe à un arbre de 8 m de haut. Il fournit une puissance moyenne de 4,2 W. Quel temps met-il ?

(a). 3,2 s
(b). 0,4 s
(c). 2,5 s
(d). 1,8 s

Q20. Une personne entretient sa forme en comprimant une fois toutes les 2 s un ressort de raideur $100\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ de 15 cm à partir de sa position au repos. Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?

(a). 60 W
(b). 0,6 W
(c). 180 W
(d). 4,1 W

Q21. Un coureur du Tour de France pesant 66 kg a grimpé les 503 m de dénivelé jusqu'à la Planche des Belles Filles en 16 min et 10 s. Quelle puissance moyenne a-t-il fournie si on néglige les frottements ?

(a). 280 W
(b). 430 W
(c). 160 W
(d). 340 W

M4. Énergie mécanique

Exercices

réponses page 473

Exercice M4.1 : Propulsion d'un bateau [**]

Un bateau de masse $m = 11\,\text{t}$ se déplace dans l'eau grâce à un moteur de puissance $\mathcal{P}_M = 1200\,\text{ch}$ (soit 880 kW). Lorsqu'il se déplace à la vitesse v, il est soumis à une force de frottements opposée à sa vitesse et de norme $f.v^2$ avec f un coefficient de frottements.

1. Le bateau navigue sur la mer calme. En appliquant le TEM (version dérivée), exprimez $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ en fonction de v et des données.
2. La vitesse maximale que peut atteindre le bateau vaut $v_{max} = 38\,\text{kn} = 70\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Déduisez-en la valeur numérique de f.

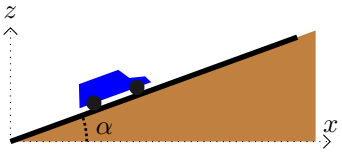
Exercice M4.2 : Grimpettes [**]

1. Calculez la puissance moyenne que vous devez fournir si vous montez les escaliers d'un immeuble à la vitesse constante d'un étage (3 m environ) toutes les 7 s, en négligeant les pertes d'énergie.
2. Un coureur du Tour de France pesant 60 kg monte les 1100 m d'ascension jusqu'à l'Alpe d'Huez en 55 min environ. Il subit une force de frottements qui vaut en moyenne 4 N pendant les 14 km de l'ascension.
   Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?
   Remarque : pour cette question, le mieux est d'utiliser le TEM en version intégrée plutôt que dérivée, puis calculer $\mathcal{P}_{moy} = \frac{W}{\Delta t}$. Le travail d'une force F constante vaut $-\int F.\mathrm{d}OM$ soit $-F \times$ distance.

Exercice M4.3 : Propulsion d'une voiture [**]

Une voiture de masse $m = 1,3t$ roule (équivalent à un déplacement sans frottements) sur la route grâce à un moteur de puissance $\mathcal{P}_M = 115\,\text{ch}$ (soit 85 kW). Lorsqu'elle se déplace à la vitesse v, elle est soumise à deux forces de frottement opposées à sa vitesse : des frottements fluides de norme $c.v^2$ avec $c = 0{,}47\,\text{USI}$, et une force de frottements interne au moteur équivalent à une force de norme constante $a = 200\,\text{N}$.

1. La voiture roule sur une route horizontale. Écrivez le TEM appliqué à la voiture, et déduisez-en $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
2. Calculer numériquement la vitesse maximale qu'elle peut atteindre (on effectuera une résolution numérique sur la calculatrice).
3. Elle roule désormais sur une route qui monte avec une pente p (qui représente la tangente de l'angle α entre l'horizontale et la route). On note z l'altitude de la voiture.
   (a) Reliez la vitesse ascentionnelle $\dot{z}$ à v et à α.
   (b) Par application du TEM, exprimez $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ en fonction de v et des autres données.
   (c) Ecrivez l'équation donnant la nouvelle vitesse maximale de la voiture.
   AN pour une pente $p_1 = 2\,\%$ puis pour $p_2 = 10\,\%$.



Exercice M4.4 : Accélération d'une voiture [***] info EDO

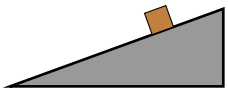
Un modèle de voiture citadine est proposé avec deux motorisations possibles : 44 kW ou 55 kW. Dans tout ce problème, on travaille sur une route horizontale.

1. Le modèle de 44 kW atteint $144\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. En supposant que les forces résistantes sont proportionnelles au carré de la vitesse ($k.v^2$), trouvez la vitesse de pointe du modèle de 55 kW.

Indication : commencez par calculer k à l'aide du modèle de 44 kW ; ce coefficient et le même pour l'autre modèle (même aérodynamique).

2. Les données constructeur indiquement le temps mis par chaque voiture pour accélérer de $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ à $120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ en 5ème : 16,6 s pour le modèle de 44 km (masse 900 kg) et 12,1 s pour le modèle à 55 kW (masse 1000 kg).
   En réalité, la puissance fournie par le moteur n'est pas constante, elle dépend du régime moteur, donc de la vitesse. On admettra qu'elle suit une loi approximativement linéaire ; ainsi, en 5ème, on prendra comme modèle $\mathcal{P}_{moteur} = \mathcal{P}_{max}\frac{v}{v_0}$ avec $v_0 = 140\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
   (a) En appliquant le TEC, déterminez l'accélération $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ de la voiture.
   (b) Cette ED est non linéaire ; implémentez donc sa résolution sous Python avec un schéma d'Euler. Résolvez $v(t)$ pour une vitesse initiale de $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, pour les deux modèles, avec un pas de temps de 0,1 s, et une durée de simulation de 20 s.
   (c) Tracez les courbes de $v(t)$ pour les deux modèles, et mesurez le temps mis pour atteindre $120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$; comparez avec les données constructeur.

Exercice M4.5 : Vitesse en bas d'un plan incliné [*]



On place un carton de masse $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 12°$ par rapport à l'horizontale. Le carton glisse vers le bas et parcourt $\ell = 4{,}3\,\mathrm{m}$. On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. De quelle altitude le carton est-il descendu ?
2. Quelle est sa vitesse v_f après avoir parcouru ℓ, si les frottements sont négligés ?
3. En réalité on mesure $v_f = 2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer le travail des forces de frottements.

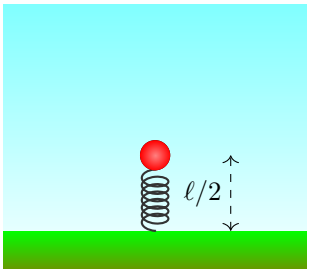
Exercice M4.6 : Lancer d'un ballon [*]

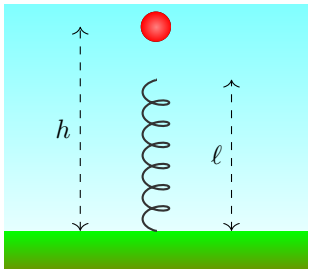
On lance un ballon de masse m, verticalement, depuis l'altitude $z_0 = 1\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol avec une vitesse verticale $v_0 = 14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On note z l'altitude du ballon à chaque instant et v sa vitesse ; pour les AN, $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
On suppose que le ballon n'est soumis qu'à son poids, les frottements sont négligés.

1. Exprimez l'énergie mécanique du ballon en fonction de z et v, puis en fonction de z_0 et v_0.
2. Calculez l'altitude maximale atteinte.
3. Calculez la vitesse du ballon lorsqu'il touche le sol.

Exercice M4.7 : Détente d'un ressort [**]

Un ressort de longueur à vide ℓ et de raideur k est posé verticalement sur le sol. On le comprime à une longueur $\frac{\ell}{2}$, on place dessus une masse m, et on lâche : le ressort se détend entièrement et la masse décolle.

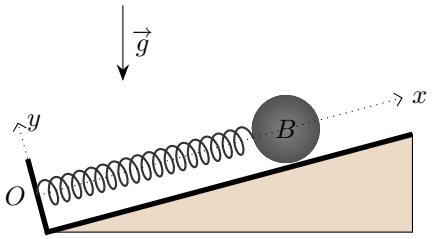




1. À quelle hauteur h la masse monte-t-elle au-dessus du sol, si on néglige tout frottement ?
2. *AN* pour $k = 200\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $\ell = 20\,\mathrm{cm}$, $m = 100\,\mathrm{g}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
3. Quelle est la masse maximale qui pourra décoller effectivement avec ce ressort ?

Exercice M4.8 : Flipper [**]

On reprend l'étude du lancement d'une bille de flipper, vu dans le dernier chapitre. Le flipper est modélisé par un plan incliné d'un angle $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontale. En bas (point O) est fixé un ressort de raideur $k = 40\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 5\,\text{cm}$. Une bille B de masse $m = 5\,\text{g}$ est posée au bout de ce ressort. On note ℓ la distance OB. On suppose que la bille se déplace sans frottements sur le plan incliné. On notera $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



1. Première étape : on comprime le ressort à $\ell_0/2$, on pose la bille dessus, et on lache : le ressort se détend et pousse la bille. Celle-ci se détache du ressort à l'instant t_1 tel que $\ell(t_1) = \ell_0$; sa vitesse vaut alors v_1. Montrez que le système est conservatif pendant cette phase, et déterminez v_1.
2. Deuxième étape : la bille, détachée du ressort, monte le plan incliné du flipper. Quelle est la vitesse v_2 de la bille lorsqu'elle atteint le sommet du flipper ($\ell = 80\,\text{cm}$) ?

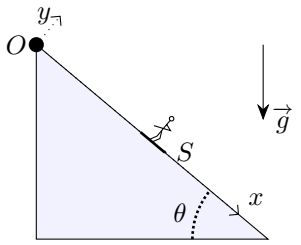
Exercice M4.9 : Saut à l'élastique [**]

Un pont passe à une altitude $h = 60\,\text{m}$ au-dessus de la mer. Une personne de masse $m = 71\,\text{kg}$ saute depuis ce pont dans le vide. On négligera les frottements ; on prend $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Supposons que la personne veuille faire un plongeon dans la mer et n'attache pas d'élastique ; elle effectue donc une chute libre. Calculez la vitesse au moment où elle atteint l'eau.
2. La personne est désormais attachée au pont par un élastique de raideur k et de longueur à vide négligeable. Exprimez la longueur du ressort (fixé au pont) lorsque la personne est à l'altitude z quelconque ; déduisez-en l'expression de l'énergie mécanique en fonction de sa vitesse v et de son altitude z.
3. Exprimez l'altitude h' de la personne au point le plus bas de sa trajectoire. Comment choisir la valeur de k si on ne veut pas que la personne touche l'eau ?
4. On prend pour k une valeur égale à 1,5 fois cette valeur minimale ; calculez h'.
5. Exprimez, toujours grâce à la conservation de l'énergie, la vitesse de la personne à une altitude z quelconque. Déduisez-en la vitesse maximale atteinte par la personne lors du saut. AN.

Exercice M4.10 : Descente à ski [**]

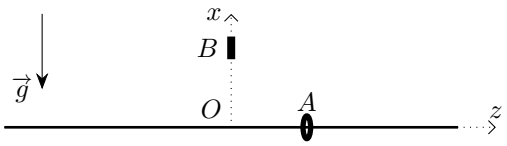
Une skieuse S de masse $m = 67\,\text{kg}$ descend une piste inclinée d'un angle $\theta = 40°$ par rapport à l'horizontale. Elle démarre depuis l'origine avec une vitesse nulle. Elle est soumise à son poids avec $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; le contact avec la piste enneigée est supposé sans frottements.



1. Montrer que la skieuse est un système conservatif, et exprimez son énergie mécanique en fonction de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et des constantes.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. On ajoute alors dans le modèle une force de frottements de la forme $-k.\|\vec{v}\|.\vec{v}$; exprimez sa puissance en fonction de $\dot{x}(t)$.
4. Déterminez la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

Exercice M4.11 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**] EDO

Un anneau aimanté A de masse m peut glisser sans frottements sur un fil rectiligne selon la direction $\vec{e}_z$ horizontale. Un autre aimant B se situe en $z = 0$, au-dessus du fil, à une distance d ; l'attraction entre les deux aimants se traduit par une énergie potentielle d'interaction de la forme



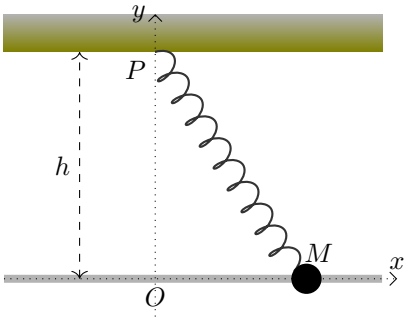
$$E_{pm}(z) = -C\frac{d}{(d^2+z^2)^{3/2}}$$

Pour les AN : $m = 12\,\text{g}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $d = 2\,\text{cm}$ et $C = 1{,}5\times10^{-6}\,\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$.

1. Montrez que ce système (point A) est conservatif, et exprimez son énergie potentielle E_p, puis son énergie mécanique.
2. Tracez la courbe de $E_p(z)$ en fonction de z ; en déduire la nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique de A.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. La résoudre numériquement pour $z(0)$ allant de 1 cm à 4 cm, sans de vitesse initiale, sur une durée de 1 s.

Exercice M4.12 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**] .py EDO

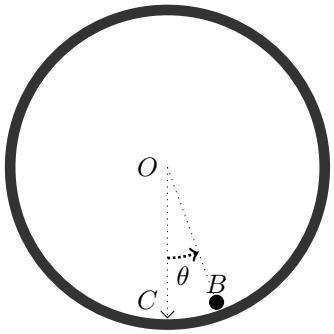
Un objet M de masse m peut se déplacer sans frottements sur une tige horizontale. On repère sa position par $x = \overline{OM}$. Un ressort est fixé entre M et le point P fixe de coordonnées $(0, h)$. Ce ressort a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0.



1. Montrez que le système M est conservatif, et exprimez ses énergies cinétique et potentielle.
2. Établissez l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminez les positions d'équilibre dans le cas où $\ell_0 > h$.
4. Résoudre numériquement et tracez $x(t)$ sur une durée de 1 s avec les valeurs : $\ell_0 = 21\,\text{cm}$, $h = 0{,}7\ell_0$, $k = 70\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $m = 160\,\text{g}$, $x(0) = 12\,\text{cm}$ et $\dot{x}(0)$ allant de $0\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ à $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; tracez aussi le portrait de phase correspondant.

Exercice M4.13 : Une bille dans une machine à laver [**]

Une bille B de masse m peut rouler sans frottements à l'intérieur d'un cercle de rayon R et de centre O. On note C le point en bas et on repère la position de la bille par l'angle θ.



1. Montrez que la bille est un système conservatif et exprimez son énergie potentielle en fonction de θ. On pourra prendre comme référence des altitudes le point O.
2. Tracez le profil de $E_p(\theta)$ pour des angles compris entre $-180°$ et $+180°$.
   Le mouvement est-il borné en angle ?
   Si on lance la bille depuis le point $\theta = 0°$, quelle énergie cinétique minimale faut-il lui donner pour qu'elle puisse atteindre le sommet ? Exprimez la vitesse correspondante.
3. Reliez l'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{CB}$ à θ ; déduisez-en l'expression de l'énergie cinétique de la bille en fonction de $\dot{\theta}$.
4. Établissez alors l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.

M4. Énergie mécanique

TDs numériques

réponses page 481

TD numérique : Oscillateur harmonique

Ad. EDO

Dans ce TD, on va travailler sur un simple oscillateur harmonique, et se servir de ce modèle simple pour tester les limites de la méthode d'Euler.
On considère donc un oscillateur non amorti d'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De manière arbitraire, on va choisir $m = 1$ et $k = 1$ donc $\omega_0 = 1$ pour la suite.

1. Définissez m, k, ω_0 et la période T_0 dans un fichier Python.
2. À l'aide d'une méthode d'Euler, simulez ce système pour les CI : $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$, sur une durée de 5 périodes, avec comme pas temporel $\frac{T_0}{100}$. Commentez la courbe obtenue.
3. Tracez le portrait de phase $v(x)$; commentez.
4. À l'aide des tableaux déjà calculés par la méthode d'Euler, générez les tableaux correspondant à l'énergie cinétique E_c, à l'énergie potentielle E_p, et à l'énergie mécanique E_m. Tracez $E_c(t)$, $E_p(t)$ et $E_m(t)$: est-ce en accord avec ce qu'on attend ?
5. Retracez les courbes précédentes avec un pas de $\frac{T_0}{1000}$; commentez.
6. Le défaut majeur de la méthode d'Euler en mécanique est donc qu'elle fait augmenter artificiellement l'énergie. Pour résoudre cela, on a 3 solutions :
   - diminuer toujours plus le pas, mais cela va poser des problèmes d'arrondis dès qu'on dépasse environ $10^{-8}T_0$ (je n'entre pas dans les détails de cette limite)
   - utiliser une méthode sur le même principe que la méthode d'Euler mais plus précise, la méthode de Runge-Kutta
   - utiliser une méthode spécialement pensée pour conserver l'énergie mécanique, comme la méthode d'Euler semi-implicite (ou méthode de Euler-Cromer)

   Pour cette année, nous allons nous contenter d'utiliser la méthode de Runge-Kutta déjà implémentée dans la bibliothèque Scipy. On va apprendre à utiliser la fonction `scipy.integrate.odeint` qui est au programme [a]. La fonction `odeint` utilise le même principe que la méthode d'Euler : une récurrence. Dans cette récurrence, la règle générale pour toute variable f est : $f_{n+1} = f_n + pas \times f'(t_n, f_n)$:

ordre 1

$$\begin{cases} x_{n+1} = \boxed{x_n} + pas \times \boxed{\dot{x}(t_n, x_n)} \end{cases}$$

variable dérivée

ordre 2

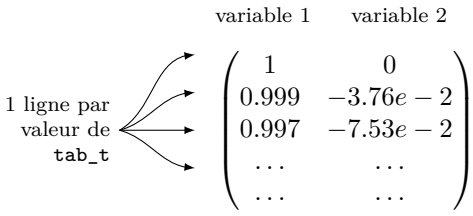
$$\begin{cases} x_{n+1} = \boxed{x_n} + pas \times \boxed{v_n} \\ v_{n+1} = \boxed{v_n} + pas \times \boxed{\ddot{x}(t_n, x_n, v_n)} \end{cases}$$

variables dérivées

`odeint` travaille avec autant d'inconnues qu'on veut : on lui donnera une **liste** d'inconnues (même s'il n'y en a qu'une seule). Ensuite, on lui dit comment calculer la liste des dérivées correspondantes, et ensuite il itère tout seul la récurrence ; seulement, au lieu d'utiliser les formules de récurrence d'Euler, il utilise celles de Runge-Kutta, un peu plus compliquées mais beaucoup plus précises.
Voici donc les étapes à faire :

- **il faut toujours commencer par choisir la liste des inconnues, et leur ordre**, en l'écrivant par exemple comme commentaire dans le fichier Python. Par exemple, ici, on va choisir $[x, v]$, mais on aurait pu choisir l'ordre opposé : c'est uniquement une convention ;
- on crée alors une fonction `derivee(inconnues,t)` (qu'on peut nommer autrement, peu importe) qui prend obligatoirement comme arguments une **liste** d'inconnues et la variable (ici le temps), et qui renvoie la **liste** des dérivées des inconnues ; ici par exemple elle doit renvoyer $[\dot{x}, \dot{v}]$ c'est-à-dire $[v, -\omega_0^2 x]$;
- on crée une liste contenant les conditions initiales $[x(0), v(0)]$;

— on crée un tableau des instants pour lesquels on va simuler le système, le plus souvent avec `numpy.linspace(debut,fin,points)` ; pour commencer on met souvent 1000 points ;
— on appelle alors `odeint(derivee,ci,temps)` qui renvoie un tableau des solutions avec une inconnue par colonne ; on le stocke dans une variable ;



— on extrait les différentes inconnues à l'aide de la syntaxe `tableau[:,i]` qui permet d'extraire la colonne i du tableau (l'opérateur `:` signifiant : « tous les indices de ligne »).

Tracez alors la solution $x(t)$ obtenue par `odeint`, puis le portrait de phase ; tracez aussi l'énergie mécanique : elle augmente toujours, mais c'est beaucoup plus faible qu'auparavant.

Remarque : avec `odeint`, on ne précise pas le pas temporel ; il est déterminé automatiquement.

7. Augmentez le temps de simulation à 30 périodes ; observez que la courbe reste bien périodique.
8. On ajoute maintenant des frottements en introduisant dans l'équation un terme $\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}$. Simulez avec `odeint` le système sur $30T_0$ avec $Q = 10$, et tracez les mêmes courbes que précédemment.
9. Reprenez avec $Q = 2$, puis $Q = \frac{1}{2}$, puis $Q = 0{,}1$.

a. Mais qui est désormais jugée obsolète par les concepteurs de Scipy qui ont décidé de modifier complètement leur bibliothèque ; dans l'avenir la fonction sera `scipy.integrate.solve_ivp`, de syntaxe légèrement différente, mais d'idée générale identique.

TD numérique : Oscillateur non harmonique

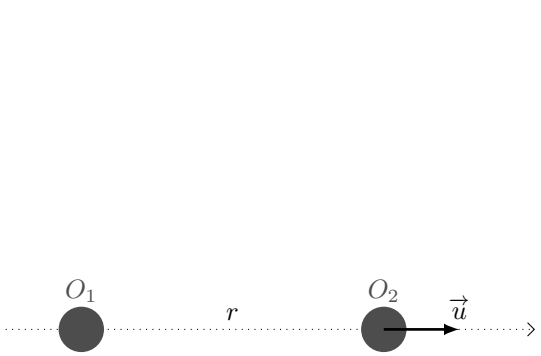
Dans le TD précédent, on a étudié l'oscillateur harmonique. On a vu en cours que tout système au voisinage de sa position d'équilibre se comporte comme un oscillateur harmonique, mais ce n'est qu'une approximation. Si l'amplitude du mouvement augmente et que le système s'éloigne de plus en plus de l'équilibre, alors des termes non-linéaires apparaissent, qu'on va étudier aujourd'hui à l'aide de `scipy.integrate.odeint`.

On va s'intéresser par exemple à une molécule diatomique O_2 : ce sont deux atomes identiques d'oxygène, de masse $m = 16 \times 1{,}7 \times 10^{-27}\,\text{kg}$, qui restent attachés par une force d'origine partiellement quantique, partiellement électrique ; cette force les attire mais pas trop, car quand ils s'approchent trop, leurs nuages électroniques se repoussent. Il existe divers modèles pour représenter cette force ; nous prendrons ici celui d'une force conservative d'énergie potentielle

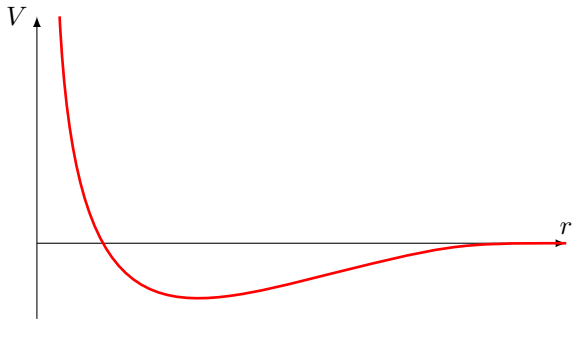
$$V(r) = A\left(\frac{3r_e^4}{5r^{10}} - \frac{1}{r^6}\right) \tag{1}$$

avec r la distance entre les atomes, A une constante et $r_e = 110\,\text{pm}$.

Toutes les autres forces (dont le poids) sont négligeables ici. On admettra qu'une théorie totalement hors programme (la théorie du mobile fictif) nous permet de traiter le mouvement des deux atomes comme si l'un des deux était fixe et l'autre se déplaçait avec une masse $m^* = \frac{m}{2}$. On repèrera alors la position du premier atome par un point O_1 fixe, et celle du second par $\overrightarrow{O_1O_2} = r\vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire fixe.



Modèle de la molécule



Allure de l'énergie potentielle

1. Exprimez $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ et déduisez-en que r_e représente l'abscisse du minimum de la courbe.

2. La molécule de dioxygène possède une raie d'absorption infrarouge à $\lambda = 9{,}10\,\mu\text{m}$. Cette raie correspond à la fréquence f_0 de vibration de la molécule au voisinage de sa position d'équilibre : quand on envoie de la lumière ayant la même fréquence f_0, alors il apparaît un phénomène qu'on étudiera bientôt, appelé *résonance*, qui provoque l'absorption de la lumière. Calculez numériquement f_0 ; on donne $c = 3 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

   On verra dans un chapitre ultérieur que $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m^*}\frac{\text{d}^2V(r_e)}{\text{d}r^2}}$. Exprimez A en fonction de r_e, m et f_0. Déduisez-en la valeur numérique de A.

3. Tracez la courbe $V(r)$ (idéalement en électron-volt : $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$) entre $0,8r_e$ et $5r_e$. Quel sera le type de mouvement en fonction de l'énergie mécanique ?

4. À partir de l'expression de l'énergie mécanique, montrez que r vérifie l'équation différentielle

$$\frac{m}{2}\ddot{r} + 6A\left(\frac{1}{r^7} - \frac{r_e^4}{r^{11}}\right) = 0 \tag{2}$$

5. Simulez alors $r(t)$ sur une durée de quelques périodes (attention à bien choisir le temps de simulation, qui est ici très très court) à l'aide de la fonction `odeint`. On prendra comme CI : $r(0) = 0{,}9999r_e$ et $\dot{r}(0) = 0$.

6. Tracez les nouvelles courbes $r(t)$ pour $r(0) = 0{,}9r_e$, puis $r(0) = 0{,}88r_e$. Commentez.

7. Pour interpréter ces courbes, calculez numériquement les énergies mécaniques correspondant aux 3 conditions initiales utilisées précédemment, et tracez pour chacune d'entre elles une ligne horizontale sur le graphique de $V(r)$ (on peut le faire à l'aide de `plt.axhline(valeur)`).

8. Pour les deux premières conditions initiales, le mouvement est périodique, mais trois changements apparaissent :
   - comment évolue la période des oscillations lorsque l'amplitude augmente ?
   - comment évolue la valeur moyenne de l'oscillation (on pourra se contenter de mesurer $\frac{r_{max}+r_{min}}{2}$) ?
   - comment évolue la forme du signal ?

9. Que représente physiquement l'énergie du minimum de V ? Comparez avec les valeurs tabulées trouvées sur Internet.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Q2.(b)
Q3.(a)
Par exemple, plus on va vite, plus le travail des forces de frottements est grande.
Q4.(b)
Q5.(c) ET (e) ET (f)
Q6.(a)
Il peut aussi y avoir des forces qui ne travaillent pas.
Q7.(b)
Q8.(a)
Uniquement de sa position.
Q9.(a)
Car $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$
Q10.(a)
Plus E_m est grande, moins il y a de barrières de potentiel.
Q11.(a) ET (b)

Réponses au QCM : Énergie potentielle

Q12.(b)
Q13.(b)
Q14.(c)
Q15.(c)
$\frac{1}{2}1000 \times 0{,}05^2 - \frac{1}{2}1000 \times 0{,}03^2$.
Q16.(c)
L'allongement final vaut $\frac{150}{1000} = 0{,}15\,\mathrm{m}$.
Q17.(a)
À l'équilibre des forces, $mg = k \times allongement$ donc $k = \frac{300\times10}{0{,}12} = 25\,000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Réponses au QCM : Énergie et puissance

Q18.(c)
$P = \frac{65\times10\times3}{7}$
Q19.(c)
$t = \frac{0{,}13\times10\times8}{4{,}2}$
Q20.(b)
$P = \frac{\frac{1}{2}100\times0{,}15^2}{2}$; mais 0,6 W d'effort moyen, c'est pas grand chose.
Q21.(d)
Et à l'eau claire !

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M4.1 : Propulsion d'un bateau [**]

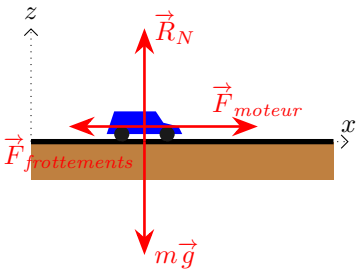
1. Si la mer est horizontale, le bateau n'a pas d'énergie potentielle, donc son énergie mécanique vaut $E_M = \frac{1}{2}mv(t)^2$. Il est soumis à son moteur, de puissance $\mathcal{P}_M$, et à la force de frottements, de puissance $-fv(t)^3$ (le signe est dû au sens de la force, opposé à la vitesse).
   Le TEM indique donc que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv(t)^2\right) = \mathcal{P}_M - fv(t)^3$ soit $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_M}{mv(t)} - \frac{f}{m}v(t)^2$
2. À la vitesse maximale, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $\mathcal{P}_M - fv_{max}^3 = 0$ donc $f = \frac{\mathcal{P}_M}{v_{max}^3} = 120\,\mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot s^{-2}}$

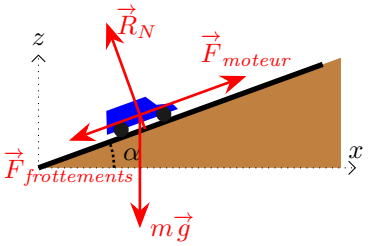
Corrigé de l'exercice M4.2 : Grimpettes [**]

Dans les deux cas : $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t)$ avec $z(t)$ l'altitude.

1. Par le TEM : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t)\right) = \mathcal{P}_{fournie}$. Or la vitesse est constante, et $\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ donc on trouve facilement que $\mathcal{P}_{fournie} = mg\dot{z}(t)$; pour l'AN, je ne connais pas votre masse…
2. Entre le début et la fin de l'ascension : $\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right) = W_{cycliste} + W_{frottements}$. Au départ et à la fin, le cycliste est arrêté, donc $W_{cycliste} = mg\Delta z - W_{frottements} = 60\times 9{,}8\times 1100 + 4\times 14\,000 = 702{,}8\,\mathrm{kJ}$ donc la puissance moyenne fournie vaut $\mathcal{P} = \frac{702\,800}{55\times 60} = 213\,\mathrm{W}$

Corrigé de l'exercice M4.3 : Propulsion d'une voiture [**]

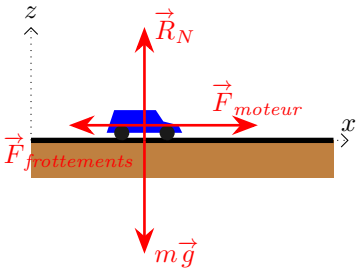
1. 

   Le TEM donne simplement $\frac{\mathrm{d}E_M}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_M - a.v(t) - c.v(t)^3$; or $E_M = \frac{1}{2}mv(t)^2$ donc $\frac{\mathrm{d}E_M}{\mathrm{d}t} = mv(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où on tire $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_M}{mv(t)} - \frac{a}{m} - \frac{c}{m}v(t)^2$
2. À la vitesse maximale : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ donc on en tire $\mathcal{P}_M = av_{max} + cv_{max}^3$ donc $v_{max} = 54\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 195\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$
3. 

   (a) Par trigonométrie : $\dot{z}(t) = v(t)\sin\alpha$
   (b) Donc $\frac{\mathrm{d}E_M}{\mathrm{d}t} = mv(t)\dot{v}(t) + mgv(t)\sin\alpha$.
   (c) On reécrit que $\frac{\mathrm{d}E_M}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_M - a.v(t) - c.v(t)^3$ et on en déduit que $\dot{v}(t) = \frac{\mathcal{P}_M - av(t) - cv(t)^3 - mgv(t)\sin(\arctan p)}{mv(t)}$
   (d) On écrit encore une fois que $\dot{v} = 0$ et on obtient $\mathcal{P}_M = mgv_{max}\sin(\arctan p) + av_{max} + cv_{max}^3$
   AN : $v_{max}(2\,\%) = 50{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 183\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et $v_{max}(10\,\%) = 38{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 140\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M4.4 : Accélération d'une voiture [***]

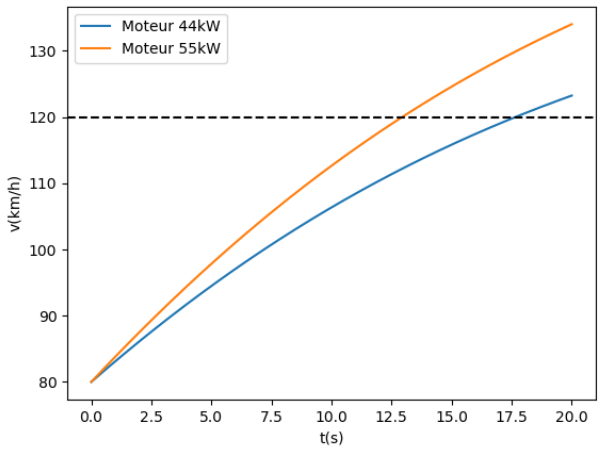
1. La dérivée de l'énergie cinétique de la voiture par rapport au temps, dans le référentiel terrestre, galiléen, est égale à la somme des puissances des forces ; ici, il y a la force exercée par le moteur, dont la puissance $\mathcal{P}_{moteur}$ est fournie, et la force de frottements, de puissance $\mathcal{P}_{frott} = -kv(t)^3$; plus le poids et la réaction de la route, qui ne travaillent pas.



Lorsque la vitesse de pointe est atteinte, E_c ne varie plus, donc $\mathcal{P}_{moteur} + \mathcal{P}_{frott} = 0$, soit $v_{max}^3 = \frac{\mathcal{P}_{moteur}}{k}$.
Le modèle moins puissant permet de trouver $k = 0{,}688\,\text{USI}$; on trouve ensuite pour le modèle le plus puissant $v_{max} = 155\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. $\frac{\mathrm{d}E_c(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{moteur} + \mathcal{P}_{frott}$ soit $mv(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{max}\frac{v(t)}{v_0} - kv^3$ donc finalement $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{mv_0} - \frac{k}{m}v(t)^2$
Voici un exemple de code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
m1,m2=900,1000
Pmax1,Pmax2=44000,55000
v0=140/3.6
k=0.688
def ed1(v,t):
    return (Pmax1/v0-k*v**2)/m1
def ed2(v,t):
    return (Pmax2/v0-k*v**2)/m2
pas,tmax=0.1,20
N=int(tmax/pas)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_v1=np.zeros(N+1)
tab_v2=np.zeros(N+1)
tab_t[0],tab_v1[0],tab_v2[0]=0,80/3.6,80/3.6 # départ à 80 km/h
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    tab_v1[n+1]=tab_v1[n]+pas*ed1(tab_v1[n],tab_t[n])
    tab_v2[n+1]=tab_v2[n]+pas*ed2(tab_v2[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_v1*3.6,label="Moteur␣44kW")
plt.plot(tab_t,tab_v2*3.6,label="Moteur␣55kW")
plt.legend()
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("v(km/h)")
plt.axhline(120,ls="--",color="black")
plt.show()
```



On mesure des temps de passage à $120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ égaux à 17,6 s pour le modèle le moins puissant et 12,9 s pour

le plus puissant, en accord avec les données constructeur à 7 % près.

Corrigé de l'exercice M4.5 : Vitesse en bas d'un plan incliné [*]

1. Avec un peu de trigonométrie, $\Delta z = -\ell \sin\alpha = 89\,\text{cm}$ où z est l'altitude comptée vers le haut.
2. On considère comme système le carton, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Son énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$. Il est soumis à son poids, conservatif, d'énergie potentielle $mgz(t)$ avec $z(t)$ l'altitude, et à la réaction qui ne travaille pas (pas de frottements). Le TEM appliqué entre le départ et l'arrivée indique donc que $\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right) = 0$ soit $\frac{1}{2}mv_f^2 + mg\Delta z = 0$ d'où on tire $v_f = \sqrt{-2g\Delta z} = 4{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
3. Le TEM indique maintenant que $\frac{1}{2}mv_f^2 + mg\Delta z = W_{frottements}$ d'où on tire $W_{frottements} = -7{,}9\,\text{J}$.

Corrigé de l'exercice M4.6 : Lancer d'un ballon [*]

Le ballon est soumis à son seul poids, c'est donc un système conservatif dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $E_m = mgz(t) + \frac{1}{2}mv(t)^2 = \text{cst}$.

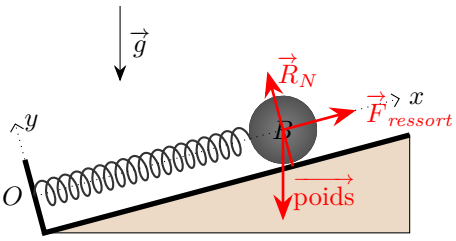
1. Le ballon est soumis à son seul poids, c'est donc un système conservatif dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $E_m = mgz(t) + \frac{1}{2}mv(t)^2 = \text{cst}$. De plus $E_m = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ (à l'instant initial). Ces deux valeurs sont égales puisque le système est conservatif.
2. $mgz_{max} = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ donc $z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 10{,}8\,\text{m}$
3. $\frac{1}{2}mv_{sol}^2 = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ donc $v_{sol} = \sqrt{v_0^2 + 2gz_0} = 14{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigé de l'exercice M4.7 : Détente d'un ressort [**]

1. Le système masse, étudié dans le référentiel terrestre galiléen, est soumis à son poids et à la force du ressort ; il possède une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv(t)^2$, une énergie cinétique de pesanteur $mgz(t)$ avec z l'altitude vers le haut (qu'on prendra nulle au sol), et une énergie potentielle élastique, qui vaut $\frac{1}{2}k\Delta x(t)^2$, où $\Delta x(t)$ est l'écart de la longueur du ressort par rapport à sa longueur au repos. Si on néglige toute dissipation, l'énergie mécanique de ce système se conserve.
   On fait un bilan d'énergie mécanique entre deux instants :
   - au départ : l'énergie cinétique est nulle, l'énergie potentielle de pesanteur vaut $\frac{1}{2}mg\ell$ et l'énergie potentielle élastique vaut $\frac{1}{8}k\ell^2$;
   - au sommet de la trajectoire : l'énergie cinétique est encore nulle (à condition que le tir soit bien vertical), l'énergie potentielle élastique est nulle (le ressort s'est détendu), et l'énergie potentielle de pesanteur vaut mgh.

   La conservation de l'énergie mécanique implique alors que $mgh = \frac{1}{2}mg\ell + \frac{1}{8}k\ell^2$, soit $h = \frac{\ell}{2} + \frac{k\ell^2}{8mg}$
2. AN : $h = 1{,}1\,\text{m}$
3. Ceci est valide si $h > \ell$, soit $m > \frac{k\ell}{4g} = 1{,}0\,\text{kg}$, puisque sinon le ressort ne se détend pas entièrement.

Corrigé de l'exercice M4.8 : Flipper [**]



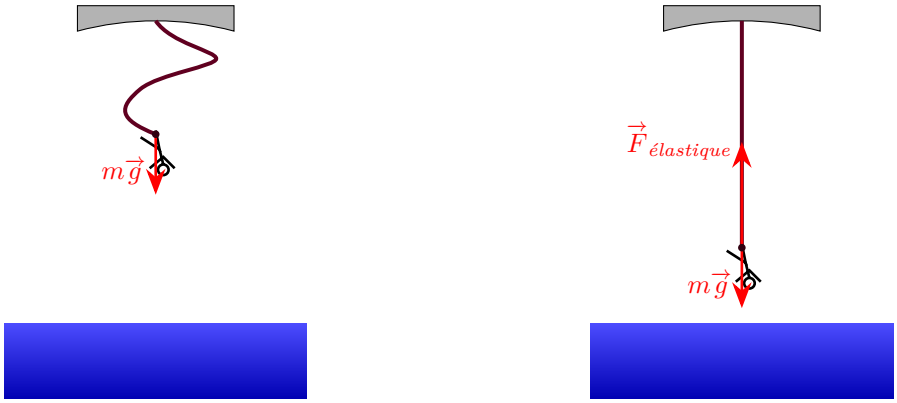
1. On étudie la bille B dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'étude cinématique fournit $\overrightarrow{OM} = \ell(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{\ell}(t)\vec{e}_x$ et $E_c = \frac{1}{2}m\dot{\ell}(t)^2$.
   Elle est soumise à
   - son poids, conservatif, d'énergie potentielle $E_{pp} = m.g.\text{altitude} = mg\ell(t)\sin\alpha$ (origine en O)
   - la force du ressort, conservative, d'énergie potentielle $E_{pel} = \frac{1}{2}k\left(\ell(t) - \ell_0\right)^2$
   - la réaction du support, qui ne travaille pas (pas de frottements)

Le système est donc conservatif, d'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\ell}(t)^2 + mg\ell(t)\sin\alpha + \frac{1}{2}k\left(\ell(t)-\ell_0\right)^2$.
Au début, $\dot{\ell} = 0$ et $\ell = \ell_0$ donc $E_m = mg\frac{\ell_0}{2}\sin\alpha + \frac{1}{8}k\ell_0^2$.
Au moment du décollage de la bille, $\dot{\ell} = v_1$ et $\ell = \ell_0$ donc $E_M = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\ell_0\sin\alpha$.
On en tire $v_1 = \sqrt{\frac{k\ell_0^2}{4m} - g\ell_0\sin\alpha} = 2{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2. La force du ressort n'est plus présente, donc désormais $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\ell}(t)^2 + mg\ell(t)\sin\alpha = \text{cst}$.
On a donc $\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\ell_0\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg\ell\sin\alpha$ d'où on tire
$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2(\ell-\ell_0)g\sin\alpha} = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Corrigé de l'exercice M4.9 : Saut à l'élastique [**]

1. Dans ce genre d'exercice où on demande simplement la vitesse (c'est-à-dire sa norme), l'étude cinématique peut être optionnelle.
La personne n'est soumise qu'à son poids, donc $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t)$ avec z son altitude et le système est conservatif (pas de forces non conservatives). Donc $E_m = \text{cst}$.
Au départ : $v = 0$ et $z = h$ donc $E_m = mgh$.
Au niveau de la mer : $v = v_0$ (inconnue) et $z = 0$ donc $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$.
Donc $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ donc $v_0 = \sqrt{2gh} = 34{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (gare aux plats !).



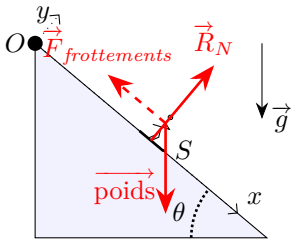
Élastique non tendu — Élastique tendu

2. On ajoute désormais l'énergie potentielle élastique. La longueur du ressort vaut $h - z(t)$ donc $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t) + \frac{1}{2}k\left(h - z(t) - 0\right)^2$. Elle est constante.
3. Au point de départ : $v = 0$ et $z = h$ donc $E_m = mgh$.
Au point le plus bas : $v = 0$ et $E_m = mgz + \frac{1}{2}k(h-z)^2$.
Donc $mgh = mgz + \frac{1}{2}k(h-z)^2$ soit $mg(h-z) = \frac{1}{2}k(h-z)^2$ ce qui donne deux solutions : $h - z = 0$ (point de départ) et $h - z = \frac{2mg}{k}$. Donc $h' = h - \frac{2mg}{k}$.
On veut que $h' > 0$ soit $k > \frac{2mg}{h} = 23{,}2\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.
4. On prendra donc $k = 34{,}8\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et on trouve alors $h' = 20\,\mathrm{m}$.
5. $E_m = mgh$ donc $\frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t) + \frac{1}{2}k(h-z(t))^2 = mgh$ soit $v(t) = \sqrt{2g(h-z(t)) - \frac{k}{m}(h-z(t))^2}$.
Pour trouver la vitesse maximale, on peut chercher à résoudre $\dot{v}(t) = 0$, en déduire t, mais ensuite, comme on ne connaît pas $v(t)$, on n'en fait rien. On va donc plutôt considérer l'expression précédente comme donnant la vitesse $v(z)$ en fonction de z (le temps n'est qu'un intermédiaire). On dérive donc v par rapport à z et on cherche à résoudre $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = 0$. Si on est flemmard, on dérive plutôt v^2 : $\frac{\mathrm{d}v^2(z)}{\mathrm{d}z} = 0 \Leftrightarrow -2g + 2\frac{k}{m}(h-z) = 0 \Leftrightarrow h - z = \frac{mg}{k}$. On renvoie ce résultat dans l'expression de la vitesse et, après simplifications, on trouve $v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}g = 14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M4.10 : Descente à ski [**]

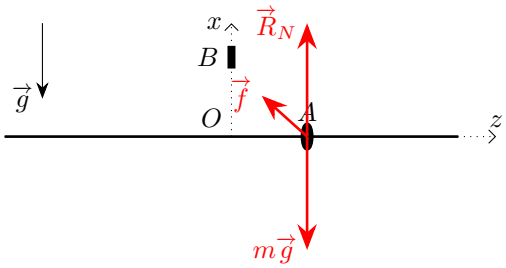
1. Le système {skieuse} est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Étude cinématique : $\overrightarrow{OS} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$.
Bilan des actions : le poids, conservatif, d'énergie potentielle $E_{pp} = -mgx(t)\sin\alpha$ (avec l'origine en O), et la réaction de la piste qui ne travaille pas (perpendiculaire à la vitesse).

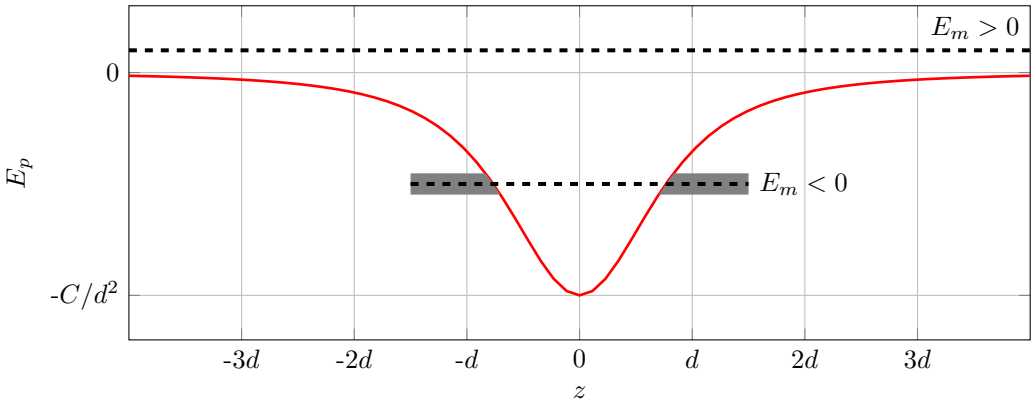
Le système est donc conservatif, et $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - mgx(t)\sin\alpha = \text{cst}$.



2. On dérive par rapport au temps : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) - mg\dot{x}(t)\sin\alpha = 0$, ce qui donne après simplification par $\dot{x}(t)$ l'équation $m\ddot{x}(t) - mg\sin\alpha = 0$.
3. La force de frottements a pour puissance $\mathcal{P} = -k.\|\vec{v}\|.\vec{v}.\vec{v} = -k\|\vec{v}\|^3 = -k|\dot{x}(t)|^3$.
4. Le TEM donne désormais $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}$ soit après simplification $m\ddot{x}(t) - mg\sin\alpha = -k|\dot{x}(t)|\dot{x}(t)$

Corrigé de l'exercice M4.11 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**]



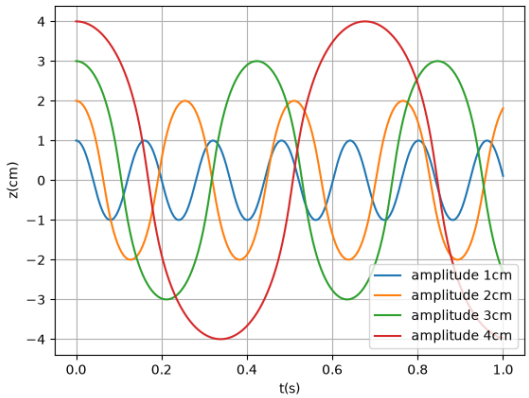
1. L'aimant est soumis à la force magnétique ($E_{pm} = -C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$), au poids ($E_{pp} = 0$ car le mouvement est horizontal) et à la réaction du fil qui ne travaille pas (absence de frottements). Donc le système est conservatif et $E_p = -C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$.
   Sa vitesse vaut $\dot{z}(t)\vec{e}_z$ donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 - C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$
2. 

   On voit que :
   — si $E_m < 0$, le mouvement est borné
   — si $E_m > 0$, le mouvement est non borné
3. $\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + 3\frac{Cdz(t)\dot{z}(t)}{(d^2+z(t)^2)^{5/2}}$ d'où on tire l'équation différentielle

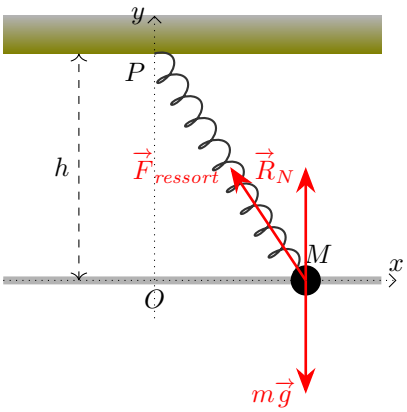
$$m\ddot{z}(t) + \frac{3Cdz(t)}{(d^2+z(t)^2)^{5/2}} = 0$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
m,g,d,C=12e-3,10,2e-2,1.5e-6
def derivee(inconnues,t):
    z,zp=inconnues
```

```
    zpp=-3*C*d*z/m/(d**2+z**2)**2.5
    return [zp,zpp]
plt.figure()
tab_t=np.linspace(0,1,1000)
for i in range(1,5):
    CI=[i*1e-2,0]
    solution=scipy.integrate.odeint(derivee,CI,tab_t)
    tab_z=solution[:,0]
    plt.plot(tab_t,tab_z*1e2,label="amplitude "+str(i)+"cm")
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("z(cm)")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



Corrigé de l'exercice M4.12 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**]



1. La masse est soumise aux actions suivantes :
   - son poids, conservatif, d'énergie potentielle $m.g.y(t) = 0$ si on prend l'altitude nulle en O
   - la force du ressort (qui a pour longueur $\sqrt{h^2+x(t)^2}$), conservative avec $E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2+x(t)^2}-\ell_0\right)^2$
   - la réaction de la tige, qui ne travaille pas (pas de frottements)

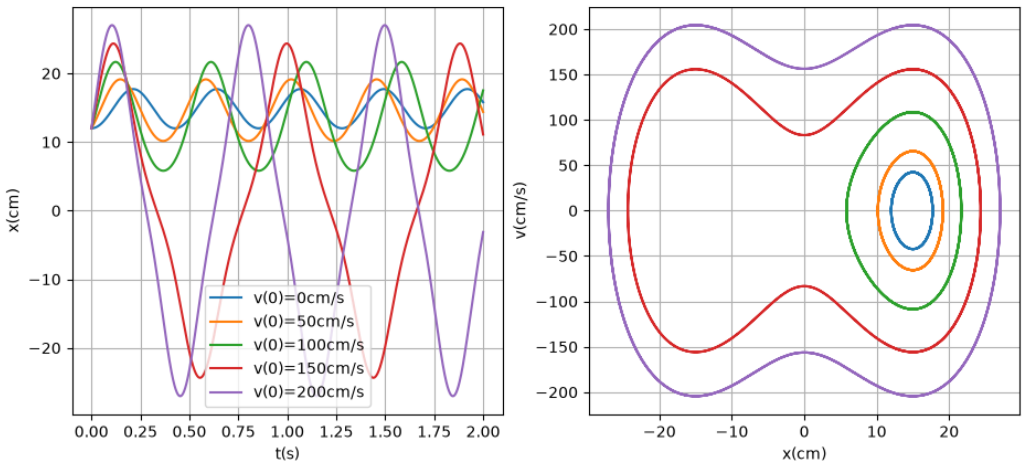
   on en déduit que le système est conservatif, et $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2+x(t)^2}-\ell_0\right)^2 = \text{cst}$
2. On dérive par rapport au **temps** : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + k\left(\sqrt{h^2+x(t)^2}-\ell_0\right)\frac{2x(t)\dot{x}(t)}{2\sqrt{h^2+x(t)^2}}$ et on simplifie par $\dot{x}$ pour trouver $m\ddot{x}(t) + \frac{kx(t)}{\sqrt{h^2+x(t)^2}}\left(\sqrt{h^2+x(t)^2}-\ell_0\right) = 0$
3. $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{kx}{\sqrt{h^2+x^2}}\left(\sqrt{h^2+x^2}-\ell_0\right) = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $\sqrt{h^2+x^2}-\ell_0 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\ell_0^2-h^2}$ quand c'est possible, c'est-à-dire lorsque $h < \ell_0$

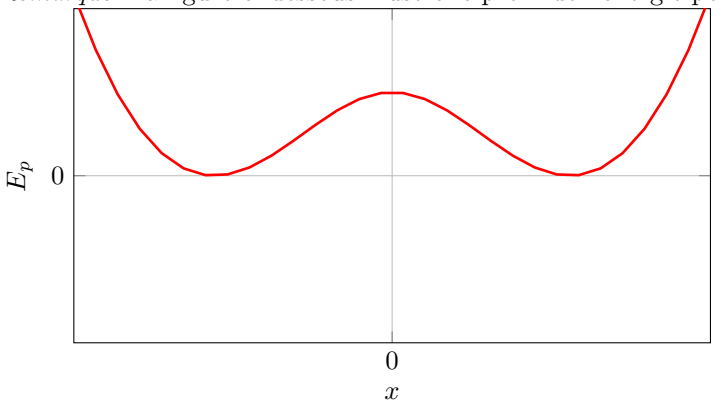
4. Exemple avec `odeint` :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
m,k,l0=0.16,70,0.21
h=0.7*l0
def derivee(inconnues,t):
    x,xp=inconnues
    xpp=-k/m*x/np.sqrt(x**2+h**2)*(np.sqrt(x**2+h**2)-l0)
    return [xp,xpp]
plt.figure()
ax1=plt.subplot(1,2,1)
ax2=plt.subplot(1,2,2)
tab_t=np.linspace(0,2,1000)
for i in range(0,5):
    CI=[12e-2,i*50e-2]
    solution=scipy.integrate.odeint(derivee,CI,tab_t)
    tab_x=solution[:,0]
    tab_xp=solution[:,1]
    ax1.plot(tab_t,tab_x*1e2,label="v(0)="+str(i*50)+"cm/s")
    ax2.plot(tab_x*1e2,tab_xp*1e2)
ax1.set_xlabel("t(s)")
ax1.set_ylabel("x(cm)")
ax2.set_xlabel("x(cm)")
ax2.set_ylabel("v(cm/s)")
ax1.grid()
ax2.grid()
ax1.legend()
plt.show()
```



Le système reste dans un puits de potentiel tant que $\dot{x}(0) \leq 100\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ puis oscille entre 2 puits.

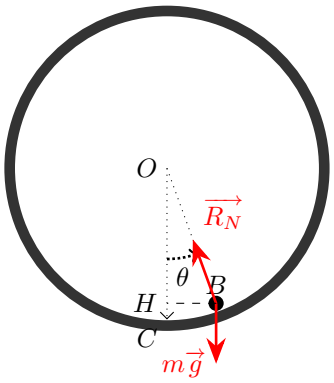
Remarque : la figure ci-dessous illustre le profil de l'énergie potentielle dans le cas $\ell_0 > h$:



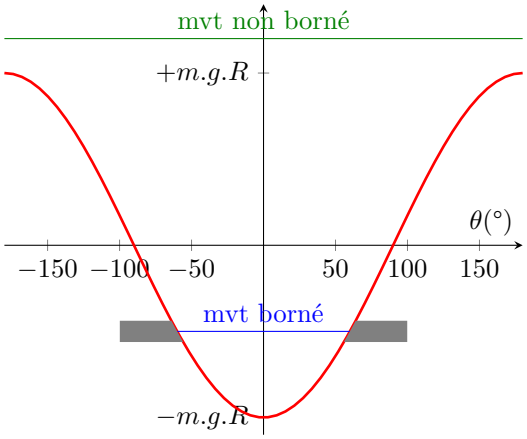
On y voit bien que le mouvement est borné soit d'un seul côté (si $E_m < E_p(0)$) soit en passant des deux côtés.

Corrigé de l'exercice M4.13 : Une bille dans une machine à laver [**]

1. La bille est soumise à la réaction du support, qui ne travaille pas en l'absence de frottements, et au poids qui est conservatif d'énergie potentielle $-m.g.OH = -m.g.R.\cos\theta(t)$ en prenant l'origine des altitudes au centre du cercle (H étant le projeté orthogonal de B sur l'axe vertical passant par O).
Donc la bille est un système conservatif, et son énergie potentielle vaut $E_p = -m.g.R.\cos\theta(t)$.



2. Le profil est le suivant :



On voit que le mouvement est borné si $E_m < mgR$ et non borné sinon (quoiqu'en réalité, la bille risque de se décoller de son support en haut).
Si la bille part de $\theta = 0°$ avec $E_p(0) = -m.g.R$, une condition nécessaire pour atteindre le sommet est d'avoir $E_m \geq E_p(180°) = +m.g.R$ soit $E_c > 2mgR$ et $v(0) > \sqrt{4gR}$

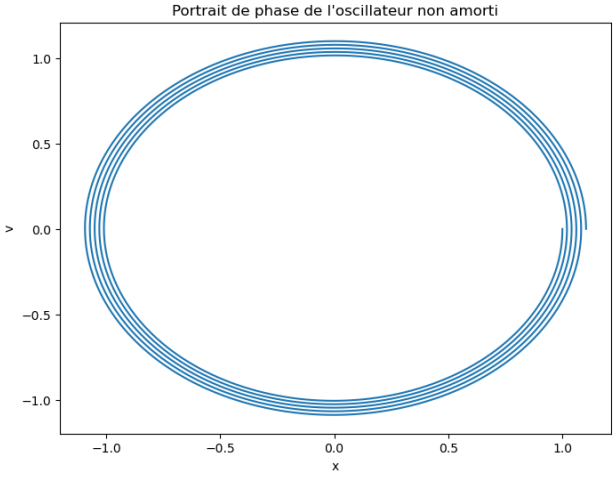
3. $\mathcal{s}(t) = R.\theta(t)$ donc $v = R.\dot{\theta}(t)$ et $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}(t)^2$

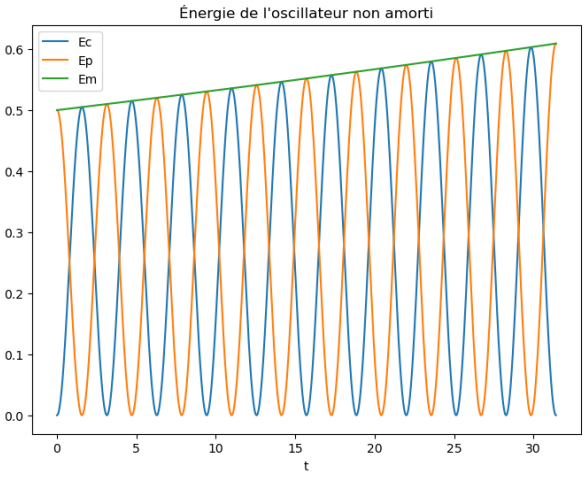
4. On a donc $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}(t)^2 - m.g.R.\cos\theta(t) = \text{cst}$ donc en dérivant par rapport au temps, $mR^2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta} + m.g.R.\dot{\theta}(t).\sin\theta(t) = 0$ d'où (en simplifiant par $\dot{\theta}$) l'équation $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{R}\sin\theta(t) = 0$.

Réponses aux TDs numériques

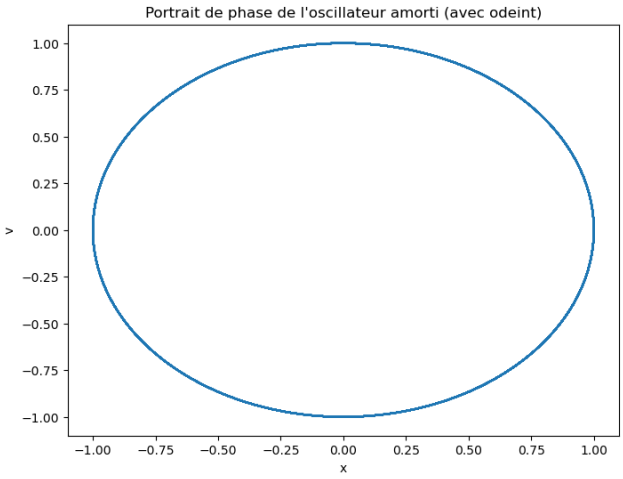
Réponses au TD d'info : Oscillateur harmonique

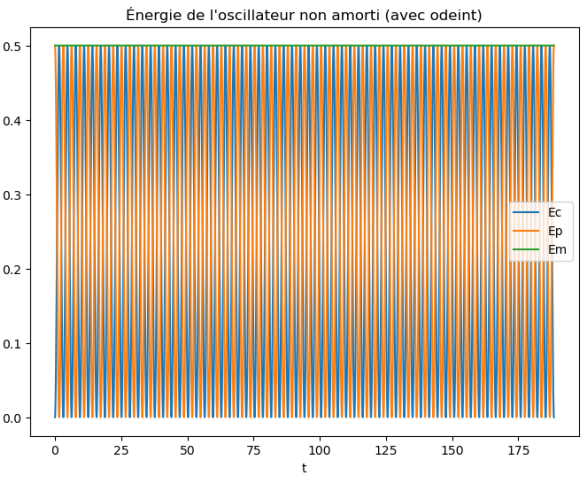
Méthode d'Euler pour un OH non amorti : les oscillations croissent, l'énergie mécanique augmente, ce qui n'est pas réaliste :



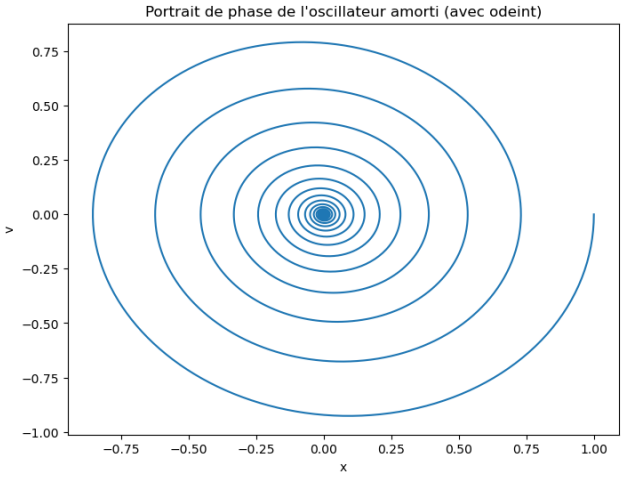


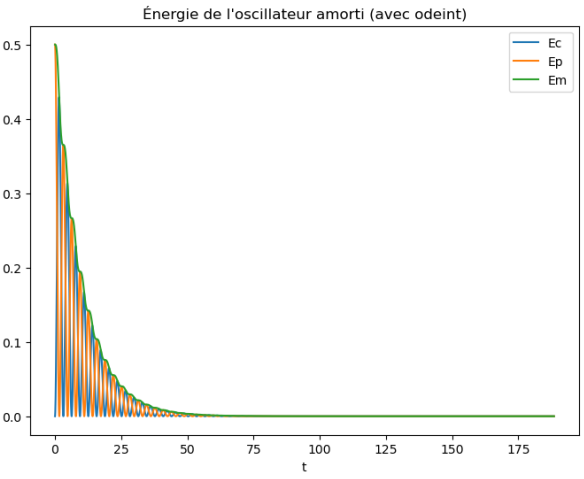
Avec odeint, c'est beaucoup plus précis, et on ne voit quasiment plus la croissance de l'énergie :





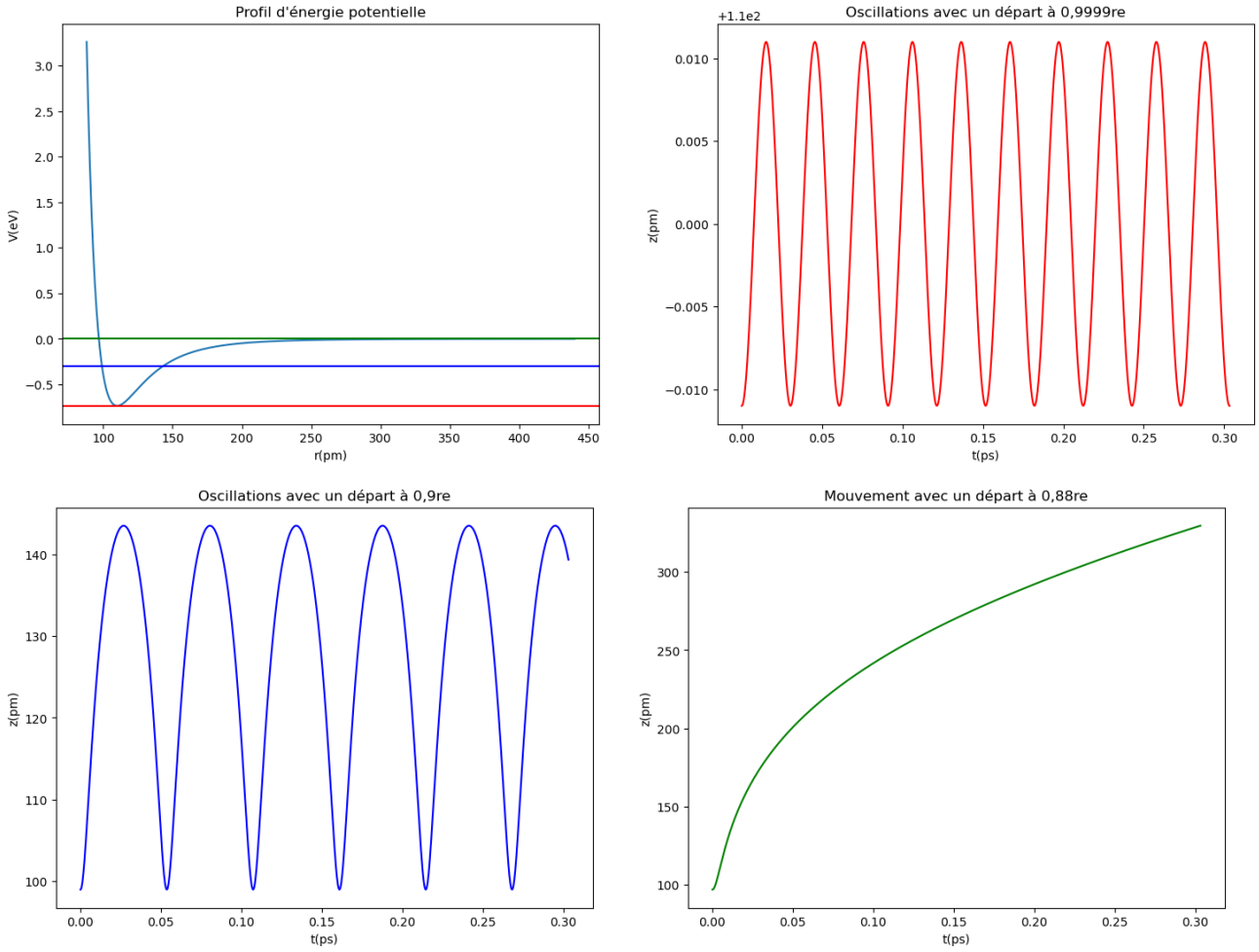
Avec un OH amorti, l'énergie décroît elle aussi :





Réponses au TD d'info : Oscillateur non harmonique

On trouve que $A = \frac{\pi^2 f_0^2 m r_e^8}{12} = 5{,}2 \times 10^{-79}$ USI. Le profil d'énergie potentielle est :



Les simulations pour une énergie au fond du trou donnent les oscillations quasi harmoniques de fréquence f_0. Si l'énergie augmente, la période augmente et la courbe devient non sinusoïdale. Si l'énergie dépasse 0, l'atome part à l'infini.

$V_{min} = V(r_e) = -\frac{2A}{5r_e^6} = 0{,}7\,\text{eV}$ est l'énergie de la molécule au repos ; c'est aussi l'énergie qu'il faut lui fournir pour la dissocier (passer la barrière d'énergie pour éloigner les atomes à l'infini). En fait les tables donnent une énergie de dissociation de $494\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ soit 5,1 eV : ce modèle est peu exact.

Thermodynamique

Chapitre T1 Bases de la thermodynamique

Programme p.502

Conseils p.503

Cours p.486
- T1.A. Description d'un système thermodynamique
- T1.B. Le premier principe de la thermodynamique
- T1.C. Étude des transformations classiques

QCMs p.504

Exercices p.509

T1. Bases de la thermodynamique

Cours

La mécanique nous a permis d'établir les lois qui régissent le mouvement des objets. Elle nous permettra bientôt, par exemple, de prédire le mouvement d'un corps céleste en orbite autour d'un point fixe.

En réalité, quand la Terre tourne autour du Soleil, la Terre **et** le Soleil sont en mouvement. Pour décrire correctement ce système, il faut écrire deux fois le PFD, et résoudre un système d'équation couplées. Dans le cas de deux objets en interaction, il existe une théorie, la *théorie du mobile fictif*, qui permet de résoudre encore une fois le mouvement de façon analytique.

Mais la Terre n'est pas la seule dans le système solaire. Elle est soumise aussi à l'attraction des autres planètes. On n'est donc pas dans le cadre d'un « système à 2 corps », mais d'un « système à N corps ». Les équations deviennent alors de plus en plus complexes. Mais surtout, Poincaré a montré que, dès que $N \geq 3$, le système devient *chaotique* : la prédiction du mouvement est impossible sur une durée supérieure à quelques périodes.

Il est donc impossible de prédire exactement le comportement d'un système à plus de 12 degrés de liberté (1 particule = 3 ddl de position + 3 ddl de vitesse, soit 6 ddl). C'est James Clerk Maxwell qui a compris qu'un système à N degrés de liberté peut être décrit de façon globale, sans les détails, lorsque N devient très grand. Prenons l'exemple d'un gaz : il contient une quantité de particules impossible à imaginer. Mais a-t-on besoin de connaître la position et la vitesse de chacune ? Ou peut-on se contenter de connaître des propriétés moyennes de ce gaz ?

En fait, la thermodynamique avait commencé bien avant Maxwell. Après la fabrication des premières machines à vapeur par Newcomen puis Watt au XVIIIe siècle, s'est posée la question de traduire scientifiquement ce qu'on appelle à l'époque les *transferts de calorique* ou *transferts de chaleur* — le calorique étant un fluide que l'on imagine transporter la chaleur à travers la matière. La *thermodynamique* — science de la dynamique de la chaleur — naît ainsi, et son aspect théorique commence vraiment lorsque Sadi Carnot écrit son mémoire sur la force motrice du feu en 1824. D'autres scientifiques continueront ses recherches — Joule, Kelvin, Clausius,...et établiront des lois. Mais jusque-là, une notion essentielle manque encore : quasiment personne ne croit que la matière est composée d'atomes.

Il faudra attendre Maxwell en 1860, avec sa théorie cinétique des gaz, puis Boltzmann en 1877, pour traduire enfin une idée avancée déjà timidement par Joule puis Clausius : la matière est constituée d'atomes, qui forment des molécules, et la thermodynamique ne fait que traduire la dynamique globale de ces constituants. Il y a des milliards de milliards de milliards d'atomes dans un gaz ; on ne sait où ils sont, ni ou ils vont, mais on sait décrire comment ils se comportent *en moyenne*. C'est là la base sous-jacente qui explique les lois de la thermodynamique.

Dans notre étude cette année, nous ne suivrons pas la démarche historique et ses fausses notions. Nous partirons tout de suite de l'hypothèse, jugée si farfelue au milieu du XIXe siècle, que la matière est constituée d'atomes, qui grouillent en tous sens à l'échelle microscopique, mais que nous ne voyons pas.

T1.A. Description d'un système thermodynamique

A.1. Définitions générales

Commençons par définir ce qu'on entend par *système thermodynamique*.

Définition : Système

Un système est une portion de l'univers limités par une frontière. On peut distinguer l'intérieur et l'extérieur de ce système.

Exemple : l'air de la pièce, la tasse de café, le moteur,...

Définition : Système thermodynamique

Un système thermodynamique est un système possédant un très grand nombre de degrés de liberté.

Remarque : Le plus souvent, on a 6 ddl par atome.

Remarque : Dans l'absolu, les lois de la thermodynamique ne s'appliquent qu'à des systèmes dont le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini.

Une notion importante est celle de *système fermé* ; on étudiera à la fin de cette année les systèmes ouverts, et leur étude sera plus difficile :

Définition : Système fermé

Un système est fermé s'il n'échange pas de matière avec l'extérieur ; dans le cas contraire, il est ouvert.

Voilà donc un système thermodynamique fermé. Il contient plein d'atomes. Chaque atome a une position et une vitesse à un instant donné ; personne n'en connaît la liste, mais il n'empêche que cette liste existe : on l'appelle l'état microscopique du système.

Maintenant, quand on entre dans une pièce, peu nous importe où se trouve la particule n° 1868299025479202098981. Par contre, ce qui nous intéresse, c'est : est-ce qu'il fait froid/chaud, est-ce qu'il y a des courants d'air, est-ce qu'il y a une drôle d'odeur,… c'est-à-dire des propriétés générales qu'on peut caractériser par des variables à notre échelle : température, vitesse, concentration en divers composants volatils,…

Définition : État microscopique/macroscopique d'un système

L'état microscopique d'un système consiste en la description de l'état complet (position, vitesse, etc.) de chacun de ses constituants. Cet état est impossible à connaître, mais il existe.
L'état macroscopique d'un système thermodynamique est donné par quelques **variables** dites **thermodynamiques** qui le décrivent dans son ensemble : pression, température, volume, concentration, ….

Remarque : L'air de la pièce dans laquelle je me trouve est décrit macroscopiquement par des variables thermodynamiques qui varient lentement. Par conséquent, entre l'instant actuel et 1 s plus tard, son *état macroscopique* a peu voire pas changé ; par contre son *état microscopique* a beaucoup changé, car les atomes et les molécules ont bougé. Cela fait comprendre cette notion essentielle : **à un état macroscopique correspondent une très grande quantité d'états microscopiques**. [1]

Nous allons définir dans la suite certaines de ces variables thermodynamiques. Mais avant, il faut remarquer qu'elles se classent en 2 catégories bien distinctes :

Définition : Variables extensives

On appelle variable/grandeur extensive une variable thermodynamique qui décrit le système dans son ensemble, et s'ajoute lorsqu'on prend l'union de deux systèmes [a].

a. **Distincts**, c'est toujours sous-entendu.

Exemple : le volume. Si on prend comme système l'air d'une pièce, il a un seul volume qui le décrit. Si le système est l'union de deux pièces, le volume total est la somme des deux volumes. Donc le volume est une variable extensive.

On peut aussi citer : la masse, le nombre de particules, la quantité de matière (nombre de moles), la charge électrique, et bientôt nous verrons l'énergie, mais pour l'instant on la laisse de côté.

Définition : Mole

Une mole d'une entité quelconque (atome, molécule,…) correspond à $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ entités. $\mathcal{N}_A$ s'appelle le *nombre d'Avogadro*.

Dans la suite, on notera souvent N le nombre de particules d'une entité et n son nombre de moles.

Définition : Masse molaire

La masse molaire d'une entité, souvent notée M, est la masse d'une mole de cette entité. Si on note m la masse d'une entité, alors $M = \mathcal{N}_A.m$.

Remarque : Par définition de la mole, la masse molaire du carbone 12 est $12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Par opposition, il y a les :

1. Très grande ? Pire que ça : pour 1 mol de gaz, soit $\mathcal{N}_A = 6 \times 10^{23}$ particules, le nombre d'états microscopiques possibles est de l'ordre de $\mathcal{N}_A$! soit environ un 1 suivi de 10^{25} zéros…n'essayez même pas d'imaginer ce nombre.

Définition : Variables intensives

On appelle variable/grandeur intensive une variable thermodynamique qui décrit le système localement (c'est un champ), et qui ne varie pas si on prend l'union [a] de deux systèmes.

a. L'union par la pensée ; à ne pas confondre avec un mélange.

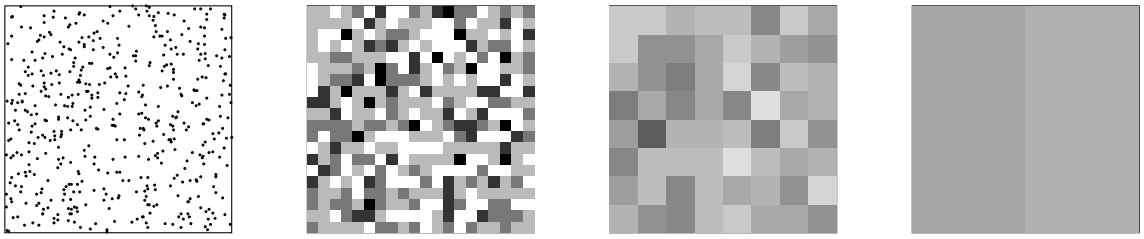
La température, par exemple, est définie en chaque point : dans une pièce, il peut y avoir un coin chaud et un coin froid. On ne peut pas parler de la température de la pièce, à moins qu'elle soit la même partout (cf. plus loin, système homogène). Mais a priori, la température est bien définie en chaque point, et elle ne dépend pas du fait que le système choisi est la salle A, ou bien les salles A et B.

Dans le même ordre d'idée, on a la pression, mais aussi tous les quotients de deux variables extensives : la masse volumique (masse/volume), le volume massique (volume/masse), la concentration (quantité de matière / volume), la fraction massique (masse d'un composant / masse totale) ou molaire, …Mais comment le quotient de deux grandeurs extensives, donc définies sur tout le système, peut-il donner une variable intensive, donc définie localement ? En fait, on a trois échelles de description d'un système thermodynamique :

— l'échelle microscopique est celle des entités élémentaires (atomes, molécules), de l'ordre du nanomètre
— l'échelle macroscopique est celle sur laquelle les grandeurs intensives varient. Par exemple dans une pièces remplie d'air, la température varie sur quelques décimètres ; dans certains systèmes plus inhomogènes, on peut descendre jusqu'au dixième de millimètre
— entre les deux, on définit une échelle *mésoscopique* : sur cette échelle, on a suffisamment d'entités élémentaires pour pouvoir définir des variables thermodynamiques, mais sa taille est suffisamment petite pour qu'on puisse considérer ces variables comme uniformes (le système mésoscopique est homogène). Cette échelle est souvent de l'ordre du micromètre

Si cette échelle mésoscopique existe, alors on peut définir un petit volume d'échelle mésoscopique, appelé *volume de moyennage*, et en chaque point on calcule la valeur de la grandeur intensive sur le volume de moyennage qui l'entoure (cf. figure T1.1). Même les variables comme la température ou la pression ne sont pas vraiment définies en un point, mais sur un volume de moyennage, car elles ne peuvent être définies que sur un grand nombre de particules.

FIGURE T1.1 : Influence du volume de moyennage pour définir la masse volumique d'un système : il ne doit être ni trop petit (sinon il n'y a pas assez de particules à moyenner) ni trop grand (sinon on perd toute précision).



Position des particules | Moyennage sur un petit volume | Moyennage sur un volume moyen | Moyennage sur un gros volume

Définition : Masse volumique

La masse volumique d'un système est le quotient de sa masse par son volume : $\rho = \frac{m}{V}$ en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
On définit aussi parfois le volume massique, qui est l'inverse : $v = \frac{V}{m}$ en $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$.

Définition : Température

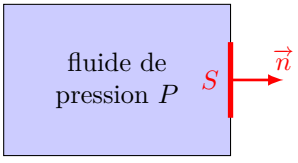
La température est une variable intensive qui caractérise l'agitation désordonnée des atomes. Son unité est le Kelvin K, on utilise aussi la température en degrés Celsius : $\theta(^\circ\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273{,}15$

Définition : Pression

La pression caractérise la force exercée par un fluide sur une paroi en contact avec lui : un fluide de pression P exerce sur une surface S de vecteur normal $\vec{n}$ une force

$$\vec{F} = P.S.\vec{n} \qquad \text{(T1.1)}$$

La pression se mesure en Pascal : $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N \cdot m^{-2}}$ ou en bar : $1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.



Remarque : Il existe d'autres unités moins courantes : l'atmosphère ($1\,\mathrm{atm} = 1{,}013\,\mathrm{bar}$) et le millimètre de mercure (unité encore utilisée dans les pays anglo-saxons : $760\,\mathrm{mmHg} = 1\,\mathrm{atm}$).

Définition : Système homogène

Un système est homogène si **toutes les variables intensives** sont indépendantes de la position.

Évidemment, cela dépend de la précision avec lequel on étudie le système. En première approximation, on peut considérer que l'air de la pièce dans laquelle on est est un système homogène. Mais si on veut être précis, on remarquera que la température est plus élevée au plafond qu'au sol (l'air chaud monte), et que la pression est plus faible au plafond qu'au sol. En pratique, cette année, on travaillera le plus souvent sur des systèmes considérés comme homogènes. Sinon, il faut les découper en petits morceaux sur lesquels on peut les considérer comme homogènes (échelle mésoscopique), ce qui complique l'étude.

Mais les grandeurs (extensives ou intensives) peuvent aussi dépendre d'un autre paramètre : le temps.

Définition : Système à l'équilibre

Un système est à l'équilibre si **toutes les variables** (intensives et extensives) ne varient pas avec le temps.

Là encore, cette notion est relative à l'expérience qu'on fait, et à la durée de l'observation. L'air d'une salle de classe, par exemple, est à l'équilibre si on effectue une expérience durant 1 minute. Sur 2h de cours, c'est moins vrai, car les taupins chauffent du cerveau et réchauffent l'air. Sur 1 année, c'est encore moins vrai, car l'été, c'est un four.

Il sera donc toujours très important de considérer la durée d'une expérience en thermodynamique, car les lois de la thermodynamiques qu'on va voir s'appliquent toujours à des systèmes à l'équilibre, du moins sur la durée de l'expérience.

Remarque : Dans un système à l'équilibre, c'est l'état **macroscopique** qui ne varie pas ; mais l'état **microscopique** varie beaucoup : les atomes sont en mouvement incessant.

Remarque : En thermodynamique, on ne tient pas compte, le plus souvent, des mouvements d'ensemble du système. Par exemple, la salle de classe est entraînée avec la Terre dans deux mouvements : la rotation de la Terre sur elle-même, et sa révolution autour du Soleil. Mais cela n'a pas d'importance dans l'étude de ses propriétés thermodynamiques.

A.2. Coefficients thermoélastiques

On va introduire dans cette partie quelques coefficients qui permettent de décrire comment certaines variables dépendent les unes des autres.

! Dans toute cette section, on travaille sur un système fermé, ce qui se traduit par n=cst(quantité de matière constante, pour chaque constituant).

Coefficient de dilatation isobare

Définition : Coefficient de dilatation isobare

Pour un système fermé, on définit le coefficient de dilatation isobare

$$\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n} \text{ en K}^{-1} \qquad \text{(T1.2)}$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la température augmente de dT à pression constante, alors le volume augmente de d$V = V\alpha \mathrm{d}T$.

Un peu de maths : Dérivées partielles et variables constantes

Que signifie $\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n}$? La dérivée partielle du volume V par rapport à la température T, mais pourquoi ce $)_{P,n}$? En thermodynamique, il y a beaucoup de variables qui dépendent toutes les unes des autres. Si on écrivait simplement $\frac{\partial V}{\partial T}$, ce serait la dérivée partielle de V par rapport à T en maintenant constantes **toutes les autres variables**. Or c'est impossible : si T varie mais P ne varie pas, alors par exemple l'énergie du système (qu'on notera bientôt U) varie ; à l'opposé, si on fait varier T à énergie constante, alors P varie. Donc en thermodynamique, une dérivée partielle se fera toujours en gardant seulement un certain nombre des autres variables constantes ; on précise ces variables à droite. Bien évidemment, il s'agit pour nous d'une notion essentiellement expérimentale. Dans les calculs, cela se traduit de façon très compliquée.

Ce coefficient traduit donc la variation de volume d'un système en fonction de la température. Il est normalisé par $\frac{1}{V}$ de manière à avoir un coefficient qui ne dépend pas de la taille du système. Ainsi, on pourra lire dans un livre de

données thermodynamiques que pour le cuivre à 25 °C sous 1 bar, $\alpha = 17 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Cela signifie que quand on élève la température d'1 cm^3 de cuivre de 1 K, son volume augmente de $17 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}^3$; si on pratique la même élévation de température sur un volume de 2 cm^3, la variation de volume sera double, mais le α reste le même. Ainsi, on a des tableaux donnant le coefficient α pour la plupart des corps purs.

Remarque : Si un système voit sa température varier de ΔT, de combien augmente son volume ? A-t-on le droit d'appliquer la formule $\Delta V = V.\alpha.\Delta T$ même si ΔT n'est pas petit ? En pratique, si α est constant, on peut le faire tant que $\Delta T \ll \frac{1}{\alpha}$. Par exemple pour le cuivre, $\frac{1}{\alpha} = 59\,000\,\mathrm{K}$: aucun souci pour les cas concrets, on ne chauffe jamais autant le cuivre.

Dans le cas où ΔT n'est pas petit devant $\frac{1}{\alpha}$, ou bien si on tient compte de la variation (très faible) de α avec la température, on écrit que $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \alpha(T)\mathrm{d}T$ et on intègre entre l'état initial (i) et final (f) : $\ln \frac{V_f}{V_i} = \int_{T_i}^{T_f} \alpha \mathrm{d}T$.

Remarque : Si un système passe de T_i à T_f, alors sa variation de température en Kelvins vaut $\Delta T = T_f - T_i$. On peut aussi l'écrire $\Delta T = (T_f - 273) - (T_i - 273)$ sans rien changer, ce qui montre qu'**une différence de température a la même valeur qu'on la calcule en** K **ou en** °C. Ce n'est vrai que pour une **différence** de température.

! Si un exercice ne fait intervenir les températures **que sous forme de différences de températures**, alors on a le droit de garder des degrés Celsius ; sinon, il faut absolument tout mettre en Kelvin.

Exemple : Dilatation d'un bloc de fer

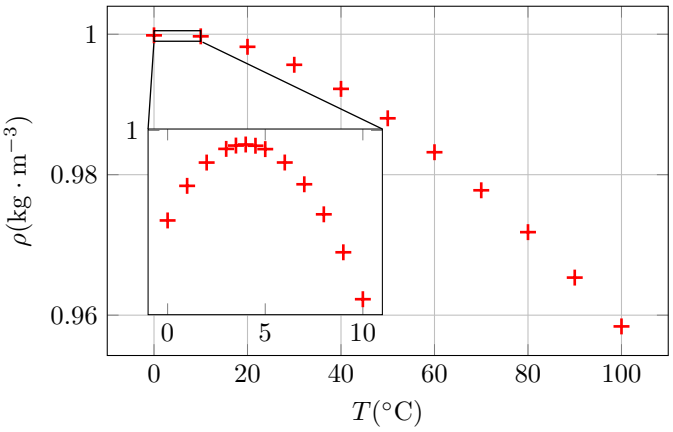
À 25 °C sous 1 bar, $\alpha_{Fe} = 1{,}4 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et $\rho_{Fe} = 7874\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On prend un bloc de fer de masse $m = 200\,\mathrm{g}$ sous 1 bar.

1. Calculez son volume à 25 °C (gardez 4 chiffres significatifs).
2. Calculez son volume à 200 °C.
3. Calculez sa masse volumique à 200 °C.

1. $V_{25} = \frac{0{,}2}{7874} = 2{,}540 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 = 25{,}40\,\mathrm{cm}^3$
2. $V_{200} = V_{25} + V_{25}\alpha_{Fe}\,(200 - 25) = 25{,}46\,\mathrm{cm}^3$
3. $\rho_{200} = \frac{0{,}2}{2{,}546 \times 10^{-5}} = 7855\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

On a l'habitude de matériaux qui se dilatent quand on les chauffe, c'est-à-dire que leur volume augmente avec la température ; pour de tels matériaux, le coefficient α est positif. C'est le cas le plus courant, mais il existe des matériaux à α négatif : quand on les chauffe, ils se contractent. Le cas le plus connu est l'eau : la figure T1.2 montre que, entre 0 °C et 4 °C, la masse volumique de l'eau augmente avec la température, c'est-à-dire que pour une masse constante, le volume diminue, donc $\alpha < 0$; puis ce comportement change au-dessus de 4 °C. C'est pour cela que la masse volumique de l'eau n'est égale à $1{,}000\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$ qu'à 4 °C sous 1 bar ; à d'autres températures, elle est plus faible.

FIGURE T1.2 : Masse volumique de l'eau en fonction de la température, sous 1 atm.



Remarque : Pour un système tout en longueur (une tige par exemple), la variation de volume importe souvent peu : ce qui compte, c'est la variation de longueur du système. On peut alors définir le coefficient de dilatation linéique isobare : $\alpha_{lin} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_{P,n}$ où ℓ représente la longueur du système.

Coefficient de compressibilité isotherme

Une autre façon de faire varier le volume d'un système, c'est de le comprimer, c'est-à-dire de lui faire subir une augmentation de pression. Si on procède à température constante, alors tous les systèmes autour de nous se comportent de la même manière : leur volume diminue lorsqu'on les comprime.

Définition : Coefficient de compressibilité isotherme

Pour un système fermé, on définit le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,n} \text{ en Pa}^{-1} \qquad \text{(T1.3)}$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la pression augmente de $\mathrm{d}P$ à température constante, alors le volume varie de $\mathrm{d}V = -V\chi_T \mathrm{d}P$

Remarque : Tous les systèmes stables ont un χ_T positif (d'où le $-$ dans la définition) ; un système avec $\chi_T < 0$ est instable, il explose ou implose.

Le coefficient χ_T est homogène à l'inverse d'une pression, on l'exprime en Pa^{-1} ou en bar^{-1}. Comme dans le cas de α, l'inverse de χ_T donne une indication de la variation de pression maximale qu'on peut considérer comme petite : tant que $\Delta P \ll \frac{1}{\chi_T}$, on peut écrire que la variation de volume vaut $\Delta V = -V\chi_T \Delta P$. Par exemple, pour le cuivre à 25 °C sous 1 bar : $\chi_T = 8{,}6 \times 10^{-7}\,\text{bar}^{-1}$ donc $\frac{1}{\chi_T} = 1{,}1 \times 10^6$ bar.

Exemple : Compression d'un bloc de fer

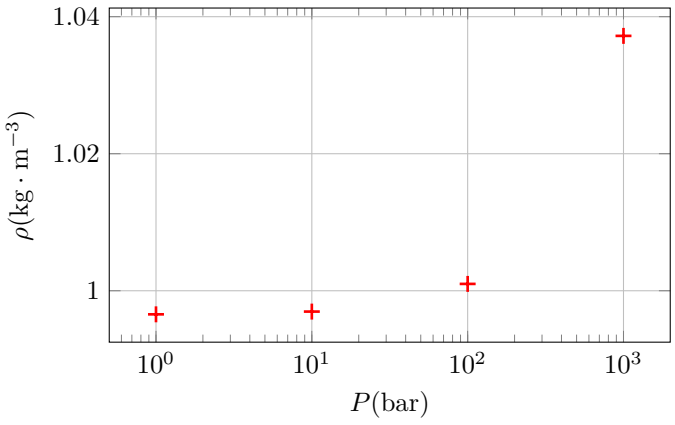
À 25 °C sous 1 bar, $\chi_{T,Fe} = 5{,}94 \times 10^{-7}\,\text{bar}^{-1}$ et $\rho_{Fe} = 7874\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On prend un bloc de fer de masse $m = 200$ g à 25 °C.

1. Calculez son volume sous 1 bar (gardez 6 chiffres significatifs).
2. Calculez son volume sous 100 bar.
3. Calculez sa masse volumique sous 100 bar.

1. $V_1 = \frac{0{,}2}{7874} = 2{,}540 \times 10^{-5}\,\text{m}^3 = 25{,}4001\,\text{cm}^3$
2. $V_{100} = V_1 - V_1\chi_{T,Fe}\,(100-1) = 25{,}3986\,\text{cm}^3$
3. $\rho_{100} = \frac{0{,}2}{2{,}539\,86\times10^{-5}} = 7874{,}5\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

La figure T1.3 montre la variation du volume de l'eau avec la pression ; elle est très faible.

FIGURE T1.3 : Masse volumique de l'eau en fonction de la pression, à 300 K.



Remarque : On peut définir pour un long système un coefficient de compressibilité linéique isotherme, mais vous définirez plutôt le module d'Young en seconde année.

Autre coefficient

Un troisième cas concret est celui où on fait varier la température d'un système en l'empêchant de faire varier son volume. Le coefficient correspondant n'a pas de nom particulier, parce qu'on le déduit toujours des deux autres.

Définition : Coefficient sans nom

Pour un système fermé, on définit le coefficient

$$\beta = \frac{1}{P}\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n} \text{ en } \mathrm{K}^{-1} \tag{T1.4}$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la température augmente de $\mathrm{d}T$ à volume constant, alors la pression augmente de $\mathrm{d}P = P\beta\mathrm{d}T$

Relation entre les trois coefficients (hors programme)

$$\beta = \frac{\alpha}{\chi_T P} \tag{T1.5}$$

Démonstration

On a vu que $\mathrm{d}V = \alpha V \mathrm{d}T$ si la température varie à pression constante, et $\mathrm{d}V = -\chi_T V \mathrm{d}P$ si la pression varie à température constante. Pour de petites variations, si T et P varient, alors les variations de volume s'ajoutent : $\mathrm{d}V = V\left(\alpha \mathrm{d}T - \chi_T \mathrm{d}P\right)$.
Si on veut que le volume reste constant, il faut que $\mathrm{d}V = 0$ donc $\alpha \mathrm{d}T = \chi_T \mathrm{d}P$ soit $\mathrm{d}P = \frac{\alpha}{\chi_T}\mathrm{d}T$. par identification avec la définition de β, on en déduit que $\frac{\alpha}{\chi_T} = \beta P$ d'où la relation $\beta = \frac{\alpha}{\chi_T P}$.

Ainsi pour du fer à 25 °C sous 1 bar, $\alpha = 1{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et $\chi_T = 5{,}94 \times 10^{-7}\,\mathrm{bar}^{-1}$ donc $\beta = \frac{1{,}5\times10^{-5}}{5{,}94\times10^{-7}} = 25\,\mathrm{K}^{-1}$. En pratique : si on veut maintenir un morceau de fer à volume constant, s'il s'échauffe de 1 °C alors il faut multiplier la pression par environ 25 pour le contenir : c'est énorme. Ce résultat est général : les coefficients β sont en général très grands, ce qui impose de très fortes contraintes si on veut empêcher un solide de se dilater. D'où les joints de dilatation observés sur les ponts ou les voies ferrées, les bâtiments, etc. (figure T1.4) ; si on n'en met pas, les fortes contraintes risquent de poser quelques problèmes (figure T1.5).

FIGURE T1.4 : Joints de dilatation.



(a) Pont routier (Crédit : Wikipedia/Ingolfson)



(b) LGV (Crédit : Wikipedia/N. Taveneaux)

FIGURE T1.5 : Canicule en Australie en 2009 : gare au β pour les vieux rails !



(a) *(Crédit : ?)*



(b) *(Crédit : P. Down)*

T1.B. Le premier principe de la thermodynamique

En plus des variables thermodynamiques déjà rencontrées, les systèmes thermodynamiques possèdent, comme tout système mécanique, une *énergie*. Nous allons, dans cette partie, préciser comment décrire l'énergie d'un système thermodynamique, et comment elle peut s'échanger.

Définition : Système isolé

Un système est isolé s'il n'a aucune interaction avec l'extérieur.

Remarque : Isolé et fermé sont deux notions très différentes et à ne pas confondre. Un système isolé est forcément fermé, mais la réciproque est fausse.

Un système non isolé a des interactions avec l'extérieur qui vont se traduire par des échanges d'énergie. Il existe deux façons d'échanger de l'énergie entre des systèmes : par travail ou par transfert thermique.

B.1. Transfert thermique, ou chaleur

Définition : Transfert thermique, ou chaleur

Deux systèmes à des températures différentes placés côte à côte peuvent échanger de l'énergie sans mouvement macroscopique de matière ; on dit qu'ils sont en **contact thermique**, ils échangent un **transfert thermique** noté Q, appelé aussi **quantité de chaleur**.

Exemple : si on pose une casserole d'eau sur une plaque chaude, l'eau se réchauffe par contact thermique à travers le fond de la casserole.

Définition : Paroi diatherme ou calorifugée

Une paroi est **diatherme** si elle permet le transfert thermique.
Une paroi est **calorifugée** (ou isolée thermiquement) si elle ne permet aucun transfert thermique.

Ces deux définitions sont des limites idéales. En fait, toute paroi permet de passage de la chaleur, mais sur des durées plus ou moins longues.

Définition : Évolution adiabatique

Un système qui n'a aucun échange par transfert thermique avec l'extérieur a une évolution **adiabatique**.

Ce modèle idéal dépendra encore une fois de la durée de l'expérience. Les transferts thermiques sont toujours lents, donc toute expérience suffisamment rapide pourra être considérée comme adiabatique.

Propriété : Équilibre thermique

Lorsque deux systèmes sont en contact thermique, l'équilibre thermique est atteint lorsque les deux sont à la même température.

Il s'agit d'une notion qu'on observe dans la vie de tous les jours. Certains le posent comme « principe zéro de la thermodynamique ».

B.2. Travail

Définition : Travail

Un travail est un échange d'énergie dû à une action de l'extérieur agissant sur des grandeurs variables du système.
Le plus souvent, il s'agit d'une grandeur intensive extérieure qui agit sur une variable extensive du système.

Bon, cette définition générale et abstraite n'est pas vraiment à retenir, on retiendra plutôt les cas concrets.

Propriété : Travail d'une force (rappel)

Une force extérieure $\vec{F}$ s'appliquant en un point M du système fournit au système un travail infinitésimal $\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, ou encore un travail $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

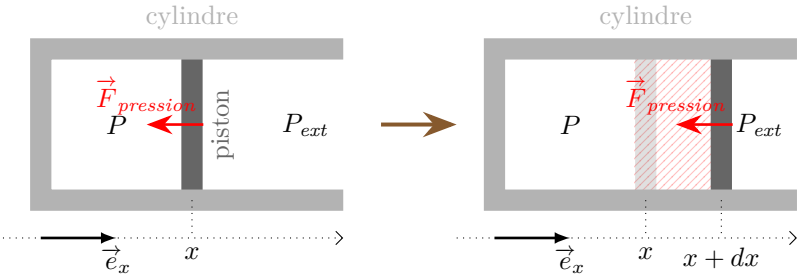
Propriété : Travail des forces de pression

Un système soumis à une pression extérieure P_{ext} et dont le volume varie de $\mathrm{d}V$ reçoit un travail infinitésimal $\delta W_{pression} = -P_{ext}.\mathrm{d}V$. Le travail total reçu de la part des forces de pression extérieure vaut donc

$$W_{pression} = -\int P_{ext}\mathrm{d}V \qquad \text{(T1.6)}$$

Démonstration

La démonstration n'est à connaître que dans le cas simple d'un système 1D ; la démonstration générale est inutilement compliquée et n'amène rien de plus.
Considérons le schéma qu'on va rencontrer très souvent, d'un fluide enfermé dans un cylindre fermé par un piston. Au niveau du vocabulaire à connaître : un cylindre désigne, en thermodynamique (et plus généralement dans les moteurs) un cylindre creux, dans lequel coulisse un autre cylindre appelé piston.



Sois S la surface du piston repéré par la position x ; le système étudié comprend l'intérieur du cylindre **plus le piston**. Il est soumis à la force de pression $\vec{F}_{pression} = -P_{ext}S\vec{e}_x$. Lorsque le piston se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$, le travail élémentaire vaut $\delta W_{pression} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -P_{ext}S\mathrm{d}x$. Or $S \times \mathrm{d}x$ représente le volume hachuré, c'est le volume gagné par le système, qu'on va noter $\mathrm{d}V$. On a donc bien $\delta W_{pression} = -P_{ext}\mathrm{d}V$.

Remarque : $\mathrm{d}V$ est algébrique : si le système gagne du volume, $\mathrm{d}V > 0$ et $\delta W_{pression} < 0$; si le système perd du volume, $\mathrm{d}V < 0$ et $\delta W_{pression} > 0$. Enfin, pour un système **indéformable**, le travail des forces de pression est **nul**.

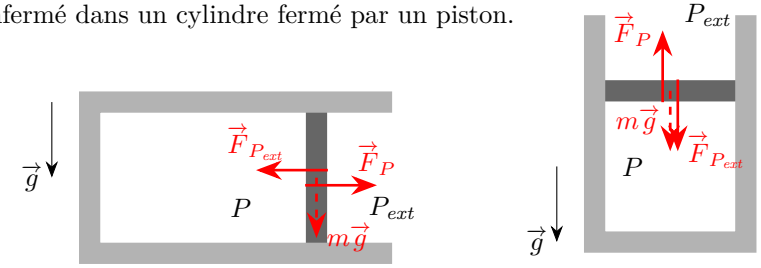
Remarque : L'intégrale n'est calculable que si on connaît l'évolution de P_{ext}. On verra plus tard divers cas classiques. On peut déjà retenir que, si $P_{ext} = \text{cst}$, alors on peut le sortir de l'intégrale : $W = -P_{ext}\int \mathrm{d}V = -P_{ext}(V_f - V_i)$.

Propriété : Équilibre mécanique de pression

Si deux systèmes sont séparés par une paroi mobile libre (se déplaçant sans frottements solides) et de masse négligeable, l'équilibre mécanique est atteint lorsque les pressions des deux systèmes sont égales.

Démonstration

Considérons encore un gaz enfermé dans un cylindre fermé par un piston.



Dans les deux schémas ci-dessus, le fluide enfermé dans le cylindre est à la pression intérieure P et l'extérieur est à la pression P_{ext} (on utilisera le plus souvent ces notations). Alors le piston de surface S est soumis d'un côté à une force PS de l'intérieur vers l'extérieur, et de l'autre côté à une force $P_{ext}S$ de l'extérieur vers l'intérieur. À l'équilibre du piston, la somme des forces est nulle donc $P = P_{ext}$.
Le cas est différent si on tient compte de la masse m du piston. Dans ce cas, rien ne change pour le cylindre

horizontal. Pour le cylindre vertical, on doit ajouter une force mg de haut en bas sur le piston. L'équilibre mécanique devient alors $PS - P_{ext}S - mg = 0$ donc $P = P_{ext} + \frac{mg}{S}$. On peut retenir cette simple règle : l'ajout d'une force F sur un piston est équivalente à rajouter une pression $\frac{F}{S}$ où S est la surface du piston ; cette règle fonctionne aussi pour le calcul du travail.

Propriété : Travail électrique

Si un système reçoit un courant i de la part d'un générateur extérieur de tension e, alors le travail infinitésimal reçu vaut $\delta W_{élec} = e.i.\mathrm{d}t = e.\mathrm{d}q$.

En pratique, on a rarement du travail électrique en thermodynamique. Le plus souvent, le seul travail à considérer est le travail des forces de pression, mais si l'énoncé parle d'autre travaux, il faut en tenir compte.

B.3. Premier principe

L'idée du premier principe est simple : l'énergie totale d'un système isolé se conserve. Imaginons une expérience : je laisse tomber une balle. Elle arrive par terre, rebondit une fois, roule un peu puis s'arrête. Un bilan d'énergie montre facilement que l'énergie mécanique de la balle a diminué : elle a perdu de l'énergie potentielle de pesanteur, et son énergie cinétique n'a pas varié, puisqu'elle était immobile avant que je la lâche, et qu'elle est encore immobile à la fin. Où est passée cette énergie ? S'est-elle enfuie par les fenêtres ? Non, je peux refaire la même expérience dans une pièce calfeutrée, calorifugée, bien isolée à tous les points de vue, cela ne changera rien. Si je veux continuer à croire en la conservation de l'énergie, je dois admettre que l'énergie mécanique s'est transformée en un autre type d'énergie, invisible : l'énergie interne, qui représente toute les énergies qui ne sont pas visibles à l'échelle macroscopique.

Premier principe de la thermodynamique

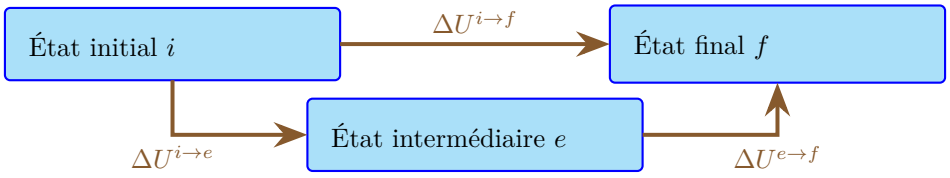
Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une fonction d'état U appelée **énergie interne** qui est extensive.
Lorsqu'un système **fermé** subit une transformation entre deux états d'équilibre au cours de laquelle il reçoit un travail total W et un transfert thermique (ou quantité de chaleur) Q, alors

$$\Delta\left(E_{macro} + U\right) = W + Q \qquad \text{(T1.7)}$$

où E_{macro} désigne toutes les énergies macroscopiques, entre autres l'énergie mécanique et l'énergie électrique.

Remarque : Il y a deux propriétés importantes de l'énergie interne qui sont postulées. D'abord, elle est extensive, donc l'énergie interne d'une somme de deux systèmes est égale à la somme de leurs énergies internes. D'autre part, c'est une fonction d'état, ce qui signifie que la variation de U entre deux états ne dépend que des états initial et final, et pas des étapes entre ces deux états. Par conséquent, si i est l'état initial, f l'état final et e un état intermédiaire quelconque voire fictif, on pourra écrire $\Delta U^{i\to f} = U_f - U_i = (U_f - U_e) - (U_e - U_i) = \Delta U^{i\to e} + \Delta U^{e\to f}$

FIGURE T1.6 : Illustration de la notion de fonction d'état.



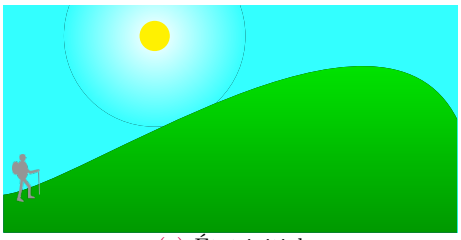
Remarque : **Travail et chaleur ne sont pas des fonctions d'état**. C'est-à-dire que si un système évolue et qu'on ne connaît que son état initial et son état final, on peut calculer $\Delta E_{macro} + \Delta U$ pour ce système, mais pas W et Q : ces grandeurs, qui désignent des **échanges d'énergie** (et non pas des énergies), dépendent du chemin suivi par le système pour aller de l'état initial à l'état final. Ainsi, sur la figure T1.7, pour atteindre le sommet, il faut avoir gagné une énergie potentielle $m.g.h$, mais cela demande plus ou moins d'efforts suivant le chemin suivi : le travail et la chaleur reçus par le marcheur ne sera donc pas le même, bien que les états de départ et de fin soient identiques.

Cela a une conséquence importante sur les notations :

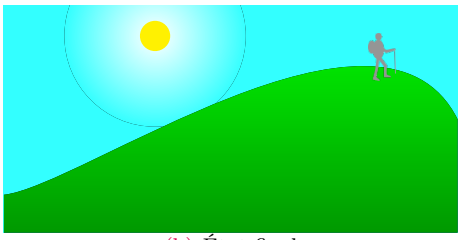
— l'énergie interne est définie en chaque état, donc sa variation sera notée ΔU ; mais W et Q sont définis **entre deux états**, on les notera donc sans Δ

— au niveau mathématique, cela se traduit par des histoires compliquées de différentielles « exactes » ou « inexactes ». Sans entrer dans les détails, notez que pour une petite variation, on notera $\mathrm{d}U$ mais δW et δQ.

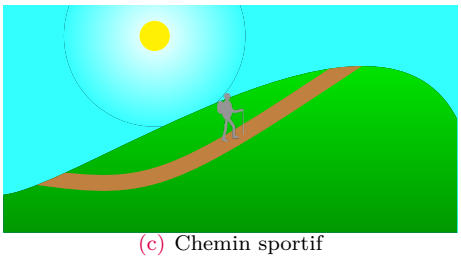
FIGURE T1.7 : L'énergie mécanique du marcheur est une fonction d'état, mais le travail qu'il a fourni, et la chaleur qu'il a dégagée en transpirant, dépendent du chemin suivi.



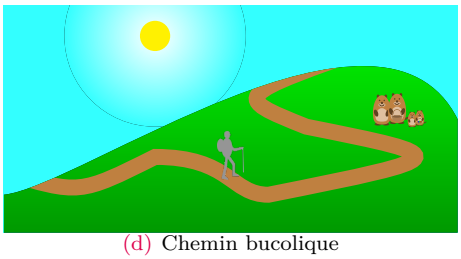
(a) État initial



(b) État final



(c) Chemin sportif



(d) Chemin bucolique

Remarque : Si un système S_1 reçoit de la part d'un système S_2 un travail W et un transfert thermique Q, alors on admet que le système S_2 reçoit de la part de S_1 un travail $-W$ et un transfert thermique $-Q$.

B.4. Capacité thermique/calorifique à volume constant

Quand on pose la question : où est passée l'énergie mécanique de la balle, la réponse qu'on obtient le plus souvent est : sous forme de chaleur.

En thermodynamique, la chaleur est un *transfert* d'énergie. Mais dans le langage courant, on confond chaleur et température. En fait, on pense souvent que l'énergie mécanique de la balle s'est transformée en une élévation de température. Eh bien, ce n'est pas si faux que cela, car si l'énergie interne dépend de l'état complet du système, donc de T, P, V,... elle dépend principalement de T, et beaucoup moins des autres variables. Cela nous amène à définir la dépendance de U par rapport à T sous forme d'un coefficient très important.

Définition : Capacité calorifique à volume constant d'un système

Pour un système, on définit la **capacité calorifique ou thermique** à volume constant (ou encore chaleur spécifique à volume constant)

$$C_v = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,n} \quad \text{en J} \cdot \text{K}^{-1} \tag{T1.8}$$

Son interprétation est : si la température du système varie de $\mathrm{d}T$ à volume constant, alors son énergie interne varie de $\mathrm{d}U = C_v \mathrm{d}T$. Autrement dit, C_v représente la quantité d'énergie interne à fournir pour que la température du système monte de 1 K sans changer le volume.
C'est une grandeur **extensive**.

Remarque : C_v dépend a priori de la température. Le plus souvent on le considèrera constant pour simplifier, ce qui fait qu'on pourra écrire même pour une grande variation de température : $\Delta U = C_v.\Delta T$

! Rappel : une différence de température a la même valeur en Kelvins ou en degrés Celsius : si la température augmente de 1 °C alors elle augmente de 1 K et non pas de 274 K ! Par conséquent, dans les calculs où les températures n'apparaissent que sous forme de différences, on peut utiliser les degrés Celsius.

Définition : C_v molaire et massique

Le C_v étant extensif, on définit les deux grandeurs intensives :

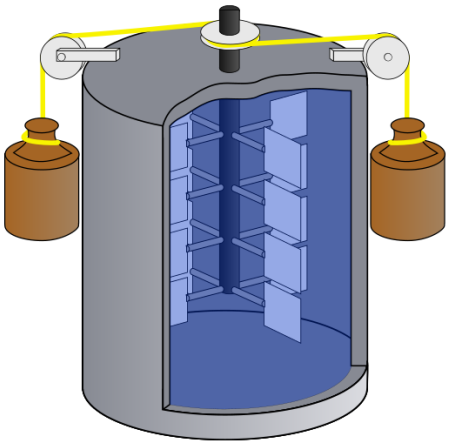
$$c_v = \frac{C_v}{m} \text{ (capacité massique) en } \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}} \tag{T1.9a}$$

$$C_{vm} = \frac{C_v}{n} \text{ (capacité molaire) en } \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \tag{T1.9b}$$

Remarque : On prendra toujours la convention suivante pour les grandeurs extensives :
- une majuscule pour la grandeur (U, C_v, ...)
- une minuscule pour la grandeur massique (u, c_v, ...) c'est-à-dire pour 1 kg
- un indice m pour la grandeur molaire (U_m, C_{vm}, ...) c'est-à-dire pour 1 mol

Les c_v et C_{vm} ont l'avantage de pouvoir être définis pour un corps pur. C'est Joule qui a mesuré la première capacité calorifique, à l'aide de l'expérience de la figure T1.8 : il a suspendu deux masses à des fils de manière à ce que, lorsque les masses tombent, cela entraîne la rotation de pales dans de l'eau enfermée dans un récipient calorifugé. À chaque chute des masses m d'une hauteur h, une énergie $2mgh$ est transférée à l'eau. En recommençant l'expérience de nombreuses fois puis en mesurant l'élévation de température de l'eau, on obtient $c_v(\text{eau}) = 4{,}18\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

FIGURE T1.8 : Transformation d'énergie mécanique en élévation de température.



Remarque : Il est important de savoir passer de la capacité thermique massique à molaire et vice-versa. C'est facile si on se souvient que, pour un système de masse m et de n moles, $C_v = nC_{vm} = mc_v$. Or le rapport $\frac{m}{n}$ vaut la masse molaire M. Donc $C_{vm} = M.c_v$

Exemple : Bouilloire électrique

Une bouilloire électrique contient $m = 1{,}1\,\mathrm{kg}$ d'eau de capacité calorifique massique $c_{ve} = 4{,}18\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}}$; l'intérieur de la bouilloire a pour capacité $C_{vb} = 310\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.
Au départ, l'eau et la bouilloire sont à 21 °C ; on alimente la bouilloire avec une tension de 220 V et une intensité de 12 A pendant 1 min. On suppose que la bouilloire et l'eau se réchauffent ensemble, et on note T leur température.

1. On définit comme système la bouilloire et l'eau qu'elle contient.
   Calculez la puissance électrique reçue, puis l'énergie reçue en 1 min.
2. On suppose que l'évolution est rapide donc adiabatique, et que le volume du système ne varie pas. Calculez, et la justifiant, la variation ΔU d'énergie interne du système.
3. Déduisez-en la température finale T.

1. $\mathcal{P} = 220 \times 12 = 2640\,\mathrm{W}$ est constante, donc le travail vaut $W_{élec} = \mathcal{P} \times 60 = 158{,}4\,\mathrm{kJ}$.
2. L'évolution est adiabatique donc $Q = 0$; et à volume constant donc $W_{pression} = 0$. Il n'y a aucune énergie macroscopique a priori. Donc le premier principe appliqué à l'eau pendant la durée de l'expérience indique que $\Delta U = W_{élec} = 158{,}4\,\mathrm{kJ}$.
3. Comme le volume est constant, on peut écrire $\Delta U = C_v.\Delta T = (m.c_{ve} + C_{vb})\,(T - 21)$ d'où on tire

$T = 53{,}3\,°\text{C}$

Remarque : En fait, le chauffage de la bouilloire se fait à pression constante plutôt qu'à volume constant. Nous allons voir dans la partie suivante comment traiter précisément ce cas.

T1.C. Étude des transformations classiques

C.1. Généralités sur les transformations

Définition : Transformation quasi-statique

Une transformation est dite quasi-statique si elle est effectuée suffisamment lentement pour que le système soit quasiment homogène à chaque instant. On dit parfois qu'on a une succession d'états d'équilibre du système, mais il n'y a pas forcément équilibre avec l'extérieur.

Ainsi, si on comprime un gaz, la pression s'homogénéise rapidement. Mais si on comprime un gaz de façon supersonique, on crée une onde de choc (le « bang » supersonique) et la pression est complètement inhomogène dans le gaz ; on ne peut plus parler alors de « la pression P du gaz ». De même, si on chauffe trop fort un côté d'un système, la température sera inhomogène et on ne pourra plus parler de « la température T du système ».

Une transformation quasi-statique prend donc le temps d'attendre l'équilibre interne du système ; mais il peut y avoir à chaque instant déséquilibre entre les pressions intérieures et extérieures, ou entre les températures intérieures et extérieures. Dans ce cas, le retour à l'équilibre du système va entraîner une *irréversibilité*, notions assez abstraite mais importante en thermodynamique.

Définition : Transformation réversible

Une transformation quasi-statique est réversible mécaniquement si le système est indéformable ou bien si, à chaque instant, la différence de pression (apparente) entre les deux côtés de toutes les parois mobiles est négligeable : $V = \text{cst}$ **ou** $P \approx P_{ext}$.
Une transformation quasi-statique est réversible thermiquement si elle est adiabatique ou bien si, à chaque instant, la différence de température entre les deux côtés de toutes les parois diathermes est négligeable : $Q = 0$ **ou** $T \approx T_{ext}$.

Remarque : Pression apparente = pression extérieure + $\frac{\text{autres forces}}{\text{surface}}$

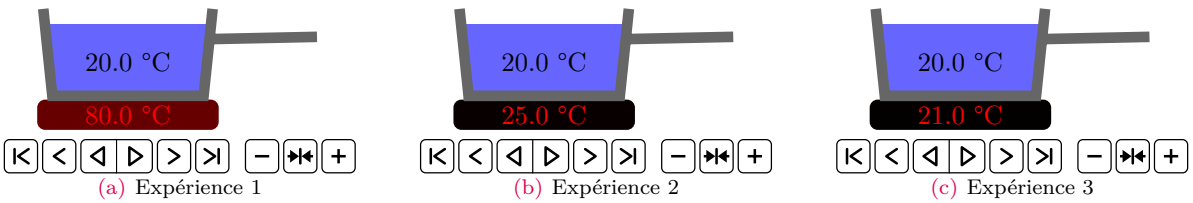
En gros, ces définitions indiquent deux sources d'irréversibilité :

— variation de volume du système sous l'effet d'une forte différence de pression

— transfert thermique sous l'effet d'une forte différence de température

Essayons d'illustrer cette notion sur la figure T1.9 où on veut chauffer une casserole d'eau de 20 °C à 80 °C :

FIGURE T1.9 : Chauffage plus ou moins réversible thermiquement d'une casserole.



(a) Expérience 1 (b) Expérience 2 (c) Expérience 3

— Expérience 1 : on place la casserole sur une plaque à 80 °C ; la différence de température est très grande. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : c'est aberrant, on a une plaque chauffante à 80 °C, et dessus une casserole d'eau qui se refroidit jusqu'à 20 °C !

— Expérience 2 : on place la casserole sur une plaque dont on fait monter la température 5 °C par 5 °C ; la différence de température est plus faible. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : c'est moins aberrant, la plaque et la casserole refroidissent, seulement la casserole est un peu en avance, ce qui n'est pas logique.

— Expérience 3 : on place la casserole sur une plaque dont on fait monter la température 1 °C par 1 °C ; la différence de température est très faible. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : la plaque et la casserole refroidissent quasiment en même temps, on ne voit presque plus rien de problématique.

Cette expérience illustre deux points importants quant à la réversibilité :

— c'est une notion limite. Aucune transformation n'est strictement réversible, mais on peut s'en approcher

— plus une transformation est réversible, plus elle est lente. Dans la pratique, une transformation même rapide peut être réversible mécaniquement, cf. la justification un peu compliquée dans la planche d'exercices (exercice : `Importance de l'inertie du piston`), à condition que les frottements soient négligeables ; par contre, une transformation avec échange de chaleur ne peut être réversible que si elle est lente.

En résumé, il faut surtout retenir comment se traduisent ces propriétés :

— réversible mécaniquement $\Rightarrow P = P_{ext}$ (sauf si le système est indéformable)

— réversible thermiquement $\Rightarrow T = T_{ext}$ (sauf si le système est calorifugé)

Quant à l'intérêt d'une transformation réversible, on le comprendra pleinement dans deux chapitres, quand on montrera que l'irréversibilité des transformations est la cause de baisses de rendement des machines thermiques.

C.2. Transformations idéales à connaître

Dans les exercices cette année, on modélisera la majorité des transformations par une des quatre transformations idéales : isochore, mono/isobare, mono/therme et adiabatique réversible (qu'on introduira plus tard). Les résultats seront toujours donnés dans l'hypothèse où il n'y a pas d'énergie macroscopique ; s'il y en a, il suffit de rajouter ΔE_{macro}.

Définition : Transformation isochore

Une transformation **isochore** est une transformation à volume constant. On a alors $W = 0$ et $Q = \Delta U$.

Démonstration

Si $V = \text{cst}$ alors $\mathrm{d}V = 0$ donc $W = -\int P_{ext}\mathrm{d}V = 0$

Définition : Transformation monobare/isobare

Une transformation **monobare** est telle que $P_{ext} = \text{cst}$. On a alors $W = -P_{ext}.\Delta V$ et $Q = \Delta U + P_{ext}.\Delta V$.
Si en plus elle est réversible mécaniquement ($P = P_{ext} = \text{cst}$), on dit qu'elle est **isobare**. On a alors $W = -P.\Delta V$.

Démonstration

Si $P_{ext} = \text{cst}$ alors $W = -P_{ext}\int \mathrm{d}V = -P_{ext}.\Delta V$

Définition : Transformation monotherme/isotherme

Une transformation **monotherme** est une transformation à $T_{ext} = \text{cst}$.
Si en plus elle est réversible thermiquement ($T = T_{ext} = \text{cst}$) **et** mécaniquement ($P = P_{ext}$), elle est **isotherme**.
Dans le cas général, on n'a aucune propriété permettant de calculer W et Q.

! Ne confondez pas **isotherme** et **adiabatique**, ça n'a RIEN À VOIR ! Ce n'est pas parce que la température ne varie pas qu'il n'y a pas de transfert thermique, et vice-versa. Par exemple, si on comprime adiabatiquement un gaz, sa température augmente.

Exemple : Compression d'un gaz

On prend un gaz de volume initial $V_i = 50\,\text{L}$ à la température initiale $T_i = 18\,°\text{C}$ et sous la pression $P_i = 1\,\text{bar}$.
On exerce sur ce gaz une pression $P_f = 3\,\text{bar}$; le gaz se comprime et atteint l'état final : $P_f = 3\,\text{bar}$, $V_f = 20\,\text{L}$ et $T_f = 68\,°\text{C}$.
On suppose que l'énergie interne de ce gaz ne dépend que de la température, donc qu'on peut utiliser le C_v même si le volume change ; on prendra $C_v = 48\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ pour les calculs.

1. Calculez le travail des forces de pression sur le gaz.
2. Calculez la chaleur reçue par le gaz. Commentez.

1. $W = -\int_{V_i}^{V_f} -P_{ext}\mathrm{d}V$ et ici $P_{ext} = P_f = \text{cst}$ qu'on peut sortir de l'intégrale : $W = -P_f \int_{V_i}^{V_f} \mathrm{d}V = -P_f(V_f - V_i) = -3 \times 10^5 \times \left(20 \times 10^{-3} - 50 \times 10^{-3}\right) = 9\,\mathrm{kJ}$
2. D'après le premier principe appliqué au gaz pendant la compression : $\Delta U = W + Q$ donc $Q = \Delta U - W = C_v.(T_f - T_i) - W = 48.(68 - 18) - 9000 = -6{,}6\,\mathrm{kJ}$
   Le gaz s'est réchauffé, et pourtant il a perdu de la chaleur ! En le comprimant, on l'a chauffé à plus de 68 °C, puis il s'est un peu refroidi, d'où le signe négatif de Q.

C.3. Premier principe isobare

Les transformations isobares sont des transformations très courantes : en effet, toute évolution d'un système à l'air libre est isobare : refroidissement d'une tasse de café, fonte d'un glaçon à l'apéro, combustion d'une flamme, cuisson des pâtes,… Au cours de ces transformations, le travail reçu vaut $W = -\int P_{ext}\mathrm{d}V = -\int P\mathrm{d}V = -P\Delta V$ car $P = P_{ext} = \text{cst}$. On peut même écrire $W = -\Delta(PV)$ puisque P est une constante. Ce terme PV va nous donner un outil pour calculer plus facilement ce travail.



Définition : Enthalpie

L'enthalpie d'un système thermodynamique à l'équilibre est définie par

$$H = U + PV \tag{T1.10}$$

Il s'agit d'une **fonction d'état extensive** qui a la dimension d'une énergie.

Premier principe pour une transformation isobare

Lorsqu'un système thermodynamique évolue entre deux états d'équilibre de façon **isobare**,

$$\Delta E_{macro} + \Delta H = W' + Q \tag{T1.11}$$

où W' (« travail utile ») représente tous les travaux **autres que le travail des forces de pression**.
Cette loi fonctionne aussi pour une transformation monobare si $P = P_{ext}$ dans l'état final et dans l'état initial.

Démonstration

Considérons un système subissant une transformation isobare, ou au moins monobare avec $P = P_{ext}$ à l'instant initial i et à l'instant final f. On peut lui appliquer le premier principe : $\Delta E_{macro} + \Delta U = W + Q$ soit $\Delta E_{macro} + U_f - U_i = W_{pression} + W' + Q$ où W' sont les travaux provenant d'autres sources que la pression. Comme la transformation est monobare, $W_{pression} = -P_{ext}(V_f - V_i) = -P_{ext}V_f + P_{ext}V_i$, et comme $P_i = P_f = P_{ext}$ on peut écrire $W = -P_fV_f + P_iV_i$. En passant ces termes à gauche dans l'égalité, on obtient $\Delta E_{macro} + U_f + P_fV_f - U_i - P_iV_i = W' + Q$ soit $\Delta E_{macro} + \Delta H = W' + Q$

Remarque : Il faut d'abord voir l'enthalpie comme un outil pratique qui simplifie les calculs dans le cas de transformations isobares. Quant à l'interprétation, le terme PV peut être vaguement vu comme un terme « d'énergie potentielle de pression » qu'on ajoute à l'énergie interne déjà présente.

Comme l'énergie, l'enthalpie dépend de toutes les variables thermodynamiques, mais surtout de la température.

Définition : Capacité thermique/calorifique à pression constante

On définit la capacité thermique ou calorifique à pression constante d'un système comme

$$C_p = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,n} \quad \text{en } \mathrm{J \cdot K^{-1}} \tag{T1.12}$$

Elle indique la variation d'enthalpie du système lorsque sa température varie de 1 °C ou de 1 K à pression constante ; elle est **extensive**.

Définition : C_p massique et molaire

On définit aussi

$$c_p = \frac{C_p}{m} \text{ (capacité massique) en } \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}} \quad \text{(T1.13a)}$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{n} \text{ (capacité molaire) en } \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \quad \text{(T1.13b)}$$

Remarque : Ici, on dérive à pression constante, ce qui est logique puisqu'on va travailler avec l'enthalpie uniquement pour des transformations isobares. Mais la principale différence entre le C_v et le C_p ne s'entend pas dans leur nom, c'est que le C_v est la dérivée de U par rapport à la température, tandis que le C_p est la dérivée de H.

Exemple : Chutes du Niagara

Dans les chutes du Niagara, l'eau tombe d'une hauteur de 52 m. Si on admet que l'énergie cinétique de l'eau est négligeable au début et à la fin, calculer l'élévation de température de l'eau si les transformations sont assez rapides pour être adiabatiques. On donne pour l'eau $c_p = 4180\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$. On prendra aussi $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

On travaille sur $m = 1\,\mathrm{kg}$ d'eau. On a évidemment une transformation isobare ici, donc le premier principe isobare appliqué entre avant la chute et après la chute indique que $\Delta(H + E_p) = W' + Q = 0$ d'après les hypothèses. Donc $m.c_p.\Delta T + \Delta(mgz) = 0$ donc $\Delta T = \frac{g\Delta z}{c_p} = 0{,}12\,^\circ\mathrm{C}$

Exemple : Chauffage d'une maison

Une maison de capacité thermique totale à pression constante $C_p = 19\,\mathrm{MJ \cdot K^{-1}}$ est chauffée par une chaudière. Le matin à 8 h, il fait 18,1 °C dans la maison (la température est supposée homogène) et 1 °C dehors. La chaudière démarre alors et chauffe pendant 1 h avec une puissance thermique (transfert thermique par unité de temps) $\mathcal{P}_{ch} = 9\,\mathrm{kW}$. Au bout d'une heure, la température de la maison vaut 19,6 °C. Les transformations sont isobares.

1. Calculez le transfert thermique reçu par la maison de la part de la chaudière.
2. Déduisez-en le transfert thermique Q_{murs} reçu par la maison de la part de l'extérieur, puis la puissance thermique cédée à l'extérieur.
3. On définit la résistance thermique de la maison comme le quotient de la la différence de température intérieur-extérieur par la puissance thermique perdue. Évaluez approximativement cette résistance.

1. $Q_{ch} = \mathcal{P}_{ch}.\Delta t = 32{,}4\,\mathrm{MJ}$
2. Ici la transformation est isobare et sans travail utile, donc par le premier principe isobare appliqué à l'intérieur de la maison pendant la durée de chauffage, $\Delta H = Q_{ch} + Q_{murs}$ donc $Q_{murs} = C_p.\Delta T - Q_{ch} = -3{,}9\,\mathrm{MJ}$. La puissance moyenne perdue vaut donc $\mathcal{P}_{murs} = 1080\,\mathrm{W}$.
3. On prend comme température moyenne $\frac{18{,}1+19{,}4}{2} = 18{,}75\,^\circ\mathrm{C}$ soit 17,75 °C de différence avec l'extérieur. On trouve alors $R = 16 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

En fait, on verra dans le chapitre suivant que les solides et les liquides, ayant un volume faible et qui varie peu, on des coefficients C_v et C_p quasiment identiques ; ce ne sera pas le cas des gaz.

T1. Bases de la thermodynamique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
Système thermodynamique	
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.
État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température.
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques. Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.	Citer les différentes contributions microscopiques et macroscopiques à l'énergie d'un système. Analyser qualitativement les différents termes intervenant dans l'écriture du premier principe. Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Transformation thermodynamique subie par un système. Transformation adiabatique. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformation isochore. Transformation monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Bilans d'énergie.	Conduire un bilan d'énergie sur un système modélisé par un gaz parfait ou par une phase condensée incompressible et indilatable.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final.

T1. Bases de la thermodynamique

Quelques conseils

✎ Les énoncés de thermodynamique sont remplis d'informations, lisez-les attentivement, souvent 2 fois, pour bien noter toutes les hypothèses.

✎ Attention à l'erreur classique : $\Delta\theta(°\text{C}) = \Delta T(\text{K}) + 273,15$: **c'est faux**, une différence de températures a la même valeur en degrés Celsius ou en Kelvin.

✎ **Ne jamais dire que, pour une transformation isotherme, la quantité de chaleur reçue Q est nulle**, c'est archi-faux.

✎ Attention à ne pas sortir trop vite P_{ext} de la formule $W_{\text{pression}} = -\int P_{ext}\text{d}V$.

✎ Le plus souvent, dans les exercices, il n'y a pas d'énergie macroscopique, et par de travail autre que celui des forces de pression. Si ce n'est pas le cas, l'énoncé donnera des indications claires.

✎ Dans les énoncés, le premier principe est parfois appelé « bilan d'énergie », et le premier principe isobare « bilan d'enthalpie ».

T1. Bases de la thermodynamique

QCMs

réponses page 514

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un système fermé est un système qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.

(a). Faux
(b). Vrai

Q2. Les variables thermodynamiques permettent de décrire :

(a). l'état microscopique du système
(b). l'état macroscopique du système

Q3. À un état macroscopique correspondent beaucoup d'états microscopiques.

(a). Vrai
(b). Faux

Q4. Lesquelles de ces variables sont extensives ?

(a). le volume
(b). la masse volumique
(c). la température
(d). la masse
(e). le pression
(f). la fraction molaire d'un constituant
(g). la quantité de matière

Q5. Quel type de variable est défini en chaque point du système ?

(a). les variables intensives
(b). les variables extensives

Q6. La force de pression sur une surface S de normale $\vec{n}$ vaut

(a). P
(b). $P.\vec{n}$
(c). $P.S.\vec{n}$
(d). $-P.S.\vec{n}$

Q7. Un système est homogène si :

(a). ses variables intensives ne dépendent pas du temps
(b). ses variables intensives ne dépendent pas de la position
(c). toutes ses variables ne dépendent pas du temps
(d). ses variables extensives ne dépendent pas du temps
(e). toutes ses variables ne dépendent pas de la position
(f). ses variables extensives ne dépendent pas de la position

Q8. Un système est à l'équilibre si :

(a). ses variables extensives ne dépendent pas de la position
(b). toutes ses variables ne dépendent pas du temps
(c). ses variables intensives ne dépendent pas du temps
(d). ses variables extensives ne dépendent pas du temps
(e). ses variables intensives ne dépendent pas de la position
(f). toutes ses variables ne dépendent pas de la position

Q9. Si la température d'un système de volume V augmente de $\mathrm{d}T$, son volume augmente de

(a). $-\alpha.\mathrm{d}T$ (b). $\alpha.V.\mathrm{d}T$
(c). $\alpha.\mathrm{d}T$ (d). $\alpha\frac{V}{\mathrm{d}T}$

Q10. Si la pression d'un système de volume V augmente de $\mathrm{d}P$, son volume augmente de

(a). $\chi_T.V.\mathrm{d}P$ (b). $-\chi_T.V.\mathrm{d}P$
(c). $-\chi_T.\mathrm{d}P$ (d). $\chi_T.\mathrm{d}P$

Q11. Si un système est calorifugé, alors son évolution est adiabatiques.

(a). Faux (b). Vrai

Q12. Le travail des forces de pressions vaut :

(a). $-\int V\mathrm{d}P_{ext}$ (b). $-\int P_{ext}\mathrm{d}V$
(c). $\int V\mathrm{d}P_{ext}$ (d). $\int P_{ext}\mathrm{d}V$

Q13. Le travail et la quantité de chaleur se mesurent en Joule, donc ce sont des énergies.

(a). Faux (b). Vrai

Q14. La variation d'énergie interne entre un état initial et un état final dépend de ces états, mais aussi du travail reçu entre ces deux états.

(a). Vrai (b). Faux

Q15. L'énergie interne est :

(a). constante (b). une fonction d'état
(c). intensive (d). extensive

Q16. Si on connaît uniquement l'état initial et l'état final d'un système, on n'est pas capable de connaître W et Q.

(a). Vrai (b). Faux

Q17. On a toujours $\Delta U = C_v\Delta T$

(a). Faux (b). Vrai

Q18. Quand on mélange deux systèmes, leurs c_v s'ajoutent.

(a). Faux (b). Vrai

Q19. Si l'énoncé donne le c_v massique d'un corps pur, il faut le multiplier par la masse pour obtenir le C_v de ce corps pur.

(a). Faux (b). Vrai

Q20. Le c_v massique d'un corps pur est le même qu'il soit dans l'état solide, liquide ou vapeur.

(a). Vrai (b). Faux

Q21. Une transformation est isochore si :

(a). $\Delta T = 0$ (b). $\Delta P = 0$
(c). $\Delta V = 0$ (d). $\Delta U = 0$

Q22. Pour une transformation isotherme, $Q = 0$.

(a). Vrai (b). Faux

Q23. L'enthalpie a la même dimension qu'une énergie.

(a). Faux (b). Vrai

Q24. Dans le travail utile W', on peut trouver par exemple :

(a). Le travail fourni par un moteur (b). Le travail récupéré par une turbine
(c). Le travail des forces de pression (d). Le travail d'un générateur électrique

Q25. Si un système calorifugé subit une évolution isobare sans travail utile, alors $\Delta H = 0$.

(a). Vrai (b). Faux

✓ QCM : Variations d'énergie interne et d'enthalpie ✗

On donne pour différents corps purs la capacité thermique à volume constant, la masse molaire, et la masse volumique, autour d'une certaine température et d'une certaine pression :

Corps	T	P(bar)	c_v ou C_{vm}		c_p ou C_{pm}		$M(\mathrm{g\cdot mol^{-1}})$	$\rho(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$
Silicium	300 K	1,0	702	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	702	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	28	
Chlorure de cuivre (I)	300 K	1,0	240	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	240	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	99	
Air sec	300 K	1,0	0,7	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	1,0	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	29	
Diazote	70 K	1,0	28,5	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	57,2	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	28	840,5
Diazote	300 K	1,0	20,8	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	29,2	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	28	1,12
Diazote	600 K	1,0	21,8	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	30,1	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	28	0,56
Diazote	300 K	100	21,4	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	33,4	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	28	111,7
Hélium	300 K	1,0	12,5	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	20,8	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	4	
Mercure	20 °C	1,0	27,9	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	27,9	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	201	
Eau	10 °C	1,0	4,192	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	4,192	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	18	999,70
Eau	80 °C	1,0	4,196	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	4,196	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	18	971,82
Vapeur d'eau	103 °C	1,0	1,6	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	2,07	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	18	586,53
Glace d'eau	−10 °C	1,0	2,03	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	2,0	$\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$	18	918,7

On considèrera que les capacité thermique varient peu au voisinage des températures de référence données.

Q26. 7 mol de silicium passent de 20 °C à 35 °C ; l'énergie interne de ce système varie de :

(a). 2,6 kJ (b). 73,7 kJ
(c). 10,5 kJ (d). 206,4 kJ

Q27. et son enthalpie varie de :

(a). 10,5 kJ (b). 2,6 kJ
(c). 206,4 kJ (d). 73,7 kJ

Q28. On refroidit 450 g d'eau de 60 °C à 18 °C ; l'énergie interne de ce système varie de :

(a). −79,3 kJ (b). −4,4 kJ
(c). 176,1 kJ (d). 79,3 kJ

Q29. et son enthalpie varie de :

(a). 176,1 kJ (b). −79,3 kJ
(c). 79,3 kJ (d). −4,4 kJ

Q30. On fait passer 50 L de diazote de 320 °C à 200 °C sous 1 bar ; l'énergie interne de ce système varie de :

(a). −2,6 kJ (b). −6,0 kJ
(c). −4,6 kJ (d). −72,8 kJ

Q31. et son enthalpie varie dee varie de :

(a). −2,6 kJ (b). −3,6 kJ
(c). −1,5 kJ (d). −7,2 kJ

Q32. On prend 2 mol de diazote à 12 °C sous 1 bar ; on les fait passer à 60 °C sous 15 bar ; puis on les refroidit à 32 °C sous 1 bar. L'énergie interne de ce système varie de :

(a). On manque de données (b). 872 J
(c). 943 J (d). 832 J

Q33. et son enthalpie varie de :

(a). 1168 J (b). On manque de données
(c). 650 J (d). 943 J

Q34. On mélange 300 g d'eau à 25 °C avec 200 g d'eau à 75 °C ; la température finale vaut 36 °C. L'énergie interne du système fermé formé des 500 g d'eau varie de :

(a). 0 kJ (b). −18,9 kJ
(c). 23,1 kJ (d). −81,7 kJ

Q35. et son enthalpie varie de :

(a). −18,9 kJ (b). 0 kJ
(c). −81,7 kJ (d). 23,1 kJ

Q36. Dans de l'air sec à 276 K tombent des flocons de neige (glace) à 256 K selon la proportion : 2 g de glace pour 1 g d'air. L'air se refroidit, la neige se réchauffe, et la température d'équilibre vaut 260 K. La variation d'énergie interne du système complet vaut :

(a). 1288 J (b). 0 J
(c). 4,8 J (d). 1365 J

Q37. et sa variation d'enthalpie vaut :

(a). 4,8 J (b). 1365 J
(c). 1288 J (d). 0 J

✓ QCM : Travail des forces de pression ✗

Q38. Un système de 25 L est en équilibre mécanique avec l'extérieur sous une pression de 2 bar. Son volume diminue jusqu'à 11 L, la pression extérieure restant constante. La travail reçu de la part des forces de pression vaut :

(a). 280 J
(b). 2,8 kJ
(c). 28 J
(d). 28 kJ

Q39. Un cylindre contient un gaz à 50 °C sous 1 bar ; il occupe 600 L. On le comprime de façon monobare sous 5 bar jusqu'à 120 L. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

(a). 435 kJ
(b). 97 kJ
(c). 720 kJ
(d). 240 kJ

Q40. Un système de 1400 cm^3 est en équilibre mécanique avec l'extérieur sous une pression de 1 bar, par l'intermédiaire d'un piston mobile de surface 12 cm^2. On applique alors sur le piston une force constante $F = 160$ N ; le volume du système diminue jusqu'à 900 cm^3. La travail reçu de la part des forces extérieures vaut :

(a). 117 J
(b). 67 J
(c). −67 J
(d). −117 J

T1. Bases de la thermodynamique

Exercices

réponses page 516

Exercice T1.1 : Compressibilité du benzène [*]

Le coefficient de compressibilité isotherme du benzène entre 25 °C et 45 °C est donné par la loi $\chi_T = -14{,}5 \times 10^{-10} + 0{,}081 \times 10^{-10} T$ en Pa^{-1}, la température T étant en K. Son coefficient de dilatation isobare vaut $1{,}14 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ à ces températures (supposé constant).

1. On prend un litre de benzène sous 1 bar à 25 °C, et on le comprime sous 10 bar à température constante ; calculez son nouveau volume.
2. On prend un litre à 25 °C, sous 1 bar. On le chauffe à 45 °C ; calculez son nouveau volume.
   Calculez la pression qu'il faut exercer pour ramener le volume à 1 L.

Exercice T1.2 : Masse volumique de l'eau [**]

La masse volumique de l'eau liquide est bien modélisée entre 0 °C et 100 °C sous 1 bar par le polynôme du troisième degré $\rho = \rho_0.\left(1 + 5{,}3 \times 10^{-5} T - 6{,}5 \times 10^{-6} T^2 + 1{,}4 \times 10^{-8} T^3\right)$ (T en degrés Celsius), avec $\rho_0 = 0{,}999\,84\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$.

1. Calculez la masse volumique de l'eau à 10 °C.
2. En considérant une masse m constante d'eau, montrez que le coefficient de dilatation isobare peut s'écrire en fonction de la masse volumique ρ :
$$\alpha = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{P,n}$$
3. Exprimez le coefficient de dilatation isobare en fonction de la température.
4. En étudiant le signe de ce coefficient, montrez que la masse volumique de l'eau est maximale aux alentours de 4 °C.

Exercice T1.3 : Dilatation du balancier d'une horloge [***]

Une horloge à balancier utilise la régularité des oscillations d'un pendule simple pour compter les secondes. On suppose qu'on a construit une telle horloge de telle sorte que, à 20 °C, le balancier batte avec une période de 1,0000 s. On admet que la période du balancier vaut $2\pi\sqrt{\ell/g}$ avec ℓ sa longueur.
Sachant que le bronze de la tige a un coefficient de dilatation linéique égal à $20{,}3 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ à 20 °C, calculez l'avance ou le retard relatif de cette horloge à 15 °C, puis à 22 °C (on pourra l'exprimer en secondes par jour).

Exercice T1.4 : Forces de pression [*]

La pression atmosphérique normale vaut environ 1 bar.

1. Calculer approximativement la force de pression s'exerçant sur la paume de votre main.
2. On prend une boîte cubique de 20 cm de côté, placée dans l'air. À l'intérieur on fait baisser la pression à 0,1 bar. Calculer la différence des forces de pression sur les deux côtés d'une des faces du cube. Quelle est la direction de cette force ?
3. Une balle de paintball de diamètre 17 mm et de masse 0,8 g est propulsée par de l'air comprimé à la pression 30 bar sur sa face arrière (qu'on supposera plate, circulaire) tandis que la pression atmosphérique s'applique sur sa face avant. Calculez différence des forces de pression sur ses deux faces, puis l'accélération correspondante.

Exercice T1.5 : Bouilloire [**]

Une bouilloire contient $m = 600\,\text{g}$ d'eau à $18\,^\circ\text{C}$, de capacité thermique à pression constante $c_p = 4{,}18\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; la capacité de la bouilloire est $C_b = 132\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$. On l'alimente par une tension $V = 220\,\text{V}$ et un courant $I = 9{,}7\,\text{A}$, et il faut attendre 2 min pour que l'eau se mette à bouillir à $100\,^\circ\text{C}$.
Calculez la chaleur reçue par le système (bouilloire+eau) pendant ce temps-là.

Exercice T1.6 : Chauffage électrique [**]

Un radiateur électrique est équivalent à une résistance $r = 55\,\Omega$ alimentée par une tension $V = 220\,\text{V}$. Il est constitué de 15 kg d'acier de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 452\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.
La pression de la pièce où il se trouve est constante ; au départ, tout est à $18\,^\circ\text{C}$.

1. Calculez sa capacité thermique à pression constante C_p.
2. On l'alimente pendant 1 h. Quelle serait sa température finale s'il était parfaitement calorifugé ?
3. En réalité, il échange de la chaleur avec la pièce dans laquelle il se trouve. On constate qu'au bout d'une heure, l'ensemble (radiateur et pièce) est à $21{,}3\,^\circ\text{C}$.
   Calculez la capacité thermique à pression constante de la pièce, si on suppose que l'ensemble {pièce+radiateur} est calorifugé.

Exercice T1.7 : Rebond d'une balle [**]

Une balle de masse $m = 80\,\text{g}$ et de capacité calorifique massique à pression constante $c_p = 1{,}3\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, rebondit contre un mur. Avant le rebond, sa vitesse valait $v_i = 14\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; après le rebond, elle vaut $v_f = 2{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On fait les hypothèses suivantes :

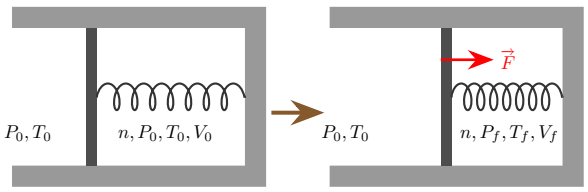
— la transformation entre avant et après le rebond est isobare et adiabatique

— entre juste avant et juste après le rebond, la position de la balle n'a quasiment pas changé

Calculez la variation ΔT de température de la balle lors du rebond.

Exercice T1.8 : Compression monobare d'un gaz [**]

Dans un cylindre horizontal de section $S = 8\,\text{cm}^2$, on enferme une petite quantité d'air à l'aide d'un piston de masse négligeable. Le piston est relié au fond du cylindre par un ressort de raideur $k = 120\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Il y a initialement équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur (pression $P_0 = 1\,\text{bar}$, température $T_0 = 21{,}0\,^\circ\text{C}$, volume $V_0 = 0{,}20\,\text{L}$) et le ressort est initialement au repos.
On appuie avec une force $F = 50\,\text{N}$ sur le piston. On attend l'équilibre mécanique et on mesure à la fin $T_f = 34{,}5\,^\circ\text{C}$ (température de l'air et du ressort) et $V_f = 0{,}15\,\text{L}$.
La capacité thermique à volume constant du système formé de l'air et du ressort vaut $C_v = 0{,}32\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$; on admet que son énergie interne ne dépend que de T.



1. Que vaut l'allongement $-\Delta\ell$ du ressort dans l'état final ?
2. Par un bilan des forces qui s'appliquent au piston, exprimez et calculez la pression finale P_f dans le piston.
3. Calculez le travail reçu par le système air+ressort de la part des forces de pression.
4. Calculez la chaleur reçue par le système air+ressort.

Exercice T1.9 : Détente d'un gaz [**]

On considère n moles de gaz enfermées dans un cylindre au moyen d'un piston mobile. Initialement, le gaz occupe un volume $V_i = 0{,}41\,\text{L}$ sous une pression $P_i = 12\,\text{bar}$ et une température $T_i = 21\,^\circ\text{C}$.
Ce gaz subit une détente jusqu'à la pression atmosphérique $P_f = 1{,}0\,\text{bar}$ au cours de laquelle il pousse sur

le piston et fournit un travail ; cette détente est réversible mécaniquement [a]. Au cours de cette détente, la température T, la pression P et le volume V vérifient les lois $P.V^k = \text{cst}_1$ et $T.V^{k-1} = \text{cst}_2$ avec $k = 1,18$. On suppose que l'énergie interne du gaz ne dépend que de sa température, et que $C_v = 6{,}2\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

1. Calculez numériquement le volume final V_f et la température finale T_f. Attention aux unités !
2. Calculez, par une intégrale, le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression.
3. Calculez le transfert thermique reçu par le gaz au cours de cette étape.
4. On laisse maintenant le gaz revenir à la température T_i sans variation de volume. Calculez le travail et la quantité de chaleur reçues par le gaz au cours de cette étape.

a. La réversibilité mécanique implique que $P = P_{ext}$ à chaque instant ; ici cela peu sembler improbable si on imagine que la pression extérieure est la pression atmosphérique, constante ; mais il faut se souvenir que P_{ext} est une pression apparente, somme de la pression atmosphérique et du quotient de la force exercée par l'objet auquel le piston fournit du travail par la section du cylindre.

Exercice T1.10 : Traction d'un ressort [**]

Un ressort (solide de capacité $C_p = 50\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$) de raideur k est initialement au repos, à la température T_0 de la pièce. On lui tire dessus avec une force constante F. La transformation est isobare.

1. Il atteint rapidement un état d'équilibre mécanique (force du ressort=force extérieurs) ; exprimez sa variation de température si on considère la transformation adiabatique.
   AN pour $k = 200\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $F = 50\,\text{N}$.
2. On attend l'équilibre thermique. Calculez la quantité de chaleur qu'il a reçue.

Exercice T1.11 : Compression de l'air [**]

Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques d'1 kg d'air gazeux à différentes températures et pressions : dans chaque case on lit le volume en L et l'énergie interne en kJ.

P \ T	200 K	300 K	500 K	1000 K
1 bar	$V = 573\,\text{L}$ $U = 142{,}4\,\text{kJ}$	$V = 861\,\text{L}$ $U = 214{,}2\,\text{kJ}$	$V = 1437\,\text{L}$ $U = 359{,}7\,\text{kJ}$	$V = 2874\,\text{L}$ $U = 759{,}2\,\text{kJ}$
10 bar	$V = 56{,}1\,\text{L}$ $U = 139{,}1\,\text{kJ}$	$V = 85{,}9\,\text{L}$ $U = 212{,}4\,\text{kJ}$	$V = 144\,\text{L}$ $U = 358{,}9\,\text{kJ}$	$V = 288\,\text{L}$ $U = 759{,}1\,\text{kJ}$
100 bar	$V = 4{,}67\,\text{L}$ $U = 102{,}1\,\text{kJ}$	$V = 8{,}55\,\text{L}$ $U = 194{,}4\,\text{kJ}$	$V = 14{,}9\,\text{L}$ $U = 349{,}6\,\text{kJ}$	$V = 29{,}8\,\text{L}$ $U = 754{,}9\,\text{kJ}$

1. Pour chaque valeur de température sous $P = 1\,\text{bar}$, calculez l'enthalpie H pour 1 kg.
2. On prend 1 kg d'air à 300 K sous 1 bar. On le chauffe jusqu'à 500 K sous la même pression.
   (a) Que vaut le volume initial ? Le volume final ? Déduisez-en le travail W reçu par le gaz.
   (b) Que vaut ΔU ? Déduisez-en le transfert thermique Q reçu par le gaz.
   (c) Comment aurait-on pu calculer Q plus rapidement ?
3. On prend 1 kg d'air à 300 K sous 10 bar ; on le détend de façon adiabatique et monobare jusqu'à 1 bar (la pression extérieure valant 1 bar) ; on admet que la température du gaz diminue lors de cette détente, et on note T_f sa température finale.
   (a) Comment varie le volume du gaz ? Quel est le signe du travail reçu par le gaz ?
   (b) À l'aide du premier principe, relier l'énergie finale U_f et le volume final V_f. Aurait-on le droit d'utiliser le premier principe avec l'enthalpie ?
   (c) On modélise les variations de V et U sous 1 bar entre 200 K et 300 K par un modèle linéaire, faute de mieux :

$$\begin{cases} V(T) = 573 + \dfrac{861-573}{300-200}(T-200) \text{ en L} \\ U(T) = 142{,}4 + \dfrac{214{,}2-142{,}4}{300-200}(T-200) \text{ en kJ} \end{cases}$$

Déduisez-en l'équation vérifiée par T_f, et calculez la température finale, le volume final, l'énergie interne finale et le travail reçu.

Exercice T1.12 : Réaction entre une craie et de l'acide [***]

On place dans un ballon gonflable une masse $m = 3{,}5\,\text{g}$ de craie à $T_i = 19\,^\circ\text{C}$, on y verse de l'acide chlorhydrique et on ferme vite l'ensemble. La craie est attaquée par l'acide et il se forme divers produits, dont du gaz carbonique qui fait que le ballon se gonfle. L'expérience a lieu à pression extérieure constante $P_0 = 1\,\text{bar} = P$ (isobare).
On considère le système formé du ballon et de son contenu.
Données :

- la craie est constituée de carbonate de calcium $CaCO_3$ de masse molaire $M = 100{,}09\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- lorsque 1 mol de craie réagit avec l'acide pour former les produits, à 19 °C, la variation d'enthalpie du système vaut $\Delta_r H^0 = -391{,}6\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- capacité thermique à pression constante du système après réaction : $C_p = 41\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$

Le volume initial du système est négligeable ; le volume final vaut 0,91 L. On suppose que la transformation a été suffisamment rapide pour être adiabatique.
Calculez la température finale du système, ainsi que le travail reçu de la part des forces de pression.
Indication : pour calculer ΔH, décomposez en 2 étapes imaginaires la transformation ; quelle propriété de H nous permet de le faire ?

Exercice T1.13 : Charge d'un condensateur [***]

Cet exercice est un peu à la limite de ce qu'on fait normalement en thermodynamique.

On considère un condensateur de capacité (électrique) Γ. On branche à ses bornes un générateur de fem e. Les transformations sont isobares.

1. Initialement, le condensateur est déchargé, et $e = 0$. À $t = 0$, on allume le générateur, donc e passe brusquement à la valeur constante E. Le condensateur se charge jusqu'à son état stationnaire ; il a alors une charge q.
   L'évolution est suffisamment rapide pour pouvoir être considérée comme adiabatique.
   Calculez le travail reçu par le condensateur, puis sa variation d'énergie électrique, et déduisez-en la température finale du condensateur en fonction de sa capacité calorifique à pression constante C.
   AN pour $E = 10\,\text{V}$, $\Gamma = 1\,\mu\text{F}$ et $C = 40\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$: est-ce sensible pour une expérience courante ?
2. On laisse refroidir. Calculez le transfert thermique Q reçu par le condensateur, et comparez avec le travail fourni par le générateur et avec l'énergie stockée. Que pensez-vous du rendement de l'opération ?
3. On effectue maintenant la charge en deux étapes : on charge sous une tension $E/2$ selon les mêmes conditions qu'au début (le régime stationnaire est atteint) ; ensuite on attend l'équilibre thermique ; puis on passe e à E.
   Calculez le travail et la chaleur reçus par le condensateur (au cours de l'ensemble de toutes les étapes), et comparez.

Exercice T1.14 : Importance de la masse du piston [****]

On a vu qu'une transformation est réversible mécaniquement si $P = P_{ext}$. Pourtant, lorsqu'on considère un gaz enfermé dans un cylindre fermé par un piston, on peut le souvent considérer que la transformation est réversible même si $P \neq P_{ext}$. On va voir pourquoi.
Dans cet exercice, on considère un gaz de température T, de pression P, efermé dans un cylindre horizontal fermé par un piston de masse m ; le piston étant horizontal (axe $\vec{e}_x$), on pourra négliger l'influence du poids (vetical, suivant $\vec{e}_z$.

1. On prend comme système {le gaz + le piston + le cylindre} ; on note $U = U_{gaz} + U_{piston} + U_{cylindre}$ son énergie interne. Appliquez le premier principe à une transformation infinitésimale du système (de durée $\mathrm{d}t$), en prenant en compte l'énergie cinétique du piston, et reliez $\mathrm{d}U$, $\dot{x}$ (vitesse du piston), $\ddot{x}.\mathrm{d}t$, P_{ext}, $\mathrm{d}V$ et m.

2. On suppose dans cette question que le piston peut couplisser sans frottements. Appliquez le PFD au piston, et reliez $m\ddot{x}$ aux pressions et à la surface S. Renvoyez cette expression dans l'équation de la question 1, et, en remarquant que $S\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, montrez que U vérifie la loi $\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + \delta Q$, donc que sur une transformation complète :
$$\Delta U = -\int P\mathrm{d}V + Q$$
Commentez le résultat obtenu.
3. Reprenez la même question si le piston est soumis à une force de frottements solides avec le cylindre, constante, de valeur $-F.\mathrm{signe}(\mathrm{d}V)\vec{e}_x$. Est-il possible de rendre la transformation réversible ?
4. Reprenez la même question si le piston est soumis à une force de frottements fluides $-\lambda\vec{v}$. Est-il possible de rendre la transformation réversible ?
5. Le premier cas peut-il s'appliquer par exemple à une compression d'un gaz entre deux **états d'équilibre immobiles** ? À un cycle ? Au tir d'un obus dans un canon ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Fermé signifie qu'il n'échange pas de matière, mais il peut échanger de l'énergie.
Q2.(b)
Q3.(a)
Q4.(a) ET (d) ET (g)
Q5.(a)
Q6.(c)
Q7.(b)
Q8.(b)
Q9.(b)
Q10.(b)
Q11.(b)
Q12.(b)
Q13.(a)
Ce sont des **échanges d'énergie** ; c'est la même unité, mais la notion physique sous-jacente est différente.
Q14.(b)
U est une fonction d'état.
Q15.(b) ET (d)
Q16.(a)
Q17.(a)
Ce n'est vrai que si U ne dépend que de la température d'une part (cette hypothèse sera toujours vérifiée dans nos exercices) et surtout s'il n'y a pas de changements de composition du système.
Q18.(a)
Le C_v (défini pour le système tout entier) est extensif, mais pas les c_v (massiques) ni les C_{vm} (molaires).
Q19.(b)
Q20.(b)
Par exemple pour l'eau, il vaut $2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ pour le solide, $4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ pour le liquide et $2{,}0\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ pour le gaz.
Q21.(c)
Q22.(b)
C'est faux, **c'est faux**, c'est archi faux, it's false, es ist falsch, es incorrecto, é falso, non è vero, nu e adevărat, to nieprawda, sa pa vré, ...je ne sais pas comment le dire autrement, mais C'EST FAUX et ça coûte beaucoup de points en moins en DS/colle/concours quand on sort une telle ÂNERIE.
Q23.(b)
Q24.(a) ET (b) ET (d)
On peut trouver tous les travaux, hormis ceux des forces de pression.
Q25.(a)
$\Delta H = Q = 0$.

Réponses au QCM : Variations d'énergie interne et d'enthalpie

Q26.(b)
Q27.(d)
Q28.(a)
Q29.(b)
Q30.(a)
Ce système contient $n = \frac{\rho V}{M} = 1\,\mathrm{mol}$ de diazote.
Q31.(b)
On voit que pour un gaz, l'enthalpie et l'énergie interne diffèrent sensiblement.
Q32.(d)
L'énergie interne est une fonction d'état ; sa variation ne dépend pas du chemin suivi. On peut donc calculer ΔU en imaginant que le diazote passe directement de l'état initial à l'état final ; l'étape intermédiaire ne sert à rien.
Q33.(a)
Même remarque que pour l'énergie interne.
Q34.(b)

L'énergie interne est extensive, donc $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ en notant 1 les 300 g d'eau et 2 les 200 g d'eau. On trouve alors que les 300 g d'eau gagnent $4{,}193 \times 300 \times (36 - 25) = 13\,800$ J, tandis que les 200 g d'eau gagnent $4{,}195 \times 200 \times (36 - 75) = -32\,700$ J.

Q35.(a)

L'enthalpie aussi est extensive.

Q36.(c)

Même principe : $\Delta U_{air} = -11{,}2$ J et $\Delta U_{neige} = 16$ J

Q37.(d)

Même principe : $\Delta H_{air} = -16$ J et $\Delta H_{neige} = 16$ J

Réponses au QCM : Travail des forces de pression

Q38.(b)

Q39.(d)

Q40.(a)

La pression extérieure équivalente est $P_{ext} = 1\,\text{bar} + \frac{F}{S} = 2{,}33\,\text{bar}$ donc $W = -P_{ext}.\Delta V = 2{,}33 \times 10^5 \times 500 \times 10^{-6}$.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T1.1 : Compressibilité du benzène [*]

1. $\Delta V = -V\chi_T \Delta P$ avec $\chi_T(25\,^\circ\text{C}) = 9{,}64 \times 10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$; ici le terme $\chi_T dP$ est très petit devant 1. On trouve $\Delta V = 8{,}67 \times 10^{-4}\,\text{L}$: c'est infime.
2. $\Delta V = V\alpha dT = 0{,}023\,\text{L}$. Or $\chi_T(45\,^\circ\text{C}) = 11{,}3 \times 10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$ donc il faut augmenter la pression de $\Delta P = \frac{0{,}023}{1{,}023 \times 11{,}3 \times 10^{-10}} = 199\,\text{bar}$.
   Conclusion : un solide est souvent peu dilatable mais très peu compressible. Si on veut garder son volume constant, une augmentation de température petite doit être compensée par une énorme augmentation de la pression ; d'où les joints de dilatation sur les ponts, les bâtiments,…

Corrigé de l'exercice T1.2 : Masse volumique de l'eau [**]

1. $\rho(10\,^\circ\text{C}) = 0{,}999\,73\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$
2. Soit un système de masse m et de volume V ; alors $V = \frac{m}{\rho}$. Donc $\alpha = \frac{\rho}{m}\left.\frac{\partial\left(\frac{m}{\rho}\right)}{\partial T}\right)_{P,n}$. Or m est constante (système fermé) donc $\left.\frac{\partial\left(\frac{m}{\rho}\right)}{\partial T}\right)_{P,n} = -m\frac{\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,n}}{\rho^2}$. En mettant tout ensemble, on trouve bien $\alpha = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,n}$.
3. $\alpha = \dfrac{-5{,}3 \times 10^{-5} + 1{,}3 \times 10^{-5}T - 4{,}2 \times 10^{-8}T^2}{1 + 5{,}3 \times 10^{-5}T - 6{,}5 \times 10^{-6}T^2 + 1{,}4 \times 10^{-8}T^3}$
4. Les deux racines du binôme sont 4,1 °C et 305 °C. Si on se limite entre 0 °C et 100 °C, on trouve donc

$T(^\circ\text{C})$	0		4,1		100
$\alpha(^\circ\text{C}^{-1})$		$-$	0	$+$	
$\rho\,(\text{kg}\cdot\text{L}^{-1})$	0,99984	↗	0,999 95	↘	0,95415

Corrigé de l'exercice T1.3 : Dilatation du balancier d'une horloge [***]

On peut penser ici que la variation de la longueur ℓ sera petite. On a donc $\Delta\ell = \ell\alpha_{lin}\Delta T$, ce qui donne entre 20 °C et 15 °C : $\Delta\ell = -101{,}5 \times 10^{-6} l$. La période va donc être multipliée à 15 °C par $\sqrt{1 - 101{,}5 \times 10^{-6}}$, ce qui fait 0,999 95 s. En 1 j = 86 400 s, elle battra donc 86 404,4 fois, soit une avance de 4,4 secondes par jour.
De même, à 22 °C, on trouve un retard de 1,8 secondes par jour.

Corrigé de l'exercice T1.4 : Forces de pression [*]

1. Pour une surface de 10 cm × 10 cm on trouve $F = 1 \times 10^5 \times \left(10 \times 10^{-2}\right)^2 = 1 \times 10^3\,\text{N}$ environ, ce qui est grand, mais la même force s'exerce de l'autre côté.
2. $F = (1 - 0{,}1)\,10^5 \times (20e - 2)^2 = 3600\,\text{N}$ dirigé vers l'intérieur : la boîte a tendance à imploser.
3. $F = (30 - 1)\,10^5 \times \pi\left(\frac{17 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 = 658\,\text{N}$ soit une accélération $a = \frac{F}{m} = 8{,}2 \times 10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Corrigé de l'exercice T1.5 : Bouilloire [**]

Par le premier principe isobare appliqué au système {eau+bouilloire} entre le début et la fin du chauffage : $\Delta H = W' + Q$ soit $(m.c_p + C_b)\Delta T = V.I.t + Q$. On en tire facilement (en faisant attention aux unités) $Q = -39{,}6\,\text{kJ}$ (à comparer au travail électrique reçu : 256 kJ).

Corrigé de l'exercice T1.6 : Chauffage électrique [**]

1. $C_p = m.c_p = 6{,}78\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$
2. Le système considéré est le radiateur, entre le début et la fin de l'heure. La transformation est isobare donc $\Delta H = W_{élec} + Q$ puisqu'il n'y a pas d'autres formes d'énergie macroscopique. Or $W_{élec} = \frac{V^2}{r}\Delta t$ et $Q = 0$ si la transformation est adiabatique. De plus $\Delta H = C_p.\Delta T$. On en déduit que $\Delta T = \frac{V^2.\Delta t}{r.C_p} = 467\,°\text{C}$ soit une température finale de 485 °C : c'est un peu trop chaud ! (Voilà pourquoi il ne faut jamais couvrir un radiateur électrique)
3. On reprend le même raisonnement mais en prenant comme système la pièce et le radiateur ; soit C'_p la capacité thermique à pression constante de la pièce, alors par le même raisonnement on trouve $C'_p = \frac{V^2.\Delta t}{r.\Delta T} - C_p = 953\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice T1.7 : Rebond d'une balle [**]

D'après les hypothèses, on peut appliquer le premier principe isobare à la balle entre avant et après le rebond : $\Delta(E_{macro} + H) = W' + Q$.

— la transformation est adiabatique donc $Q = 0$
— hormis les forces de pression, il y a le travail de la force du mur, mais comme le point de contact de la balle et du mur est immobile, le travail de cette force est nul ; donc $W' = 0$
— la balle bouge peu donc la seule variation d'énergie mécanique est la variation d'énergie cinétique
— l'enthalpie ne dépend que de T donc $\Delta H = m.c_p.\Delta T$

On en déduit que $\frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) + m.c_p.\Delta T = 0$ donc $\Delta T = \frac{v_i^2 - v_f^2}{2c_p} = 0{,}07\,°\text{C}$: c'est très faible, mais peut-être qu'à force de taper sur une balle de tennis, on arrive à la faire chauffer…

Corrigé de l'exercice T1.8 : Compression monobare d'un gaz [**]

1. Le volume a diminué de $0{,}05\,\text{L} = 50\,\text{cm}^3$, donc en notant $-\Delta\ell$ l'allongement du ressort, $S.\Delta\ell = 50\,\text{cm}^3$ soit $\Delta\ell = 6{,}25\,\text{cm}$.
2. À la fin, le piston est soumis à
   — la force de pression extérieure $P_0.S$ vers la droite
   — la force de pression intérieure $P_f.S$ vers la gauche
   — la force F vers la droite
   — la force du ressort $k.\Delta\ell$ vers la gauche
   Donc à l'équilibre, ces forces se compensent donc $P_f = P_0 + \frac{F - k\Delta\ell}{S} = 1{,}53\,\text{bar}$.
3. La pression extérieure est équivalente à $P_0 + \frac{F}{S}$ et est constante lors de la compression, donc le travail reçu vaut $W = -\left(P_0 + \frac{F}{S}\right).(V_f - V_0) = 8{,}13\,\text{J}$ (attention aux unités !)
4. Le premier principe appliqué au contenu du cylindre entre le début et la fin de la compression indique que $\Delta\left(\frac{1}{2}k\text{allongement}^2\right) + \Delta U = W + Q$ soit $Q = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + C_v(T_f - T_0) - W = -3{,}6\,\text{J}$.

Corrigé de l'exercice T1.9 : Détente d'un gaz [**]

1. $V_f = V_i\left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{1/k} = 3{,}37\,\text{L}$ et $T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{k-1} = 201\,\text{K} = -72\,°\text{C}$ (attention à mettre la température en Kelvin).
2. $W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext}\text{d}V = -\int_{V_i}^{V_f} P\text{d}V$ car $P = P_{ext}$ (réversible mécaniquement)
   $= -\int_{V_i}^{V_f} P_iV_i^kV^{-k}\text{d}V$ car $P.V^k = P_i.V_i^k$
   $= -P_iV_i^k\left[\frac{V^{-k+1}}{-k+1}\right]_{V_i}^{V_f} = \frac{P_iV_i^k\left(V_f^{1-k} - V_i^{1-k}\right)}{k-1}$
   $= \frac{P_fV_f - P_iV_i}{k-1}$ en utilisant $P_iV_i^k = P_fV_f^k$ pour le premier terme

La dernière ligne de calcul n'est pas nécessaire, elle permet simplement d'avoir une expression plus simple à taper à la calculatrice. On trouve alors $W = -862\,\text{J}$ en mettant bien les pressions en Pascal et les volumes en mètre cube.

$W < 0$, c'est logique car le gaz se détend et pousse, donc il fournit du travail.

3. En appliquant le premier principe au gaz lors de cette détente : $Q = \Delta U - W = C_v(T_f - T_i) - W = 248\,\text{J}$: le gaz est refroidi par la détente, il est donc plus froid que l'extérieur, donc il est logique qu'il reçoive du transfert thermique de l'extérieur.
4. Cette seconde étape est isochore : $V = \text{cst}$ donc $W = 0$.
   Par le premier principe appliqué au gaz : $Q = \Delta U = C_v(T_i - T_f) = 614\,\text{J}$: le gaz se réchauffe de T_f à T_i, il reçoit du transfert thermique.

Corrigé de l'exercice T1.10 : Traction d'un ressort [**]

Cet exercice est très simple en soi, mais ce qui perturbe, c'est qu'il n'utilise pas les grandeurs habituelles de la thermodynamique (pression,…)

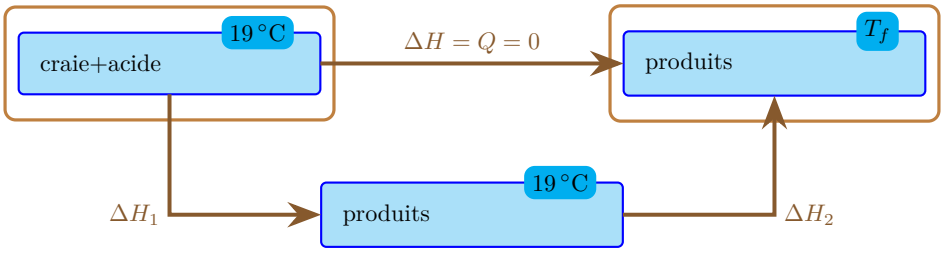
1. Le premier principe isobare appliqué au ressort lors de la traction donne $\Delta E_{macro} + \Delta H = W' + Q$. Ici, le ressort était initialement au repos, donc $E_{p,initial} = 0$. À la fin, il a un allongement Δl tel que $k.\Delta l = F$ soit $\Delta l = \frac{F}{k}$. L'énergie potentielle finale vaut donc $\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{F^2}{2k}$. Donc $\Delta E_{macro} = \frac{F^2}{2k}$.
   Pour un solide, $\Delta H = C_p.\Delta T$.
   Le travail utile reçu vaut $W' = \int F.dl = F.\Delta l = \frac{F^2}{k}$ car F est constante.
   L'évolution est adiabatique, donc $Q = 0$.
   On en déduit que $\frac{F^2}{2k} + C_p.\Delta T = \frac{F^2}{k}$ donc $\Delta T = \frac{F^2}{2kC_p} = 0{,}25\,^\circ\text{C}$.
2. On reprend le même bilan que précédemment, sauf que $Q \neq 0$ et $\Delta T = 0$, ce qui donne $Q = -\frac{F^2}{2k} = -6{,}25\,\text{J}$

Corrigé de l'exercice T1.11 : Compression de l'air [**]

1. On utilise $H = U + PV$ et on trouve 199,7|300,3|503,4|1046,6 en kJ (attention aux unités ! P en Pascal et V en m^3 !)
2.
   (a) Lecture du tableau : le volume passe de 861 L à 1437 L. Comme la pression extérieure est constante, le travail vaut $W = -P_{ext}\Delta V = -1 \times 10^5 \times (1437 \times 10^{-3} - 861 \times 10^{-3}) = -57{,}6\,\text{kJ}$
   (b) $\Delta U = 359{,}7 - 214{,}2 = 145{,}5\,\text{kJ}$. Par le premier principe appliqué à 1 kg d'air lors du chauffage : $Q = \Delta U - W = 203{,}1\,\text{kJ}$
   (c) Par le premier principe isobare appliqué à 1 kg d'air lors du chauffage : $Q = \Delta H = 503{,}4 - 300{,}3 = 203{,}1\,\text{kJ}$
3.
   (a) Le volume du gaz augmente car la pression diminue, donc le travail reçu est négatif : le gaz fournit du travail.
   (b) Comme $Q = 0$, le premier principe appliqué à l'air pendant la détente indique que $\Delta U = W = -P_{ext}.\Delta V$ puisque $P_{ext} = \text{cst}$. Donc $U_f - 212\,400 = -1 \times 10^5(V_f i \times 10^{-3} - 85{,}9 \times 10^{-3}) = -100V_f + 8590$ avec V_f en litres et U_f en J.
   On ne peut pas appliquer le premier principe avec l'enthalpie car l'état initial n'est pas un état d'équilibre ($P = 10\,\text{bar}$ et $P_{ext} = 1\,\text{bar}$).
   (c) L'équation devient $-70\,000 + 718(T_f - 200) = -288(T_f - 200) - 48\,710$ d'où on tire $T_f = 221{,}2\,\text{K}$ puis $V_f = 634\,\text{L}$ et $U_f = 157{,}6\,\text{kJ}$. Enfin, pour le travail on a deux possibilités : $W = -P\Delta V = -54{,}8\,\text{kJ}$; ou bien $W = \Delta U = -54{,}8\,\text{kJ}$

Corrigé de l'exercice T1.12 : Réaction entre une craie et de l'acide [***]

On va décomposer la transformation du système en deux étapes, car H est une fonction d'état comme U : d'après ce que donne l'énoncé, on va d'abord imaginer une réaction à température constante, puis un échauffement des produits.



Sur la transformation totale, on peut appliquer le premier principe isobare : $\Delta H = Q = 0$ car la transformation est adiabatique. Or $\Delta H_1 = \frac{m}{M}\Delta_r H^0$ d'après l'énoncé, et $\Delta H_2 = C_p(T_f - T_i)$, d'où on tire $T_f = T_i - \frac{m\Delta_r H^0}{MC_p} = 353\,°\text{C}$

Pour le travail des forces de pression puisque la transformation est isobare, c'est simplement $W = -P_0.V_f = 91\,\text{J}$.

Corrigé de l'exercice T1.13 : Charge d'un condensateur [***]

1. Initialement, le condensateur est déchargé. À la fin, $q = \Gamma E$.
   Le travail du générateur vaut donc $W = \int_0^{\Gamma E} E.dq = \Gamma.E^2$ puisque $E = \text{cst}$.
   Si l'évolution est adiabatique, alors $Q = 0$ donc la premier principe appliqué au condensateur pendant la charge donne $\Delta(E_{élec} + H) = W$. Ici, $\Delta E_{élec} = E_{élec}(\text{final}) - E_{élec}(\text{initial}) = \frac{1}{2}\Gamma E^2$, et $\Delta H = C\Delta T$; donc $C\Delta T = \Gamma E^2 - \frac{1}{2}\Gamma E^2 = \frac{\Gamma E^2}{2}$.
   AN : $\Delta T = 1{,}2\,\mu\text{K}$: c'est imperceptible.
2. $E_{élec}$ ne change pas. Le ressort ne bouge pas, donc $W = 0$. De plus, la température redescend à sa valeur initiale, donc baisse de $\frac{\Gamma E^2}{2C}$. Le premier principe appliqué au condensateur pendant le refroidissement indique donc simplement $Q = -C\frac{\Gamma E^2}{2C} = \frac{\Gamma E^2}{2} = -5 \times 10^{-5}\,\text{J}$ (la chaleur est cédée).
   On constate donc que Q représente la moitié du travail fourni par le générateur : la moitié de ce travail « part en chaleur » (expression fort impropre), et seule la moitié est stockée sous forme d'énergie électrique : le rendement de l'opération vaut donc 50 % : pas terrible.
3. Lors de la première opération, la charge passe de 0 à $\frac{\Gamma E}{2}$ sous une fem de $\frac{E}{2}$, donc le travail reçu vaut $\frac{\Gamma E^2}{4}$.
   Lors de la seconde opération, la charge passe de $\frac{\Gamma E}{2}$ à ΓE sous une fem de E, donc le travail reçu vaut $E\left(\Gamma E - \frac{\Gamma E^2}{2}\right) = \frac{\Gamma E^2}{2}$.
   Au total, $W = \dfrac{3\Gamma E^2}{4}$.
   Sur l'ensemble, on a encore $\Delta E_{elec} = \frac{\Gamma E^2}{2}$ et $\Delta H = 0$ (pas de variation de température du solide), donc $Q = -\dfrac{\Gamma E^2}{4}$.
   Cette fois, 2/3 du travail fourni est stocké, et 1/3 « part en chaleur », soit un rendement de 66 % : c'est mieux.
   On pourrait montrer que, en multipliant les étapes, le rendement s'approche de 1.
   Conclusion : mieux vaut charger doucement que brutalement.

Corrigé de l'exercice T1.14 : Importance de la masse du piston [****]

1. On prend comme système le gaz avec le piston, car c'est sur ce système que s'applique la pression P_{ext}, alors $\delta W = -P_{ext}\text{d}V$. D'après le premier principe appliqué à {gaz+piston} pendant une durée infinitésimale, $\text{d}U + \text{d}E_c(\text{piston}) = -P_{ext}\text{d}V + \delta Q$. Or $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ donc $\text{d}E_c = \frac{\text{d}E_c}{\text{d}t}\text{d}t = m\dot{x}\ddot{v}\text{d}t$. On a donc $\text{d}U + m\dot{x}\ddot{x}dt = -P_{ext}\text{d}V + \delta Q$
2. Le piston est soumis à deux forces suivant x : les deux forces de pression. Donc par le PFD projeté sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = (P - P_{ext}S$
   En remplaçant : $\text{d}U + \dot{x}S(P - P_{ext})\text{d}t = -P_{ext}\text{d}V + \delta Q$. Or $V = x.S$ donc $S\dot{x} = \frac{\text{d}V}{\text{d}t}$ ce qui donne $\text{d}U + (P - P_{ext})\text{d}V = -P_{ext}\text{d}V + \delta Q$ soit $dU = -P\text{d}V + \delta Q$. Cette équation est la même que si la pression extérieure valait P, donc tout se passe comme si la transformation était réversible, avec $P = P_{ext}$, et cela à cause de l'inertie du piston.
3. La force de frottements est une force intérieure, donc elle n'apparaît pas dans le premier principe. Par contre, dans le PFD : $m\ddot{x} = (P - P_{ext})S - F.\text{signe}(\text{d}V)$ ce qui donne finalement $\text{d}U = -P\text{d}V + \delta Q + F\frac{|\text{d}V|}{S}$. Pour une transformation : $\Delta U = -\int P\Delta V + Q + F\frac{|\Delta V|}{S}$: on voit apparaître un terme supplémentaire qu'il n'est pas

posible d'annuler entre un aller et un retour, donc la transformation ne sera jamais réversible en présence de frottements solides.

4. De même on obtient $\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + \delta Q + \frac{\lambda \dot{x}}{S}\mathrm{d}V$ soit $\Delta U = -\int P\mathrm{d}V + Q + \int \frac{\lambda \dot{x}}{S}\mathrm{d}V$. Or le terme supplémentaire peut être rendu aussi petit qu'on veut à condition de diminuer la vitesse $\dot{x}$ du piston. Dans le cas de frottements fluides, il y a donc une vitesse limite en-dessous de laquelle on peut considérer que la transformation est quasi-réversible.

5. Dans le cas d'une transformation entre deux états d'équilibre immobiles, il y a forcément eu des forces de frottements qui ont immobilisé le système. Par exemple, quand on pose une masse sur un piston, en l'absence de forces de frottements, il oscille indéfiniment. Donc entre deux états d'équilibre **immobiles**, la transformation ne peut pas être réversible si $P \neq P_{ext}$.

   Dans le cas d'un moteur décrivant un cycle, au contraire, il n'y a pas de problème. C'est le cas du moteur à explosion qu'on étudiera bientôt.

   Pour un obus dans un canon, la détente du gaz est réversible jusqu'à ce que l'obus sorte de la bouche du canon. Il y a alors une brusque détente irréversible du gaz.

   Dans la détente de Joule-Gay-Lussac, il n'y a pas de piston, donc elle est toujours irréversible.

Chapitre T2 Thermodynamique des liquides et des solides

Programme p.528

Conseils p.529

Cours p.522
- T2.A. Modèles pour un liquide ou un solide
- T2.B. Calorimétrie
- T2.C. Évolution temporelle d'un système sous pression constante

QCMs p.530

Exercices p.531

TDs numériques p.534

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

Cours

On va, dans ce chapitre, s'intéresser aux phases condensées, les liquides et les solides. On va en donner un modèle idéal très simple qui suffit pour commencer à apprendre la thermodynamique. On va en profiter pour introduire la méthode de mesure de grandeurs thermodynamiques : la calorimétrie. Enfin, on regardera un peu la dynamique des échanges de chaleur.

Commençons par définir les trois principaux états de la matière : solide, liquide et gaz ou vapeur.

Définition : Gaz

On appelle gaz un état de la matière qui n'a pas de forme propre et a une densité plutôt faible ($\simeq 1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Définition : Liquide

On appelle liquide un état de la matière qui n'a pas de forme propre et a une densité plutôt forte ($\simeq 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Définition : Solide

On appelle solide un état de la matière qui a une forme propre et une densité plutôt forte ($\simeq 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Ces définitions restent vagues ; on verra d'ailleurs dans quelques chapitres que la distinction n'est pas toujours aussi évidente : à haute température et haute pression, on ne distingue par exemple plus le liquide du gaz. De plus, il existe d'autres états de la matière : plasma, superfluide, cristal liquide,...mais aussi des états plus difficiles à définir comme les granulaires (le sable, la farine), les mousses,...

Remarque : Les solides et les liquides sont denses : on les appelle les *phases condensées* ; les liquides et les gaz n'ont pas de forme propre : on les appelle les *fluides*.

T2.A. Modèles pour un liquide ou un solide

A.1. Propriétés générales

La plupart des phases condensées (liquides ou solides) sont peu dilatables et peu compressibles :

— $|\alpha| < 1\times10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$

— $\chi_T < 1\times10^{-5}\,\mathrm{bar^{-1}}$

Pour simplifier, on considèrera le plus souvent qu'ils sont incompressibles et indilatables.

Propriété : Solide ou liquide incompressible et indilatable

Un solide/liquide **indilatable** a un coefficient $\alpha = 0$.
Un solide/liquide **incompressible** a un coefficient $\chi_T = 0$.
Un solide/liquide incompressible et indilatable a un volume constant : $V = \mathrm{cst}$

A.2. Énergie et enthalpie

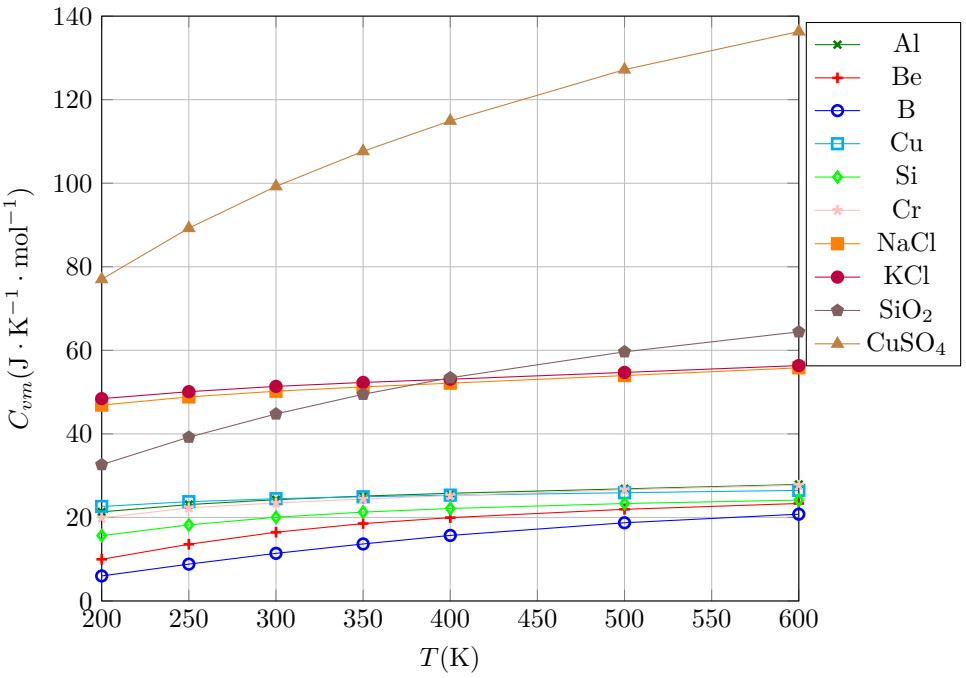
Si $V = \mathrm{cst}$, l'énergie interne ne peut plus dépendre que de la température.

Propriété : Énergie d'un solide ou liquide incompressible et indilatable

Pour un solide ou un liquide incompressible et indilatable, U et C_v ne dépendent que de la température.

Remarque : La figure T2.1 montre des mesures expérimentales de C_{vm} pour des solides. On y voit apparaître la loi de Dulong et Petit (hors programme) : à haute température, $C_{vm} \to 3R = 25\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ multiplié par le nombre d'atomes dans la formule chimique du solide. Dans les exercices, on utilise plutôt les capacités thermiques massiques.

FIGURE T2.1 : Capacités thermiques à volume constant de quelques cristaux.



Propriété : Enthalpie d'une phase condensée (liquide/solide)

Pour un solide ou un liquide, l'enthalpie et l'énergie sont quasiment égales : $H \approx U$ donc $C_p \approx C_v$, qu'on notera souvent simplement C.

Démonstration

On verra un peu plus tard que, pour un gaz, PV est du même ordre de grandeur que le terme d'énergie U. Or, pour une phase liquide ou solide, le volume, à quantité de matière égale, est environ 1000 fois plus faible, ce qui implique que le terme PV sera environ 1000 fois plus faible que le terme d'énergie U. On pourra donc le négliger cette année.

T2.B. Calorimétrie

La calorimétrie est le domaine de la **mesure** des grandeurs thermodynamiques. Une des grandeurs mesurées par cette technique est la capacité thermique. Le principe de la calorimétrie est de travailler sur des mesures de températures à pression constante.

Définition : Calorimètre idéal

Un calorimètre idéal est une enceinte parfaitement calorifugée mais légèrement ouverte sur l'extérieur, de sorte que les transformations qui s'y passent se font de manière isobare.

On a alors $Q = 0$ et donc $\Delta H = W'$ (en supposant qu'il n'y a pas d'énergies macroscopiques).

Pour esurer des capacités thermiques, l'idée est toujours de mettre en contact dans le calorimètre deux corps purs différents, l'un dont on connaît la capacité calorifique, l'autre dont on ne la connaît pas. Par des mesures précises des masses et des températures, on peut déterminer la grandeur inconnue.

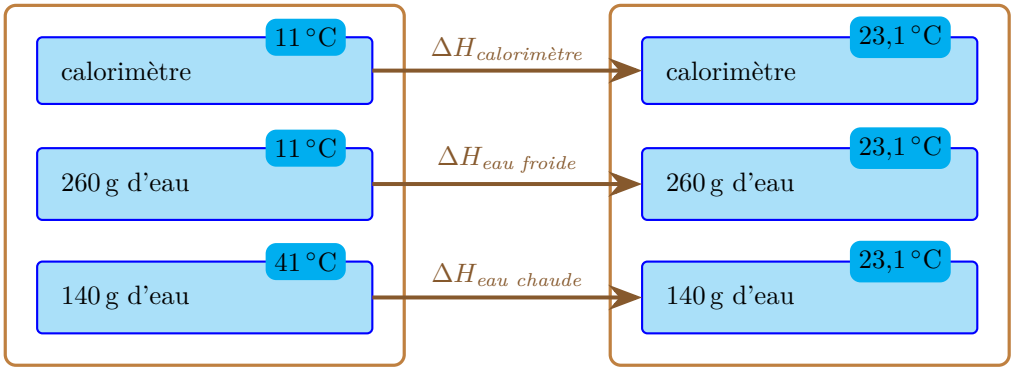
! En calorimétrie, les températures apparaissent quasiment tout le temps sous forme de différences de températures, donc on peut travailler en degrés Celsius.

Exemple : Mesure de la capacité thermique d'une pierre

On dispose d'un calorimètre dont la capacité thermique est inconnue. Par contre, on connaît la capacité thermique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4{,}18\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

1. Pour déterminer la capacité C_c du calorimètre, on place dans le calorimètre 260 g d'eau à 11 °C et on attend que le calorimètre ait atteint cette température. Puis on verse d'un coup 140 g d'eau chaude à 41 °C, on mélange rapidement et on mesure la température d'équilibre : 20,1 °C. Calculez C_c.
2. On place maintenant 245 g d'eau à 18 °C dans le calorimètre, puis on y plonge une pierre de 205 g chauffée à 80 °C. Après quelques instants on atteint l'équilibre à 22,5 °C. Calculez la capacité thermique massique de cette pierre.

1.



L'enthalipe est extensive, donc on peut écrire $\Delta H = \Delta H_{eau\ froide} + \Delta H_{eau\ chaude} + \Delta H_{calorimètre}$.

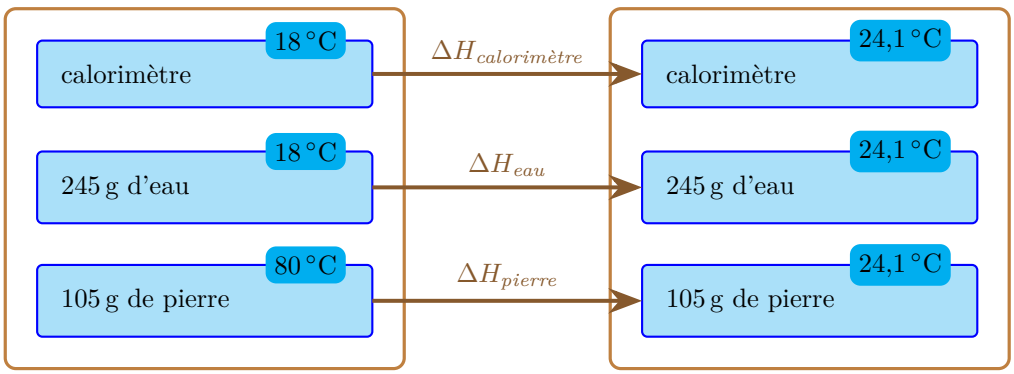
Les 260 g d'eau froide ($C_v = 0{,}260 \times 4180 = 1092\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$) passent de 11 °C à 20,1 °C, soit $\Delta T = +9{,}1$ °C. Donc $\Delta H_{eau\ froide} = 1092 \times 9{,}1 = 9940$ J.

De même, les 140 g d'eau chaude passent de 41 °C à 20,1 °C donc $\Delta H_{eau\ chaude} = 0{,}140 \times 4180 \times (20{,}1 - 41) = -12\,290$ J.

Enfin, le calorimètre passe de 11 °C à 23,1 °C donc $\Delta H_{calorimètre} = C_c \times 9{,}1$.

Or le calorimètre est calorifugé, il n'y a pas de travail utile, donc le premier principe isobare appliqué au système {calorimètre + eau + eau} sur la transformation donne $\Delta H = Q = 0$. On en tire que $C_c = \frac{12\,290 - 9940}{9{,}1} = 258\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$

2. On a encore $\Delta H = 0$.



Cette fois $(258 + 4180 \times 0{,}245) \times (22{,}5 - 18) + 0{,}205 \times c_{pierre} \times (22{,}5 - 80) = 0$ d'où on tire $c_{pierre} = 489\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

T2.C. Évolution temporelle d'un système sous pression constante

Lorsqu'un système évolue à pression constante, la variable la plus intéressante à étudier est sa température. En effet, c'est le paramètre qui devient déterminant pour décrire le système, le volume de celui-ci ne variant que par conséquence de la dilatation. Nous allons donc dans ce paragraphe modéliser de façon simple les échanges thermiques (échanges de chaleur) de manière à aboutir à l'équation différentielle vérifiée par un système évoluant de façon isobare.

C.1. Résistances thermiques

Considérons le schéma de la figure T2.2 : deux objets sont à des températures différentes T_a et T_b et séparés par une certaine distance. Alors l'objet le plus chaud va avoir tendance à donner de la chaleur au plus froid. Suivant ce qui se trouve entre les deux objets, il existe 3 principaux modes de transfert de chaleur :

Définition : Modes de transfert de la chaleur

Le transfert thermique entre deux objets à des températures différentes peut se faire de 3 manière différentes :

- si l'espace entre les deux objets est *transparent* alors le transfert peut se faire par *rayonnement* ; c'est le mode de transfert le plus rapide ;
- si l'espace entre les deux objets est un *fluide* (liquide ou gaz) alors le transfert peut se faire par *convection*, c'est-à-dire par les mouvements du fluide ; c'est un mode de transfert moyennement rapide ;
- si l'espace entre les deux objets est un *solide* alors le transfert peut se faire par *conduction*, c'est-à-dire par transmission de l'agitation thermique de proche en proche sans mouvement global de matière ; c'est le mode de transfert le plus lent.

FIGURE T2.2 : Transfert thermique entre deux objets à des températures différentes.



Précisons un peu ces trois modes de transfert thermique.

Le rayonnement se fait par un processus fondamental en physique : le *rayonnement du corps noir*. La loi de Planck qui le décrit indique que tout objet à la température T émet un rayonnement lumineux caractérisé par deux lois :

- la loi de Wien : la longueur d'onde d'émission maximale vérifie $\lambda_{max}.T = 2{,}9 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}$. Ainsi, un objet à 290 K émet beaucoup à la longueur d'onde $\lambda_{max} = 1 \times 10^{-5}\,\text{m} = 10\,\mu\text{m}$, c'est pour cela que les caméras thermiques regardent à cette longueur d'onde. Si on chauffe l'objet, T augmente et λ_{max} diminue. Vers $800\,^\circ\text{C} = 1073\,\text{K}$ on trouve $\lambda_{max} = 2{,}7\,\mu\text{m}$, dans le proche infrarouge, et l'objet commence à rougir. À 3000 K, $\lambda_{max} = 967\,\text{nm}$ et l'objet apparaît orange. Le Soleil, lui, est à 6000 K, donc il émet une lumière la plus intense à 480 nm, dans le vert ; il apparaît blanc car il émet aussi du rouge et du bleu.
- la loi de Stefan : l'intensité émise varie proportionnellement à T^4, ce qui correspond à une variation très forte avec la température. Ainsi, quand on met deux objets de températures différentes T_a et T_b proches l'un de l'autre, le premier émet une puissance proportionnelle à T_a^4, le second proportionnelle à T_b^4, et chaque objet absorbe la puissance émise par l'autre. Il est facile de voir que l'objet le plus froid va gagner de l'énergie, et le plus chaud va en perdre. On ressent bien cet effet quand on se chauffe avec un poêle ou une cheminée : à quelques mètres devant le feu, on ressent une forte chaleur due au rayonnement émis par les flammes ; une fois le feu éteint, le poêle est encore chaud, et on continue de ressentir la chaleur émise par le poêle, même si elle est moins forte que précédemment. Au contraire, si on se place en hiver près d'une vitre en simple vitrage, ou d'un mur mal isolé et froid, on ressent une sensation de froid, car cette fois c'est nous qui émettons plus de rayonnement que nous n'en recevons de la part de cette surface froide.

À l'opposé, on trouve le mode de transfert thermique le plus lent : la conduction. Celle-ci se fait à travers des matériaux solides. Elle obéit à une équation que vous verrez l'an prochain, l'*équation de diffusion de la température*.

Reste enfin le troisième type de transfert thermique : la convection. Si un point d'un fluide est plus chaud qu'un autre, ce fluide se met en mouvement : les parties chaudes montent, les parties froides descendent. L'explication de ce phénomène est la poussée d'Archimède, et le fait que les fluides ordinaires augmentent de volume lorsqu'ils chauffent, donc ils deviennent moins denses. On voit très bien ces phénomènes de convection apparaître dans une casserole d'eau qu'on chauffe. Cette convection transporte alors efficacement la chaleur. Pour s'en convaincre, il suffit de mettre à

FIGURE T2.3 : Le chauffage d'une pièce en hiver utilise soit le rayonnement, soit la convection ; la conduction à travers les murs la refroidit.



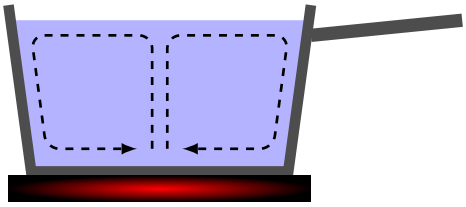
(a) Chauffage par rayonnement



(b) Chauffage par convection

chauffer deux casseroles, une d'eau et une de purée, sans tourner : toute l'eau va se réchauffer, tandis que pour la purée, seul le fond de la casserole va se réchauffer, voire brûler, car la purée est trop épaisse pour permettre la convection, et la conduction à travers la purée est insuffisante pour transporter la chaleur rapidement.

FIGURE T2.4 : Mouvements de convection dans une casserole d'eau.



La modélisation de ces mouvements de convection, et des transferts thermiques associés, est très complexe et dépend d'une grande quantité de paramètres.

Pour cette année, on va se contenter dans les exercices d'un modèle simplifié : si deux objets a et b sont en contact thermique, alors on peut définit la puissance thermique (ou flux thermique) de b vers a comme $\mathcal{P}_{th,a\to} = \frac{\delta Q_{th,a\to b}}{\mathrm{d}t}$; avec un peu de bon sens, on comprend que :

— $\mathcal{P}_{th,a\to b}$ est d'autant plus élevé que $T_a > T_b$

— $\mathcal{P}_{th,a\to b}$ est d'autant plus élevé (en valeur absolue) que la surface de contact entre a et b est grande

On prendra donc souvent un modèle simple : $\mathcal{P}_{th,a\to b} = hS.(T_a - T_b)$ où S est la surface de contact et h un coefficient constant donné par l'énoncé.

C.2. Équation différentielle d'évolution de la température

Considérons un système à la température T en contact avec l'extérieur à la température T_{ext} qu'on va supposer constante, le tout étant à pression constante. Le premier principe va alors s'écrire $\Delta H = W' + Q$; mais au cours du temps, la température T du système va varier, donc le transfert thermique Q aussi. Du coup, on va plutôt faire un bilan sur une toute petite durée $\mathrm{d}t$; mieux encore, on va se ramener à des puissances.

Premier principe isobare sous forme dérivée

Si un système de capacité thermique C_p évolue de façon isobare en recevant une puissance utile $\mathcal{P}_{utile}$ et une puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$, alors

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = C_p \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{utile}(t) + \mathcal{P}_{th}(t) \qquad \text{(T2.1)}$$

Démonstration

Il suffit d'écrire le premier principe isobare pendant une durée $\mathrm{d}t$ petite : $\mathrm{d}H = \delta W' + \delta Q$ donc $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W'}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$. Le premier quotient est la puissance et le deuxième terme est la puissance thermique. De plus $\mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T$.

On utilise alors cette équation en remplaçant $\mathcal{P}_{utile}$ et $\mathcal{P}_{th}$ en fonction de ce qu'indique l'énoncé. Si l'énoncé propose une loi de la forme $\mathcal{P}_{th} = hS(T_{ext} - T)$, alors on trouve une équation d'ordre 1 vérifiée par la température.

Exemple : Bilan thermique d'une maison

Une maison, de capacité thermique C, de température $T(t)$, est chauffée par un chauffage électrique de puissance $\mathcal{P}_{ch}$ constante et perd une puissance thermique à travers les murs et le toit donnée par la loi $\mathcal{P}_{ext} = hS(T(t) - T_{ext})$ où $h = 0{,}48$ USI, $S = 130\,\mathrm{m}^2$ et T_{ext} est la température extérieure.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par T. La mettre sous la forme $\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_{eq}$.
2. Quel est le sens physique de τ ? Quel est le sens physique de T_{eq} ? Interpréter les termes qui y apparaissent.
3. On rentre de vacances, il fait $T_{ext} = 2\,^\circ\mathrm{C}$ dehors et $T(0) = 8\,^\circ\mathrm{C}$ dedans initialement. On met le chauffage en route ; déterminer $T(t)$.
   Pour $C = 30\,\mathrm{MJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ et $\mathcal{P}_{ch} = 3500\,\mathrm{W}$, déterminez le temps mis pour atteindre $T = 19\,^\circ\mathrm{C}$.

1. La maison évolue à pression constante, donc par le premier principe isobare sur une durée $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}H = \delta W' + \delta Q$ donc $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W'}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$. On sait que
   - $dH = C\mathrm{d}T$ pour un solide
   - le travail utile est ici le travail électrique de chauffage, donc $\frac{\delta W'}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ch} = \mathrm{cst}$
   - $\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{ext} = hS.(T_{ext} - T)$; attention, ici $\mathcal{P}_{ext}$ est perdue, d'où le $-$; si vous l'oubliez, vous trouverez à la fin une ED instable !

   On en déduit que $C\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ch} + hS.(T_{ext} - T(t))$ soit $\frac{C}{hS}\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + T(t) = T_{ext} + \frac{\mathcal{P}_{ch}}{hS}$ donc $\tau = \frac{C}{hS}$ et $T_{eq} = T_{ext} + \frac{\mathcal{P}_{ch}}{hS}$
2. $\tau = \frac{C}{h}$ est le temps caractéristique d'évolution de la température ; il nous dit, par exemple, si on coupe le chauffage, le temps que mettra la maison à se refroidir. Il augmente si la maison est massive (C grand) et bien isolée (h petit)
   $T_{eq} = T_{ext} + \frac{\mathcal{P}_{ch}}{hS}$ est la température à l'équilibre. C'est la température extérieure augmentée d'un terme de chauffage, d'autant plus grand que la maison est bien isolée (h petit).
3. C'est une ED d'ordre 1 à résoudre ; on trouve après quelques calculs $T(t) = T_{eq} + (T(0) - T_{eq})\,e^{-t/\tau} = 58 - 51e^{-t/\tau}$ en °C avec $\tau = 5{,}7\,\mathrm{j}$. La résolution de $T(t) = 19\,^\circ\mathrm{C}$ donne alors $t = \tau\ln\frac{51}{39} = 36{,}7\,\mathrm{h}$. C'est très long, et cela montre plusieurs limites de notre modèle :
   - on a considéré le système comme homogène, alors qu'on sait bien qu'il est beaucoup plus facile de chauffer l'air de la pièce que de chauffer les murs
   - la relation donnant la puissance perdue n'est valable qu'une fois le smurs chauds

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système	
Modèle de la phase condensée incompressible et indilatable.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales. Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable. Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un système considéré incompressible et indilatable en fonction de sa température.
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Transferts thermiques.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement.
Capacité thermique à pression constante dans le cas d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

Quelques conseils

✎ Dans un exercice de calorimétrie, pensez toujours à utiliser l'enthalpie.

✎ En calorimétrie, on peut normalement garder les températures en degrés Celsius, car on n'utilise que des différences de températures.

✎ En appliquant le premier principe pendant une durée $\mathrm{d}t$, faites attention aux signes des échanges ; si l'équation obtenue est instable, il y a un problème.

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

QCMs

réponses page 535

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Pour un solide ou un liquide considérés comme incompressible et indilatable :

(a). V ne dépend que de T
(b). $V = 0$
(c). V ne dépend que de P
(d). $V = \text{cst}$

Q2. Dans un calorimètre, les transformations sont

(a). isothermes
(b). isochores
(c). isobares
(d). adiabatiques

Q3. Un système évoluant à pression constante et en échangeant du transfert thermique avec l'extérieur a sa température qui vérifie une équation différentielle :

(a). d'ordre 1
(b). de temps caractéristique $\tau = ChS$
(c). de temps caractéristique $\tau = \frac{C}{hS}$
(d). d'ordre 2

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

Exercices

réponses page 536

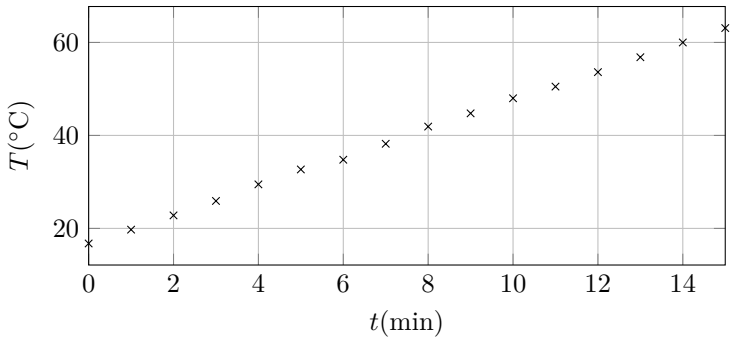
Exercice T2.1 : Calorimétrie [*]

1. Dans un calorimètre de capacité thermique négligeable, on plonge $m_{Fe} = 250\,g$ de fer à $80\,°C$ dans $m_{H_2O} = 120\,g$ d'eau liquide à $20\,°C$. La température d'équilibre est mesurée à $30{,}9\,°C$. Calculez la capacité thermique massique du fer.
2. On recommence la même expérience, cette fois la masse du fer vaut $115\,g$. Calculez la température d'équilibre.

On donne $c\,(H_2O_\ell) = 4{,}18\,J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}$

Exercice T2.2 : Chauffage d'un liquide [*]

Dans un calorimètre de capacité thermique négligeable, on place $m = 302\,g$ d'huile d'olive. On la chauffe avec une résistance chauffante $R = 5\,\Omega$ alimentée par un courant constant $I = 2\,A$. On relève la température au cours du temps :



1. Par un bilan enthalpique entre les instants 0 et t, montrez que la température T vérifie une loi $T(t) = T(0) + k.t$ avec k une constante à exprimer en fonction de R, I, m et la capacité thermique massique c de l'huile.
2. Par mesure de la pente de la courbe sur le graphique, déterminez c.

Exercice T2.3 : Calorimétrie [*]

1. Dans un calorimètre, on place $197\,g$ d'eau à $20{,}1\,°C$. On plonge dedans une résistance électrique $R = 2{,}5\,\Omega$. À l'instant $t = 0$, on fait passer un courant constant $I = 5{,}2\,A$ à travers la résistance ; au bout de $1\,min$, on constate que la température de l'eau vaut $25{,}0\,°C$.
   Déterminez la capacité thermique massique c_p de l'eau si on néglige la capacité thermique de la résistance chauffante et du calorimètre.
2. On enlève la résistance. Dans l'eau à $25{,}0\,°C$ on plonge une pomme de terre de $124\,g$ sortant du four à $120\,°C$; très vite, l'ensemble atteint un état d'équilibre à $57{,}5\,°C$.
   Déterminez la capacité thermique massique de la pomme de terre.

Exercice T2.4 : Calorimétrie [**]

Dans cet exercice, on tiendra compte de la capacité thermique du calorimètre, notée C.
Données : $c_p(\text{eau}) = 4{,}2\,kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$.

1. On mélange 123 g d'eau à 18,3 °C avec 89 g d'eau à 91,2 °C dans un calorimètre initialement à 18,3 °C. On observe une température d'équilibre de l'ensemble égale à 47,1 °C.
   Calculez C ; on supposera que le calorimètre est lui aussi à 47,1 °C à la fin.
2. On verse 152 g d'eau à 19,4 °C dans le calorimètre et on y plonge un morceau de zinc de masse 189 g à 80,1 °C. On mesure une température d'équilibre égale à 25,1 °C.
   Calculez la capacité thermique massique du zinc.
   Indication : tenez compte du calorimètre, qui passe de 19,4 °C à 25,1 °C
3. [***] On verse 181 g d'eau dans le calorimètre et on attend l'équilibre ; on mesure une température de 20,7 °C ; on y ajoute 145 g de sel (chlorure de sodium NaCl) à la même température. On mélange et on observe que la température de l'ensemble baisse jusqu'à 10,0 °C.
   On admet que la capacité thermique massique du sel vaut $c_{p,sel} = 880\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.
   Calculez l'enthalpie de dissociation D du chlorure de sodium à 10 °C, définie comme la variation d'enthalpie d'1 kg de chlorure de sodium lorsqu'il est dissout et solubilisé dans l'eau à 10 °C.

Exercice T2.5 : Bouteille isotherme [**]

Une bouteille isotherme a pour but de conserver un liquide à température constante le plus longtemps possible. Pour cela, il est isolé de l'extérieur par une double paroi en aluminium séparée par une lame d'air d'épaisseur $e = 3\,\mathrm{mm}$. Toutes les transformations sont isobares.

1. On considère une bouteille modélisée par un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 22 cm. Calculez son volume V et sa surface totale S (les bords + le haut et le bas).
2. La bouteille est remplie d'eau de capacité thermique massique $c_p = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Calculez son C_p (la masse volumique de l'eau est à connaître) en négligeant la capacité thermique de l'aluminium.
3. On suppose que l'intérieur de la bouteille, de température T, reçoit une puissance thermique de la part de l'extérieur qui s'écrit $\mathcal{P}_{th} = \alpha S.(T_{ext} - T)$ avec $\alpha = 8{,}7$ USI.
   Montrez que la température de l'eau obéit à une équation différentielle de la forme $\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_{ext}$ où T_{ext} est la température de l'extérieur et τ une constante à exprimer puis à calculer.
4. On suppose que $T_{ext} = 21\,°\mathrm{C}$ et $T(0) = 48\,°\mathrm{C}$. Établissez $T(t)$, et calculez le temps pour atteindre $T = 30\,°\mathrm{C}$.

Exercice T2.6 : Refroidissement d'un café [**]

Un café dans un verre est modélisé par un cylindre de hauteur $z = 3\,\mathrm{cm}$ et de rayon $R = 2\,\mathrm{cm}$, de masse volumique $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, de capacité thermique massique $c_p = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Il est, à l'instant $t = 0$, à une température $T_i = 63\,°\mathrm{C}$. On le place dans une pièce à pression constante et de température constante $T_0 = 21\,°\mathrm{C}$. On suppose que la puissance thermique perdue à travers la surface S totale (bords+haut+bas) s'écrit $\mathcal{P} = h\,(T - T_0)\,S$ avec $h = 50\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$ un coefficient constant.

1. En appliquant le premier principe entre t et $t + \mathrm{d}t$, déterminez une ED vérifiée par la température $T(t)$ du café.
2. Résolvez-la et déterminez $T(t)$.
3. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 35 °C ?

Exercice T2.7 : Température d'une résistance [**]

Une résistance électrique r de capacité thermique C est placée dans l'air de température T_0.



Elle échange de la chaleur avec l'air ambiant en perdant une puissance thermique $\mathcal{P}_{th} = K.(T - T_0)$ où T_0 est la température extérieure et K une constante De plus, elle reçoit de la puissance électrique via le courant I qui

la traverse.
Initialement, la résistance est à l'équilibre thermique avec l'extérieur, à la température T_0. À $t = 0$, on commence à faire passer dans la résistance un courant I constant ; on suppose que le chauffage de la résistance se fait suffisamment lentement pour qu'elle soit à chaque instant à une température uniforme $T(t)$.

1. En faisant un bilan d'enthalpie entre t et $t + \mathrm{d}t$, déterminez une équation différentielle vérifiée par T.
2. Déduisez-en la loi $T(t)$.
3. AN : Pour $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $C = 0{,}1\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$, $K = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$, $r = 100\,\Omega$ et $I = 5\,\mathrm{mA}$, calculez $T(\infty)$ ainsi que le temps caractéristique de l'évolution de T.

T2. Thermodynamique des liquides et des solides

TDs numériques

réponses page 539

TD numérique : Fusible électrique

Un fusible est un conducteur ohmique chargé de protéger un circuit des surintensités : si l'intensité est trop forte, il s'échauffe et fond, ce qui coupe le courant.
Pour que la coupure soit rapide, on utilise un métal qui fond à basse température, et on profite du fait que la résistance d'un métal augmente avec la température, ce qui augmente l'échauffement par effet Joule.
On considère donc un fil de plomb parcouru par un courant I supposé constant. On prend le modèle suivant :

- les transformations se font à pression constante $P_0 = 1\,\text{bar}$. À cette pression, le plomb fond à $T_{fus} = 327{,}5\,^\circ\text{C}$
- la capacité thermique massique du plomb vaut $c_{\text{Pb}} = 129\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, sa masse volumique vaut $\mu = 11{,}35\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$
- le fil a la forme d'un cylindre, de longueur $\ell = 1\,\text{cm}$, de diamètre $d = 0{,}15\,\text{mm}$
- la résistance du fil s'écrit $r(T) = \frac{\rho.\ell}{s}$ avec s la section du fil, et $\rho(T)$ la résistivité du plomb, donnée par la formule approchée

$$\rho(T) = aT^2 + bT + c \text{ avec } \begin{cases} a &= 2{,}41\times10^{-13}\,\Omega\cdot\text{m}\cdot\text{K}^{-2} \\ b &= 6{,}54\times10^{-10}\,\Omega\cdot\text{m}\cdot\text{K}^{-1} \\ c &= -4{,}43\times10^{-9}\,\Omega\cdot\text{m} \end{cases}$$

- le fil est placé dans de l'air de température constante $T_e = 21\,^\circ\text{C}$ et échange de la chaleur avec celui-ci via les bords du cylindre ; le coefficient de flux conducto-convectif vaut $h = 5\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$; la puissance thermique reçue par le fil vaut donc $\mathcal{P}_{th} = hS(T_e - T)$ avec S la surface *latérale* du cylindre
- initialement, le fil est à la température de la pièce

1. Exprimez et calculez dans un programme Python :
   - la masse m du fil
   - la capacité thermique C_p du fil
   - la surface latérale du fil
2. Montrez que la température T du fil, si on la suppose uniforme, vérifie l'équation différentielle

$$\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_e + \frac{r(T)I^2}{hS} \text{ avec } \tau \text{ à exprimer} \qquad (1)$$

3. Quelle équation vérifie la limite T_∞ aux temps longs ? Résolvez-la, tracez alors la courbe de $T_\infty(I)$ pour I variant entre 1 mA et 200 mA, et déterminez le courant maximal que supporte ce fusible.
   Remarque : on admettra que la bonne racine est la plus petite des deux trouvées.
4. Résolvez l'équation différentielle par la méthode d'Euler pour $I = 0{,}2\,\text{A}$ sur une durée de 2 s. Commentez.
5. Idem pour des intensités variant entre 0,2 A et 0,8 A. Commentez.

Réponses aux QCMs

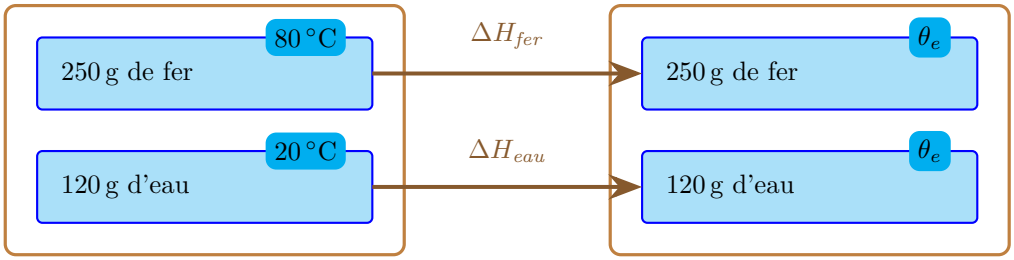
Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(d)
Q2.(c) ET (d)
Q3.(a) ET (c)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T2.1 : Calorimétrie [*]

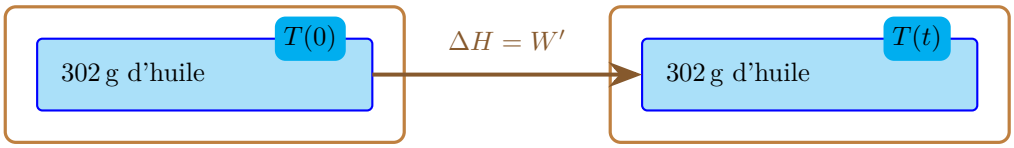
1. La transformation est isobare, adiabatique et sans travail utile, donc le premier principe isobare appliqué à l'ensemble {eau+fer} indique que $\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{fer} = 0$ (par extensivité de l'enthalpie).



   $m_{\mathrm{Fe}} c\,(\mathrm{Fe})\,(30{,}9-80) + m_{\mathrm{H_2O}} c\,(\mathrm{H_2O})\,(30{,}9-20) = 0$. On en tire $c(\mathrm{Fe}) = 0{,}445\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$
2. Même équation mais cette fois on trouve $T_{final} = \frac{80 m_{\mathrm{Fe}} c(\mathrm{Fe}) + 20 m_{\mathrm{H_2O}} c(\mathrm{H_2O})}{m_{\mathrm{Fe}} c(\mathrm{Fe}) + m_{\mathrm{H_2O}} c(\mathrm{H_2O})} = 25{,}1\,^\circ\mathrm{C}$

Corrigé de l'exercice T2.2 : Chauffage d'un liquide [*]

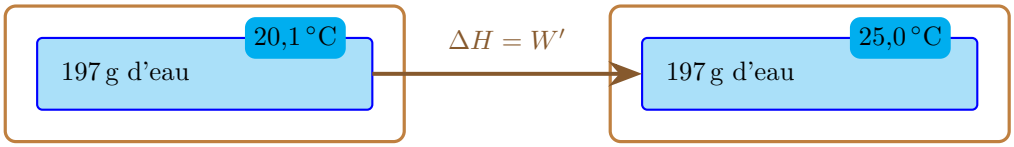
1. Entre 0 et t, le transfert thermique est nul et le travail électrique vaut $RI^2 t$. Donc par le premier principe isobare appliqué à la masse m d'eau entre ces deux instants : $\Delta H = W'$ donc $m.c.(T - T(0)) = RI^2 t$ soit $T = T(0) + \frac{RI^2}{m.c} t$



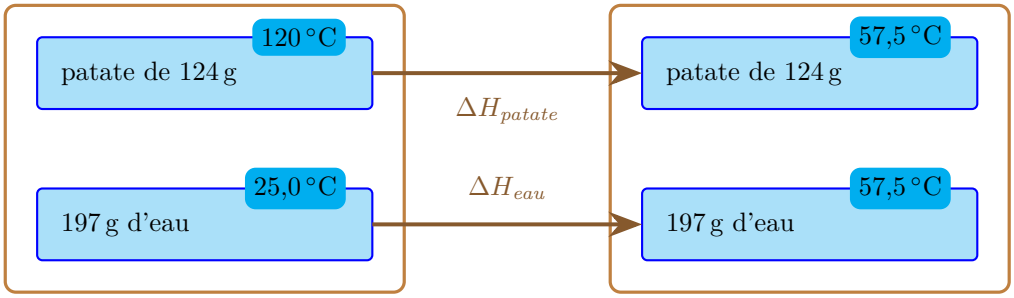
2. On mesure une pente $k = \frac{46}{15} = 3{,}07\,^\circ\mathrm{C\cdot min^{-1}} = 0{,}051\,\mathrm{K\cdot s^{-1}}$. On en tire que $c = \frac{RI^2}{m.k} = 1290\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T2.3 : Calorimétrie [*]

1. La transformation est isobare et adiabatique, donc le 1er principe isobare appliqué au système {eau+résistance} pendant la minute de chauffage donne : $\Delta H = W'$ puisque $Q = 0$ donc $m_{eau}.c_{p,eau}.(T_f - T_i) = RI^2.\delta t$ soit $c_{p,eau} = \frac{RI^2.\Delta t}{m_{eau}.(T_f - T_i)} = 4200\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$



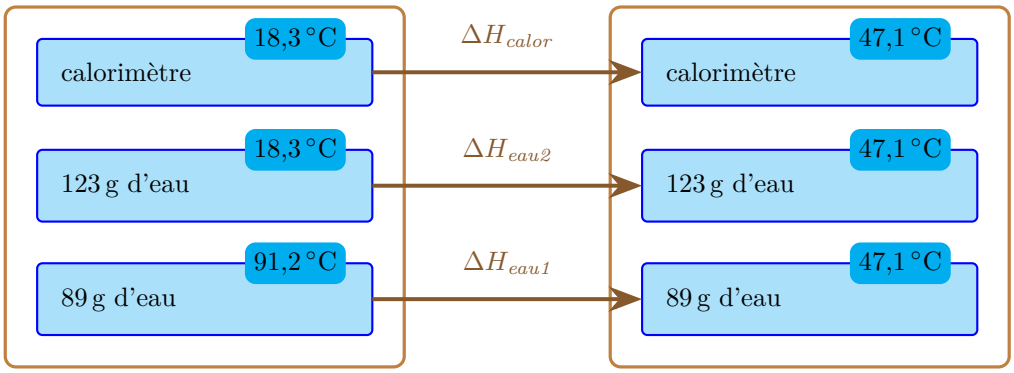
2. Ici la transformation est isobare, adiabatique et sans travail utile, donc le 1er principe appliqué à l'ensemble {eau+pomme de terre} le temps de l'équilibrage des températures indique que $\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{patate} = 0$ donc $m_{eau}.c_{p,eau}.(57{,}5 - 25{,}0) + m_{patate}.c_{p,patate}.(57{,}5 - 120) = 0$ (ni W' ni Q) d'où on tire $c_{p,patate} = 3470\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$



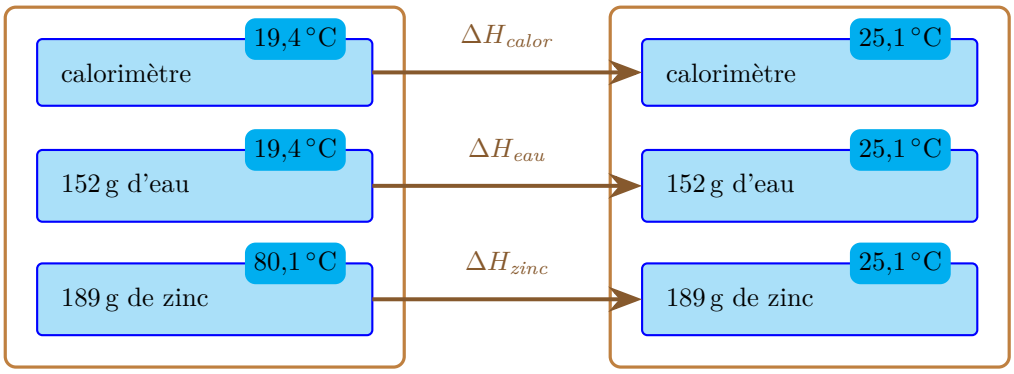
Corrigé de l'exercice T2.4 : Calorimétrie [**]

Dans tout cet exercice : la transformation est isobare, adiabatique et sans travail utile, donc le premier principe isobare appliqué à {calorimètre+son contenu} donne $\Delta H = W' + Q = 0$. On exprime ΔH par extensivité.

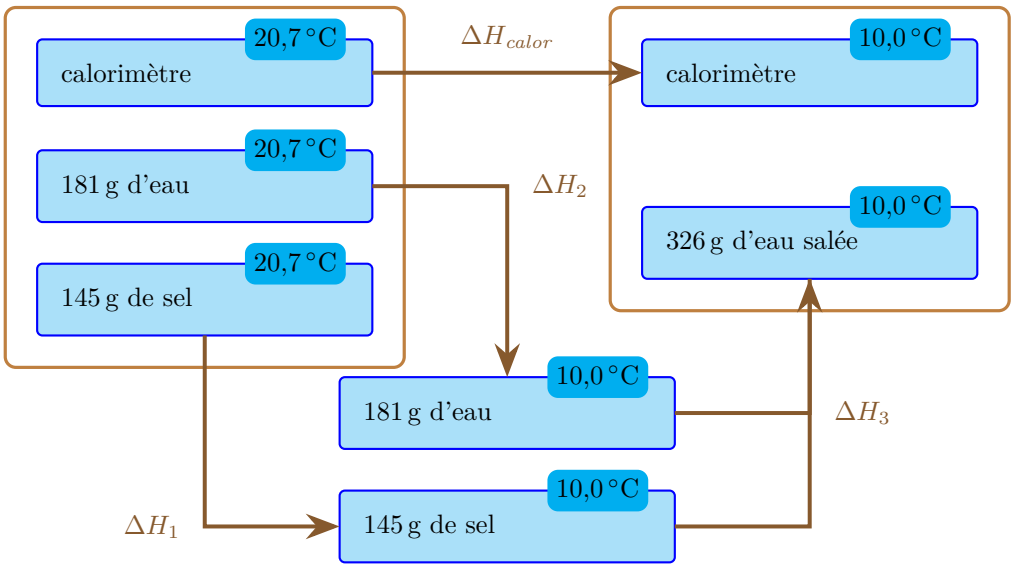
1. $\Delta H = 0 = 4200\times0{,}123\times(47{,}1-18{,}3)+4200\times0{,}089\times(47{,}1-91{,}2)+C\times(47{,}1-18{,}3)$ ce qui donne $C = 55{,}8\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.



2. $\Delta H = 0 = 4200 \times 0{,}152 \times (25{,}1 - 19{,}4) + C \times (25{,}1 - 19{,}4) + 0{,}189 \times c_{\mathrm{Zn}} \times (25{,}1 - 80{,}1)$ ce qui donne $c_{\mathrm{Zn}} = 380\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.



3. On imagine un état intermédiaire fictif où tout s'est refroidi à 10,0 °C mais le sel n'est pas encore dissout (on a le droit de le faire, car H est une fonction d'état) :



$\Delta H = 0 = \Delta H_{calor} + \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = (4200 \times 0,181 + 880 \times 0,145 + C) \times (10,0 - 20,7) + 0{,}145 \times D$ ce qui donne $D = 69{,}6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

Corrigé de l'exercice T2.5 : Bouteille isotherme [**]

1. $V = \pi r^2 h = 1{,}1\,\mathrm{L} = 1{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ et $S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h = 65{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$.
2. $C_p = c_p.\rho.V = 4645\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ avec $\rho = 1000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
3. Le premier principe isobare appliqué à l'eau pendant un temps $\mathrm{d}t$ donne : $\mathrm{d}H = \delta Q$ (par de travail utile) donc $C_p \mathrm{d}T = \alpha S.(T_{ext} - T(t))\mathrm{d}t$ soit $\tau \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + T(t) = T_{ext}$ avec $\tau = \frac{C_p}{\alpha S} = 8180\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{h}16\,\mathrm{min}$
4. $T(t) = T_{ext} + Ke^{-t/\tau}$ et par les CI on trouve $K = T(0) - T_{ext}$ donc $T(t) = 21 + 27e^{-t/\tau}$ en °C.
   On résout : $T(t) = 30 \Leftrightarrow t = \tau \ln \frac{27}{9} = 8980\,\mathrm{s}s = 2\,\mathrm{h}30\,\mathrm{min}$

Corrigé de l'exercice T2.6 : Refroidissement d'un café [**]

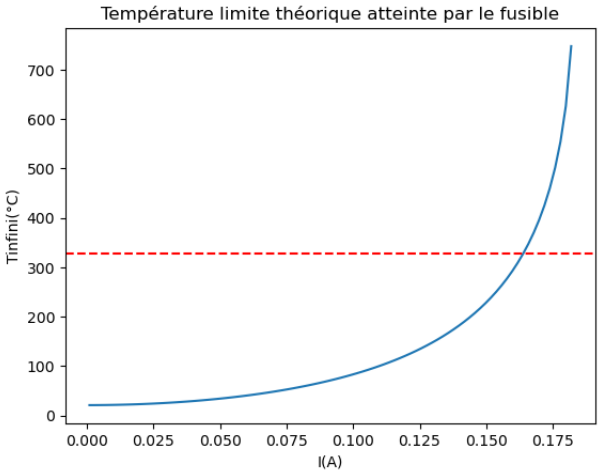
1. La transformation du café est isobare et sans travail utile, donc le premier principe isobare appliqué au café sur un temps $\mathrm{d}t$ donne $\mathrm{d}H = -\mathcal{P}\mathrm{d}t$ en l'absence de travail utile. Or $\mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T = \pi z R^2 \rho c_p \mathrm{d}T$ et $\mathcal{P} = h\left(T - T_0\right)\left(2\pi R^2 + 2\pi r z\right)$ (surface des bords+bas+haut). Donc $\pi z R^2 \rho c_p \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -h\left(2\pi R^2 + 2\pi R z\right)\left(T(t) - T_0\right)$ qui donne après simplification $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + \tau T(t) = \tau T_0$ avec $\tau = \frac{\rho c_p z R}{2h(R+z)} = 504\,\mathrm{s}$
2. Résolution facile d'une ED d'ordre 1 : $T\left(t\right) = T_i + \left(T_0 - T_i\right)e^{-t/\tau}$
3. $T(t) = 35\,^\circ\mathrm{C} \Leftrightarrow t = \tau \ln \frac{63-21}{63-35} = 554\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{min}14\,\mathrm{s}$

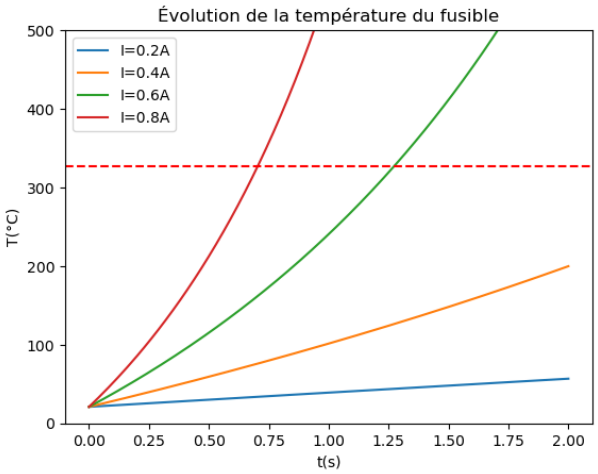
Corrigé de l'exercice T2.7 : Température d'une résistance [**]

1. Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le système reçoit un travail électrique $\delta W_{élec} = rI^2\mathrm{d}t$ et un transfert thermique $\delta Q = -K(T(t) - T_0)\mathrm{d}t$ (attention aux signes). On travaille avec un solide, à pression constante a priori, donc le premier principe isobare appliqué à la résistance entre t et $t + \mathrm{d}t$ indique que $\mathrm{d}H = \delta W_{élec} + \delta Q$.
   Donc $C\mathrm{d}T = rI^2\mathrm{d}t + K(T_0 - T(t))\mathrm{d}t$ donc $\tau\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + T(t) = T_\infty$ avec $\tau = \frac{C}{K}$ et $T_\infty = T_0 + \frac{rI^2}{K}$.
2. Je passe les calculs : Alors $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau}$.
3. AN : $\tau = 100\,\mathrm{s}$ et $T_\infty = 22{,}5\,^\circ\mathrm{C}$.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Fusible électrique





La courbe de température limite semble montrer une coupure à 160 mA ; mais en réalité, même à 200 mA, le fusible met un temps très long pour fondre. La simulation dynamique montre qu'il faut au moins 500 mA pour que le fusible coupe le courant en un temps raisonable de quelques secondes.

Chapitre T3

Thermodynamique des gaz

Programme p.557

Conseils p.558

Cours p.542
- T3.A. Modèles pour les gaz
- T3.B. Énergie des gaz
- T3.C. Étude des transformations classiques

QCMs p.559

Exercices p.562

TDs numériques p.568

T3. Thermodynamique des gaz

Cours

À la différence des solides et des liquides, les gaz sont sujets à de fortes variations de volumes lorsque la température ou la pression varient. Cela va entraîner des travaux importants, et la possibilité de fabriquer entre autre des moteurs à l'aide de gaz chauffés puis détendus.

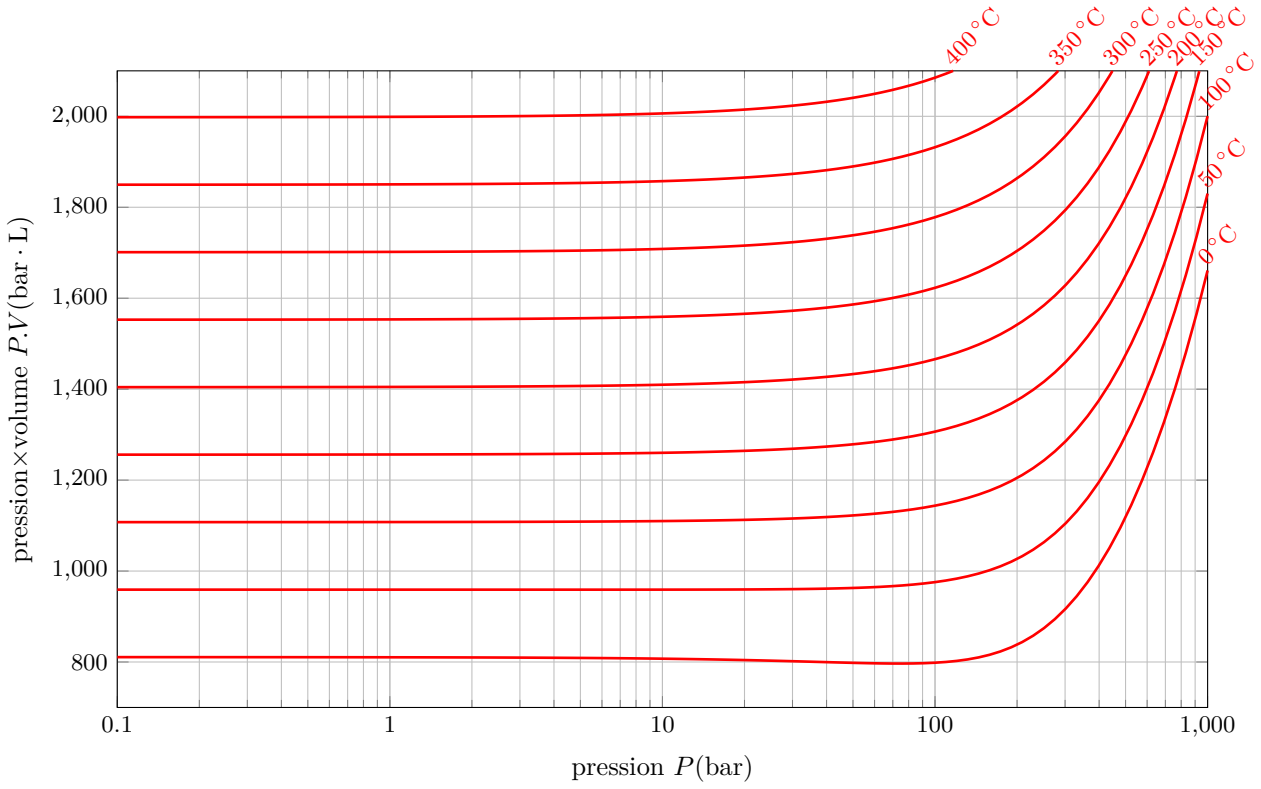
Dans ce chapitre, nous allons introduire un modèle simple de gaz, etles nombreuses possibilités que nous offrent la manipulation de cette phase de la matière.

T3.A. Modèles pour les gaz

A.1. Le modèle du gaz parfait

L'étude des gaz a commencé au XVIIe siècle avec l'établissement expérimental de la loi de Boyle-Mariotte : pour un gaz à température constante, le produit PV est constant tant qu'on se limite à des gaz peu denses (pression pas trop élevée), et cette constante est proportionnelle à la température absolue. Cette loi est illustrée sur la figure T3.1 où l'on trace, dans le diagramme d'Amagat (P en abscisses, $P.V$ en ordonnées) les courbes isothermes $T = \text{cst}$ d'un gaz : on constate qu'à faible pression (donc à faible densité), les courbes deviennent horizontales.

Figure T3.1 : Isothermes d'1 kg de diazote dans le diagramme d'Amagat.



Cette loi a été expliquée par Maxwell vers 1860 à l'aide de l'hypothèse atomique. Il propose une interprétation de la pression par des chocs des molécules du gaz sur les parois (figure T3.2). Chaque molécule qui rebondit sur le morceau de paroi de surface S appuie dessus, et la somme de toutes ces forces est la force de pression (appelée alors pression cinétique, par opposition à la pression dynamique lorsque le gaz est en mouvement). Bien sûr, ces chocs sont aléatoires, et la force au cours du temps ressemble à la simulation de la figure T3.3 : elle varie beaucoup. Cependant, les lois de la statistique indiquent que, quand le nombre de molécules N augmente, la force moyenne varie proportionnellement à N, tandis que les fluctuations de cette force varient comme $\sqrt{N}$; autrement dit le rapport fluctuations de la force/force

varie comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et devient négligeable pour un système thermodynamique. Ainsi, la pression de l'air sur une surface quelconque a des fluctuations, mais qui sont trop faibles pour être perçues.

FIGURE T3.2 : Agitation thermique et pression cinétique d'un gaz : les molécules qui rebondissent sur la paroi appuient dessus.

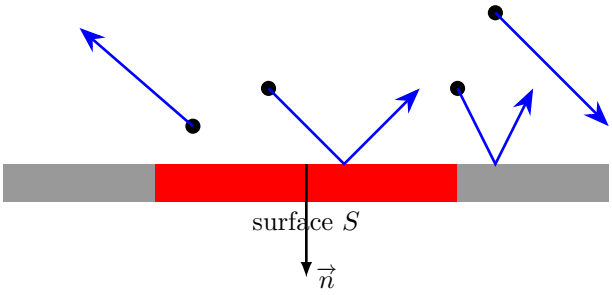
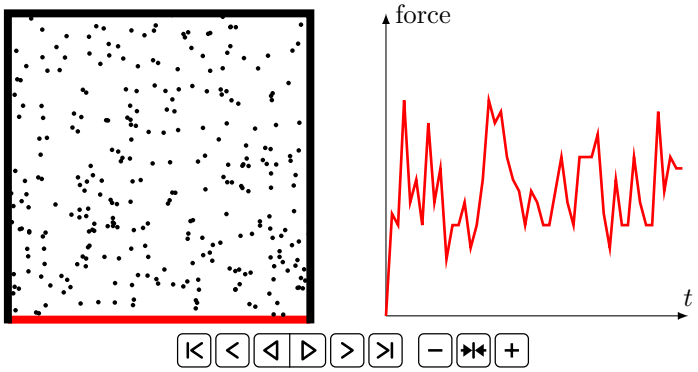


FIGURE T3.3 : Simulation des chocs sur une paroi.



Ainsi, tout d'abord, l'agitation thermique se traduit par l'acquisition de vitesse par les molécules du gaz. Pour quantifier cela, on ne peut pas calculer la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$, car elle est nulle. On pourrait calculer la moyenne de sa norme de la vitesse, mais on utilise plutôt une autre vitesse dont l'utilité physique est plus grande :

Définition : Vitesse quadratique d'un gaz

On définit la vitesse quadratique d'un gaz à partir des vitesses au carré des molécules du gaz par la loi

$$v^* = \sqrt{\left\langle \|\vec{v}\|^2 \right\rangle} \qquad \text{(T3.1)}$$

Cette vitesse des molécules implique qu'elles possèdent de l'énergie cinétique :

Propriété : Énergie cinétique d'un gaz (admise)

L'énergie cinétique moyenne $\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m v^{*2}$ d'une molécule de masse m dans un gaz à la température T vaut

$$\langle e_c \rangle = \frac{3}{2} k_B.T \text{ où } k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}} \text{ est la constante de Boltzmann} \qquad \text{(T3.2a)}$$

L'énergie cinétique d'agitation de n moles de gaz à la température T vaut donc

$$E_c = \frac{3}{2} n.R.T \text{ où } R = \mathcal{N}_A.k_B = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \text{ est la constante des gaz parfaits} \qquad \text{(T3.2b)}$$

Cette propriété vient d'un théorème fondamental de mécanique statistique, le *théorème d'équipartition de l'énergie*, qui est hors programme.

Exemple : Vitesse quadratique des molécules d'un gaz — À connaître

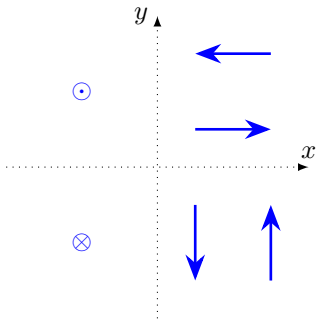
Calculez numériquement la vitesse quadratique du diazote, à 20 °C sous 1 bar. Faites de même pour le dioxygène.
On donne $M_N = 14\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M_O = 16\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

$\langle e_c\rangle = \frac{1}{2}m\langle \vec{v}^2\rangle = \frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_BT$ donc $v^* = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.
En mettant bien les masses molaires en $\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$, on trouve $v^*_{N_2} = 511\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v^*_{O_2} = 478\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. C'est grand, mais bien inférieur à la vitesse de libération terrestre, ce qui explique pourquoi la Terre a toujours une atmosphère.

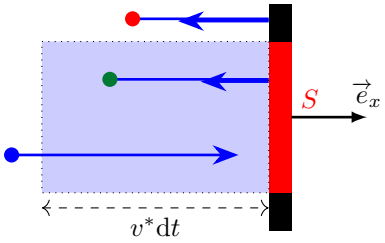
À partir de là, Maxwell se lance dans le calcul de la force de pression par les lois de la mécanique. La démonstration est un peu longue (et à connaître), mais les étapes de raisonnement qu'elle introduit sont intéressantes :

Calcul : Pression cinétique d'un gaz parfait

Maxwell propose de modéliser un gaz peu dense par un ensemble de molécules **ponctuelles, identiques et indépendantes** ; ce gaz est **homogène** (ses propriétés sont identiques en tout point), **isotrope** (ses propriétés sont identiques quelle que soit la direction) et **chaotique**.
Considérons donc N molécules de masse m dans un volume V, réparties de façon homogène. Ces molécules ont des vitesses dans toutes les directions. Pour simplifier, le programme officiel propose d'effectuer le calcul avec un modèle idéalisé mais évitant les gros calculs et gardant l'essence de la physique du raisonnement : les molécules ont toutes une vitesse de norme v^* et ne se déplacent que suivant les directions $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$ et $\pm\vec{e}_z$, réparties équitablement entre ces 6 directions. En réalité, les molécules vont dans toutes les directions et n'ont pas toutes exactement la vitesse v^*.



Modèle des 6 directions



Particules qui frappent la paroi en dt

Considérons un morceau de paroi de surface S et de normale $\vec{e}_x$. Des molécules viennent rebondir dessus. On va compter le nombre $\mathrm{d}N$ de molécules qui rebondissent sur la surface S en un temps $\mathrm{d}t$. On sait déjà que seules les molécules avec une vitesse $v^*\vec{e}_x$ vont frapper la paroi. En un temps $\mathrm{d}t$, toutes ces molécules avancent de $v^*\mathrm{d}t\vec{e}_x$; il y a alors 3 possibilités :

- si ces molécules ne sont pas « en face » de S, elles rebondissent à côté (molécule rouge sur le schéma)
- si ces molécules sont « en face » de S mais à une distance supérieure à $v^*\mathrm{d}t$, elles n'iront pas jusqu'à S pendant un temps $\mathrm{d}t$ (molécule bleue sur le schéma)
- si ces molécules sont « en face » de S et à une distance inférieure à $v^*\mathrm{d}t$, elles rebondiront sur S pendant un temps $\mathrm{d}t$ (molécule verte sur le schéma)

Les molécules qui rebondissent en un temps $\mathrm{d}t$ sont donc celles qui sont dans la portion de volume située en face de S et de hauteur $v^*\mathrm{d}t$. Sur le schéma ci-dessous c'est un rectangle (bleu clair), mais en fait en 3D c'est un cylindre de base S et de hauteur $v^*\mathrm{d}t$, donc de volume $\mathrm{d}V = Sv^*\mathrm{d}t$. Or dans le volume V, il y a $\frac{N}{6}$ molécules qui ont pour vitesse $v^*\vec{e}_x$; par loi de proportionnalité, dans $\mathrm{d}V$, il y a $\mathrm{d}N = \frac{N}{6V}\mathrm{d}V = \frac{NSv^*}{6V}\mathrm{d}t$ molécules qui vont frapper la paroi en un temps $\mathrm{d}t$.

Pour calculer la force de pression résultante, on va considérer les molécules qui rebondissent sur la paroi en un temps $\mathrm{d}t$. Le schéma ci-dessous montre à quoi ce système ressemble aux instants t (avant le rebond) et $t+\mathrm{d}t$ (après le rebond).



Considérons une molécule, de masse m. À l'instant t, elle pour vitesse $\vec{v}(t) = v^*\vec{e}_x$ et à l'instant $t+\mathrm{d}t$ elle a pour vitesse $\vec{v}(t+\mathrm{d}t) = -v^*\vec{e}_x$. Son accélération moyenne entre t et $t+\mathrm{d}t$ vaut donc $\frac{\vec{v}(t+\mathrm{d}t)-\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2v^*}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$. Pendant ce temps, elle n'est soumise qu'à une seule force : la force de la paroi lorsqu'elle s'en approche et la touche. Comme on ne sait pas trop à quel instant entre t et $t+\mathrm{d}t$ elle frappe la paroi, on va noter $\left\langle \vec{f} \right\rangle$ la force moyenne de la particule sur la paroi pendant $\mathrm{d}t$; alors, d'après la 3e loi de Newton que nous n'avons pas encore énoncée, ou *principe des actions réciproques*, la paroi exerce sur la particule une force moyenne opposée $-\left\langle \vec{f} \right\rangle$. Le PFD appliqué à la particule indique donc que $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \vec{f} \right\rangle$ donc $\left\langle \vec{f} \right\rangle = +\frac{2mv^*}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$.
Mais en un temps $\mathrm{d}t$ il n'y a pas une seule particule qui rebondit sur la paroi, mais $\mathrm{d}N = \frac{NSv^*}{6V}\mathrm{d}t$. Par conséquent, la force exercée sur la paroi sera $\mathrm{d}N \times \left\langle \vec{f} \right\rangle = \frac{NSv^*}{6V}\mathrm{d}t \times \frac{2mv^*}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x = \frac{NmSv^{*2}}{3V}\vec{e}_x$.
En identifiant cette expression avec la force de pression $PS\vec{e}_x$, on trouve que la pression cinétique s'écrit $P = \frac{Nmv^{*2}}{3V}$. Comme de plus on a vu plus haut que $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_BT$ on trouve

$$P = \frac{Nk_BT}{V}$$

Équation d'état du gaz parfait

Le *gaz parfait* est le modèle idéal d'un gaz lorsque sa densité tend vers 0 et que ses particules deviennent complètement indépendantes les unes des autres. Un gaz parfait homogène à l'équilibre vérifie l'équation d'état

$$PV = Nk_BT = nRT \qquad \text{(T3.3)}$$

avec n le nombre de moles, $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ la constante des gaz parfaits, N le nombre de molécules et $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

! Attention aux unités ! La pression s'exprime en Pascal, le volume en mètres cube, et la température en Kelvin.

Exemple : Hélium

Calculez le volume de 200 g d'hélium à 25 °C sous 1 bar ; on donne $M_{He} = 4{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Dans $m = 200\,\mathrm{g}$ d'hélium il y a $n = \frac{200}{4{,}0} = 50\,\mathrm{mol}$ d'hélium, d'où $V = \frac{nRT}{P} = \frac{50\times8{,}314\times(273+25)}{1\times10^5} = 1{,}24\,\mathrm{m^3}$.

Calcul : Calcul exact de la pression cinétique

Ce calcul est hors programme, mais je vous donne les grandes lignes.
Notons $p(\vec{v})$ la probabilité pour une molécule d'avoir la vitesse $\vec{v}$.

- Soit $\vec{v}$ une vitesse donnée. Les molécules qui rebondissent sur la surface S en un temps $\mathrm{d}t$ sont celles contenues dans un cylindre penché de surface S et de hauteur $\vec{v}\cdot\vec{e}_x\mathrm{d}t = v_x\mathrm{d}t$ (faire un schéma) ; il y en a $\mathrm{d}N(\vec{v}) = \frac{p(\vec{v})NSv_x}{V}\mathrm{d}t$
- Chaque particule qui rebondit subit une variation de quantité de mouvement $-2mv_x\vec{e}_x$. Donc la force moyenne d'une molécule de vitesse $\vec{v}$ qui rebondit sur la paroi pendant la durée $\mathrm{d}t$ vaut $\left\langle \vec{f} \right\rangle(\vec{v}) = +\frac{2mv_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$
- La force totale s'obtient en faisant la somme sur toutes les vitesses possibles ayant la condition $v_x > 0$. Par isotropie, cela représente la moitié des vitesses. On a donc $PS\vec{e}_x = \sum_{\vec{v},v_x>0} p(\vec{v})\times\mathrm{d}N(\vec{v})\times\left\langle \vec{f} \right\rangle(\vec{v}) = \sum_{\vec{v},v_x>0}\frac{2mNSv_x^2}{V} = \frac{2Nm}{V}\sum_{\vec{v},v_x>0}p(\vec{v})v_x^2 = \frac{Nm}{V}\left\langle v_x^2\right\rangle$. Or par isotropie, la moyenne des v_x^2 est égale à celle des v_y^2 et égale à celle des v_z^2, et la somme des trois donne la moyenne des $\vec{v}^2$ soit v^{*2}. Donc $\left\langle v_x^2\right\rangle = \frac{v^{*3}}{3}$.

On trouve donc bien $P = \frac{Nmv^{*2}}{3V}$

Remarque : Le gaz parfait est un modèle idéal où les molécules sont indépendantes. Mais il faut retenir que ce modèle n'est pas complètement farfelu : tout gaz se comporte comme un gaz parfait lorsque sa densité $\frac{N}{V}$ tend vers 0. Dans les CNTP (conditions normales de températures et de pression), le dioxygène et le diazote peuvent être modélisés comme un GP avec une assez bonne précision.

Calcul : Coefficients thermoélastiques d'un GP

Ce calcul n'a aucun intérêt physique, car les coefficients thermoélastiques sont utilisés essentiellement pour les solides et les liquides, mais on le trouve parfois posé comme question. On va donc calculer α et χ_T pour un GP ; pour cela, on part de la relation $V = \frac{nRT}{P}$.

$\alpha_{GP} = \frac{P}{nRT} \left.\frac{\partial \frac{nRT}{P}}{\partial T}\right)_{P,n} = \frac{P}{nRT} \cdot \frac{nR}{P} = \frac{1}{T}$

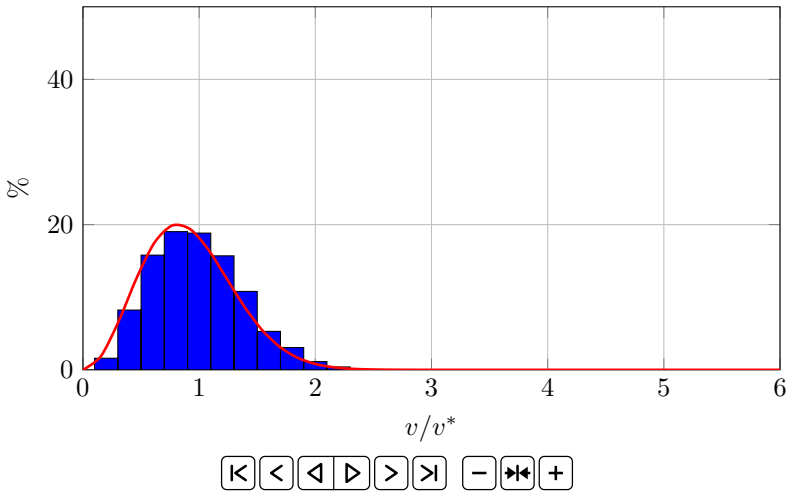
$\chi_{T,GP} = -\frac{P}{nRT} \left.\frac{\partial \frac{nRT}{P}}{\partial P}\right)_{T,n} = -\frac{P}{nRT} \cdot \left(-\frac{nRT}{P^2}\right) = \frac{1}{P}$

Avant de terminer sur le modèle du gaz parfait, une remarque sur le modèle de Maxwell : celui-ci est allé plus loin, en considérant que les molécules entrent parfois en collision, bien que rarement ; en modélisant simplement ces collisions comme des collisions élastiques entre des boules rigides, il a montré que la répartition des vitesse des molécules dans le gaz évolue rapidement vers un état stationnaire où la probabilité pour une molécule d'avoir la vitesse v est donnée par

$$p(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{M}{RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

Cette répartition peut se voir sur la figure T3.4 dans lequel on a simulé la répartition des vitesses d'un gaz de 3000 particules enfermées dans une boîte, ayant au départ uniquement des vitesses $\pm v^* \vec{e}_x$, et subissant des chocs aléatoires entre elles respectant les lois de la physique des chocs. Au bout de quelques étapes de simulation, on voit la répartition des vitesse qui se rapproche de la loi théorique de Maxwell.

FIGURE T3.4 : Simulation de la convergence de la répartition des vitesse des molécules dans un gaz parfait.



À partir de cette loi, on peut retrouver la pression cinétique, mais aussi d'autres propriétés intéressantes qui dépassent le cadre de ce cours.

Enfin, on peut signaler que des modèles ont été proposés pour modéliser mieux les gaz réels. Ces modèles ajoutent essentiellement deux ingrédients au modèle gaz parfait :

— le fait que chaque molécule n'est pas ponctuelle mais a un petit volume, et que plusieurs molécules ne peuvent pas occuper le même volume

— le fait que les molécules s'attirent faiblement selon des forces de Van der Waals

Le modèle le plus simple, modélisant les molécules par des sphères dures isotrope, est le modèle de Van der Waals, dont l'équation d'état s'écrit

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

avec a et b deux constantes qui dépendent du gaz : a traduit l'attraction entre les molécules et b le volume qu'elles occupent.

A.2. Modèle pour des mélanges de gaz

Les mélanges de gaz sont très important, car le gaz qu'on va le plus étudier est l'air, qui est un mélange essentiellement de 78% de diazote et 21% de dioxygène (plus 1% d'argon et des traces de vapeur d'eau, gaz rares, dioxyde de carbone,...) Ces pourcentages représentent des fractions molaires, dont il convient de donner la définition.

Définition : Fraction (ou titre) molaire

Si un système contient différents constituants, la fraction (ou titre) molaire du constituant i est définie par

$$x_i = \frac{n_i}{\sum_k n_k} = \frac{n_i}{n_{total}} \qquad \text{(T3.4)}$$

où n_k représente la quantité de matière du k-ième constituant.

Définition : Fraction (ou titre) massique

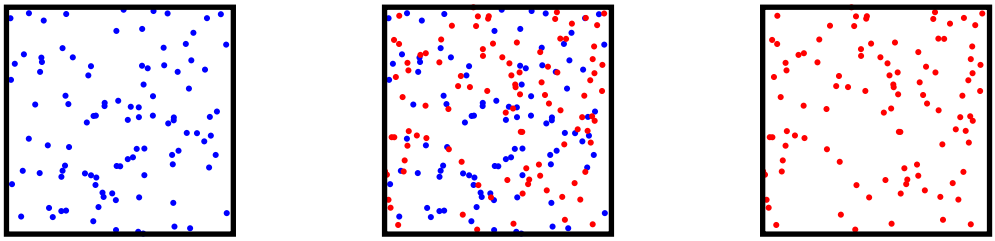
Si un système contient différents constituants, la fraction (ou titre) massique du constituant i est définie par

$$w_i = \frac{m_i}{\sum_k m_k} = \frac{m_i}{m_{total}} \qquad \text{(T3.5)}$$

où m_k représente la masse du k-ième constituant.

On considère donc un mélange de gaz : dans un même volume V, à la même température T, on a plusieurs constituants sous forme gazeuse (figure T3.5).

FIGURE T3.5 : Mélange de gaz.



gaz 1 pression partielle P_1 — mélange des gaz 1 et 2 pression totale P — gaz 2 pression partielle P_2

Dans la figure T3.5, au centre, les molécules bleues et rouges sont mélangées. Elles bougent et rebondissement sur les parois ; la pression P subie par la paroi est donc la somme d'une contribution venant des molécules bleues et d'une contribution venant des molécules rouges.

On ne peut pas, en pratique, séparer les molécules rouges des bleues, mais on peut imaginer une expérience où on prend le même volume V, et on le remplit uniquement avec le gaz 1, à la même température et en même quantité que dans le mélange ; on peut alors mesurer sa pression, qu'on appelle la pression partielle de ce gaz.

Définition : Pression partielle d'un gaz dans un mélange

La pression partielle P_i du constituant i dans un mélange est la pression qu'aurait le constituant s'il était seul dans les mêmes conditions de température et de volume.

On peut, de même définir la pression partielle du gaz 2. Alors, quand on les met les deux ensemble, deux choses peuvent se passer :

- soit les deux gaz n'interagissent pas entre eux : les molécules rouges et bleues s'ignorent, et la force totale sur une paroi est la somme des forces issues des deux gaz ; autrement dit, les pressions s'ajoutent simplement ;
- soit les deux gaz interagissent entre eux, et se perturbent l'un l'autre, de sorte que la pression de chaque gaz est modifiée par la présence de l'autre.

Le premier cas correspond à ce qu'on appelle un mélange idéal.

Propriété : Pression d'un mélange idéal de gaz

Dans un mélange idéal de gaz, les gaz sont indépendants les uns des autres. La pression totale est alors simplement la somme des pressions partielles de tous les constituants : $P = \sum_k P_k$ (loi de Dalton)

Remarque : Tout mélange de gaz se comporte comme un mélange idéal lorsque sa densité tend vers 0.

Propriété : Pression d'un mélange idéal de gaz parfaits

Dans un mélange idéal de gaz parfaits,

$$PV = \sum_k n_k RT = n_{total} RT \tag{T3.6}$$

autrement dit, un mélange idéal de gaz parfaits se comporte comme un gaz parfait.
Dans ce cas, la pression partielle du constituant i vaut

$$P_i = x_i P \tag{T3.7}$$

Démonstration

Pour un mélange idéal, $PV = \sum_k P_k V$. Or les gaz étant parfaits, on peut écrire la loi du GP : $P_k V = n_k RT$ avec n_k la quantité de matière du constituant k. Donc $PV = \sum_k n_k RT$.
On peut donc écrire $P_i V = n_i RT$ et $PV = \sum_k n_k RT$. En divisant terme à terme les deux équations, on obtient $\frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{\sum_k n_k} = x_i$.

Remarque : En appliquant ce résultat à l'air, on peut montrer facilement ce résultat qu'il est bon de retenir : 1 mol d'air à 20 °C sous 1 bar occupe un volume égal à 24,3 L.

Exemple : Pression partielle des constituants de l'air

Calculez la pression partielle du diazote et du dioxygène dans l'air à la pression de 1 bar

$P_{N_2} = x_{N_2}.P = 0{,}78$ bar et $P_{O_2} = x_{O_2}.P = 0{,}21$ bar

T3.B. Énergie des gaz

B.1. Énergie d'un gaz parfait

On a déjà vu un terme d'énergie interne d'un gaz : l'énergie cinétique d'agitation des atomes. On a vu que l'énergie cinétique d'agitation de n moles d'un gaz parfait vaut $E_c = \frac{3}{2}nRT$. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, c'est-à-dire composé d'un seul atome, c'est la seule source d'énergie interne.

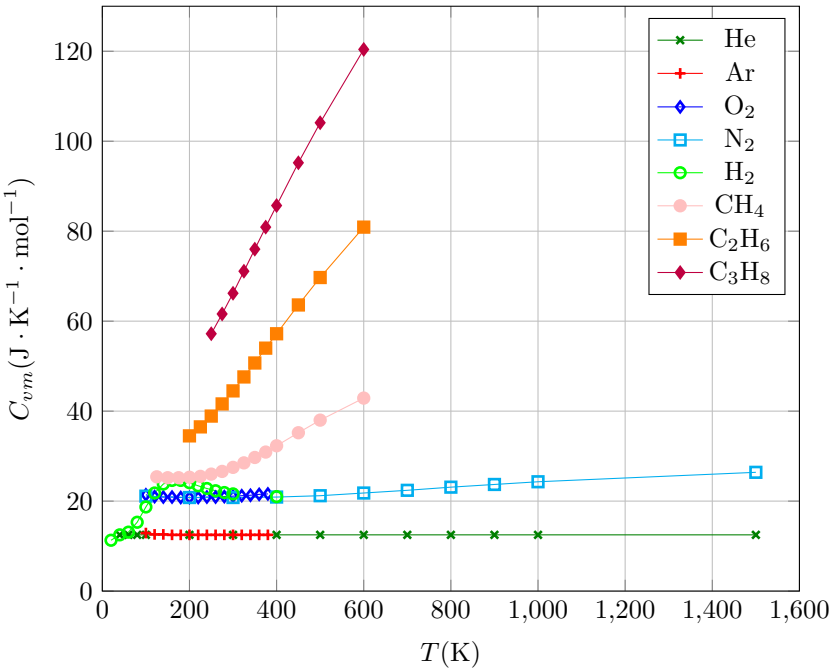
Propriété : Énergie interne d'un GP monoatomique

L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique (gaz rares : He, Ar, ...) vaut $U = \frac{3}{2}nRT$: elle ne dépend que de la température, et sa capacité thermique molaire vaut $C_{vm} = \frac{3}{2}R = 12{,}5\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

Si on prend un gaz formé de molécules à plusieurs atomes, d'autres termes vont s'ajouter dans l'énergie interne :

— les différents atomes dans une molécule peuvent vibrer, ce qui ajoute de l'*énergie cinétique de vibration*
— les liaisons entre les atomes d'une molécule sont conservatives, ce qui amène une *énergie potentielle de vibration*
— les molécules sont susceptibles de tourner, ce qui amène une *énergie cinétique de rotation*

FIGURE T3.6 : Capacités thermiques à volume constant de quelques gaz.



Le plus simple est alors de mesurer les capacités de différents gaz. Des résultats partiels montrés figure T3.6, couplés à des calculs compliqués de physique statistique, permettent de proposer les résultats suivants :

Propriété : Énergie interne d'un GP polyatomique

L'énergie interne d'un GP polyatomique ne dépend que de la température.
Pour un GP diatomique (O_2, N_2, ...) la capacité thermique à volume constant peut être modélisée approximativement par $C_{vm} = \begin{cases} \frac{3}{2}R = 12{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} & \text{à basse température } (T \lesssim 100\,\mathrm{K}) \\ \frac{5}{2}R = 20{,}8\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} & \text{à température ambiante} \\ \frac{7}{2}R = 29{,}1\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} & \text{à haute température } (T \gtrsim 3000\,\mathrm{K}) \end{cases}$
Plus le nombre d'atomes des molécules d'un GP est grand, plus son C_{vm} est grand.

Remarque : Dans quasiment tous les exercices, on prendra $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ pour un GP diatomique.

Remarque : Puisque U ne dépend que de la température, on pourra écrire $C_v = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$.

Propriété : Enthalpie d'un GP

L'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température et vaut $H = U + nRT$

Démonstration

$H = U + PV$ donc pour un gaz parfait il est évident que $H = U + nRT$. Puisque U ne dépend que de la température pour un GP, il en va de même pour H.

Relation de Mayer

Pour tout GP,

$$C_{pm} = C_{vm} + R \tag{T3.8}$$

donc $C_{pm} = \frac{5}{2}R$ pour un GP monoatomique et $C_{pm} = \frac{7}{2}R$ pour un GP diatomique à température ambiante.

Démonstration

$H = U + nRT$ mais il faut faire attention avant de dériver, car le C_v est une dérivée à volume constant et le C_p une dérivée à pression constante. Néanmoins, pour un GP, H et U ne dépendent que de la température, donc les dérivées partielles deviennent des dérivées droites : $C_p = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$ et $C_v = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$. Donc en dérivant l'équation du départ : $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}(nRT)}{\mathrm{d}T}$ soit $C_p = C_v + nR$. On divise par n pour faire apparaître les capacités molaires.

C'est alors l'occasion de définir un coefficient important pour les gaz :

Définition : Coefficient isentropique

Le coefficient isentropique d'un gaz est défini par la relation

$$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \tag{T3.9}$$

Pour un GP monoatomique : $\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$; pour un GP diatomique : $\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$; pour un GP autre, $\gamma \to 1$ lorsque le nombre d'atomes augmente.

Démonstration

- pour un GP monoatomique : $C_{vm} = \frac{3}{2}R$ et $C_{pm} = \frac{5}{2}R$ donc $\gamma = \frac{5}{3}$
- pour un GP diatomique : $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ et $C_{pm} = \frac{7}{2}R$ donc $\gamma = \frac{7}{5}$
- si le nombre d'atomes augmente, C_{vm} augmente et $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{vm}}$ tend vers 1

Exemple : Expression des capacités thermiques en fonction de R et γ À connaître

Exprimez les capacités molaires C_{vm} et C_{pm} d'un gaz parfait en fonction uniquement de R et de son coefficient isentropique γ

On a vu deux relations : $\begin{cases} C_{pm} = C_{vm} + R \text{ (relation de Mayer)} \\ \gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \text{ (définition de } \gamma) \end{cases}$

On en tire $C_{pm} = \gamma C_{vm}$ donc $\gamma C_{vm} = C_{vm} + R$ d'où $C_{vm} = \dfrac{R}{\gamma - 1}$ puis $C_{pm} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

Vérifions avec un GP diatomique : $\gamma = 1{,}4$ d'où $C_{vm} = \frac{R}{1{,}4-1} = 2{,}5R$ et $C_{pm} = \frac{1{,}4R}{1{,}4-1} = 3{,}5R$.

B.2. Énergie d'un mélange idéal de gaz

Propriété : Mélange idéal de gaz

L'énergie interne d'un mélange idéal de gaz est la somme des énergies internes de chacun de ses constituants. Par conséquent :

- le C_v d'un mélange idéal de gaz est la somme des C_v de chacun de ses constituants : $C_v = \sum_k C_{v,k}$
- le C_{vm} d'un mélange idéal de gaz est la somme des C_{vm} de chacun de ses constituants pondérés par leur fraction molaire : $C_{vm} = \sum_k x_k C_{vm,k}$
- le c_v d'un mélange idéal de gaz est la somme des c_v de chacun de ses constituants pondérés par leur fraction massique : $c_v = \sum_k w_k c_{v,k}$

Démonstration

Si $U = \sum_k U_k$ alors en dérivant $\frac{\partial U}{\partial T}\big)_{V,n} = \sum_k \frac{\partial U_k}{\partial T}\big)_{V,n}$ donc on a bien $C_v = \sum_k C_{v,k}$.
On peut donc écrire $n_{total}.C_{vm} = \sum_k n_k C_{vm,k}$ avec des notations évidentes. En divisant par n_{total} on obtient bien $C_{vm} = \sum_k x_k C_{vm,k}$.
On procède de même pour les capacités massiques.

Remarque : L'air est souvent considéré comme un mélange idéal de GP ; il y a 78 % de diazote ($C_{vm,N_2} = \frac{5}{2}R$), 21 % de dioxygène ($C_{vm,O_2} = \frac{5}{2}R$) et 1 % d'argon ($C_{vm,Ar} = \frac{3}{2}R$) donc $C_{vm} = 0{,}78 \times \frac{5}{2}R + 0{,}21 \times \frac{5}{2}R + 0{,}01 \times \frac{3}{2}R \approx \frac{5}{2}R$: on considèrera donc le plus souvent l'air comme un GP diatomique avec $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

Exemple : Chauffage de la salle de cours

Quelle doit être la variation d'énergie interne de l'air de la salle de cours, à la rentrée des vacances d'hiver, pour augmenter sa température depuis 5 °C jusqu'à 19 °C ?



Si on considère l'air comme un GP diatomique, on connaît son $C_{vm} = \frac{5}{2}R$. Donc $C_v = n.C_{vm}$, il faut donc calculer le nombre de moles d'air n. Pour cela, on utilise la loi du GP : $n = \frac{PV}{RT}$. On prend environ 1 bar $= 1 \times 10^5$ Pa pour la pression, $273 + 12 = 285$ K pour la température (en moyenne, on calcule un ODG) et $V = 8 \times 10 \times 3 = 240\,\text{m}^3$ environ (à la louche). On trouve donc $n = 11\,000$ mol d'où on tire $C_v = n.C_{vm} = 211\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$. Pour élever la température de +14 °C il faut que l'énergie interne varie donc de $14.C_v = 3{,}0$ MJ ce qui s'obtient en faisant réfléchir 45 taupins pendant 15 min ; sauf qu'il faut aussi chauffer les murs, ce qui est beaucoup plus long…

Remarque : Un modèle un peu plus poussé d'un gaz est le modèle de Van der Waals. Son énergie ne dépend pas que de la température, on peut l'écrire $U_{VdW}(T,V) = U_{GP}(T) - \frac{n^2 a}{V}$ où $U_{GP}(T)$ désigne l'énergie interne du gaz parfait et a est le coefficient qui est déjà apparu dans l'équation d'état du modèle de Van der Waals.

Propriété : Enthalpie d'un mélange idéal de GP

Pour un mélange idéal de gaz, l'enthalpie est la somme des enthalpies des constituants : $H = \sum_k H_k$.
On en déduit que $C_p = \sum_k C_{p,k}$ puis $c_p = \sum_k w_k c_{p,k}$ et $C_{pm} = \sum_k x_k C_{pm,k}$

Démonstration

$H = \sum_k H_k$ provient de $U = \sum_k U_k$ et de la loi de Dalton. Ensuite, il suffit de dériver par rapport à T pour obtenir $C_p = \sum_k C_{p,k}$. On en tire $m_{total} c_p = \sum_k m_k c_{p,k}$ ce qui fait apparaître les w_k en divisant par m_{total}.

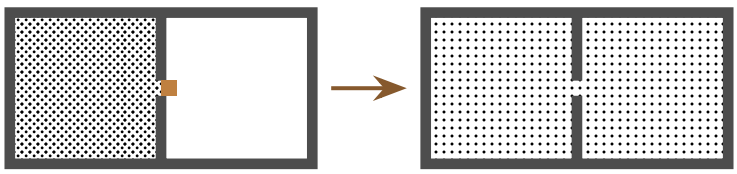
Remarque : Pour l'enthalpie aussi, on considérera le plus souvent l'air comme un gaz parfait diatomique.

B.3. Détente de Joule-Gay Lussac

La détente de Joule-Gay Lussac est un exemple historique très important à connaître.

Exemple : Détente de Joule-Gay Lussac — **À connaître**

On partage une boîte indéformable calorifugée en deux compartiments séparés par un robinet ou un bouchon. Dans l'un des compartiments on met un gaz, dans l'autre, on fait le vide. C'est l'état initial i.
On ouvre alors le robinet ou le bouchon : le gaz se détend et occupe tout l'espace disponible : il atteint rapidement l'état final f.



Montrez que l'énergie interne U du gaz est constante lors de cette détente (on dit qu'elle est iso-énergétique).

Il existe deux façons de répondre à cette question :

- Méthode 1 : on prend comme système le gaz. Alors en lui appliquant le premier principe entre l'état initial et l'état final, on obtient $\Delta U_{gaz} = W + Q$ (il n'y a aucune énergie macroscopique ici) par le premier principe. Or $Q = 0$ car le système est calorifugé, et $W = -\int P_{ext}\text{d}V = -\int 0\text{d}V = 0$ car ici le gaz gagne du volume sur le vide dont la pression est nulle [a]. On trouve donc $\Delta U_{gaz} = 0$
- Méthode 2 : on prend comme système le contenu de la boîte, c'est à dire {le gaz + le vide}. Le premier principe appliqué entre l'état initial et l'état final indique que $\Delta U_{gaz} + \Delta U_{vide} = W + Q$. Or $Q = 0$ car la boîte est calorifugée, et $W = 0$ car la boîte est indéformable. De plus, le vide n'a pas d'énergie [b] donc $\Delta U_{vide} = 0$. On en déduit donc que $\Delta U_{gaz} = 0$.

a. Sauf en mécanique quantique, cf. la force de Casimir !
b. Sauf, encore, en mécanique quantique.

Joule et Gay Lussac ont mis au point cette expérience et ont testé plein de gaz. Ils ont mesuré les températures finales : pour certains gaz, elle était identique à la température initiale, pour d'autres elle avait baissé. Ils ont alors

énoncé une propriété expérimentale connue sous le nom de

Définition : Première loi de Joule

On dit qu'un fluide vérifie la première loi de Joule si sa température ne varie pas lorsqu'il subit une détente de Joule-Gay Lussac.

Remarque : Pour un GP dont l'énergie interne ne dépend que de T, on peut écrire $\Delta U = C_v \Delta T$. Donc $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$: si un gaz se comporte comme un gaz parfait, alors il vérifie la première loi de Joule ; mais **la réciproque est fausse**, ce qui a poussé Joule à tester une autre détente, la détente de Joule-Thomson qu'on verra plus tard.

T3.C. Étude des transformations classiques

Les résultats de cette section sont essentiels à connaître.
Commençons par quelques rappels :

Définition : Transformation quasi-statique

Une transformation est dite quasi-statique si elle est effectuée suffisamment lentement pour que le système soit quasiment homogène à chaque instant. On dit parfois qu'on a une succession d'états d'équilibre du système, mais il n'y a pas forcément équilibre avec l'extérieur.

Définition : Transformation réversible

Une transformation quasi-statique est réversible mécaniquement si le système est indéformable ou bien si, à chaque instant, la différence de pression (apparente) entre les deux côtés de toutes les parois mobiles est négligeable : $V = \text{cst}$ **ou** $P \approx P_{ext}$.
Une transformation quasi-statique est réversible thermiquement si elle est adiabatique ou bien si, à chaque instant, la différence de température entre les deux côtés de toutes les parois diathermes est négligeable : $Q = 0$ **ou** $T \approx T_{ext}$.

C.1. Transformations idéales à connaître

Dans les exercices cette année, on modélisera la majorité des transformations par une des quatre transformations idéales : isochore, mono/isobare, mono/therme et adiabatique réversible. Les résultats seront toujours donnés dans l'hypothèse où il n'y a pas d'énergie macroscopique ; s'il y en a, il suffit de rajouter ΔE_{macro}.

Certaines des transformations ci-dessous ont déjà été vues ; ce ne sont que des rappels. Mais pour d'autres, dans le cas des gaz parfaits, il y a des propriétés supplémentaires à connaître.

Définition : Transformation isochore

Une transformation **isochore** est une transformation à volume constant. On a alors $W = 0$ et $Q = \Delta U$.

Démonstration

Si $V = \text{cst}$ alors $\mathrm{d}V = 0$ donc $W = -\int P_{ext} \mathrm{d}V = 0$

Définition : Transformation monobare/isobare

Une transformation **monobare** est telle que $P_{ext} = \text{cst}$. On a alors $W = -P_{ext}\Delta V$ et $Q = \Delta U + P_{ext}\Delta V$.
Si en plus elle est réversible mécaniquement ($P = P_{ext} = \text{cst}$), on dit qu'elle est **isobare**. On a alors $W = -P\Delta V$ et $Q = \Delta H$.

Démonstration

Si $P_{ext} = \text{cst}$ alors $W = -P_{ext} \int \mathrm{d}V = -P_{ext}\Delta V$

Définition : Transformation monotherme/isotherme

Une transformation **monotherme** est une transformation à $T_{ext} = \text{cst}$.
Si en plus elle est réversible thermiquement ($T = T_{ext} = \text{cst}$) **et** mécaniquement ($P = P_{ext}$), elle est **isotherme**.
Dans le cas général, on n'a aucune propriété permettant de calculer W et Q.
Dans le cas d'un gaz parfait subissant une transformation isotherme, on a $\Delta U = 0$ et

$$W = -Q = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = +nRT \ln \frac{P_f}{P_i} \tag{T3.10}$$

Démonstration

Pour un GP, $\Delta U = C_v \Delta T = 0$ donc $W = -Q$. Notons i l'état initial et f l'état final ; calculons alors le travail de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} W &= -\int_i^f P_{ext} \mathrm{d}V \\ &= -\int_i^f P \mathrm{d}V \text{ car } P = P_{ext} \\ &= -\int_i^f \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V \text{ par la loi du GP} \\ &= -nRT \int_i^f \frac{\mathrm{d}V}{V} \text{ car } T = \text{cst} \\ &= -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= -\int_i^f P_{ext} \mathrm{d}V \\ &= -\int_i^f P \mathrm{d}V \text{ car } P = P_{ext} \\ &= -\int_i^f P \mathrm{d}\left(\frac{nRT}{P}\right) \text{ par la loi du GP} \\ &= -\int_i^f nRTP \left(-\frac{\mathrm{d}P}{P^2}\right) \text{ par la loi du GP} \\ &= +nRT \int_i^f \frac{\mathrm{d}P}{P} \text{ car } T = \text{cst} \\ &= +nRT \ln \frac{P_f}{P_i} \end{aligned}$$

Exemple : Travail à fournir pour comprimer un GP

On dispose de 15 mol de GP à 20 °C sous 1 bar. On les comprime de façon isotherme jusqu'à 5 bar. Calculer le travail et la chaleur reçus par le gaz.

Ici le plus rapide consiste à utiliser la formule avec les pressions : $W = nRT \ln \frac{P_f}{P_i} = 15 \times 8{,}314 \times 293 \times \ln\left(\frac{5}{1}\right) = 58{,}8\,\text{kJ}$ et $Q = -58{,}8\,\text{kJ}$.
Si on veut utiliser l'autre formule, il faut d'abord calculer $V_i = 365\,\text{L}$ et $V_f = 73\,\text{L}$ puis on retrouve le même résultat.

Remarque : Quand on comprime un gaz, il s'échauffe. Une compression isotherme consiste à le comprimer très très lentement, de telle sorte qu'il ait le temps de se refroidir et de rester à température constante. Il perd donc de la chaleur, d'où le signe négatif de Q dans l'exemple précédent.

Remarque : Attention à la confusion TRÈS GRAVE entre isotherme et adiabatique. Quand on entend le mot isotherme, on pense à la « bouteille isotherme », celle qui garde notre boisson chaude ou froide, ça dépend. Or dans le cas d'un liquide de volume constant, $W = 0$ (car $V = \text{cst}$) et $\Delta U = C_v \Delta T = Q$ donc **dans ce cas-là seulement** isotherme et adiabatique sont équivalents. Mais pour un gaz, c'est **FAUX** car le volume du gaz varie quand sa température varie, donc $W \neq 0$ donc $Q \neq 0$. L'affirmation « c'est isotherme donc $Q = 0$ » est la PIRE ÂNERIE qu'on puisse dire en thermodynamique aux concours.

Définition : Transformation adiabatique réversible

Une transformation adiabatique réversible est, comme le dirait M. de La Palisse, une transformation qui est adiabatique et réversible : $Q = 0$ donc $W = \Delta U$, et $P = P_{ext}$ à chaque instant.
Une telle transformation est aussi appelée *transformation isentropique* (on verra plus loin le sens de ce terme).

Bon, d'accord, cette définition ne sert à rien. Ce qui est important, c'est la loi que vérifie un GP soumis à une transformation adiabatique et réversible.

Propriété : Lois de Laplace

Lorsqu'un gaz parfait subit une transformation adiabatique et réversible (AR), il vérifie les lois de Laplace :

$$P.V^{\gamma} = \text{cst}_1 \quad \text{(T3.11a)}$$
$$V^{\gamma-1}.T = \text{cst}_2 \quad \text{(T3.11b)}$$
$$P^{1-\gamma}.T^{\gamma} = \text{cst}_3 \quad \text{(T3.11c)}$$

avec $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ le **coefficient isentropique du gaz**.

Démonstration

La bonne démonstration des lois de Laplace se fait avec l'aide d'un outil qu'on n'a pas pour le moment : l'entropie. On va ici faire une démonstration un peu moins bonne, et qui ne sera pas à connaître.
Considérons n moles d'un GP de capacité thermique molaire C_{vm}, subissant une transformation adiabatique et réversible infinitésimale. Le premier principe peut alors s'écrire $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Or $\mathrm{d}U = n.C_{vm}\mathrm{d}T$ où $\mathrm{d}T$ est sa variation de température ; $\delta W = -P_{ext}\mathrm{d}V = -P\mathrm{d}V$ car $P = P_{ext}$, et $\delta Q = 0$ car la transformation est adiabatique. Donc $n.C_{vm}\mathrm{d}T = -P\mathrm{d}V$. Or, par la loi du GP : $P = \frac{nRT}{V}$ donc $n.C_{vm}\mathrm{d}T = -nRT\frac{\mathrm{d}V}{V}$ soit encore $\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C_{vm}}\frac{\mathrm{d}V}{V}$. En intégrant entre un état initial i et un état final f, on obtient $\ln\frac{T_f}{T_i} = -\frac{R}{C_{vm}}\ln\frac{V_f}{V_i} = -(\gamma-1)\ln\frac{V_f}{V_i} = -\ln\frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}}$ ou encore $\ln\frac{T_f}{T_i} + \ln\frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}} = 0$. On met tout ensemble : $\ln\frac{V_f^{\gamma-1}T_f}{V_i^{\gamma-1}T_i} = 0$ soit $V_f^{\gamma-1}T_f = V_i^{\gamma-1}T_i$.
On peut alors écrire par la loi du GP : $T_i = \frac{P_iV_i}{nR}$ et $T_f = \frac{P_fV_f}{nR}$ donc $V_f^{\gamma-1}\frac{P_fV_f}{nR} = V_i^{\gamma-1}\frac{P_iV_i}{nR}$ d'où on tire $P_fV_f^{\gamma} = P_iV_i^{\gamma}$.
Enfin en écrivant $V = \frac{nRT}{P}$ on trouve de même $P_f^{1-\gamma}.T_f^{\gamma} = P_i^{1-\gamma}.T_i^{\gamma}$.

Remarque : En pratique, on retient la loi $P.V^{\gamma} = \text{cst}$ et on retrouve les autres grâce à la loi du GP.

Remarque : Pour calculer le travail reçu lors d'une AR, on ne calcule surtout pas $W = -\int P\mathrm{d}V$, c'est très difficile. On utilise plutôt le premier principe : $W = \Delta U = C_v\Delta T$ car $Q = 0$.

Exemple : Compression AR de l'air

On prend 15 mol d'air (GP diatomique) à 20 °C sous 1 bar, et on les comprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à 5 bar.

1. Calculez le volume initial.
2. Calculez le volume final et la température finale.
3. Calculez le travail reçu par le gaz.

1. Loi du GP : $V_i = 368\,\text{L}$
2. La loi de Laplace s'écrit $P_f.V_f^{1,4} = P_i.V_i^{1,4}$. Il faut être soigneux pour isoler V_f. On peut écrire $V_f^{1,4} = \frac{P_iV_i^{1,4}}{P_f}$. On peut en déduire que $V_f = \frac{P_i^{\frac{1}{1,4}}.\left(V_i^{1,4}\right)^{\frac{1}{1,4}}}{P_f^{\frac{1}{1,4}}}$...je vois ça dans des copies, et inutile de vous dire que le résultat numérique est souvent faux. Donc prenez les bonnes habitudes :
   - annulez les puissances sur V_i, car $\left(V_i^{1,4}\right)^{\frac{1}{1,4}} = V_i$
   - factorisez les pressions en un seul rapport, de cette manière-là vous pouvez même garder les pressions en bar

   C'est-à-dire qu'on écrit $V_f = V_i\left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 368\times\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 116{,}5\,\text{L}$: attention quand même aux parenthèses sur votre calculatrice, la puissance est prioritaire sur la division, donc `(1/5)^1/1.4` sera compris comme $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^1}{1,4}$ ce qui n'est pas ce qu'on cherche. Remarquez aussi que les pressions apparaissent sous forme de rapport, on peut donc les laisser en bar.

   De même pour la température : $P_f^{1-\gamma}.T_f^{\gamma} = P_i^{1-\gamma}.T_i^{\gamma}$ donc $T_f = T_i\left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 293\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{-0,4}{1,4}} = 464\,\text{K} = 191\,°\text{C}$: c'est logique, un gaz qu'on comprime s'échauffe.
3. Par le premier principe appliqué au gaz durant la transformation : $W = \Delta U - Q = nC_{vm}\Delta T$ or $Q = 0$, $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ et $n = 15\,\text{mol}$ donc $W = 53{,}3\,\text{kJ}$

C.2. Diagramme de Watt

Définition : Diagramme de Watt et de Clapeyron

Le diagramme de Watt représente l'évolution quasi-statique d'un système dans le plan (P,V).
Le diagramme de Clapeyron représente l'évolution quasi-statique d'un système dans le plan (P,v) (pour 1 kg).

Propriété : Travail reçu dans le diagramme de Watt/Clapeyron

Dans le diagramme de Watt (resp. Clapeyron), le travail (resp. travail massique) reçu par le système subissant une transformation réversible mécaniquement se lit comme l'opposé de l'aire sous la courbe si le système se déplace vers la droite, et l'aire sous la courbe s'il se déplace vers la gauche (figure T3.7).

Démonstration

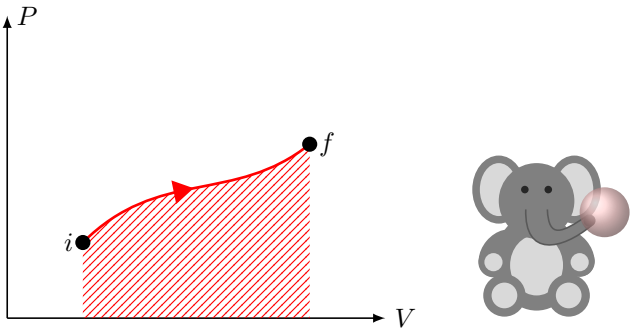
Entre deux états i et f : $W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext}\mathrm{d}V$. S'il y a réversibilité mécanique alors $P = P_{ext}$ donc $W = -\int_{V_i}^{V_f} P\mathrm{d}V$.

— Si $V_f > V_i$ alors l'intégrale représente l'aire sous la courbe, donc W est l'opposé de l'aire sous la courbe

— Si $V_f < V_i$ alors l'intégrale représente l'opposé de l'aire sous la courbe, donc W est l'aire sous la courbe

Remarque : L'hypothèse de réversibilité mécanique est souvent oubliée. En fait, même si elle n'est pas vérifiée, la relation peut quand même être vraie, mais c'est une histoire complexe due à la masse de la paroi mobile.

FIGURE T3.7 : Travail d'une transformation dans le diagramme de Watt.



Maintenant, considérons les diagrammes de la figure T3.8, dans laquelle un système décrit un cycle, c'est-à-dire un ensemble de transformations qui le ramènent à son point de départ.

Propriété : Travail reçu au cours d'un cycle dans le diagramme de Watt/Clapeyron

Dans le diagramme de Watt (resp. Clapeyron), le travail (resp. travail massique) reçu par un système au cours d'un cycle réversible mécaniquement est égal :

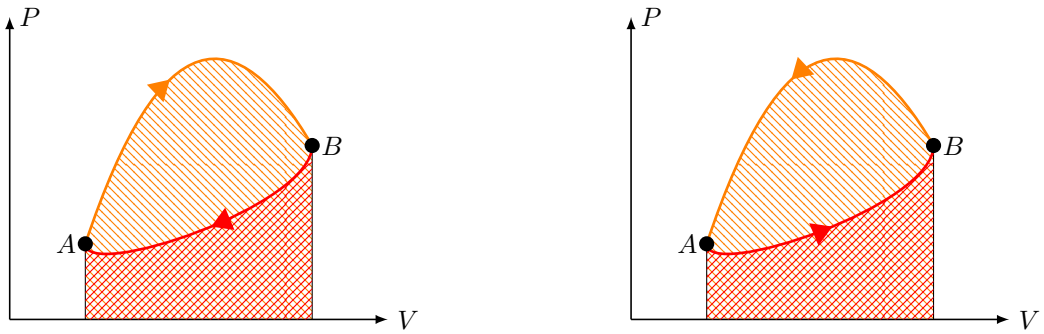
— à l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens trigonométrique ; dans ce cas, c'est un **cycle récepteur**

— à l'opposé de l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens horaire ; dans ce cas, c'est un **cycle moteur**

Démonstration

Commençons par le diagramme de gauche de la figure T3.8, où le système décrit un cycle $A \to B \to A$ dans le sens horaire. Le travail reçu par le système vaut $W^{A\to B} + W^{B\to A}$. Or $W^{A\to B} = -\mathcal{A}_{\diagdown}$ et $W^{B\to A} = \mathcal{A}_{\diagup}$ donc $W = -(\mathcal{A}_{\diagdown} - \mathcal{A}_{\diagup}) = -\mathcal{A}_{cycle}$. Le travail est négatif, donc le système fournit du travail à l'extérieur.
Sur le diagramme de droite de la figure T3.8, le système décrit un cycle $A \to B \to A$ dans le sens trigonométrique. Le travail reçu par le système vaut $W^{A\to B} + W^{B\to A}$. Or $W^{B\to A} = -\mathcal{A}_{\diagup}$ et $W^{A\to B} = \mathcal{A}_{\diagdown}$ donc $W = (\mathcal{A}_{\diagdown} - \mathcal{A}_{\diagup}) = +\mathcal{A}_{cycle}$. Le travail est positif, donc le système reçoit du travail de l'extérieur.

FIGURE T3.8 : Travail d'un cycle dans le diagramme de Watt.



(a) Cycle moteur (b) Cycle récepteur/résistant

Dans la suite, nous étudierons plusieurs cycles qui seront le plus souvent modélisés à partir des transformations idéales : isochore, isobare, isotherme et adiabatique réversible. Il faut donc savoir tracer ces 4 transformations principales dans un diagramme de Watt :

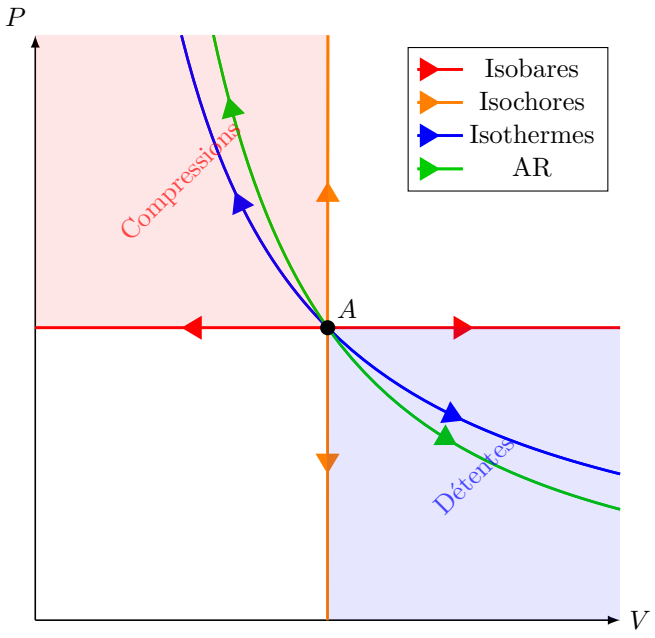
Propriété : Transformations idéales dans le diagramme de Watt/Clapeyron

Dans le diagramme de Watt/Clapeyron :

- une isochore $V = \text{cst}$ est une droite verticale
- une isobare $P = \text{cst}$ est une droite horizontale
- une isotherme de GP vérifie $PV = \text{cst}$ soit $P = \frac{\text{cst}}{V}$; la courbe correspondante est une hyperbole
- une AR de GP vérifie $P = \frac{\text{cst}}{V^\gamma}$; la courbe correspondante est une hyperbole plus penchée que l'isotherme

L'ensemble est résumé sur la figure T3.9.

FIGURE T3.9 : Principales transformations d'un GP dans le diagramme de Watt. À partir du point A, on a une compression si on se déplace vers la gauche ou le haut, et une détente si on se déplace vers la droite ou le bas.



T3. Thermodynamique des gaz

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre	
Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Pression cinétique. Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : $E_c = 3/2 k_B T$.	Utiliser un modèle unidirectionnel avec une distribution discrète de vitesse pour montrer que la pression est proportionnelle à la masse des particules, à la densité particulaire et au carré de la vitesse quadratique moyenne. Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique : exemple du gaz parfait.	Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Du gaz réel au gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Énergie interne du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant d'un gaz considéré comme parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un gaz considéré comme parfait.
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'enthalpie Hm(T) du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie Hm d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.

T3. Thermodynamique des gaz

Quelques conseils

- ✎ Encore une fois, une transformation isotherme d'un GP n'est pas adiabatique !
- ✎ Pour les lois de Laplace, vous pouvez faire des AN avec des volumes en L et des pressions en bar si vous voulez, par contre les températures doivent absolument être en K.
- ✎ Dans un exercice avec un gaz, résumez rapidement au brouillon toutes les informations des différentes transformations du gaz. Si vous connaissez votre cours, vous savez alors calculer W et Q sur chaque transformation.

T3. Thermodynamique des gaz

QCMs

réponses page 574

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'énergie cinétique moyenne d'un gaz parfait vaut

(a). nRT (b). $\frac{3}{2}nRT$
(c). 0 (d). $\frac{1}{2}nRT$

Q2. L'équation d'état du gaz parfait est :

(a). $P = nRT$ (b). $PT = nRV$
(c). $PV = nRV$ (d). $PV = nRT$

Q3. Dans un mélange idéal de gaz de pression totale P, la pression partielle d'un constituant de fraction molaire x_i vaut :

(a). $e^{x_i}.P$ (b). $x_i.P$
(c). $P - x_i$ (d). P

Q4. Le C_{vm} de l'air est souvent pris égal à $\frac{3}{2}R$.

(a). Faux (b). Vrai

Q5. Lors d'une détente de Joule-Gay Lussac :

(a). $\Delta U = 0$ (b). $\Delta T = 0$
(c). $\Delta P = 0$ (d). $\Delta V = 0$

Q6. Un cycle thermodynamique est moteur si sa courbe dans le diagramme de Watt tourne dans le sens :

(a). Trigonométrique (b). Horaire

Q7. Pour une transformation isotherme, $Q = 0$.

(a). Vrai (b). Faux

Q8. Soit un GP de coefficient isentropique $\gamma = 1{,}2$. Alors :

(a). $C_{vm} = 41{,}6\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (b). $C_{vm} = 12{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
(c). $C_{vm} = 49{,}9\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (d). $C_{vm} = 20{,}8\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

✓ QCM : Loi du gaz parfait ✗

Dans ce quiz, tous les gaz sont considérés comme parfaits.

Q9. Quel volume occupe 3 mol de gaz à 0 °C sous 1 bar ?

(a). 0,15 L
(b). 67,6 L
(c). 6760 m^3
(d). 0 m^3

Q10. On veut faire entrer 1 kg de vapeur d'eau (masse molaire 18 $g \cdot mol^{-1}$) à 250 °C dans un volume de 0,8 m^3. À quelle pression doit-on la compresser ?

(a). 2400 Pa
(b). 3,0 bar
(c). 2,4 bar
(d). 1,44 bar

Q11. 200 g d'air (masse molaire 29 $g \cdot mol^{-1}$) occupent 18 L sous 10 bar ; que vaut la température de l'air ?

(a). 314 K
(b). 41 K
(c). 41 °C
(d). 65 °C

Q12. Une enceinte de volume 200 L contient du diazote (masse molaire 28 $g \cdot mol^{-1}$) à −40 °C sous 3 bar. Quelle est la masse de diazote enfermée ?

(a). 31 g
(b). 1,15 kg
(c). 31 kg
(d). 867 g

✓ QCM : Application des lois de Laplace ✗

On travaille dans ce QCM sur des gaz modélisés comme un gaz parfait et subissant des transformations adiabatiques réversibles. On rappelle que le coefficient isentropique vaut $\gamma = 1{,}67$ pour un GP monoatomique et $\gamma = 1{,}4$ pour un GP diatomique.

Q13. On comprime 20 L d'un GP monoatomique pris sous 1 bar de façon adiabatique et réversible jusqu'à une pression de 5 bar. Le volume final vaut :

(a). 7,6 L
(b). 4,0 L
(c). 52,5 L
(d). 1,4 L

Q14. On comprime de façon adiabatique et réversible 24 L d'un GP diatomique à 300 K jusqu'à un volume de 13 L. La température finale vaut :

(a). 465 K
(b). 383 K
(c). 708 K
(d). 235 K

Q15. On détend de façon adiabatique et réversible 2 L d'un GP diatomique à 12 °C jusqu'à un volume de 9 L. La température finale vaut :

(a). 6,6 °C
(b). 5,4 °C
(c). −117 °C
(d). 21,9 °C

Q16. On détend de façon adiabatique et réversible un GP monoatomique à 25 °C sous 1 bar, jusqu'à une température de −14 °C. La pression finale vaut :

(a). 631 Pa
(b). 0,23 bar
(c). 0,70 bar
(d). 0,54 bar

Q17. On comprime de façon adiabatique et réversible un GP diatomique de masse volumique $1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ sous 1 bar, jusqu'à une pression de 5 bar. La masse volumique finale vaut :

(a). $12{,}4\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (b). $6{,}5\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
(c). $4{,}1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (d). $0{,}41\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

✓ QCM : Travail des forces de pression ✗

Q18. Un cylindre contient un gaz parfait diatomique à 50 °C sous 1 bar ; il occupe 600 L. On le comprime de façon monobare sous 5 bar jusqu'à 120 L. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

(a). 720 kJ (b). 240 kJ
(c). 435 kJ (d). 97 kJ

Q19. Un cylindre contient 3 mol d'un gaz parfait diatomique à 200 K ; il occupe 17 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à 40 L. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

(a). −21,2 J (b). −4,3 kJ
(c). On manque de données (d). −6,4 kJ

Q20. Un cylindre contient un gaz parfait à 170 K ; il occupe 11 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à 14 L. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

(a). −850 J (b). 510 J
(c). −510 J (d). On manque de données

Q21. Un cylindre contient un gaz parfait monoatomique à 100 °C sous 2 bar ; il occupe 32 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à une pression de 1 bar. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

(a). −12,8 kJ (b). 4,4 kJ
(c). −4,4 kJ (d). On manque de données

Q22. 7 mol de gaz parfait diatomique subissent une détente adiabatique et réversible qui les amènent de 130 °C à 63 °C. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

(a). −14,1 kJ (b). On manque de données
(c). −7,4 kJ (d). −661 J

Q23. 1 mol de gaz parfait monotomique subit une compression adiabatique et réversible qui l'amène de 30 °C sous 1 bar jusqu'à 4 bar. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

(a). 7,2 kJ (b). On manque de données
(c). 2,8 kJ (d). 983 J

T3. Thermodynamique des gaz

Exercices

réponses page 575

Exercice T3.1 : Air sec [*]

L'air sec est un gaz composé majoritairement de diazote (pourcentage molaire : 78 %), de dioxygène (21 %) et d'argon (1 %). *Données* : $M_{\mathrm{N}} = 14{,}01\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $M_{\mathrm{O}} = 16{,}00\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M_{\mathrm{Ar}} = 39{,}95\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

1. Calculez la masse molaire moyenne moyenne de l'air sec.
2. Calculez la pression partielle des trois principaux gaz dans une atmosphère à $P = 1{,}013\,\mathrm{bar}$ en supposant que l'air est un mélange idéal de gaz parfaits.
3. Calculez le pourcentage massique de ces trois gaz.

Exercice T3.2 : Détentes et compressions d'un gaz [**]

On enferme 1 mole de méthane gazeux dans une enceinte de volume initial $V_0 = 20\,\mathrm{L}$, et on lui fait subir des compressions et des détentes. On propose pour ce gaz deux modélisations différentes :

— une modélisation très simpliste : le gaz parfait, dont la capacité thermique est prise constante et égale à $C_{vm} = 27\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$; on notera $U_{GP}(T)$ son énergie interne.

— une modélisation plus élaborée : le gaz de Van der Waals ; on a alors les deux lois : $\left(P - \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$ et $U_{GVdW}(T,V) = U_{GP}(T) - \frac{a}{V}$ avec $a = 2{,}303\,\mathrm{bar\cdot L^{-2}}$ et $b = 0{,}0431\,\mathrm{L}$

1. Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz si sa température diminue de 7 °C sans changement de volume.
2. Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz s'il subit une détente qui quadruple son volume sans changer la température.
3. Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz s'il subit une compression au cours de laquelle son volume diminue de 30 % tandis que sa température augmente de 20 K.
4. Calculez, avec les deux modèles, la variation de température du gaz si on lui fait subir une détente où son volume est doublé, tandis que son énergie interne ne varie pas.

Exercice T3.3 : Tables thermodynamiques de la vapeur d'eau [**]

Exercice pas vraiment fondamental apprenant à utiliser des tables thermodynamiques.

1. Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V_m et l'énergie interne molaire U_m de la vapeur d'eau à la température $\theta = 500\,^\circ\mathrm{C}$ pour différentes valeurs de la pression p. On rappelle que $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

p(bar)	1	10	20	40	70	100
$V_m(\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}})$	$6{,}43\times10^{-2}$	$6{,}37\times10^{-3}$	$3{,}17\times10^{-3}$	$1{,}56\times10^{-3}$	$8{,}68\times10^{-4}$	$5{,}90\times10^{-4}$
$U_m(\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}})$	56,33	56,33	56,08	55,77	55,47	54,78

Justifiez sans calculs que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un gaz parfait.

On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour une mole :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \text{ et } U_m = U_{m,GP}(T) - \frac{a}{V}$$

Calculez le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $p = 1\,\mathrm{bar}$ et à $p = 100\,\mathrm{bar}$. Calculez b en utilisant l'état à $p = 100\,\mathrm{bar}$. Quelles valeurs donne alors le modèle pour U_m à $p = 40\,\mathrm{bar}$? Quelle température obtient-on avec le modèle pour l'état $p = 40\,\mathrm{bar}$ et $V_m = 1{,}56\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}}$? Conclusion sur la validité du modèle ?

2. On réalise une détente isochore, c'est-à-dire à volume constant, d'une mole de vapeur d'eau, de l'état initial I ($\theta_I = 500\,^\circ\mathrm{C}$, $p_I = 100\,\mathrm{bar}$) jusqu'à l'état final F ($p_F = 70\,\mathrm{bar}$, θ_F =?). Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V_m et l'énergie interne molaire U_m de la vapeur d'eau sous $p = 70\,\mathrm{bar}$, pour différentes valeurs de θ (en °C).

$\theta(°C)$	300	320	340	360	380	400
$V_m(m^3 \cdot mol^{-1})$	$5{,}31 \times 10^{-4}$	$5{,}77 \times 10^{-4}$	$6{,}18 \times 10^{-4}$	$6{,}54 \times 10^{-4}$	$6{,}87 \times 10^{-4}$	$7{,}20 \times 10^{-4}$
$U_m(kJ \cdot mol^{-1})$	47,30	48,38	49,32	50,17	50,96	51,73

Déterminez la température finale θ_F (essayez d'être le plus précis possible) et la variation d'énergie interne $U_F - U_I$.

Exercice T3.4 : Chauffage d'un gaz par une résistance [**]



Une mole de gaz à la température T_0 est enfermée dans un cylindre fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements (il y a donc à chaque instant équilibre mécanique entre l'intérieur et l'extérieur). À l'extérieur du cylindre, la pression vaut $P_0 = 1\,\text{bar} = \text{cst}$ et la température $T_0 = 20\,°\text{C}$.
Une résistance de $4\,\Omega$ placée à l'intérieur du cylindre, et reliée à l'extérieur par deux fils, permet de chauffer le gaz par effet Joule. La résistance a une capacité thermique $C_{p,r} = 4{,}3\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; les parois de l'enceinte ont pour capacité thermique $C_{p,p} = 2{,}1\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; on supposera qu'à l'équilibre, le gaz a la même température que les parois et la résistance.
Le gaz est de l'air, modélisé par un gaz parfait diatomique.

1. Calculer numériquement T_i, P_i et V_i.
2. On isole thermiquement le cylindre, et on alimente la résistance avec un courant constant de 2 A pendant 1 min. À l'aide d'un bilan d'enthalpie, calculez P_f, T_f et V_f l'équilibre.
   Remarque : comme système, prenez {le gaz + la résistance + les parois} car faudra tenir compte de l'échauffement de la résistance et des parois (puisqu'on vous donne leur C_p dans l'énoncé).
3. À la suite de la question précédente, on coupe le courant et on ôte l'isolation thermique et on attend que l'équilibre thermique du système complet avec l'extérieur se fasse.
   Calculez les nouvelles valeurs de la pression, de la température et du volume, ainsi que la chaleur transférée lors de cette étape.

Exercice T3.5 : Compression d'un gaz en plusieurs étapes [**]

On enferme $V_i = 10\,\text{L}$ d'air modélisé comme un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) dans un cylindre, sous pression $P_i = 1\,\text{bar}$ et à la température $T_i = 25\,°\text{C}$. On souhaite le comprimer jusqu'à $P_f = 20\,\text{bar}$ à la même température.

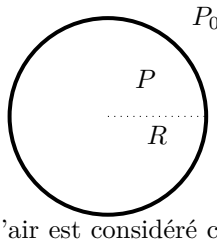
1. Calculez le nombre de moles de gaz, et le volume final V_f.
2. Quel travail W_0 faut-il fournir au gaz si on exécute une compression isotherme ? Quel est l'inconvénient de cette transformation ?
3. On propose une autre solution : on comprime rapidement le gaz de façon adiabatique et réversible de l'état i vers un état 1 de pression P_f, puis on laisse refroidir à pression constante jusqu'à l'état f.
   Calculez les caractéristiques de l'état 1, puis le travail total W_1 des deux étapes. Commentez le résultat obtenu.
4. Voici une troisième solution : on comprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à une pression $P_2 = 10\,\text{bar}$ intermédiaire entre P_i et P_f (état 2), puis on laisse refroidir à la température T_0 sous pression constante (état 3), puis on recomprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à P_f (état 4) puis on laisse refroidir à pression constante.
   Calculez les caractéristiques des états intermédiaires et le travail total W_2 de ces 4 étapes. Commentez.
5. Dessinez dans un diagramme de Watt les 3 trajets correspondant aux 3 questions précédentes.

Exercice T3.6 : Gonflage d'un ballon [**]

Un ballon possède une enveloppe élastique qui exerce une force lorsqu'elle est gonflée. Il en résulte deux choses :

— La pression à l'intérieur est, à l'équilibre mécanique, supérieure à la pression extérieure d'une quantité constante A qu'on prendra égale à 0,2 bar pour les AN

— Le ballon possède une énergie potentielle élastique $E_p = \frac{4}{3}\pi R^3 A$

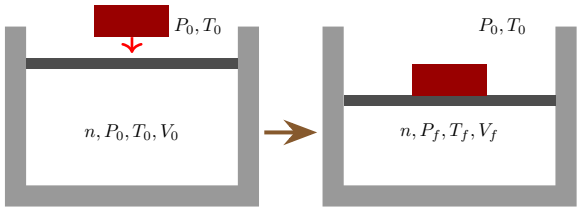


La pression de l'air extérieur vaut ici $P_0 = 1\,\text{bar}$ et sa température $T_0 = 22\,°\text{C}$. L'air est considéré comme un GP de coefficient $\gamma = 1{,}4$.

1. Avec une pompe, on comprime le gaz extérieur de façon adiabatique et réversible jusqu'à 1,2 bar, avant de l'envoyer dans le ballon.
   Calculez la température de l'air comprimé.
2. On injecte cet air dans le ballon, et on mesure $R = 9\,\text{cm}$. Calculez le nombre de moles d'air dans le ballon.
3. On attend que l'air dans le ballon se refroidisse à la température extérieure. Calculez le rayon final du ballon, et le transfert thermique reçu par le système {ballon+gaz} en négligeant la capacité thermique du ballon.

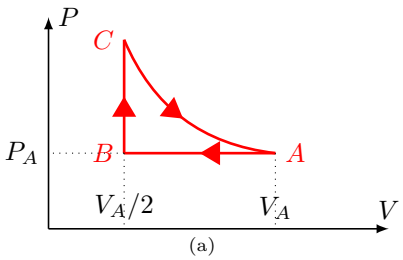
Exercice T3.7 : Compression brutale d'un gaz [**]

Dans un cylindre vertical, on enferme n moles d'air (considéré comme un gaz parfait diatomique) à l'aide d'un piston de masse négligeable. Il y a équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur (pression P_0, température T_0).
On pose une masse m sur le piston, ce qui exerce une surpression équivalente $\frac{mg}{S}$ sur la face supérieure du piston de section S. On attend l'équilibre mécanique mais pas thermique ; comme la transformation est rapide, on la considérera **adiabatique**.

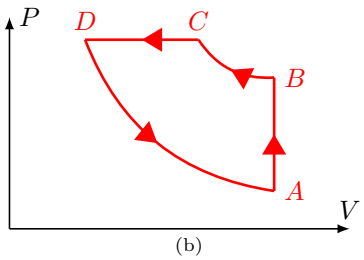


1. Exprimez P_f ; à l'aide la loi du GP, établir une équation reliant P_f, V_f et T_f uniquement à P_0, V_0 et T_0.
2. Par application du premier principe, établir une seconde équation reliant P_f, V_f et T_f aux données.
3. En déduire les expressions de V_f et T_f.
4. AN pour $P_0 = 1\,\text{bar}$, $\frac{mg}{S} = 0{,}2\,\text{bar}$, $T_0 = 300\,\text{K}$ et $V_0 = 1\,\text{L}$.
5. On attend maintenant que l'équilibre thermique s'établisse entre le gaz et l'extérieur. Calculez le transfert thermique Q reçu par le gaz.

Exercice T3.8 : Travail des forces de pression [**]



(a)



(b)

Calculez le travail des forces de pression lorsqu'un GP diatomique décrit ces cycles réversibles :

(a) À partir de A ($P = 1{,}0\,\text{bar}$, $T = 590\,\text{K}$, $V = 1{,}5\,\text{m}^3$), on effectue un refroidissement isobare qui réduit le volume de moitié, puis une isochore, et une détente isotherme.

(b) À partir de A ($P = 1{,}0\,\text{bar}$, $T = 290\,\text{K}$, $V = 2{,}5\,\text{L}$), on effectue un chauffage isochore AB jusqu'à $T_B = 600\,\text{K}$, puis une compression isotherme BC jusqu'à $P_C = 5\,\text{bar}$, puis un refroidissement isobare CD, puis une détente isotherme DA.

Conseil : dans chaque cas, calculez d'abord le nombre de moles n, puis remplissez le tableau suivant :

État	T	P	V
A			
B			
C			
(D)			

Exercice T3.9 : Étude d'un cycle moteur [**]

On étudie un moteur dans lequel n moles de gaz parfait diatomique subissent les transformations suivantes :

— de A à B : compression isotherme à la température $T_f = 300\,\text{K}$; le rapport de compression vaut $\frac{V_A}{V_B} = 3$;

— de B à C : détente isobare à la pression $P_B = 3\,\text{bar}$;

— de C à A : refroidissement isochore avec un volume $V_C = 1{,}2\,\text{L}$.

1. Remplissez le tableau suivant ; profitez-en pour calculer le nombre de moles de gaz, sachant que $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, ainsi que la capacité calorifique à volume constant du gaz.

État	P(bar)	T(K)	V(L)
A			
B			
C			

2. Tracez le cycle dans le diagramme de Watt. Est-ce bien un moteur ?
3. Calculez pour chaque étape le travail et le transfert thermique reçus par le gaz. Déduisez-en le travail total fourni par le moteur au cours d'un cycle.
4. Ce moteur décrit 6 cycles par seconde. Calculez sa puissance.

Exercice T3.10 : Machine frigorifique [**]

Pour refroidir une pièce, on imagine la faire subit à n moles d'air (modélisé par un GP diatomique de $\gamma = 1{,}4$) les transformations suivantes :

— Compression isotherme de l'état $A(1\,\text{bar}, 298\,\text{K}, 30\,\text{L})$ à l'état B de volume $6\,\text{L}$

— Détente adiabatique réversible jusqu'à l'état C

— Réchauffement isochore jusqu'à l'état A

1. Tracez l'allure du cycle dans le diagramme de Watt
2. Remplissez le tableau suivant :

	T(K)	P(bar)	V(L)
A			
B			
C			

3. Calculez le travail total reçu au cours d'un cycle, ainsi que la quantité de chaleur prélevée à l'étape CA.

Exercice T3.11 : Explosion d'un bloc de TNT [***]

Le TNT est un explosif ayant les caractéristiques suivantes :

— masse molaire : $227{,}1\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

— masse volumique : $1650\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

— énergie de décomposition : $4{,}18\,\text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

— sa décomposition lors d'une explosion produit environ 9 moles de gaz par mole initiale de TNT

— les gaz produits sont essentiellement di- et tri-atomiques, on prendra un C_{vm} moyen de $25\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

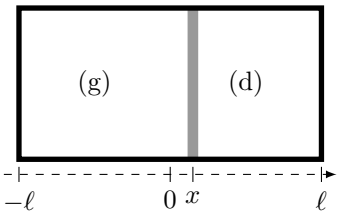
On s'intéresse à la décomposition de 300 g de TNT, initialement à 20 °C sous 1 bar. On modélisera les gaz produits par des gaz parfaits.

1. Calculez le volume initial du TNT.
2. Calculez le nombre de moles de TNT, le nombre de moles de gaz produits, et le C_v de ces gaz.
3. La décomposition du TNT est très rapide, on va donc considérer que cette étape est adiabatique et isochore. Que vaut alors la variation d'énergie interne ΔU de ce système ?
4. On peut décomposer l'évolution réelle du système en deux étapes fictives :
   — décomposition à température constante : le TNT initial se décompose à 20 °C pour donner des gaz ; la variation d'énergie interne lors de cette étape est alors l'opposé de l'énergie de décomposition donnée dans l'énoncé (on met ce signe − car l'énergie est libérée).
   — échauffement des gaz produits de 20 °C jusqu'à la température T_1 à la fin de cette étape.

   Calculez numériquement T_1. Déduisez-en la pression P_1 si la transformation est isochore.
5. On a alors une seconde phase : les gaz se détendent. Pour avoir des ordres de grandeur, on va adopter un modèle simplifié : une détente adiabatique et réversible jusqu'à la pression $P_2 = 1$ bar.
   À l'aide des lois de Laplace, déterminez le volume V_2 et la température T_2 des gaz à la fin de la détente.

Exercice T3.12 : Oscillations d'un piston [**]

On considère un cylindre fermé à ses deux bouts, de section S, de longueur 2ℓ. Un piston de masse m sépare ce cylindre en 2 ; il peut coulisser sans frottements. On note d le compartiment de droite et g celui de gauche. La position du piston est repérée par la distance x par rapport au milieu du cylindre.



Chaque compartiment contient la même quantité d'un gaz modélisé comme un gaz parfait. Initialement, le piston est au milieu, les deux compartiments ont le même volume $V_0 = S.\ell$, la même température T_0 et la même pression P_0.

1. Le piston se déplace en x ; exprimez les volumes V_d et V_g des deux compartiments.
2. On suppose dans un premier temps que la température des deux compartiments reste la même. Exprimez les pressions P_d et P_d dans les deux compartiments en fonction de P_0, x et l.
3. En appliquant le PFD au piston, déterminez l'ED vérifiée par x.
4. Exprimez la pulsation des petites oscillations après avoir linéarisé l'ED au voisinage de $x = 0$ (pour $x \ll \ell$).
   AN : pour $m = 70\,\mathrm{g}$, $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, $\ell = 15\,\mathrm{cm}$, $S = 1\,\mathrm{cm^2}$, calculez la période.
5. En réalité, lors des oscillations, les transformations ne se font pas à température constante : les évolutions dans chaque compartiment peuvent être considérées comme adiabatiques et réversibles, avec $\gamma = 1,4$.
   Exprimez alors la pulsation des petites oscillations.

Exercice T3.13 : Fuite de gaz dans la station spatiale [**]

Cet exercice se base sur la démonstration de la pression cinétique du gaz parfait.
Un module de station spatiale de volume intérieur $V = 8{,}3\,\mathrm{m^3}$ contient de l'air, modélisé comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, à la température $T = 19\,°\mathrm{C}$, et avec une pression initiale $P(0) = 1\,\mathrm{bar}$.
Une petite météorite vient frapper le module et perce dans la paroi un trou de surface $S = 5\,\mathrm{mm^2}$. Le gaz s'échappe alors à travers ce trou et part dans le vide.

1. Retrouvez l'expression de la vitesse quadratique v^* des molécules du gaz en fonction de T. Calculez numériquement sa valeur.
2. Soit $N(t)$ le nombre de particules dans le volume V à l'instant t.
   Exprimez le nombre δN_{trou} de particules qui passent à travers le trou en une durée $\mathrm{d}t$. On pourra adopter le modèle simplifié dans lequel les molécules ne vont que dans les 6 directions principales de l'espace, donc

$\frac{N}{6}$ molécules se dirigent vers le trou avec la vitesse v^*.

3. Par un bilan entre t et $t + \mathrm{d}t$, montrer que $N(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\tau \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + N = 0$$

avec τ à exprimer ; faire l'AN de τ.

4. En déduire l'évolution de $N(t)$ en fonction de $N(0)$, puis celle de la pression $P(t)$ en fonction de $P(0)$. Au bout de combien de temps la pression aura-t-elle atteint 0,8 bar ?

T3. Thermodynamique des gaz

TDs numériques

réponses page 580

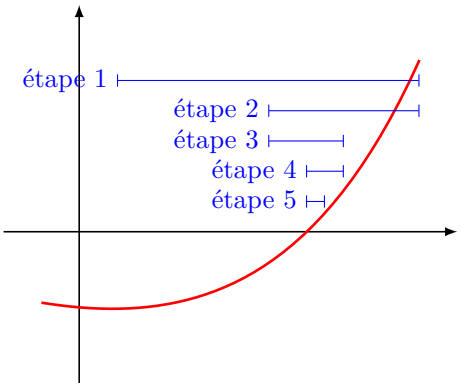
TD numérique : Modèle du gaz de Van der Waals

num $f(x) = 0$

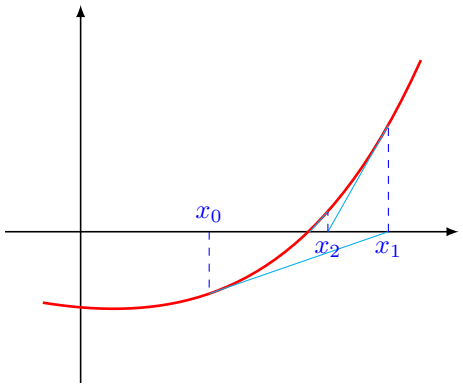
Ce TD un peu théorique est l'occasion de mettre en œuvre les méthode de résolution d'une équation à une inconnue. Supposons qu'on veuille résoudre une équation d'inconnue x ; en passant tous les termes du même côté, on peut écrire cette équation sous la forme $f(x) = 0$. Résoudre l'équation revient donc à trouver les racines de la fonction f (c'est-à-dire les valeurs qui annulent la fonction).
Il existe plusieurs méthodes numériques ; les principales sont :

— la **méthode de dichotomie** est la meilleure, elle nécessite d'avoir repéré un intervalle $[g; d]$ dans lequel on est sûr que la fonction f a *une racine et une seule* ; autrement dit, f change une seule fois de signe sur cet intervalle. On va alors découper cet intervalle en deux : on calcule $m = \frac{g+d}{2}$ et on calcule $f(m)$; s'il est de signe opposé à $f(g)$ alors la racine est située dans $[g; m]$, sinon elle est dans $[m; d]$. En répétant cette action, on divise l'intervalle et on repère rapidement un encadrement précis de la racine.

— la **méthode de Newton** est encore plus rapide, mais ne converge pas toujours et nécessite de connaître la dérivée de f. Cette fois, on n'impose pas d'intervalle de recherche, mais on dispose d'une valeur initiale x_0 située pas trop loin de la racine. Alors on trace la tangente à la courbe de f en x_0, et on note x_1 le point où elle coupe l'axe des abscisses, puis on recommence. On crée ainsi une suite récurrente $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ qui converge vers la racine…ou pas.



Méthode de dichotomie



Méthode de Newton

La première méthode, que vous devez savoir implémenter, est sûre, mais ne marche que pour les équations à une inconnue ; la seconde, moins sûre, se généralise à des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Dans ce TD, on va s'intéresser à un gaz réel modélisé par les équations de Van der Waals :

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \tag{1a}$$

$$U(T, V) = \frac{5}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} \tag{1b}$$

avec a et b des constantes caractéristiques du gaz. Pour modéliser l'air, les valeurs données dans les tables sont $a = 135{,}8 \times 10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 36{,}4 \times 10^{-6}\,\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. On rappelle que $R = 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Créez une fonction `pressionGP(n,T,V)` qui renvoie la pression d'un gaz parfait (en Pascal) en fonction de n, V et T.
   Créez une fonction `pressionGVdW(n,T,V)` qui renvoie la pression du gaz de Van der Waals (en Pascal) en fonction de n, V et T.
   Tracez alors les courbes $P(V)$ pour les deux modèles, pour 1 mol à la température $T = 300\,\text{K}$, le volume variant entre 1 L et 50 L. Les deux modèles sont-ils proches pour des pressions de quelques bars ?
2. Tracez maintenant la même courbe entre 0,05 L et 1 L. Commentez.
3. Tracez la courbe $P(V)$ entre 0,05 L et 1 L pour $T = 100\,\text{K}$. Commentez.

4. Créez une fonction `volumeGP(n,P,T)` qui renvoie le volume d'un gaz parfait (en m^3) en fonction de n, P et T.

   Est-ce facile de créer la même fonction pour un gaz de Van der Waals ?

5. On va créer la fonction `volumeGVdW(n,P,T)` renvoyant le volume du gaz de Van der Waals en fonction de n, P et T. Pour cela, dans cette fonction, on va procéder en plusieurs étapes :
   - définissez une fonction `f(V)` qui renvoie la différence entre les deux termes de l'équation (1a)
   - stockez dans une variable V_{GP} le volume du gaz dans le modèle du gaz parfait
   - initialisez g à $\frac{1}{10}V_{GP}$ et d à $10 * V_{GP}$; on admettra que la racine recherchée se trouve dans cet intervalle dans les cas qui nous intéressent
   - choisissez une précision de recherche du volume, par exemple $\varepsilon = 1 \times 10^{-5} V_{GP}$
   - lancez la boucle de dichotomie :

     tant que $d - g > \varepsilon$ **faire**
     $m \longleftarrow \frac{g+d}{2}$
     si $f(m) \times f(g) < 0$ **alors**
     $d \longleftarrow m$
     sinon
     $g \longleftarrow m$
     fin si
     fin tq

   - renvoyez alors g ou d, peu importe.

6. Calculez pour les deux modèles le volume occupé par 1 mole d'air à 300 K sous 1 bar. Faites de même sous 100 bar ; commentez.

7. Écrivez une fonction `volumeGVdW2(n,P,T)` qui fait la même chose, mais au lieu d'implémenter à la main la dichotomie, vous utiliserez la fonction `scipy.optimize.bisect` (documentation à chercher).

8. Dans la détente de Joule-Gay Lussac, la pression du gaz diminue tandis que son énergie interne est constante. On va montrer que, pour un gaz de Van der Waals, cela se traduit par une diminution de la température.

   Pour cela, commencez par calculer l'énergie interne U de 1 mole d'air à 300 K occupant 5 L ; on la notera U_0.

   Ensuite, créez un tableau de valeurs de V entre 5 L et 25 L ; calculez le tableau des températures correspondantes, si on laisse U constant à la valeur U_0. Tracez la courbe $T(V)$ et commentez.

TD numérique : Calcul du travail des forces de pression

Le travail des forces de pression se calcule par l'intégrale

$$W = -\int_{début}^{fin} P_{ext} \mathrm{d}V \tag{1}$$

C'est l'occasion d'apprendre les méthodes de base de l'intégration numérique.
On sait que $\int_{x_a}^{x_b} f(x)\mathrm{d}x$ représente l'aire sous la courbe de la fonction f (en grisé sur la figure de gauche). Pour approcher cette aire, plusieurs formules existent :

- dans la **méthode des rectangles** (deuxième figure), on découpe l'intervalle $[x_a; x_b]$ en N sous-intervalles de longueur $\mathrm{d}x = \frac{x_b - x_a}{N}$; le i-ème sous-intervalle est donc $[x_a + i.\mathrm{d}x; x_a + (i+1).\mathrm{d}x]$ en numérotant les intervalles de 0 à $N-1$. Pour chaque sous-intervalle, on calcule la valeur de f à gauche du sous-intervalle, c'est-à-dire $f(x_a + i.\mathrm{d}x)$, et on va dire que l'aire sous la courbe de f sur ce sous-intervalle vaudra l'aire du rectangle ainsi tracé, à savoir $f(x_a + i.\mathrm{d}x) \times \mathrm{d}x$. On obtient donc la formule

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \mathrm{d}x = \frac{x_b - x_a}{N} \text{ et } x_i = x_a + i.\mathrm{d}x \tag{2}$$

  On peut montrer que l'erreur commise varie comme $\frac{1}{N}$.

- Pour plus de précision, on peut choisir la hauteur du rectangle non point à gauche de l'intervalle, mais

en son milieu : c'est la **méthode des rectangles au point milieu**. On a alors

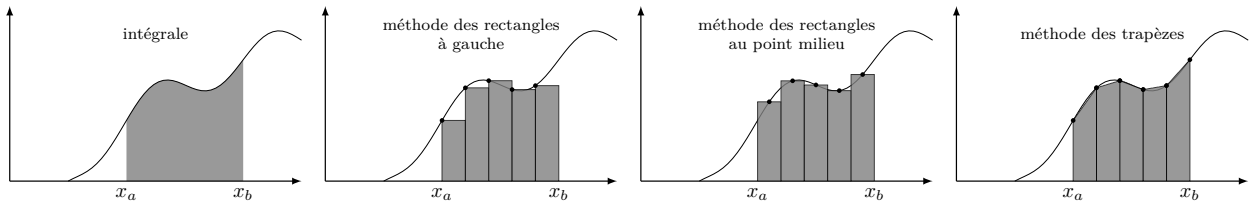
$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i\right)\mathrm{d}x \text{ avec } \mathrm{d}x = \frac{x_b - x_a}{N} \text{ et } x_i = x_a + \left(i + \tfrac{1}{2}\right).\mathrm{d}x \tag{3}$$

Cette méthode a une erreur qui varie comme $\frac{1}{N^2}$, elle est donc meilleure.

— On peut aussi approximer l'aire non par un rectangle, mais un trapèze : c'est la **méthode des trapèzes**. On a alors

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right)}{2}\mathrm{d}x \text{ avec } \mathrm{d}x = \frac{x_b - x_a}{N} \text{ et } x_i = x_a + i.\mathrm{d}x \tag{4}$$

Cette méthode est aussi précise que celle des rectangles au point milieu.



Remarque : en physique, on écrira $\delta W = -P_{ext}.dV$ le *travail infinitésimal*, qui correspond à l'aire d'un petit rectangle ; puis $W = \int \delta W$ qui interprète l'intégrale comme une somme : le travail total est la somme (infinie) des travaux infinitésimaux.
Autre remarque : la méthode des rectangle est en fait équivalente à appliquer une méthode d'Euler.

1. **Détente isotherme**
   On considère une mole de gaz qui se détend de façon réversible à la température constante $T = 150\,^\circ\mathrm{C}$ de $V_1 = 2{,}5\,\mathrm{L}$ jusqu'à $V_2 = 35\,\mathrm{L}$.
   (a) On suppose dans cette question que le gaz est modélisable par un gaz parfait.
   Créez une fonction `PGP(V)` qui renvoie la pression pour un volume V donné, à la température choisie, puis appliquez la formule (3) avec $N = 100$ pour calculer le travail des forces de pression. Comparez avec la formule théorique : $W = -nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$.
   (b) Passez à 1000 rectangle et observer comment les deux valeurs se rapprochent
   (c) On modélise maintenant le gaz par un gaz de Van der Waals vérifiant

$$P = \frac{nRT}{V - n.b} - a\frac{n^2}{V^2} \tag{5}$$

   Pour l'air on prendra : $a = 135{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^6\cdot\mathrm{mol}^{-2}$ et $b = 36{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
   Pour la vapeur d'eau on prendra : $a = 557{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^6\cdot\mathrm{mol}^{-2}$ et $b = 31{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
   Définissez deux fonctions `Pair(V)` et `Peau(V)`, puis calculez le travail de la détente de ces deux gaz dans les mêmes conditions que précédemment. Commentez le résultat.

2. **Détente adiabatique réversible (AR)**
   On considère une mole de gaz diatomique initialement à $T_1 = 500\,^\circ\mathrm{C}$ dans $V_1 = 5\,\mathrm{L}$ qui se détend de façon AR jusqu'à T_2 et $V_2 = 50\,\mathrm{L}$.
   (a) Calculez numériquement, pour un GP diatomique ($\gamma = 1,4$), la température finale T_{2Lap} puis le travail W_{2Lap} des forces de pression.
   (b) Au cours de la détente AR, $\delta Q = 0$ et $P = P_{ext}$ donc le premier principe appliqué au gaz s'écrit $\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V$. Or pour un GP diatomique, $\mathrm{d}U = C_v\mathrm{d}T$ avec $C_v = \frac{5}{2}nR$; donc $\mathrm{d}T = -\frac{P}{C_v}\mathrm{d}V$. La température lorsque le volume vaut V au cours de la détente vaut donc $T(V) = T_1 - \int_{V_1}^{V}\frac{P(T,V)}{C_v}\mathrm{d}V$.
   Pour calculer ainsi une primitive, on procède comme pour calculer une intégrale par méthode des rectangles (50000 rectangles ici), mais en stockant les sommes intermédiaires dans une liste ou un tableau. Générez ainsi trois tableaux :
   — un tableau contenant les valeurs $V_i = V_1 + i\frac{V_2 - V_1}{N}$ du volume lors de la détente, pour i allant de 0 à N

— un tableau contenant les valeurs des températures T_i correspondantes (initialisez T_0, puis calculez les $T_{i+1} = T_i + \frac{P(T_i,V_i)}{C_v}\mathrm{d}V$)
— un tableau contenant les valeurs des pressions P_i correspondantes

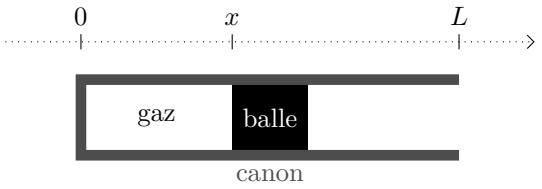
Calculez alors le travail des forces de pression par une somme (soit la méthode des rectangles, $W = -\sum_{i=0}^{N-1} P_i \mathrm{d}V$; ou, mieux encore, par la méthode des trapèzes, c'est plus précis), et comparez au résultat de la question précédente.

(c) Pour un gaz de Van der Waals, $\mathrm{d}U = C_v\mathrm{d}T + a\frac{n^2}{V^2}\mathrm{d}V$ donc $\mathrm{d}T = -\frac{P(T,V)+a\frac{n^2}{V^2}}{C_v}\mathrm{d}V$. Calculez la température finale, la pression finale et le travail reçu, pour l'air modélisé comme un gaz de Van der Waals diatomique.

(d) Reprendre la comparaison entre le modèle du gaz parfait et le modèle de Van der Waals pour une détente AR de 1 kg d'air de 200 bar, 20 °C à 1 bar (commencez par calculer le volume initial ; pour le volume final, on procèdera à tâtons ; la masse molaire de l'air vaut $29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$).

TD numérique : Tir d'une balle .py EDO

Pour étudier les transformations d'un gaz qui se détend ou se comprime, on néglige souvent la masse du piston qui l'enferme. La prise en compte de cette masse complique les équations. On va essayer d'en tenir compte dans ce devoir en étudiant le tir d'une balle, poussée par la détente d'un gaz.
Le schéma général du problème est représenté ci-dessous ; suivant le cas étudié, ce sera un tir de balle, de boulet de canon, d'obus, ou même le tir le tir du vaisseau spatial de Jules Verne dans *De la Terre à la Lune*.



On prendra les données suivantes correspondant à un pistolet de 9 mm :

— diamètre de tube : 9 mm
— masse de la balle : 8 g
— masse de poudre : 0,35 g occupant un cylindre de 8 mm de diamètre et 17 mm de long
— pouvoir calorifique (c'est-à-dire à peu près l'énergie libérée lors de l'explosion) : $580\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$
— masse molaire de la poudre : $270\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
— la combustion d'1 mol de poudre produit 5 mol de gaz ; la capacité thermique molaire du gaz obtenu vaut $C_{vm} = 40{,}1\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
— longueur du canon : 10 cm

En sortie du canon, on annonce une vitesse de $310\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et une énergie cinétique de 380 J.

1. Initialement, on a de la poudre occupant un volume V_0 à la température $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ sous la pression $P_0 = 1$ bar correspondant aussi à la pression extérieure.
   Calculez le volume V_0, ainsi que le nombre n de moles de poudre.
2. La réaction chimique d'explosion de la poudre produit du gaz. L'énergie libérée lors de la combustion va être transférée à ce gaz ; en première approximation on peut faire comme s'il s'agissait d'un transfert thermique reçu par le gaz.
   En supposant que l'explosion est instantanée donc isochore (la balle n'a pas eu le temps de bouger), calculez la température T_1 et la pression P_1 à la fin de l'explosion, qui sera prise dans la suite comme instant $t = 0$.
3. Dans la suite, la balle va avancer et le gaz se détendre. Il faut écrire les équations différentielles vérifiées par les variables $T(t)$, $P(t)$ et $V(t)$.
   (a) Appliquez le PFD à la balle ; la position de la balle peut être notée x, mais ensuite, comme on veut travailler plutôt sur le volume, on écrira que $x = \frac{V}{S}$ avec S la section du tube. Vous devez donc obtenir une ED reliant $\ddot{V}$ à P et aux constantes.
   (b) Appliquez le premier principe au système {gaz + balle} entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$ en supposant la transformation adiabatique et en tenant compte de l'énergie cinétique de la balle, et montrez que $C_v\dot{T} + \frac{m_b}{S^2}\dot{V}\ddot{V} = -P_0\dot{V}$

(c) On va résoudre ce système de deux ED avec `odeint`. Commencez par préparer la liste des inconnues ; on rappelle la règle : pour toute variable qui apparaît sous forme dérivée n fois, on prendra dans la liste des inconnues cette variable, sa dérivée,…jusqu'à sa dérivée $(n-1)$-ème.

(d) Implémentez alors la fonction `derivee(inconnues,t)`. Dans cette fonction, on commencera par calculer $\ddot{V}$, puis $\dot{T}$. Pour la pression, on modélisera le gaz par un gaz parfait, même si ce modèle est discutable au départ.

(e) Terminez la résolution en simulant sur $1ms$ pour commencer. Récupérez les tableaux de $V(t)$, $\dot{V}(t)$ et $T(t)$, et déduisez-en $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $P(t)$. Modifiez le temps total de simulation pour que x corresponde exactement à la longueur du tube à la fin. Notez alors le temps mis par la balle pour sortir du tube, et sa vitesse acquise.

(f) Tracez $P(V)$. Tracez sur le même graphe la courbe donnée par la loi de Laplace : $P = \frac{P_1 V_0^\gamma}{V^\gamma}$ avec $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{vm}}$. Commentez.

4. Dans la suite, on va ajouter des détails supplémentaires dans le modèle. On ajoutera les termes séparément : à chaque question, on repart du modèle de la question 3d.

(a) On ajoute au modèle précédent des frottements de la forme $\vec{F} = -a - b.\vec{v}$ avec $a = 1\,\text{N}$, $b = 10\,\text{USI}$ et $\vec{v}$ la vitesse. Retracez les courbes et commentez.

(b) On tient compte de la perte de chaleur du gaz, principalement vers la balle. On ajoutera donc une nouvelle variable, T_b, initialement à T_0. La puissance thermique du gaz vers la balle se fera à travers une résistance thermique R_{th}. Cette puissance thermique devra à la fois être incluse dans le premier principe appliqué au gaz, et aussi au premier principe appliqué à la balle, constitué d'acier de capacité thermique massique $c_a = 460\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Reécrivez le modèle et tracez les courbes. Ajustez R_{th} pour avoir à la fin $T_b = 60\,°\text{C}$.

(c) Pour aller plus loin vers ce modèle, il faudrait tenir compte aussi du transfert thermique vers le canon, mais la température du canon n'est pas homogène, et ça devient trop compliqué.

TD numérique : Simulation de la distribution de vitesses d'un gaz parfait

random

La simulation exacte d'un gaz parfait demande de traiter de très nombreux degrés de liberté et est très gourmande en ressources. Néanmoins, des modèles simplifiés ont été mis au point, basés sur des méthodes aléatoires dites « méthodes de Monte-Carlo » qui permettent de simuler de façon réaliste certains paramètres du gaz. Ce TD en présente une, tirée du livre de A.L.Garcia, *Numerical Methods for Physics*. C'est un TD assez difficile à comprendre et non essentiel.

On considère un gaz formé de $N = 3000$ particules dans un espace de longueur $L = 1\,\mu\text{m}$ et de très petites dimensions dans les autres directions ; on ne s'intéressera donc qu'à une seule direction notée x. Le gaz est enfermé entre $x = 0$ et $x = L$. Sa température vaut $T = 300\,\text{K}$ et sa masse molaire $M = 4\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

On va repérer les particules par des tableaux :

— la liste `tab_position` contient les abscisses x des N particules

— les listes `tab_vx,tab_vy,tab_vz` contient les vitesses des particules selon les 3 axes

En effet, les dimensions selon y et z sont très petites, mais cela n'empêche pas les particules d'avoir une vitesse selon ces directions, simplement elles rebondiront sur les parois, ce qui changera fréquemment le signe de v_y et v_z, mais cela importe peu dans cette simulation et on n'en tiendra pas compte.

1. Générez la liste initiale des positions et des vitesses :
   — pour les positions, chaque particule est placée aléatoirement entre 0 et L
   — pour les vitesses selon x, chaque particule a une vitesse initiale valant $\pm v^*$ avec un signe tiré aléatoirement, v^* étant la vitesse quadratique du gaz
   — les vitesses initiales selon y et z sont nulles

   On pourra utiliser les fonctions `numpy.random.uniform` et `numpy.random.randint`.

2. On va simuler des collisions entre les particules. Lorsque deux particules se rencontrent, il faut respecter des lois fondamentales de la physique des systèmes matériels (qu'on verra bientôt en mécanique) :
   — conservation de la quantité de mouvement totale
   — conservation de l'énergie

   Néanmoins, si on considère les particules comme des boules de billard, on sait que, selon l'endroit où elles se cognent, les vitesses finales vont pouvoir partir dans un peu toutes les directions. Considérons deux particules de vitesse initiale $\vec{v}_{i1}$ et $\vec{v}_{i2}$. On admet alors les lois suivantes :

— on tire aléatoirement un angle ϕ selon une loi uniforme entre 0 et 2π
— on tire aléatoirement un angle θ tel que $\cos\theta$ vérifie une loi uniforme entre -1 et 1
— les vitesses finales $\vec{v}_{fn}$ avec $n = 1, 2$ valent :

$$\begin{cases} v_{fn,x} &= v_{moy,x} + \epsilon_n v_{d,x} \\ v_{fn,y} &= v_{moy,y} + \epsilon_n v_{d,y} \\ v_{fn,z} &= v_{moy,z} + \epsilon_n v_{d,z} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_1 &= +1 \\ \epsilon_2 &= -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_{moy,xyz} &= \frac{v_{i1,xyz}+v_{i2,xyz}}{2} \\ v_{rel} &= \|\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}\| \\ v_{d,x} &= \frac{1}{2} v_{rel} \cos\theta \\ v_{d,y} &= \frac{1}{2} v_{rel} \sin\theta\cos\phi \\ v_{d,z} &= \frac{1}{2} v_{rel} \sin\theta\sin\phi \end{cases}$$

Implémentez une fonction `vitesses_apres_collision(vx1,vy1,vz1,vx2,vy2,vz2)` qui renvoie la liste des 6 vitesses après collision.

3. Définissez une fonction `simule_collisions_une_particule(tx,tvx,tvy,tvz,i,tau)` qui prend comme argument les 4 tableaux et y simule des collisions pour la particule i pendant une durée τ selon le processus suivant appliqué à toutes les autres particules j :
   — on calcule les abscisses x des particules i et j à l'instant $t + \tau$
   — si les positions des deux particules ont été inversées au cours de la durée τ, on calcule la vitesse relative $|v_x[i] - v_x[j]|$ et on la compare à un réel aléatoire tiré entre 0 et $6v^*$; si la vitesse relative est plus élevée, alors il y a collision entre les deux particules et on met à jour leurs vitesses à l'aide de la fonction de la question précédente.
4. Définissez une autre fonction `simule_avancee(tx,tvx,tau)` qui simule l'avancée des particules selon la direction x :
   — chaque position de particule avance de $\tau.v_x$
   — si $x < 0$ alors la particule rebondit sur le bord de gauche : sa vitesse v_x devient l'opposé et sa position prend la valeur symétrique par rapport à 0
   — si $x > L$ alors la particule rebondit sur le bord de droite : sa vitesse v_x devient l'opposé et sa position prend la valeur symétrique par rapport à L
5. Définissez alors une fonction `simule_un_pas(tx,tvx,tvy,tvz,tau)` qui simule un pas de durée τ selon le processus suivant :
   — tirer au hasard un nombre égal à 5 % du nombre total de particules, et leur appliquer la fonction `simule_collisions_une_particule`
   — faire avancer toutes les particules avec la fonction `simule_avancee`
6. Simulez alors 25 pas de durée $0,02\frac{L}{v^*}$ à partir de la répartition initiale, et tracez l'histogramme des vitesses $\|\vec{v}\|$ à l'aide de la fonction `matplotlib.pyplot.hist`.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(d)
Q3.(b)
Q4.(a)
L'air est un GP diatomique donc on prend $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.
Q5.(a)
Q6.(b)
Q7.(b)
C'est faux, **c'est faux**, c'est archi faux, it's false, es ist falsch, es incorrecto, é falso, non è vero, nu e adevărat, to nieprawda, sa pa vré,...je ne sais pas comment le dire autrement, mais C'EST FAUX et ça coûte beaucoup de points en moins en DS/colle/concours quand on sort une telle ÂNERIE.
Q8.(a)
$C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$

Réponses au QCM : Loi du gaz parfait

Q9.(b)
Q10.(b)
$P = \frac{\frac{1000}{18} \times 8{,}314 \times (250+273)}{0{,}8}$
Q11.(a) ET (c)
Q12.(d)

Réponses au QCM : Application des lois de Laplace

Q13.(a)
$V_f = V_i \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
Q14.(b)
$T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma - 1}$
Q15.(c)
Attention à passer les températures en Kelvins.
Q16.(c)
$P_f = P_i \left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$
Q17.(c)
$\rho_i = \frac{m}{V_i}$ et $\rho_f = \frac{m}{V_f}$, la masse n'ayant pas changé. Donc $\rho_f = \rho_i \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$

Réponses au QCM : Travail des forces de pression

Q18.(b)
Q19.(b)
Q20.(d)
Pour calculer $W = -nR \ln \frac{V_f}{V_i}$ il faudrait connaître n, or on ne connaît pas P donc on ne peut pas calculer n.
Q21.(b)
$n = \frac{PV}{nR} = 2{,}06\,\text{mol}$ (attention aux unités !)
Q22.(a)
$Q = 0$ donc $W = \Delta U = Cv.\Delta T$.
Q23.(c)
Par les lois de Laplace : $T_f = 255\,°\text{C}$ puis $W = \Delta U - Q = C_v.\Delta T$ avec $C_v = \frac{3}{2}nR = 12{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T3.1 : Air sec [*]

1. La masse moyenne vaut $M = 0{,}78.2M_{\mathrm{N}} + 0{,}21.2M_{\mathrm{O}} + 0{,}01M_{\mathrm{Ar}} = 28{,}98\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
2. Les pressions partielles valent $P_{\mathrm{N_2}} = 790{,}1\,\mathrm{mbar}$, $P_{\mathrm{O_2}} = 212{,}7\,\mathrm{mbar}$ et $P_{\mathrm{Ar}} = 10{,}13\,\mathrm{mbar}$.
3. Prenons une mole d'air. Il y a 28,98 g de matière et $0{,}78 \times 2 \times 14{,}01 = 21{,}86\,\mathrm{g}$ de diazote, soit 75,4 %. De même, on trouve 23,2 % pour le dioxygène et 1,4 % pour l'argon.

Corrigé de l'exercice T3.2 : Détentes et compressions d'un gaz [**]

1. $\Delta U_{GP} = C_{vm} \times (-7) = -189\,\mathrm{J}$; $\Delta U_{GVdW} = \Delta U_{GP} + 0 = -189\,\mathrm{J}$.
2. Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. Donc $\Delta U_{GP} = 0\,\mathrm{J}$ et $\Delta U_{GVdW} = \Delta U_{GP} - \frac{a}{4V_0} + \frac{a}{V_0} = 8{,}6\,\mathrm{J}$ (pensez à convertir les bar en Pa et les L en $\mathrm{m^3}$).
3. Pour le gaz parfait, $\Delta U_{GP} = 27 \times 20 = 540\,\mathrm{J}$; donc $\Delta U_{GVdW} = \Delta U_{GP} - \frac{a}{0{,}7V_0} + \frac{a}{V_0} = 535\,\mathrm{J}$
4. Pour le gaz parfait, puisque U ne varie pas, T ne varie pas non plus : $\Delta T_{GP} = 0\,^\circ\mathrm{C}$.
   Pour le gaz de VdW, notons ΔT la variation de température. Alors $\Delta U = 27 \times \Delta T - \frac{a}{2V_0} + \frac{a}{V_0} = 27 \times \Delta T + 5{,}76\,\mathrm{J}$ et comme $\Delta U = 0$, on en déduit que $\Delta T_{GVdW} = -0{,}21\,^\circ\mathrm{C}$

Corrigé de l'exercice T3.3 : Tables thermodynamiques de la vapeur d'eau [**]

1. U dépend de p donc le gaz n'est pas parfait.
   $U(100) - U(1) = a\left(\frac{1}{V(1)} - \frac{1}{V(100)}\right)$; on en tire $a = 0{,}923\,\mathrm{J\cdot m^{-3}\cdot mol^{-2}}$.
   Donc $b = V - \dfrac{RT}{100.10^5 + \frac{a}{V(100)^2}} = 8{,}20 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}}$.
   À 40 bar, on trouve alors $U = 55{,}75\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$, et $T = 779\,\mathrm{K}$, soit une erreur de 0,04 % sur U et de 0,8 % sur T : ce modèle convient si on demande une précision inférieure au pourcent.
2. Il faut bien lire l'énoncé pour dénicher tout ce qu'on peut savoir sur l'état final. Ici, la détente est à volume constant, donc le volume ne change pas : $V = 5{,}90 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3}$.
   On en déduit donc que θ_F sera compris entre 320 °C et 340 °C. Pour être plus précis, on peut estimer que 5,90 se trouve à environ $\frac{5{,}90-5{,}77}{6{,}18-5{,}77} = 32\,\%$ du segment $[5{,}77; 6{,}18]$, donc la température sera à 32 % du segment $[320; 340]$ soit $\theta_F = 320 + 0{,}32 \times (340 - 320) = 326\,^\circ\mathrm{C}$. De même l'énergie interne sera à 32 % du segment $[48{,}38; 49{,}32]$ donc $U_F = 48{,}68\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ donc $\Delta U = 48{,}68 - 54{,}78 = -6{,}10\,\mathrm{kJ}$.

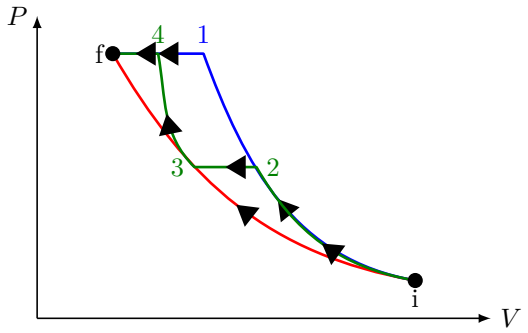
Corrigé de l'exercice T3.4 : Chauffage d'un gaz par une résistance [**]

1. À $T_i = T_0 = 293\,\mathrm{K}$; $P_i = P_0 = 1\,\mathrm{bar}$; $V_i = \frac{8{,}3\times 293}{1\times 10^5} = 0{,}0244\,\mathrm{m^3} = 24{,}4\,\mathrm{L}$.
2. Prenons comme système le gaz et la résistance et les parois.
   — Équations d'équilibres
   L'équilibre mécanique est atteint grâce au piston. Donc $P_f = P_0 = 1\,\mathrm{bar}$.
   — Premier principe
   La variation d'énthalpie du gaz vaut $C_{p,g}(T_f - T_i)$ avec $C_{p,g} = 29{,}1\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ pour une mole de GP diatomique ; avec la résistance et les parois, la variation d'énthalpie du système vaut $\Delta H = (C_{p,r} + C_{p,p} + C_{p,g})(T_f - T_i)$. Or le travail utile est uniquement le travail électrique reçu, qui vaut $W_e = rI^2t$; il n'y a pas de transfert thermique (isolation). Comme la transformation est ici isobare, on applique le premier principe isobare au système durant la transformation, et on trouve $(C_{p,r} + C_{p,p} + C_{p,g})(T_f - T_i) = rI^2t$
   On trouve donc tout de suite $T_f = T_i + \dfrac{rI^2t}{C_{p,r} + C_{p,p} + C_{p,g}} = 320\,\mathrm{K} = 47\,^\circ\mathrm{C}$.
   — Équations d'état
   L'équation du GP donne $\frac{P_iV_i}{T_i} = R = \frac{P_fV_f}{T_f}$ or $P_i = P_f = P_0$, donc $\frac{V_i}{T_i} = \frac{V_f}{T_f}$ d'où $V_f = 26{,}7\,\mathrm{L}$.

3. Je passe plus vite. $T'_f = T_0 = 20\,°\text{C}$, $P'_f = P_0 = 1\,\text{bar}$, donc $V'_f = 24{,}4\,\text{L}$: on est revenu à l'état initial.
   On a alors $Q = \Delta H = (C_{p,r} + C_{p,p} + C_{p,g})(T_i - T_f) = -960\,\text{J}$.
   En fait, c'est assez logique : le système est revenu à son point de départ, donc $\Delta H = 0$. La chaleur perdue est alors égale à l'énergie électrique reçue.

Corrigé de l'exercice T3.5 : Compression d'un gaz en plusieurs étapes [**]

1. Par la loi du gaz parfait : $n = \frac{P_i V_i}{RT_0} = 0{,}40\,\text{mol}$ et $V_f = \frac{nRT_0}{P_f} = 0{,}5\,\text{L}$.
2. Vu en cours : $W_0 = -nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i} = 2996\,\text{J}$. Mais une telle transformation est infiniment lente.
3. Par les lois de Laplace : $P_i V_i^\gamma = P_f V_1^\gamma$ donc $V_1 = V_i \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{1/\gamma} = 1{,}2\,\text{L}$. De même $P_i^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_f^{1-\gamma} T_1^\gamma$ donc $T_1 = T_0 \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 701\,\text{K}$.
   On calcule alors $W^{i\to 1} = nC_{vm}(T_1 - T_0) = 3384\,\text{J}$ et $W^{1\to f} = -P_f(V_f - V_1) = 354\,\text{J}$ d'où $W_1 = 4737\,\text{J}$: cette compression est rapide mais demande plus de travail.
4. On reprend les mêmes calculs :
   — état 2 : $P_2 = 10\,\text{bar}$, $V_2 = 1{,}9\,\text{L}$, $T_2 = 575\,\text{K}$
   — état 3 : $P_3 = 10\,\text{bar}$, $V_3 = 1\,\text{L}$, $T_3 = T_0 = 298\,\text{K}$
   — état 4 : $P_4 = 20\,\text{bar}$, $V_4 = 0{,}6\,\text{L}$, $T_4 = 363\,\text{K}$
   et $W_2 = nC_{vm}(T_2 - T_0) - P_2(V_3 - V_2) + nC_{vm}(T_4 - T_0) - P_f(V_f - V_4) = 4024\,\text{J}$
   Donc en deux étapes, c'est un peu plus long qu'en une seule étape, mais ça coûte moins de travail.
5. En rouge l'isotherme, en bleu la compression en 2 étapes, en vert la compression en 4 étapes.



Corrigé de l'exercice T3.6 : Gonflage d'un ballon [**]

1. Loi de Laplace : $T = 311\,\text{K} = 38\,°\text{C}$
2. Loi du GP : $n = \frac{1{,}2\times 10^5 \times \frac{4}{3}\pi 0{,}09^3}{8{,}314\times 311} = 0{,}14\,\text{mol}$
3. À la fin on a $T_f = 22\,°\text{C}$ et $P_f = 1{,}2\,\text{bar}$ (à cause du ballon). Donc on calcule le volume puis $R_f = 8{,}8\,\text{cm}$. Or le système {ballon+gaz} subit une transformation isobare, donc en appliquant le premier principe isobare entre le début et la fin, $\Delta E_p + \Delta H = W' + Q = Q$ donc $\frac{4}{3}\pi(R_f^3 - R^3)A + nC_{pm}(T_f - T) = Q$ avec $C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ (à savoir retrouver) ce qui donne $Q = -65\,\text{J}$

Corrigé de l'exercice T3.7 : Compression brutale d'un gaz [**]

1. On a à la fin l'équilibre mécanique donc $P_f = P_0 + \frac{mg}{S}$.
   Par la loi du GP au début et à la fin : $P_0 V_0 = nRT_0$ et $P_f V_f = nRT_f$ donc $\frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$.
2. On va appliquer le premier principe au système formé du gaz, entre le début et la fin de la compression : $\Delta E_{macro} + \Delta U = W + Q = W$ car $Q = 0$ (transformation adiabatique).
   $\Delta E_{macro} = 0$ ici entre le début et la fin.
   Pour un GP diatomique : $\Delta U = C_v \Delta T = \frac{5}{2} nR(T_f - T_0)$.
   Pour le travail, on remarque encore que la pression extérieure est constante et vaut $P_0 + \frac{mg}{S} = P_f$. Donc $W = -\int \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \mathrm{d}V = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)(V_f - V_0) = -P_f(V_f - V_0)$.
   On obtient donc l'équation $\frac{5}{2} nR(T_f - T_0) = -P_f(V_f - V_0)$. On peut éliminer n par la loi du GP : $\frac{5}{2}(P_f V_f - P_0 V_0) = -P_f(V_f - V_0)$

3. On a donc les équations $\begin{cases} \frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \\ \frac{5}{2}(P_f V_f - P_0 V_0) = -P_f(V_f - V_0) \end{cases}$

   De la seconde on peut tirer V_f : $\frac{7}{2} P_f V_f = (\frac{5}{2} P_0 + P_f) V_0$ soit $V_f = V_0 \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\frac{P_0}{P_f}\right) = V_0 \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\frac{P_0}{P_0 + \frac{mG}{S}}\right)$

   On trouve alors $T_f = T_0 \frac{P_f V_f}{P_0 V_0} = T_0 \left(1 + \frac{2}{7}\frac{mg}{SP_0}\right)$

4. AN : $P_f = 1{,}2\,\text{bar}$, $T_f = 317\,\text{K}$, $V_f = 0{,}88\,\text{L}$

5. Dans l'état final noté f', on a maintenant $P_{f'} = P_f = P_0 + \frac{mg}{S} = 1{,}2\,\text{bar}$, $T_{f'} = T_0 = 300\,\text{K}$ et donc par la loi du GP : $V_{f'} = \frac{P_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} V_0 = 0{,}83\,\text{L}$.

   On peut appliquer le premier principe au gaz entre les états f et f' (ou entre 0 et f', ça marche aussi) : $\Delta U = W + Q$ soit (par le même principe de calculs) $\frac{5}{2} nR(T_0 - T_f) = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)(V_{f'} - V_f) + Q$ d'où on tire (avec $P_{f'} V_{f'} = nRT_0$) $Q = P_{f'}\left(V_{f'} - V_f + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{T_f}{T_0}\right) V_{f'}\right) = -20\,\text{J}$.

Remarque : cet exercice est un grand classique de thermodynamique ; malheureusement, c'est un très mauvais exercice. Comment le système peut-il atteindre son état d'équilibre ? Il faut des forces de frottements pour arrêter le piston. Or on ne les a pas pris en compte. Le résultat final n'est pas tant que ça faux, mais la modélisation du problème est en réalité beaucoup trop simpliste.

Corrigé de l'exercice T3.8 : Travail des forces de pression [**]

(a) $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 30{,}6\,\text{mol}$ donc $C_v = 636\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

État	T(K)	P(bar)	V(m^3)
A	590	1	1,5
B	295	1	0,75
C	590	2	0,75

$W^{AB} = -P_A(V_B - V_A) = 75\,\text{kJ}$
$W^{BC} = 0\,\text{J}$
$W^{CD} = -nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} = -104\,\text{kJ}$

$W = W^{AB} + W^{BC} + W^{CD} = -29\,\text{kJ}$ (moteur)

(b) $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 0{,}10\,\text{mol}$ donc $C_v = 2{,}2\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

État	T(K)	P(bar)	V(L)
A	290	1,0	2,5
B	600	2,06	2,5
C	600	5,0	1,03
D	290	5,0	0,5

$W^{AB} = 0\,\text{J}$
$W^{BC} = 459\,\text{J}$
$W^{CD} = 267\,\text{J}$
$W^{DA} = -402\,\text{J}$

$W = W^{AB} + W^{BC} + W^{CD} + W^{DA} = 324\,\text{J}$ (récepteur)

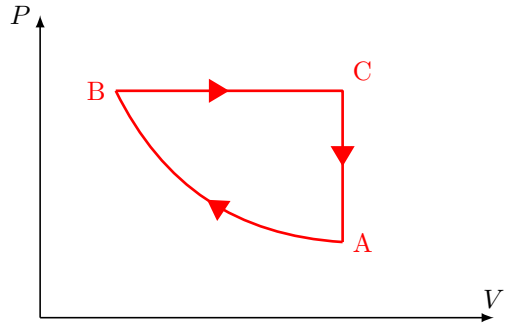
Rappel : les calculs des transformations classiques des GP sont à connaître par cœur.

Corrigé de l'exercice T3.9 : Étude d'un cycle moteur [**]

1.

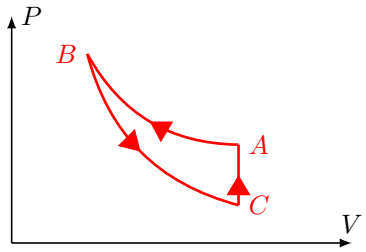
État	P(bar)	T(K)	V(L)
A	1	300	1,2
B	3	300	0,4
C	3	900	1,2

Par la loi des gaz parfaits : $n = 0{,}048\,\text{mol}$ et $C_v = \frac{5}{2} nR = 1{,}0\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

2. 

3. $W^{AB} = nRT_f \ln \frac{P_B}{P_A} = 132\,\text{J}$; $\Delta U^{AB} = 0$; $Q^{AB} = -W^{AB} = -132\,\text{J}$. $W^{BC} = -P_B\,(V_C - V_B) = -240\,\text{J}$; $\Delta U^{BC} = C_v\,(T_C - T_B) = 600\,\text{J}$; $Q^{BC} = \Delta U^{BC} - W^{BC} = 840\,\text{J}$. $W^{CA} = 0$; $\Delta U^{CA} = C_v\,(T_A - T_C) = -600\,\text{J}$; $Q^{CA} = \Delta U^{CA} - W^{CA} = -600\,\text{J}$.
   Sur un cycle, le moteur fournit $W = 132 - 240 + 0 = -108\,\text{J}$
4. D'où une puissance $\mathcal{P} = 6 \times 108 = 648\,\text{W}$.

Corrigé de l'exercice T3.10 : Machine frigorifique [**]

1. 

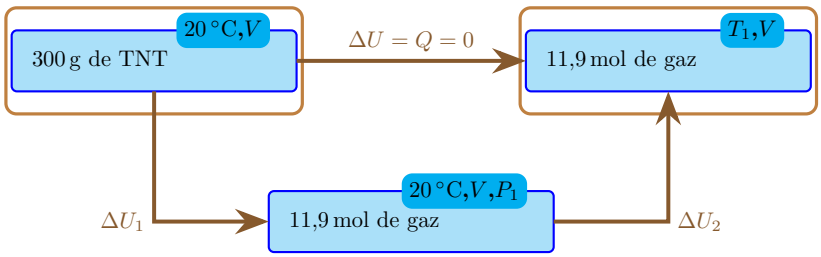
2. On calcule $n = 1{,}21\,\text{mol}$.
   Une fois qu'on a la ligne B, on calcule les caractéristiques de l'état C avec les lois de Laplace : $P_C = P_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma}$ et $T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1}$.

	T(K)	P(bar)	V(L)
A	298	1	30
B	298	5	6
C	157	0,52	30

3. AB est isotherme donc $W^{AB} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 4830\,\text{J}$
   BC est AR donc $W^{BC} = \Delta U^{BC} = \frac{5}{2} nR\,(T_C - T_B) = -3550\,\text{J}$
   CA est isochore donc $W^{CA} = 0$ et $Q^{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{5}{2} nR\,(T_A - T_C) = 3550\,\text{J}$
   Le travail total est $W = 1280\,\text{J}$.
   On a donc une machine qui consomme 1280 J pour extraire 3550 J de la pièce à refroidir ; on dira dans quelques chapitres qu'elle a pour efficacité $\frac{3550}{1280} = 277\,\%$

Corrigé de l'exercice T3.11 : Explosion d'un bloc de TNT [***]

1. $V = \frac{0{,}3}{1650} = 1{,}8 \times 10^{-4}\,\text{m}^3$
2. $n = \frac{300}{227{,}1} = 1{,}32\,\text{mol}$ donc $n_{gaz} = 11{,}9\,\text{mol}$ et $C_v = 297\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
3. Le premier principe appliqué au TNT pendant la réaction chimique indique que $\Delta U = W + Q = 0 + 0 = 0$
4. $\Delta U = -0{,}3 \times 4{,}18 \times 10^6 + 297 \times (T_1 - 20) = 0$ donc $T_1 = 4240\,^\circ\text{C}$; par la loi du GP on trouve alors $P_1 = \frac{11{,}9 \times 8{,}314 \times 4510}{1{,}8 \times 10^{-4}} = 24\,800\,\text{bar}$.



5. $\gamma = \frac{C_{vm}+R}{C_{vm}} = 1{,}33$
   Par la loi $PV^\gamma = \text{cst}$ on trouve $V_2 = 0{,}36\,\text{m}^3$ soit 2000 fois le volume initial.
   Par la loi $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cst}$ on trouve $T_2 = 361\,\text{K} = 88\,^\circ\text{C}$

Corrigé de l'exercice T3.12 : Oscillations d'un piston [**]

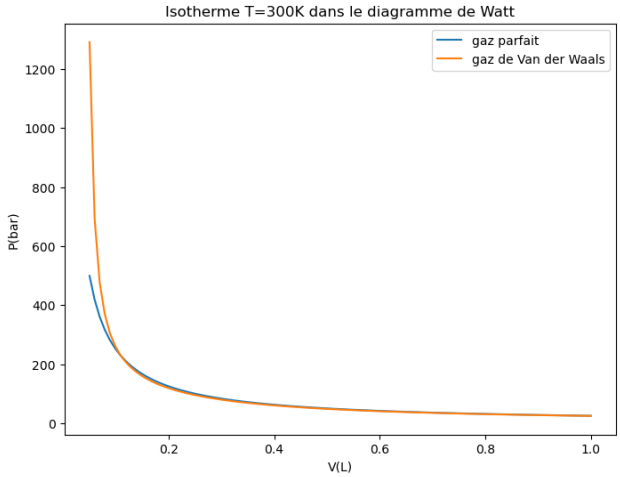
1. $V_g(t) = S(\ell + x(t))$ et $V_d(t) = S(\ell - x(t))$.
2. Si la température est constante, alors d'après la loi du GP, $P.V = \text{cst}$. Donc par exemple $P_g(t).V_g(t) = P_0V_0$ soit $S(\ell + x(t)).P_g(t) = S.\ell.P_0$ d'où $P_g(t) = P_0\frac{\ell}{\ell+x(t)}$. De même $P_d(t) = P_0\frac{\ell}{\ell-x(t)}$.
3. Le piston est soumis aux forces de pression $P_g(t)S\vec{e}_x$ et $-P_d(t)S\vec{e}_x$, et à l'autres forces orthogonales à $\vec{e}_x$ (le poids, la réaction). Donc le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne $m\ddot{x}(t) = (P_g(t) - P_d(t))S = P_0\left(\frac{\ell}{\ell+x(t)} - \frac{\ell}{\ell-x(t)}\right)S$
4. On peut écrire $m\ddot{x}(t) = P_0\left(\frac{1}{1+\frac{x(t)}{\ell}} - \frac{1}{1-\frac{x(t)}{\ell}}\right)S = P_0\left(1 - \frac{x(t)}{\ell} - 1 - \frac{x(t)}{\ell}\right)S = -2P_0\frac{x(t)}{\ell}S$ soit $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2P_0S}{m\ell}} = 44\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit une période de 0,15 s
5. On a maintenant $P_g(t) = P_0\frac{\ell^\gamma}{(\ell+x(t))^\gamma} = P_0\frac{1}{\left(1+\frac{x(t)}{\ell}\right)^\gamma} = P_0\left(1 - \gamma\frac{x(t)}{\ell}\right)$; de même $P_d(t) = P_0\left(1 + \gamma\frac{x(t)}{\ell}\right)$. On trouve alors à la fin $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma P_0S}{m\ell}} = 52\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit une période de 0,12 s

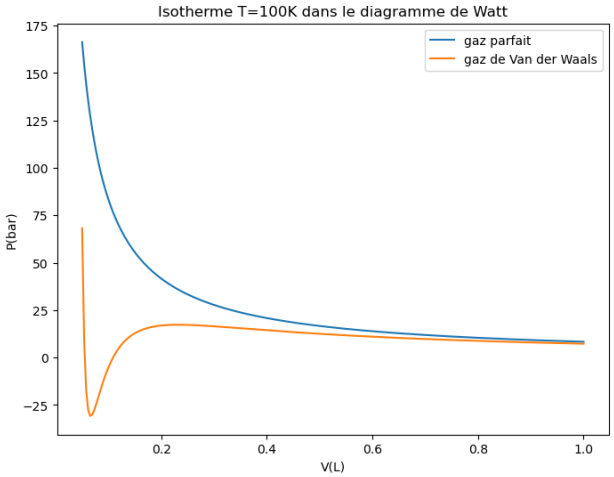
Corrigé de l'exercice T3.13 : Fuite de gaz dans la station spatiale [**]

1. $v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 501\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
2. Cf. la démonstration de la pression cinétique dans le cours. Les particules qui vont passer à travers le trou sont celles contenues dans un cylindre de base S et de hauteur $v^*\text{d}t$, il y en a donc $\delta N_{trou} = \frac{N}{6}\frac{v^*\text{d}tS}{V}$
3. À $t + \text{d}t$ il y a les particules de l'instant t moins celles qui sont sorties : $N(t + \text{d}t) = N(t) - \delta N_{trou}$ donc $N(t+\text{d}t) - N(t) = -\frac{v^*SN}{6V}\text{d}t$. On divise par d$t$ et on fait apparaître la dérivée : $\frac{\text{d}N(t)}{\text{d}t} = -\frac{v^*SN}{6V}$ soit $\tau\frac{\text{d}N(t)}{\text{d}t} + N = 0$ avec $\tau = \frac{6V}{v^*S} = 19\,900\,\text{s} = 5\,\text{h}30\,\text{min}$
4. $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ or $P = \frac{Nk_BT}{V}$ donc $P(t) = P(0)e^{-t/\tau}$. Il faudra $t = -\tau\ln 0{,}8 = 1\,\text{h}14\,\text{min}$ pour que la pression descende à 0,8 bar.
   Il n'y a donc pas beaucoup de temps à perdre pour les astronautes, pour réparer le trou ou évacuer le module.

Réponses aux TDs numériques

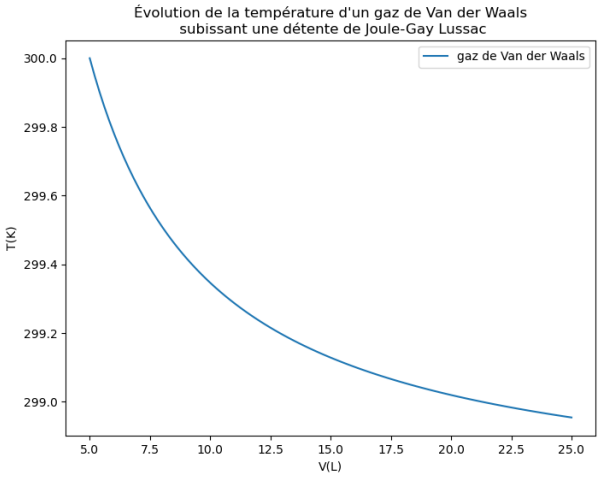
Réponses au TD d'info : Modèle du gaz de Van der Waals





Le modèle de Van der Waals diffère sensiblement du modèle du gaz parfait aux fortes pressions et basses températures, ce qui correspond à des cas où la densité de particules devient importante. Le creux qui apparaît dans l'isotherme à $T = 100\,\mathrm{K}$ traduit l'apparition de liquide, qu'on verra au chapitre T4.

Le calcul du volume à pression et température fixées donne des valeurs très proches à 300 K sous 1 bar ($V_{\mathrm{GP}} = 24{,}94\,\mathrm{L}$ et $V_{\mathrm{VdW}} = 24{,}92\,\mathrm{L}$) mais plus différentes sous 100 bar ($V_{\mathrm{GP}} = 0{,}249\,\mathrm{L}$ et $V_{\mathrm{VdW}} = 0{,}237\,\mathrm{L}$).



On voit bien que, lorsque le gaz se détend à énergie constante, le modèle de Van der Waals prévoit un refroidissement. Ici il est modéré (environ 1 °C) car on par d'une pression modérée.

Réponses au TD d'info : Calcul du travail des forces de pression

Dans le cas d'une détente isotherme à 150 °C entre les volumes 2,5 L et 35 L, on trouve :

modèle	GP, théorie	GP, rectangles	air (VdW), rectangles	vapeur d'eau (VdW), rectangles
W (J)	-9284	-9284	-9281	-9118

Pour la détente AR, la méthode proposée est en fait très proche d'une méthode d'Euler :

modèle	GP, théorie	GP, rectangles	air (VdW), rectangles
T_f (°C)	34,6	34,6	34,4
W (J)	-9672	-9672	-9673

Enfin, pour une détente de 200 bar à 1 bar :

modèle	GP, rectangles	air(VdW), rectangle
V_f/V_i	42,5	41,1
T_f(°C)	-207,7	-201,3
W(kJ)	-163,2	-158,6

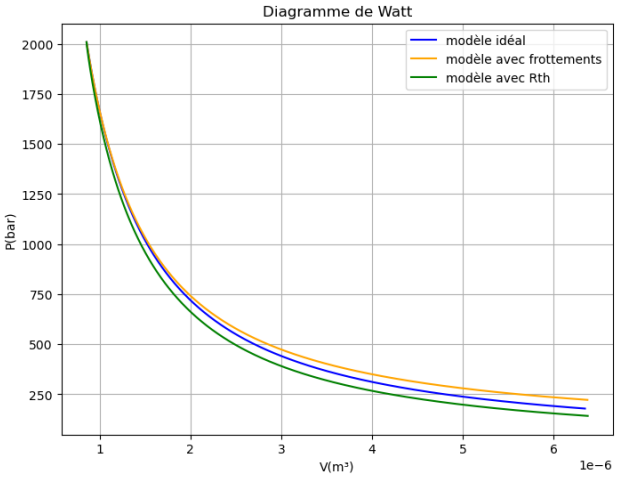
En réalité, pour obtenir de l'air liquide, on procède plutôt à une détente isenthalpique qu'on verra plus tard.

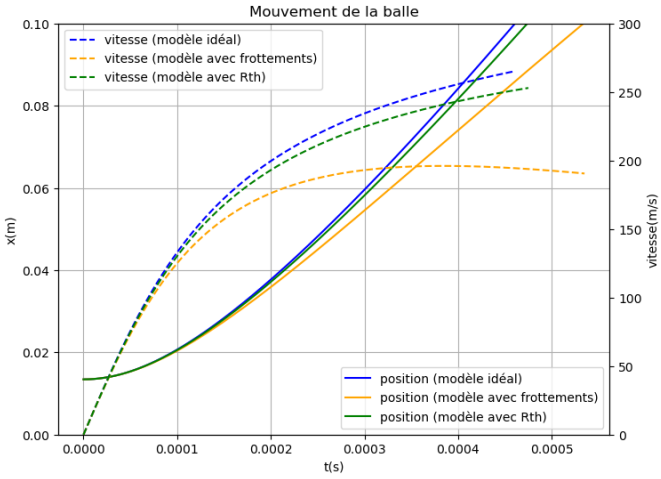
Réponses au TD d'info : Tir d'une balle

On a à résoudre le système général d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{V} & = S\frac{(P-P_0)S+F_{\text{autres}}}{m_b} \\ C_v.\dot{T} & = -P_0.\dot{V} - \frac{m_b.\dot{V}.\ddot{V}}{S^2} + \delta Q \end{cases}$$

On a donc 3 inconnues à passer dans `odeint` : $[V, \dot{V}, T]$



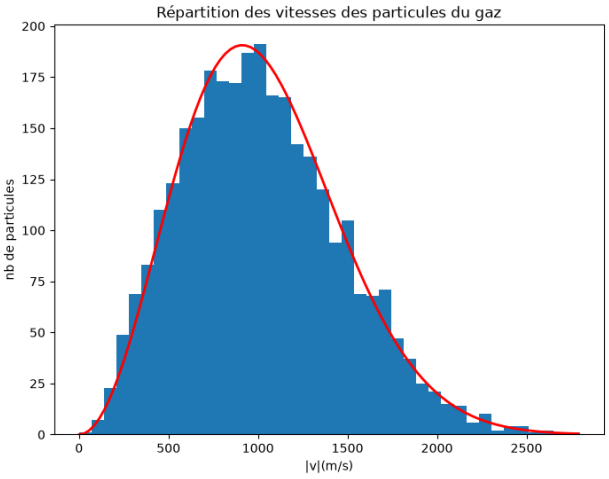


Le modèle idéal, sans frottements ni transferts thermiques, donne une courbe dans le diagramme de Watt qui se superpose exactement à celle donnée par la loi de Laplace ; la balle met 0,46 ms à sortir avec une vitesse de $260\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ environ.

Les frottements ralentissent la balle ; les transferts thermiques diminuent la propulsion de la balle ; dans les deux cas, on obtient une vitesse moindre à la sortie.

Réponses au TD d'info : Simulation de la distribution de vitesses d'un gaz parfait

On obtient une répartition de vitesses qu'on peut comparer à la théorie de Maxwell donnant la probabilité d'avoir une vitesse v sous la forme $p(v) = 4\pi N A^3 v^2 e^{-b.v^2}$ avec $A = \frac{\sqrt{3}}{v^*\sqrt{2\pi}}$ et $b = \frac{3}{2v^{*2}}$ (courbe rouge) :



Électricité

E5 Chapitre Régime Sinusoïdal Forcé

Programme p.601

Conseils p.602

Cours p.586

- E5.A. Comportement d'un système soumis à un signal sinusoïdal
- E5.B. Cas des circuits électriques en RSF
- E5.C. Aspect énergétique

QCMs p.603

Exercices p.609

TDs numériques p.616

E5. Régime Sinusoïdal Forcé

Cours

Nous avons établi, dans le chapitres d'électricité ou de mécanique, des équations différentielles décrivant la dynamique des systèmes. Ces équations avaient un second membre constant, et leur solution particulière — ou *régime permanent* — était constante, correspondant soit au régime continu en électricité, soit à une position d'équilibre en mécanique.

Très souvent, les circuits électriques sont soumis à des tensions variables ; les systèmes mécaniques à des vibrations ;.... Nous allons donc dans ce chapitre étudier le régime variable le plus important en pratique : le régime sinusoïdal.

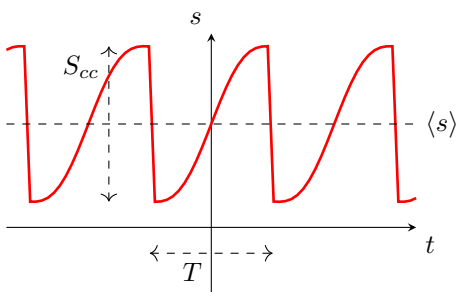
E5.A. Comportement d'un système soumis à un signal sinusoïdal

A.1. Description d'un signal sinusoïdal

Définition : Caractéristiques d'un signal périodique

Soit $s(t)$ un signal périodique.

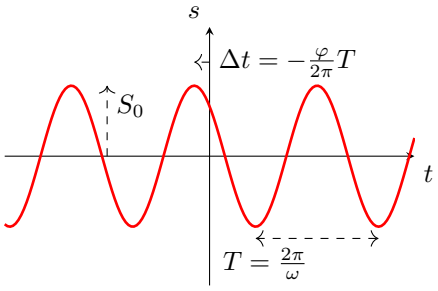
- La *période* T est la durée au bout duquel il se reproduit à l'identique : $s(t+T) = s(t)$. L'inverse de la période est la *fréquence* $f = \frac{1}{T}$, en Hertz (Hz).
- La différence entre la valeur maximale et la valeur minimale s'appelle l'*amplitude crête à crête* (notée ici S_{cc}) ; la moitié de cette valeur est l'*amplitude* du signal.
- La *valeur moyenne* $\langle s(t) \rangle$ du signal est aussi appelée *offset* (décalage en anglais).
- La *valeur efficace* est définie comme $S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$.



Propriété : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal de la forme la plus générale s'écrit $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec :

- S_0 son *amplitude* (donc son amplitude crête à crête vaut $2S_0$)
- ω sa *pulsation*, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, qui est reliée à la fréquence par la relation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- φ sa *phase à l'origine*



Démonstration

Rappel : d'où vient la relation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$? Considérons une fonction $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Le cosinus est 2π-périodique, c'est-à-dire que $\cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos(\omega t + \varphi)$. Or $\cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right)$, ce qui montre que $s\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = s(t)$, donc que s a pour période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Que représente ω ? rien d'autre que $2\pi f$. Il faut le voir comme un raccourci d'écriture, c'est la fréquence multipliée par 2π.

Remarque : Un signal sinusoïdal peut être écrit avec un sinus ou un cosinus. On prend souvent un cosinus, car il a la bonne idée d'être pair, donc on peut se contenter d'étudier uniquement les fréquences (ou pulsations) positives.

On comprend donc la signification de S_0 et celle de ω, mais quel rôle joue φ ? Pour le comprendre, remarquons qu'on peut écrire $s(t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$; en posant $t' = t + \frac{\varphi}{\omega}$, ce qui correspond à changer l'origine des temps en

$t = -\frac{\varphi}{\omega}$, on peut écrire $s(t') = S_0 \cos(\omega t')$: le terme φ a donc eu pour rôle de décaler l'origine des temps (le maximum de la courbe, puisque c'est un cosinus) de $-\frac{\varphi}{\omega} = -T\frac{\varphi}{2\pi}$; on dit que $T\frac{\varphi}{2\pi}$ représente *l'avance à l'origine* de la courbe.

Mais tout ceci n'a pas vraiment de sens physique, puisqu'on choisit l'origine des temps quand on veut ; on peut donc se débrouiller pour que $\varphi = 0$. Oui, sauf dans le cas particulier (et qu'on va voir par la suite) où on étudie 2 signaux sinusoïdaux de même pulsation ; dans ce cas, la phase de chacun peut être changée en changeant l'origine des temps, mais la différence de phase entre les deux signaux ne peut pas être changée.

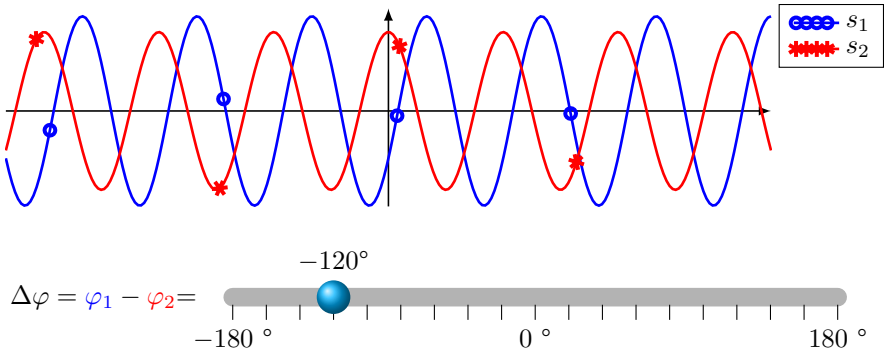
Propriété : Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même pulsation

Soient deux signaux $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ **de même pulsation**. Le déphasage de s_1 par rapport à s_2 est $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$; il correspond à un décalage temporel $\Delta t = T\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$. Il est positif si et seulement si la courbe 1 est en avance par rapport à la courbe 2.

Remarque : Si on travaille en degrés, $\Delta t = T\frac{\varphi}{360°}$. On retrouve facilement cette relation par proportionnalité, en retenant qu'un déphasage de $360° = 2\pi$ est équivalent à un décalage temporel d'une période.

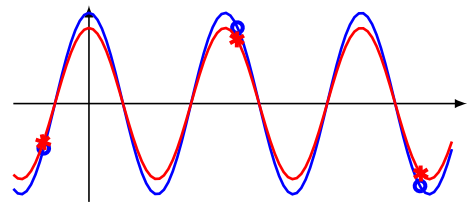
T	$360°$
Δt	φ

FIGURE E5.1 : Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence.

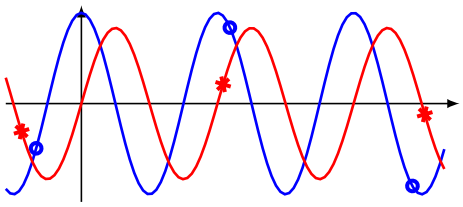


On peut d'ailleurs remarquer que les déphasages de 0°, ±90° et ±180° correspondent à des décalages particuliers, illustrés sur la figure E5.2.

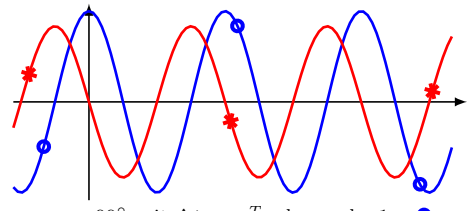
FIGURE E5.2 : Déphasage particuliers.



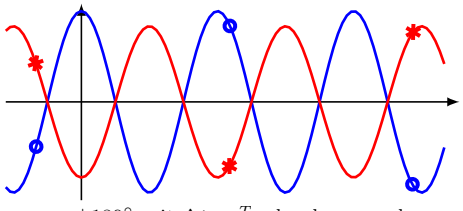
$\varphi_1 - \varphi_2 = 0°$ soit $\Delta t = 0$: les deux courbes sont en **phase**.



$\varphi_1 - \varphi_2 = +90°$ soit $\Delta t = +\frac{T}{4}$: la courbe 1 est en **quadrature avancée**.



$\varphi_1 - \varphi_2 = -90°$ soit $\Delta t = -\frac{T}{4}$: la courbe 1 est en **quadrature retardée**.



$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 180°$ soit $\Delta t = \frac{T}{2}$: les deux courbes sont en **opposition de phase**.

A.2. Image complexe d'un signal sinusoïdal

Nous allons donc maintenant nous intéresser à un dipôle soumis à une tension sinusoïdale ; par exemple un condensateur de capacité C soumis à $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. D'après la loi $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ on peut calculer $i(t) = -C.U_0.\sin(\omega t)$:

ce n'est plus un cosinus, mais à l'aide de la relation de trigonométrie $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$ on peut écrire $i(t) = C.U_0.\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$: l'intensité donc pour amplitude $C.U_0$ et est déphasée de $-90°$ par rapport à la tension.

Pour simplifier la manipulation des fonctions sinusoïdales et de leurs dérivées, Arthur Kennely a introduit en 1893 une astuce : la notation complexe.

! La notation complexe est un OUTIL. C'est très pratique, ça permet de simplifier les calculs, mais ça n'a aucune existence physique : il n'y a pas de courant ou de tension complexe dans un circuit !

Définition : Image complexe d'un signal sinusoïdal

À un signal sinusoïdal $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$, on associe son image complexe $\underline{s}(t) = Se^{j(\omega t+\varphi)}$ où j représente le complexe tel que $j^2 = -1$. [a]

Réciproquement, si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$, on peut retrouver le signal réel en prenant la partie réelle : $s(t) = \mathfrak{Re}\left[\underline{s}(t)\right]$

a. Noté i en maths, mais en électricité i est déjà utilisé pour le courant.

Remarque : En physique, le soulignement d'un symbole indique qu'il s'agit d'un complexe.

Remarque : Certains cours introduisent plutôt l'*amplitude complexe* $\underline{S} = Se^{j\varphi}$; c'est un autre outil, qui fonctionne pareil ; l'important est de ne pas le mélanger, on utilise l'un ou l'autre.

Propriété : Passage de l'image complexe au signal réel

Si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$ d'un signal, alors le signal réel vaut $s(t) = |\underline{s}(0)|\cos(\omega t + \arg(\underline{s}(0))$

Démonstration

Notons $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ alors par définition $\underline{s}(t) = S.e^{j(\omega t+\varphi)}$ donc $\underline{s}(0) = S.e^{j\varphi}$: ce nombre complexe a pour module S et pour argument φ.

Un peu de maths : Module et argument d'un nombre complexe

Pour calculer le module et l'argument d'un nombre complexe, il y a deux méthodes à connaître : soit à l'aide de la calculatrice, soit par les formules mathématiques.

Nous aurons essentiellement à calculer des modules et argument de quotients. Pour les modules :

- le module d'un quotient est le quotient des modules
- le module de $x + j.y$ vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$
- le module de $e^{j\theta}$ vaut 1

Pour les arguments :

- l'argument d'un quotient est la différence des arguments
- l'argument de $x + j.y$ vaut $\arctan\frac{y}{x}$ si $x > 0$ et $\arctan\frac{y}{x} \pm \pi$ si $x < 0$
- l'argument de $e^{j\theta}$ vaut θ

Dans le cas particulier où on travaille avec des valeurs numériques (et non pas avec des symboles), on peut utiliser la calculatrice. Votre calculatrice est capable de travailler sur des nombres complexes, et de calculer leurs modules et arguments. Regardez la notice.

Exemple : Passage d'image complexe à signal réel

Une tension $u(t)$ a pour image complexe $\underline{u}(t) = (3 + 2j).e^{300jt}$ en V. Exprimez $u(t)$.

$\underline{u}(0) = 3+2j$ a pour module $\sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6\,\text{V}$ et pour argument $\arctan\frac{2}{3} = 0{,}59\,\text{rad}$. Donc $u(t) = 3{,}6\cos(300t + 0{,}59)$ car ici $\omega = 300\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Remarque : Quand un énoncé demande de calculer un argument, on peut le donner en radians ou en degrés ; par contre, dans l'expression mathématique, à l'intérieur du cosinus, l'argument doit être en radians.

Propriété : Image complexe de la dérivée

L'image complexe de $\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ est $j\omega\underline{s}(t)$

Démonstration

Notons $s(t) = S.\cos(\omega t + \varphi)$ d'image complexe $\underline{s}(t) = S.e^{j(\omega t+\varphi)}$; alors $\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega.S.e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{s}(t)$. En prenant la partie réelle de chaque côté, on trouve que $\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{Re}\left[j\omega\underline{s}(t)\right]$ donc l'image complexe de $\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ est $j\omega\underline{s}(t)$.

Remarque : L'image complexe de la dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}$ est logiquement $(j\omega)^2\,\underline{s}(t)$ ou encore $-\omega^2\underline{s}(t)$.

A.3. Résolution d'équations différentielles à second membre oscillant

Définition : Régime Sinusoïdal Forcé (RSF)

Lorsqu'un système **linéaire** est excité par un signal sinusoïdal de pulsation ω, alors toutes les grandeurs de ce système sont aussi, une fois le régime transitoire atténué, sinusoïdales à la pulsation ω. On appelle cela le Régime Sinusoïdal Forcé.
Ce régime correspond mathématiquement à la solution particulière de l'équation différentielle avec un second membre sinusoïdal.

Méthode : Résolution du RSF d'une ED linéaire à second membre sinusoïdal

Si on possède une ED linéaire à second membre sinusoïdal de la forme $a.x(t)+b.\dot{x}(t)+c.\ddot{x}(t)+\ldots = A.\cos(\omega t)$, on cherche uniquement le régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire la solution particulière de l'équation. Pour cela :

- on « passe l'équation en complexes », c'est-à-dire qu'on transforme l'ED initiale sur $x(t)$ en une équation algébrique sur l'image complexe $\underline{x}(t)$, selon les lois : $x(t) \to \underline{x}(t)$, $\dot{x}(t) \to j\omega\underline{x}(t)$, $\ddot{x}(t) \to -\omega^2\underline{x}(t)$, $\cos(\omega t+\varphi) \to e^{j(\omega t+\varphi)}$
- on isole l'image complexe du terme recherché, ici $\underline{x}(t)$
- on calcule son module et son argument à $t = 0$, et on en déduit $x(t) = |\underline{x}(0)|\cos\left(\omega t + \arg\underline{x}(0)\right)$

Exemple : Solution en RSF d'une ED d'ordre 1

Résoudre le régime sinusoïdal forcé de l'équation $2\dot{x}(t)+13x(t) = -3\cos(8t+0,1)$.

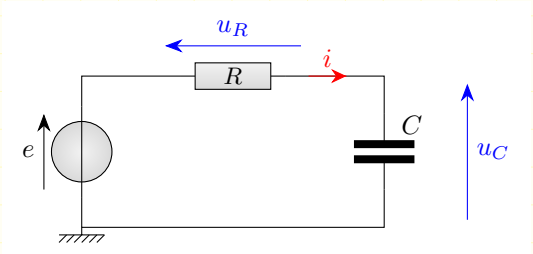
- On passe l'équation en complexes : $2j\omega\underline{x}(t)+13\underline{x}(t) = -3e^{j(8t+0,1)}$ avec $\omega = 8$;
- on en déduit que $\underline{x}(t) = \frac{-3e^{j(8t+0,1)}}{13+16j}$;
- alors $\underline{x}(0) = \frac{-3e^{0,1j}}{13+16j} = 0,146e^{2,35j}$; on en déduit alors que la solution particulière en RSF est $x(t) = 0,146\cos(8t+2,35)$.

Remarque : Pour l'exercice précédent, l'énoncé ne donne pas de conditions initiales ; c'est inutile, car on ne cherche que le régime permanent. Si on voulait la solution complète de l'équation, il faudrait ajouter la solution de l'équation homogène, de la forme $Ke^{-t/\tau}$, et il faudrait une CI pour trouver K.

On peut facilement justifier mathématiquement la méthode vue ci-dessus, si on comprend qu'en fait, en RSF, on cherche **une** solution particulière donc il **suffit** d'en trouver une qui fonctionne. Si on cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = X_0\cos(8t+\varphi_0)$, alors en définissant $\underline{x}(t)$ et en utilisant les relations $x(t) = \mathfrak{Re}\left[\underline{x}(t)\right]$ et $\dot{x}(t) = \mathfrak{Re}\left[j\omega\underline{x}(t)\right]$ on en déduit que pour que $x(t)$ soit solution de l'équation différentielle, il **suffit** que $2\mathfrak{Re}\left[j\omega\underline{x}(t)\right] + 13\mathfrak{Re}\left[\underline{x}(t)\right] = \mathfrak{Re}\left[-3e^{j(8t+0,1)}\right]$ donc que $\mathfrak{Re}\left[2j\omega\underline{x}(t)+13\underline{x}(t)+3e^{j(8t+0,1)}\right] = 0$. Pour cela, il suffit d'annuler ce qui est dans le crochet, ce qui donne l'« équation passée en complexes » à résoudre.

Exemple : Circuit RC alimenté par une tension sinusoïdale

On considère un circuit RC alimenté par une tension $e(t) = E_0\cos(\omega t+\varphi)$.



1. Établissez l'ED vérifiée par $u_C(t)$.
2. Déterminez les caractéristiques de $u_C(t)$ en régime permanent (sinusoïdal forcé).

1. Loi des mailles : $e(t) = u_R(t) + u_C(t) = R.i(t) + u_C(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$ donc $RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi)$
2. On passe l'équation en complexes : $RCj\omega\underline{u_C}(t) + \underline{u_C}(t) = E_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$

   On isole $\underline{u_C}(t) = \frac{E_0 e^{j(\omega t+\varphi)}}{1+jRC\omega}$

   On a donc $\underline{u_C}(t=0) = \frac{E_0}{1+jRC\omega}$ donc $\left|\underline{u_C}(t=0)\right| = \frac{E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ et $\arg \underline{u_C}(t=0) = -\arctan(RC\omega)$.

   On en déduit que $u_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right)$

A.4. Représentation à l'aide du diagramme de Fresnel

Définition : Diagramme de Fresnel

Le diagramme de Fresnel est une représentation des images complexes $\underline{s}(t)$ dans le plan complexe au moyen de vecteurs, à un instant t donné.

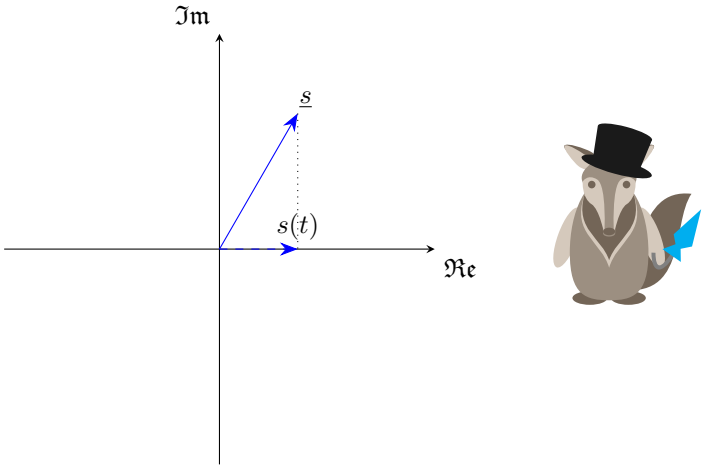
Propriété : Évolution temporelle

Au cours du temps, les vecteurs tournent dans le diagramme de Fresnel avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration

$\underline{s}(t) = S.e^{j(\omega t+\varphi)} = S.e^{j\varphi}.e^{j\omega t} = \underline{s}(0).e^{j\omega t}$. Or multiplier un nombre complexe par $e^{j\theta}$ a pour conséquence de ne pas modifier son module et d'augmenter son argument de θ, autrement dit de faire tourner son vecteur représentatif d'un angle θ. On en déduit que $\underline{s}(t)$ est le vecteur $\underline{s}(0)$ tourné d'un angle ωt.

Figure E5.3 : Évolution d'un vecteur du diagramme de Fresnel au cours du temps.



E5.B. Cas des circuits électriques en RSF

La méthode qu'on a vue s'applique à des systèmes électriques, mécaniques,...mais dans le cas des circuits électriques, on dispose d'un outil particulier et très pratique.

B.1. Impédances complexes

On va commencer par rappeler la notion de dipôle linéaire pour des régimes régimes variables.

Définition : Dipôle linéaire

Un dipôle linéaire est un dipôle pour lequel la tension u à ses bornes et l'intensité i qui le traverse sont reliés par une *équation différentielle linéaire* de la forme

$$a_0.i(t) + a_1.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + a_2.\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \cdots = b_0.u(t) + b_1.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_2.\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \cdots + c$$

Si le dipôle est passif, alors $c = 0$.

Par exemple, la résistance, le condensateur et l'inductance sont des dipôles linéaires passifs.
Si on passe une telle relation (avec $c = 0$) en complexes, on obtient

$$\left(a_0 + a_1 j\omega + a_2(j\omega)^2 + \dots\right) \underline{i}(t) = \left(b_0 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + \dots\right) \underline{u}(t)$$

Définition : Impédance complexe

Pour un dipôle linéaire passif, l'équation différentielle qui relie $u(t)$ et $i(t)$ en convention récepteur se traduit par une relation de proportionnalité entre $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ en RSF. Le coefficient de proportionnalité $\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ s'appelle l'impédance complexe du dipôle. On a ainsi la **loi d'Ohm généralisée** :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}.\underline{i}(t) \qquad \text{(E5.1)}$$

L'inverse de l'impédance $\underline{Z}$ est l'*admittance* $\underline{Y}$: $\underline{i}(t) = \underline{Y}.\underline{u}(t)$.

Remarque : Quand on fait le quotient de $\underline{u}(t)$ par $\underline{i}(t)$, les termes en $e^{j\omega t}$ s'annulent, donc $\underline{Z}$ ne dépend plus du temps. On pourrait donc également écrire $\underline{Z} = \frac{\underline{u}(0)}{\underline{i}(0)}$, ce serait la même chose.

La notion d'impédance (complexe) est donc une généralisation de la résistance déjà vue. Avant de regarder ce que valent les impédances d'un condensateur et d'une inductance, analysons rapidement le sens de $\underline{Z}$:

Propriété : Sens physique de l'impédance

Le module de l'impédance $|\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|}$ se mesure en Ω ; il a le sens d'une résistance, c'est-à-dire qu'il indique si le dipôle laisse passer beaucoup de courant ou pas pour une tension fixée.
L'argument de l'impédance $\arg \underline{Z} = \arg \underline{u} - \arg \underline{i}$ indique le déphasage de la tension par rapport au courant.

Propriété : Impédance d'une résistance

L'impédance d'une résistance R est simplement

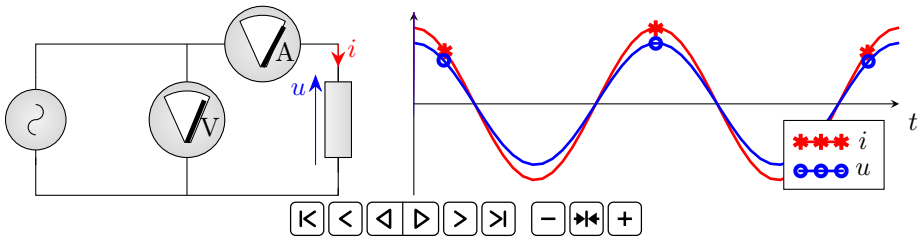
$$\underline{Z} = R \qquad \text{(E5.2)}$$

Démonstration

$u(t) = R.i(t)$ donc en prenant les images complexes : $\underline{u}(t) = R.\underline{i}(t)$ donc $\underline{Z} = R$.

Logique, puisque la notion d'impédance sert à généraliser celle de résistance. Cela implique (figure E5.4) que la tension et le courant sont en phase.

FIGURE E5.4 : Illustration de la tension et du courant pour une résistance en RSF.



Propriété : Impédance d'un condensateur

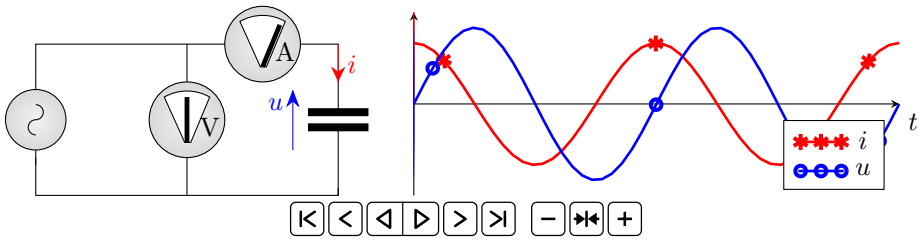
L'impédance d'un condensateur de capacité C vaut

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \tag{E5.3}$$

Démonstration

La loi du condensateur est $i(t) = C.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. En passant en complexes, on obtient $\underline{i}(t) = C.j\omega.\underline{u}(t)$ soit $\underline{u}(t) = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}(t)$. On a donc bien $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$.

FIGURE E5.5 : Illustration de la tension et du courant pour un condensateur en RSF.



$\frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$ a pour argument $-\frac{\pi}{2}$ donc la tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature retardée par rapport au courant (figure E5.5). De plus, le module de l'impédance vaut $\frac{1}{C\omega}$ ce qui implique que :

Propriété : Équivalents BF et HF d'un condensateur

En basse fréquence, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
En haute fréquence, un condensateur est équivalent à un fil.

Démonstration

$|\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$. En BF, $\omega \to 0$ donc $|\underline{Z}| \to \infty$: le condensateur devient équivalent à une très grande résistance, qui ne laisse plus passer le courant, comme un interrupteur ouvert.
En HF au contraire, $|\underline{Z}| \to 0$: le condensateur devient équivalent à une résistance nulle, donc un fil.

On verra l'utilité de ces équivalents BF et HF plus tard, en étudiant les filtre.

Propriété : Impédance d'une bobine

L'impédance d'une bobine d'inductance L vaut

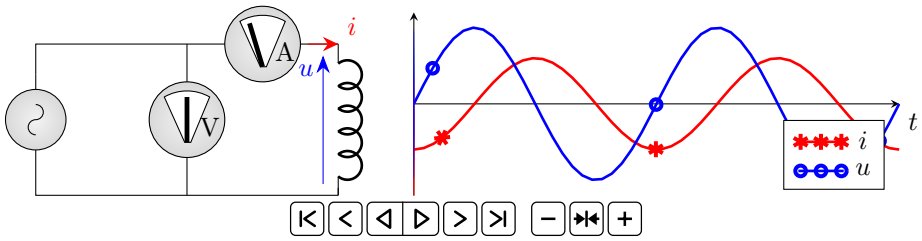
$$\underline{Z} = jL\omega \tag{E5.4}$$

Démonstration

La loi de la bobine est $u(t) = L.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. En passant en complexes, on a $\underline{u}(t) = L.j\omega\underline{i}(t)$ donc $\underline{Z} = jL\omega$.

$jL\omega$ a pour argument $\frac{\pi}{2}$ donc la tension aux bornes d'une bobine est en quadrature avancée par rapport au courant (figure E5.6). De plus, le module de l'impédance vaut $L\omega$ ce qui implique que :

FIGURE E5.6 : Illustration de la tension et du courant pour une bobine en RSF.



Propriété : Équivalents BF et HF d'une bobine

En basse fréquence, une bobine est équivalente à un fil.
En haute fréquence, une bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

Démonstration

$|\underline{Z}| = L\omega$. En BF, $\omega \to 0$ donc $|\underline{Z}| \to 0$; tandis qu'en HF, $|\underline{Z}| \to +\infty$.

B.2. Extensions des lois du régime continu

Commençons par un rappel :

Définition : Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Un circuit électrique en RSF fonctionne en ARQS si la taille du circuit est petite devant la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$ de la lumière à la fréquence de travail.

Propriété : Lois valides en ARQS

Dans le cadre de l'ARQS, la loi des nœuds reste valide avec une bonne approximation, de même que la loi qui dit que le potentiel est constant le long d'un fil. La loi d'additivité des tensions est toujours valide tant qu'il n'y a pas de phénomènes d'induction.

En TP par exemple, les paillasses font 2 m de large. L'ARQS reste valide tant que $\frac{c}{f} \gg 2\,\text{m}$ soit $f \ll 150\,\text{MHz}$: c'est pour cela qu'en TP on ne dépassera pas les 10 MHz. Les générateurs qu'on utilisera sont appelés « Générateurs Basse Fréquence » (GBF) pour indiquer qu'ils respectent cette limite d'ARQS pour une paillasse de TP ; mais ils peuvent quand même débiter des fréquences élevées !

À l'opposé, le réseau domestique d'électricité est alimenté en 50 Hz ; il est en ARQS tant que sa taille L vérifie $L \ll \frac{c}{50}$ soit $L \ll 6000\,\text{km}$: ça passe pour le réseau français.

Si on n'est plus en ARQS, les lois deviennent compliquées. Pour cette année, on sera **toujours** dans le cadre de l'ARQS, donc la loi des nœuds sera toujours valable.

Si les lois des nœuds et d'additivité (et donc des mailles) sont valables en instantané, elles le sont aussi pour les images complexes (il suffit de passer les équations en complexes) :

Loi des nœuds

En ARQS, la somme des intensités qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités qui partent de ce nœud.
En notant les intensités qui arrivent ou partent d'un nœud avec un indice k, on peut écrire cette loi sous la forme générale :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{i_k}(t) = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } \underline{i_k} \text{ va vers le nœud et } -1 \text{ sinon} \qquad \text{(E5.5)}$$

Loi d'additivité des tensions

Les tension, qu'on symbolise par des flèches, vérifient la relation de Chasles : $\underline{u_{AB}}(t) + \underline{u_{BC}}(t) = \underline{u_{AC}}(t)$.

Loi des mailles

Considérons une maille d'un circuit ; on l'oriente, c'est-à-dire qu'on choisit un sens de parcours. Alors la somme des tensions orientées autour de cette maille est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u_k}(t) = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si la tension } \underline{u_k} \text{ tourne dans le sens de la maille et } -1 \text{ sinon} \qquad \text{(E5.6)}$$

! On ajoute les images complexes, pas les amplitudes ! Si $\underline{u_1} + \underline{u_2} = \underline{u_3}$ alors $|\underline{u_1}| + |\underline{u_2}| \neq |\underline{u_3}|$; cf. l'inégalité triangulaire en maths !

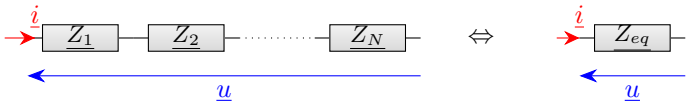
Remarque : Sur un diagramme de Fresnel, ces lois se traduisent en ajoutant les vecteurs.

À partir de ces lois fondamentales, et en ajoutant la loi d'Ohm généralisée, on peut généraliser en RSF tout ce qu'on a vu au chapitre E2 :

Association d'impédances en série

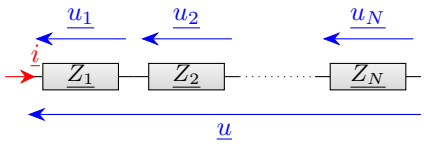
Des impédances $\underline{Z_i}$ placées en série sont équivalentes à une seule impédance équivalente $\underline{Z_{eq}}$ telle que

$$\underline{Z_{eq}} = \sum_k \underline{Z_k} \qquad \text{(E5.7)}$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les tensions aux bornes de chaque impédance :



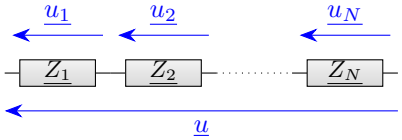
On peut alors écrire : $\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^{N} \underline{u_k}(t)$ (loi d'additivité des tensions)

$= \sum_{k=1}^{N} \underline{Z_k}.\underline{i}(t)$ (loi d'Ohm généralisée)

$= \underline{Z_{eq}}.\underline{i}(t)$ avec $\underline{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z_k}$

Loi du pont diviseur de tension

Soient N impédances en série ; on met une tension $\underline{u}$ aux bornes de l'ensemble. Alors la tension aux bornes de la n-ième impédance vaut



$$\underline{u_n}(t) = \underline{u}(t) \frac{\underline{Z_n}}{\sum_{k=1}^{N} \underline{Z_k}} \qquad \text{(E5.8)}$$

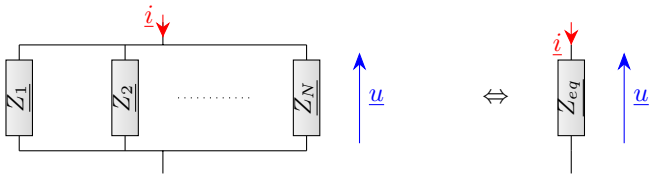
Démonstration

Plaçons le courant $\underline{i}$ pour que les impédances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm généralisée, $\underline{u_n}(t) = \underline{Z_n}.\underline{i}(t)$. Or l'ensemble des impédances est équivalent à une seule impédance $\underline{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z_k}$, donc $\underline{u}(t) = \underline{Z_{eq}}.\underline{i}(t)$. On en déduit que $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z_{eq}}}$ donc $\underline{u_n}(t) = \underline{u}(t)\frac{\underline{Z_n}}{\underline{Z_{eq}}}$.

Association d'impédances en parallèle

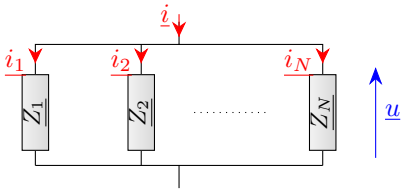
Des impédances $\underline{Z_k}$ placées en parallèle sont équivalentes à une seule impédance équivalente $\underline{Z_{eq}}$ telle que

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}} \text{ soit } \underline{Y_{eq}} = \sum_k \underline{Y_k} \qquad \text{(E5.9)}$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les courants qui traversent chaque impédance :

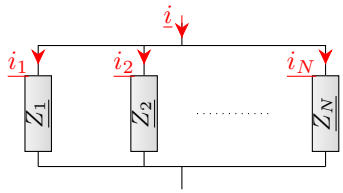


On peut alors écrire : $\underline{i}(t) = \sum_{k=1}^{N} \underline{i_k}(t)$ (loi des nœuds) $= \sum_{k=1}^{N} \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z_k}}$ (loi d'Ohm généralisée)

$$= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z_{eq}}} \text{ avec } \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z_k}}$$

Loi du pont diviseur de courant

Soient N impédances en parallèle ; on alimente l'ensemble par un courant $\underline{i}$. Alors le courant qui traverse la n-ième impédance vaut



$$\underline{i_n}(t) = \underline{i}(t)\frac{\underline{Y_n}}{\sum_{k=1}^{N}\underline{Y_k}} = \underline{i}(t)\frac{\frac{1}{\underline{Z_n}}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\underline{Z_k}}} \qquad \text{(E5.10)}$$

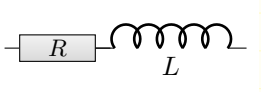
Démonstration

Plaçons la tension $\underline{u}$ pour que les impédances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm généralisée, $\underline{i_n}(t) = \underline{Y_n}.\underline{u}(t)$. Or l'ensemble des admittances est équivalent à une seule admittance $\underline{Y_{eq}} = \sum_{k=1}^{N}\underline{Y_k}$, donc $\underline{i}(t) = \underline{Y_{eq}}.\underline{u}(t)$. On en déduit que $\underline{u}(t) = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{Y_{eq}}}$ donc $\underline{i_n}(t) = \underline{i}(t)\frac{\underline{Y_n}}{\underline{Y_{eq}}}$.

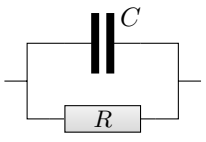
Remarque : Dans le cas où il n'y a que 2 impédances, la loi s'écrit $\underline{i_1}(t) = \underline{i}(t)\frac{\frac{1}{\underline{Z_1}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}} = \underline{i}(t)\frac{1}{1+\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}} = \underline{i}(t)\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$ et de même $\underline{i_2}(t) = \underline{i}(t)\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$, mais ces formules ne se généralisent pas à plus de 2 impédances.

Exemple : Associations d'impédances

Exprimez l'impédance des dipôles suivant :



(a)



(b)

(a) : $\underline{Z} = R + jL\omega$
(b) : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega$ donc $\underline{Z} = \frac{R}{1+jRC\omega}$

Propriété : Générateurs en RSF

Pour modéliser un générateur linéaire en RSF, on dispose du modèle de Thévenin généralisé, formé d'une source idéale de tension de force électromotrice $\underline{e}(t)$ en série avec une impédance $\underline{Z}$, de loi caractéristique $\underline{u}(t) = \underline{e}(t) - \underline{Z}.\underline{i}(t)$ en convention générateur.

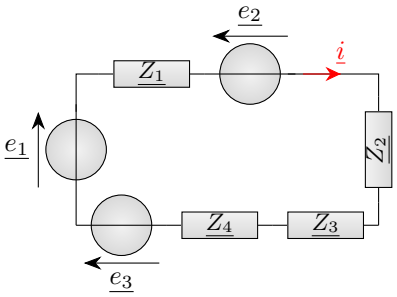
Loi de Pouillet

Dans un circuit en série contenant des générateurs de tension de fem $\underline{e_k}$ et des impédances $\underline{Z_j}$, on peut écrire la *loi des mailles en terme de courant* :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{e_k}(t) - \left(\sum_j \underline{Z_j}\right) \underline{i}(t) = 0$$

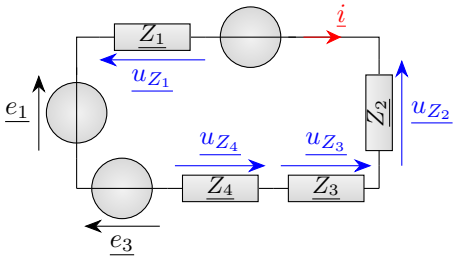
avec $\epsilon_k = +1$ si la fem $\underline{e_k}$ tourne dans le même sens que $\underline{i}$ et -1 sinon. Le courant qui circule dans la seule maille est alors donné par la *loi de Pouillet* :

$$\underline{i}(t) = \frac{\sum_k \epsilon_k \underline{e_k}(t)}{\sum_j \underline{Z_j}} \qquad \text{(E5.11)}$$



Démonstration

Plaçons des tensions aux bornes des résistances, en convention récepteur (cela ne change rien au résultat).

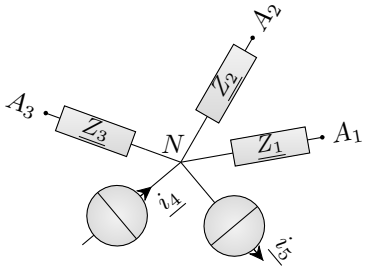


Par la loi des mailles : $\underline{e_1}(t) - \underline{u_{Z_1}}(t) - \underline{e_2}(t) - \underline{u_{Z_2}}(t) - \underline{u_{Z_3}}(t) - \underline{u_{Z_4}}(t) + \underline{e_3}(t) = 0$. En appliquant la loi d'Ohm aux impédances : $\underline{e_1}(t) - \underline{Z_1}.\underline{i}(t) - \underline{e_2}(t) - \underline{Z_2}.\underline{i}(t) - \underline{Z_3}.\underline{i}(t) - \underline{Z_4}.\underline{i}(t) + \underline{e_3}(t) = 0$ soit $\underline{e_1}(t) - \underline{e_2}(t) + \underline{e_3}(t) = \left(\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3} + \underline{Z_4}\right).\underline{i}(t)$ d'où $\underline{i}(t) = \dfrac{\underline{e_1}(t) - \underline{e_2}(t) + \underline{e_3}(t)}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3} + \underline{Z_4}}$

Théorème de Millman (ou Loi des nœuds en terme de potentiels)

Considérons un nœud N auquel arrivent plusieurs branches :

- des branches par lesquelles le nœud N est relié à d'autres nœuds A_k par des impédances $\underline{Z_k}$
- des branches par lesquelles un courant $\underline{i_j}$ arrive au nœud N ($\epsilon_j = +1$) ou en part ($\epsilon_j = -1$)

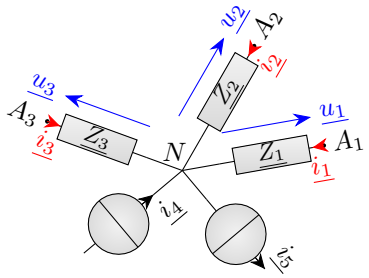


alors le potentiel du nœud N est relié aux autres par la relation :

$$\underline{v}_N(t) = \frac{\sum_k \frac{v_{A_k}(t)}{\underline{Z_k}} + \sum_j \epsilon_j \underline{i_j}(t)}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}}} \qquad \text{(E5.12)}$$

Démonstration

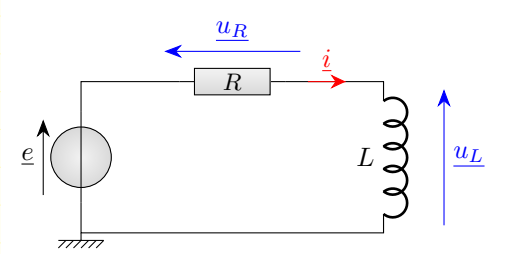
Plaçons sur la figure les tensions aux bornes de résistances et les intensités qui les traversent, orientées ainsi :



Par la loi des nœuds : $\underline{i_1}(t)+\underline{i_2}(t)+\underline{i_3}(t)+\underline{i_4}(t)-\underline{i_5}(t)=0$. Or par la loi d'Ohm : $\underline{i_1}(t)=\frac{\underline{u_1}(t)}{\underline{Z_1}}=\frac{\underline{v_{A_1}}(t)-\underline{v_N}(t)}{\underline{Z_1}}$ et de même pour les autres résistances, donc $\frac{\underline{v_{A_1}}(t)}{\underline{Z_1}}-\frac{\underline{v_N}(t)}{\underline{Z_1}}+\frac{\underline{v_{A_2}}(t)}{\underline{Z_2}}-\frac{\underline{v_N}(t)}{\underline{Z_2}}+\frac{\underline{v_{A_3}}(t)}{\underline{Z_3}}-\frac{\underline{v_N}(t)}{\underline{Z_3}}+\underline{i_4}(t)-\underline{i_5}(t)=0$. En isolant $\underline{v_N}(t)$ on obtient $\frac{\underline{v_{A_1}}(t)}{\underline{Z_1}}+\frac{\underline{v_{A_2}}(t)}{\underline{Z_2}}+\frac{\underline{v_{A_3}}(t)}{\underline{Z_3}}+\underline{i_4}(t)-\underline{i_5}(t)=\underline{v_N}(t)\left(\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}+\frac{1}{\underline{Z_3}}\right)$ soit $\underline{v_N}(t)=\dfrac{\frac{\underline{v_{A_1}}(t)}{\underline{Z_1}}+\frac{\underline{v_{A_2}}(t)}{\underline{Z_2}}+\frac{\underline{v_{A_3}}(t)}{\underline{Z_3}}+\underline{i_4}(t)-\underline{i_5}(t)}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}+\frac{1}{\underline{Z_3}}}$

Ainsi, à partir de maintenant, quand on travaille sur un circuit électrique linéaire en RSF, on ne passe plus par l'établissement compliqué d'une ED : on applique directement les lois des circuits et des impédances.

Exemple : Étude du circuit RL série



On alimente ce circuit par une tension sinusoïdale $e(t)=E_0\cos(\omega t)$ avec $E_0=5\,\text{V}$. Pour les AN on prendra $R=200\,\Omega$ et $L=32\,\text{mH}$.

1. Exprimez $\underline{e}(t)$, $\underline{u_L}(t)$, $\underline{u_R}(t)$ et $\underline{i}(t)$.
2. Calculez les caractéristiques de $u_L(t)$, $u_R(t)$ et $i(t)$ si la tension e a pour fréquence $f=1{,}2\,\text{kHz}$.
3. Calculez les limites de $\left|\underline{u_L}\right|$ et $\left|\underline{u_R}\right|$ en basse fréquence ($\omega\to 0$) et en haute fréquence ($\omega\to\infty$).
4. Justifiez que, quelle que soit la fréquence, $u_L(t)$ est en avance sur $e(t)$ tandis que $u_R(t)$ est en retard.

1. Par définition, à partir de $e(t)=E_0\cos(\omega t)$ on peut écrire $\underline{e}(t)=E_0e^{j\omega t}$.
   Par le pont diviseur de tension : $\underline{u_L}(t)=\frac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{e}(t)=\frac{jL\omega}{R+jL\omega}E_0e^{j\omega t}$; de même $\underline{u_R}(t)=\frac{R}{R+jL\omega}E_0e^{j\omega t}$
   Pour le courant, on peut par exemple appliquer la loi d'Ohm à l'impédance totale : $\underline{i}(t)=\frac{\underline{e}(t)}{R+jL\omega}=\frac{E_0}{R+jL\omega}e^{j\omega t}$
2. Si $\omega=2\pi\times 1200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ alors on peut calculer numériquement $\underline{u_L}(t)=(2{,}96+2{,}46j)e^{j\omega t}$ donc $\underline{u_L}(0)=2{,}96+2{,}46j$; on trouve que son module vaut 3,85 V et son argument 0,69 rad = 39,7°. Donc $u_L(t)=3{,}85\cos(2400\pi t+0{,}69)$ en (V).
   De même on trouve $u_R(t)=3{,}19\cos(2400\pi t-0{,}88)$ (en V) et $i(t)=16\cos(2400\pi t-0{,}88)$ (en mA).
3. En BF, $\left|\underline{u_L}\right|$ tend vers 0 et $\left|\underline{u_R}\right|$ tend vers E_0.
   En HF, $\left|\underline{u_L}\right|$ tend vers E_0 et $\left|\underline{u_R}\right|$ tend vers 0.
   On voit ainsi que la tension ne se répartit pas de la même façon entre les deux dipôles en fonction de la fréquence.

4. On a vu que $\underline{u_L}(t) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{e}(t)$ donc en prenant l'argument : $\arg \underline{u_L}(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\omega}{R} + \arg \underline{e}(t)$; le déphasage de $u_L(t)$ par rapport à $e(t)$ vaut donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\omega}{R} > 0$ donc la tension correspondante est en avance.
   De même le déphasage de $u_R(t)$ par rapport à $e(t)$ vaut $-\arctan\frac{L\omega}{R} < 0$ donc la tension est en retard.

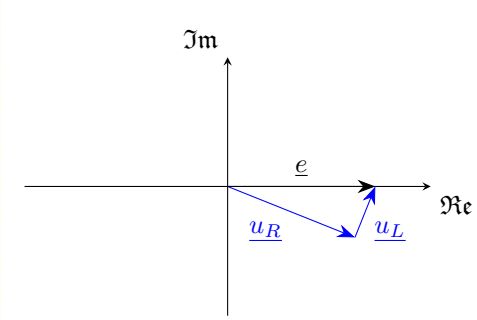


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RL série à basse fréquence

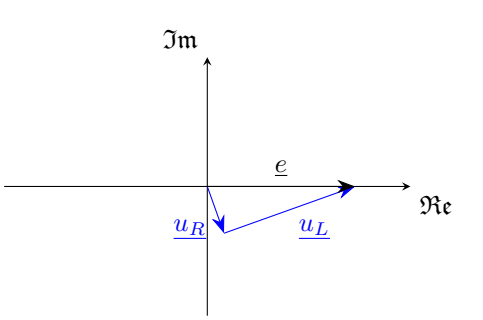


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RL série à haute fréquence

B.3. Obtention d'une ED à partir du RSF

On a vu qu'on peut obtenir les relations sur les images complexes à partir d'une ED ; puis qu'on pouvait se passer de l'ED et directement travailler avec les impédances. En fait, on peut même déterminer l'ED d'un circuit grâce aux impédances.

Méthode : Établissement d'ED par les lois amplitudes complexes

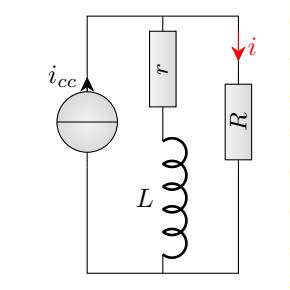
— On trouve l'image complexe de la grandeur recherchée.
— On modifie l'équation de manière à ne plus avoir de termes $j\omega$ à quelque dénominateur que ce soit.
— On en déduit l'ED par la transposition

$$\begin{aligned} \underline{s}(t) &\to s(t) \\ j\omega\underline{s}(t) &\to \dot{s}(t) \\ -\omega^2\underline{s}(t) &\to \ddot{s}(t) \\ e^{j(\omega t+\varphi)} &\to \cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

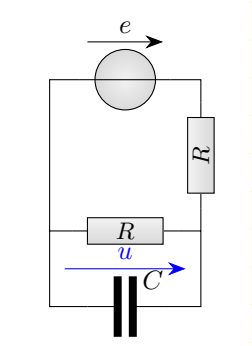
Remarque : En pratique, cette méthode est plus rapide pour les circuits compliqués à plusieurs mailles.

Exemple : Établissement d'une équation différentielle

1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par i dans le circuit de gauche (en fonction de i_{cc} et des composants).
2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par u dans le circuit de droite (en fonction de e et des composants).



ED sur i



ED sur u

1. Un simple diviseur de courant indique que $\underline{i}(t) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r+jL\omega}}\underline{i_{cc}}(t)$. On passe le dénominateur à gauche : donc $\frac{1}{R}\underline{i}(t) + \frac{1}{r+jL\omega}\underline{i}(t) = \frac{1}{R}\underline{i_{cc}}(t)$. Il reste du $j\omega$ au dénominateur, dans le terme $r + jL\omega$, donc on multiplie **toute l'équation** par $r + jL\omega$ et on obtient $\frac{r}{R}\underline{i}(t) + \frac{jL\omega}{R}\underline{i}(t) + \underline{i}(t) = \frac{r}{R}\underline{i_{cc}}(t) + \frac{jL\omega}{R}\underline{i_{cc}}(t)$. On repasse alors dans le domaine temporel :
$$\frac{r}{R}i(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i = \frac{r}{R}i_{cc}(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_{cc}(t)}{\mathrm{d}t}$$
2. On associe les deux impédances en bas : $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$. Par le diviseur de tension : $\underline{u}(t) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R}\underline{e}(t) = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega}+R}\underline{e}(t) = \frac{1}{1+1+jRC\omega}\underline{e}(t) = \frac{1}{2+jRC\omega}\underline{e}(t)$. On passe le dénominateur en face : $2\underline{u}(t) + jRC\omega\underline{u}(t) = \underline{e}(t)$, donc
$$2u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

E5.C. Aspect énergétique

Nous avons vu que la puissance reçue par un dipôle en convention récepteur s'écrit $\mathcal{P}(t) = u(t).i(t)$; ou bien la puissance d'une force s'écrit $\mathcal{P}(t) = \vec{f}(t)\cdot\vec{v}(t)$. Il s'agit de relations **non linéaires** : on ne peut donc pas les passer en complexes ; plus exactement, un produit de deux signaux sinusoïdaux n'est pas un signal sinusoïdal. On va néanmoins en montrer une propriété très intéressante : sa valeur moyenne est non nulle.

C.1. Moyenne d'un produit de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation

Propriété : Valeur moyenne du produit de deux signaux sinusoïdaux

Soient deux signaux sinusoïdaux $a(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_a)$ et $b(t) = B.\cos(\omega t + \varphi_b)$ de même pulsation. Alors $\langle a(t).b(t)\rangle = \frac{A.B}{2}\cos(\varphi_a - \varphi_b)$

Démonstration

$a(t).b(t) = A.B.\cos(\omega t + \varphi_a).\cos(\omega t + \varphi_b)$; par la formule de linéarisation d'un produit de cosinus, $a(t).b(t) = \frac{A.B}{2}.(\cos(\omega t + \varphi_a + \omega t + \varphi_b) + \cos(\omega t + \varphi_a - \omega t - \varphi_b)) = \frac{A.B}{2}.(\cos(2\omega t + \varphi_a + \varphi_b) + \cos(\varphi_a - \varphi_b))$. Le premier cosinus varie au cours du temps entre $+1$ et -1, sa moyenne temporelle est nulle ; le second est constant, donc sa valeur moyenne est lui-même. Donc on a bien $\langle a(t).b(t)\rangle = \frac{A.B}{2}\cos(\varphi_a - \varphi_b)$.

Propriété : Valeur efficace d'un signal

Un signal sinusoïdal d'amplitude S_0 a pour valeur efficace $S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$

Démonstration

$S_{eff}^2 = \langle s^2(t)\rangle = \frac{S_0.S_0}{2}\cos(\varphi_s - \varphi_s) = \frac{S_0^2}{2}$.

Remarque : On peut donc aussi écrire $\langle a(t).b(t)\rangle = A_{eff}.B_{eff}.\cos(\varphi_a - \varphi_b)$.

Propriété : Valeur moyenne du produit de deux signaux sinusoïdaux en fonction des images complexes

Soient deux signaux sinusoïdaux $a(t)$ et $b(t)$ de même pulsation. Alors

$$\langle a(t).b(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{a}^*(t).\underline{b}(t)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{a}(t).\underline{b}^*(t)\right] \quad \text{(E5.13)}$$

où le symbole $\underline{a}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{a}$.

Démonstration

Notons $a(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_a)$ et $b(t) = B.\cos(\omega t + \varphi_b)$. Alors $\underline{a}(t) = A.e^{j(\omega t+\varphi_a)}$ et $\underline{b}(t) = B.e^{j(\omega t+\varphi_b)}$ donc $\frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{a}^*(t).\underline{b}(t)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[A.B.e^{j(-\omega t-\varphi_a+\omega t+\varphi_b)}\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[A.B.e^{j(\varphi_b-\varphi_a)}\right] = \frac{A.B}{2}\cos(\varphi_b-\varphi_a)$

Remarque : La formule est symétrique, on peut prendre le conjugué de $\underline{a}$ ou bien de $\underline{b}$, comme cela nous arrange.

C.2. Puissance moyenne reçue par un dipôle

Puissance moyenne reçue par une impédance

Un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ soumis à une tension $\underline{u}$ et traversée par un courant $\underline{i}$ reçoit une puissance moyenne

$$\langle \mathcal{P}(t)\rangle = I_{eff}^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right] = U_{eff}^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Y}\right] \quad \text{(E5.14)}$$

Démonstration

$\langle \mathcal{P}(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{u}(t).\underline{i}^*(t)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\underline{i}(t).\underline{i}^*(t)\right] = \frac{1}{2}\left|\underline{i}(t)\right|^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right] = I_{eff}^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right]$
De même : $\langle \mathcal{P}(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{u}^*(t).\underline{i}(t)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{u}^*(t).\underline{Y}\underline{u}(t)\right] = \frac{1}{2}\left|\underline{u}(t)\right|^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Y}\right] = U_{eff}^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Y}\right]$

Propriété : Puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine

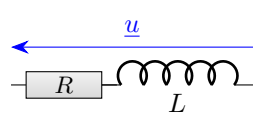
La puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine est nulle.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\underline{Z}$ est imaginaire pur.

Exemple : Calcul d'une puissance moyenne

Exprimez la puissance moyenne reçue par ce dipôle, en fonction de U_{eff} :



Pour exprimer la puissance en fonction de la tension, il faut calculer l'admittance $\underline{Y} = \frac{1}{R+jL\omega}$ et prendre sa partie réelle à l'aide de la quantité conjuguée : $\mathfrak{Re}\left[\underline{Y}\right] = \mathfrak{Re}\left[\frac{R-jL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right] = \frac{R}{R^2+L^2\omega^2}$. Donc $\langle \mathcal{P}(t)\rangle = \frac{RU_{eff}^2}{2(R^2+L^2\omega^2)}$.

Remarque : Les formules de valeurs moyennes servent aussi pour calculer les énergies moyennes stockées par les condensateur et bobine : $\langle E_C\rangle = C.U_{eff}^2$ et $\langle E_L\rangle = L.I_{eff}^2$.

E5. Régime Sinusoïdal Forcé

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Signal sinusoïdal Description du comportement d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé. Impédances complexes. Cas d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

E5. Régime Sinusoïdal Forcé

Quelques conseils

- ✎ Le passage en complexe est bizarre au début, mais appliquez-le comme une recette de cuisine, et au fur et à mesure que vous l'utiliserez, son sens deviendra plus clair. Souvenez-vous que c'est un outil, qui n'a aucun sens réel.
- ✎ Vous devez savoir retrouver rapidement l'argument des complexes simples de la forme $\pm a$ ou $\pm ja, a \in \mathbb{R}$. Souvenez-vous aussi que $\frac{1}{j} = -j$, mais attention, $\frac{1}{ja} = \frac{-j}{a}$ (le a reste en bas, contrairement à ce que je vois souvent dans les copies).
- ✎ En basses fréquences (BF), une Bobine est équivalent à un Fil ; une fois cela retenu, vous retrouvez le comportement opposé en HF ; et le condensateur a le comportement opposé à la bobine en BF et en HF.

E5. Régime Sinusoïdal Forcé

QCMs

réponses page 617

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Lesquelles de ces relations sont justes ?

(a). $T = \frac{\omega}{2\pi}$
(b). $\omega = 2\pi f$
(c). $T = \frac{2\pi}{2\pi}$
(d). $f = \frac{2\pi}{T}$
(e). $\omega = \frac{\frac{\omega}{2\pi}}{f}$
(f). $T = \frac{1}{f}$

Q2. Un signal sinusoïdal $s(t) = A.\cos(\omega t + \theta)$ a pour image complexe :

(a). $A.e^{j\omega t}$
(b). $S_0.e^{j(\omega t+\phi)}$
(c). $A.e^{j\theta}$
(d). $A.e^{j(\omega t+\theta)}$

Q3. Si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$ d'un signal, alors le signal réel vaut :

(a). $|\underline{s}(t)|$
(b). $\underline{s}(t).\cos(\omega t)$
(c). $\mathfrak{Re}\left[\underline{s}(t)\right]$
(d). $|\underline{s}(0)|\cos(\omega t + \arg \underline{s}(0))$

Q4. L'impédance d'un condensateur vaut :

(a). C
(b). $C\omega$
(c). $\frac{1}{jC\omega}$
(d). $jC\omega$

Q5. L'impédance d'une inductance vaut :

(a). $L\omega$
(b). $jL\omega$
(c). L
(d). $\frac{1}{jL\omega}$

Q6. La puissance moyenne reçue par une impédance vaut :

(a). $\underline{Z}.\underline{i}^2$
(b). $\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right].I_{eff}^2$
(c). $\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right].|\underline{i}|^2$
(d). $\mathfrak{Re}\left[\underline{Y}\right].U_{eff}^2$

Q7. La puissance moyenne reçue par un condensateur vaut :

(a). $C.I_{eff}^2$
(b). 0
(c). $C.U_{eff}^2$
(d). $\frac{1}{2}C.U_{eff}^2$

✓ QCM : Image complexe et signal réel ✗

Q8. Si $s(t) = 3\cos(300t + 0,2)$ alors $\underline{s}(t) =$

(a). $3.e^{j(300t+0,2)}$
(b). $3.e^{0,2jt}$
(c). $3.e^{j(\omega t+0,2)}$
(d). $3 + 0,2j$

Q9. Si $\underline{s}(t) = 4e^{j(200t-0,3)}$ alors $s(t) =$

(a). $4\sin(200t - 0,3)$ (b). $4\cos(\omega t - 0,3)$
(c). $4\cos(200t - 0,3)$ (d). $4\cos(-0,3)$

Q10. Si $\underline{s}(t) = (4 + 2,1j)e^{200jt}$ alors $s(t) =$

(a). $4\cos(200t) + 2,1\sin(200t)$ (b). $4\cos(200t + 2,1)$
(c). $6,1\cos(200t + 0,5)$ (d). $4,5\cos(200t + 0,5)$

Q11. Si $\underline{s}(t) = 3,2je^{800jt}$ alors $s(t) =$

(a). 0 (b). $3,2\cos(800t + 1)$
(c). $3,2\cos(800t + 1,6)$ (d). $3,2\sin(800t)$

Q12. Si $\underline{s}(t) = (0,8 + 0,5j)e^{1000jt+0,4j}$ alors $s(t) =$

(a). $0,94\cos(1000t + 1,0)$ (b). $0,94\cos(1000t + 0,6)$
(c). $0.8\cos(1000t + 0,5)$ (d). $0.8\cos(1000t + 0,4)$

Q13. Si $a(t) = 3\cos(300t)$ et $\underline{b} = \frac{3}{1+2j}\underline{a}$ alors $b(t) =$

(a). $4\cos(300t - 1,1)$ (b). $9\cos(300t + 0,5)$
(c). $9\cos(300t + 1,1)$ (d). $4\cos(300t + 1,1)$

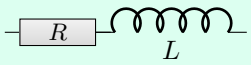
Q14. Si $a(t) = 3\cos(500t + 0,2)$ et $2,4.10^{-3}\frac{db}{dt} + b = 2a$ alors $b(t) =$

(a). $3.8\cos(500t + 1,1)$ (b). $3,8\cos(500t - 0.7)$
(c). $3.8\cos(500t - 1.1)$ (d). $3.8\cos(500t + 0.7)$

✓ QCM : Association d'impédances ✗

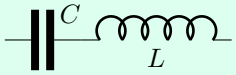
Exprimez simplement les impédances équivalentes **sans chercher à simplifier l'expression**.

Q15. $\underline{Z_{eq}} =$



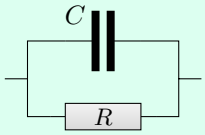
(a). $R + \frac{1}{jL\omega}$ (b). $jLR\omega$
(c). $R + L$ (d). $R + jL\omega$

Q16. $\underline{Z_{eq}} =$



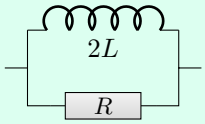
(a). $\frac{1}{jC\omega} + jL\omega$ (b). $\frac{1}{jC\omega+\frac{1}{jL\omega}}$
(c). $jC\omega + jL\omega$ (d). $C + L$

Q17. $\underline{Z_{eq}} =$



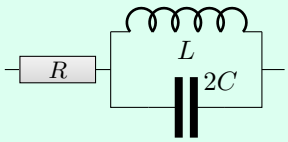
(a). $R + jC\omega$
(b). $\frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$
(c). $R + \frac{1}{jC\omega}$
(d). $\frac{1}{R} + jC\omega$

Q18. $\underline{Z_{eq}} =$



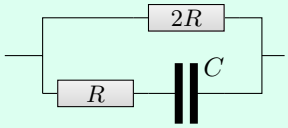
(a). $\frac{1}{R} + \frac{1}{j2L\omega}$
(b). $\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}}$
(c). $R + j2L\omega$
(d). $\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{2jL\omega}}$

Q19. $\underline{Z_{eq}} =$



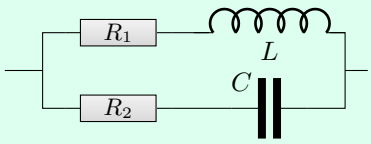
(a). $R + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega}+j2C\omega}$
(b). $R + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}$
(c). $\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+j2C\omega}$
(d). $R + \frac{1}{jL\omega} + j2C\omega$

Q20. $\underline{Z_{eq}} =$



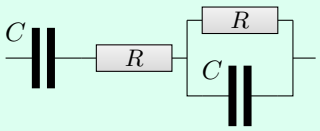
(a). $\frac{1}{\frac{1}{2R}+R+\frac{1}{jC\omega}}$
(b). $\frac{1}{3R+\frac{1}{jC\omega}}$
(c). $\frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}}$
(d). $\frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}+jC\omega}$

Q21. $\underline{Z_{eq}} =$



(a). $\frac{1}{\frac{1}{R_1+jL\omega}+\frac{1}{R_2+\frac{1}{jC\omega}}}$
(b). $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}$
(c). $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$
(d). $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{jL\omega}}+\frac{1}{\frac{1}{R_2}+jC\omega}}$

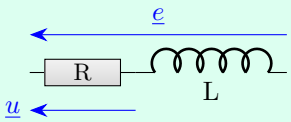
Q22. $\underline{Z_{eq}} =$



(a). $R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}$
(b). $R + jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jC\omega}$
(c). $R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$
(d). $\frac{1}{\frac{2}{R}+2jC\omega}$

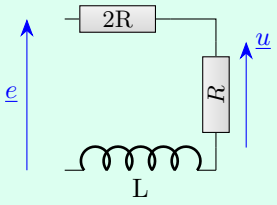
✓ QCM : Pont diviseur de tension ✗

Q23. $\underline{u}(t) =$



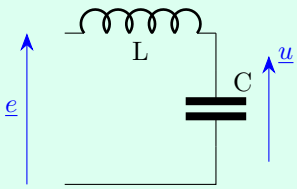
(a). $\frac{R}{R+jL\omega}$
(b). $\frac{R}{R+\frac{1}{jL\omega}}\underline{e}(t)$
(c). $\frac{R}{R+L}\underline{e}(t)$
(d). $\frac{R}{R+jL\omega}\underline{e}(t)$

Q24. $\underline{u}(t) =$



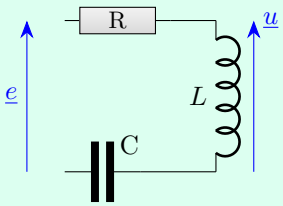
(a). $\frac{R}{R+jL\omega}\underline{e}(t)$
(b). $\frac{3R}{3R+jL\omega}\underline{e}(t)$
(c). $\frac{R}{3R+jL\omega}\underline{e}(t)$
(d). $-\frac{R}{R+jL\omega}\underline{e}(t)$

Q25. $\underline{u}(t) =$



(a). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\underline{e}(t)$
(b). $\frac{jC\omega}{jC\omega+\frac{1}{jL\omega}}\underline{e}(t)$
(c). $\frac{1}{(jC\omega)(jL\omega)}\underline{e}(t)$
(d). $\frac{jC\omega}{jC\omega+jL\omega}$

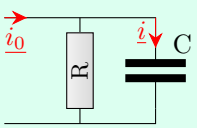
Q26. $\underline{u}(t) =$



(a). $\frac{jL\omega}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(t)$
(b). $\frac{L}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(t)$
(c). $\frac{L}{R+L+C}\underline{e}(t)$
(d). $\frac{jL\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(t)$

✓ QCM : Pont diviseur de courant ✗

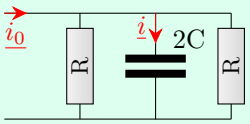
Q27. $\underline{i}(t) =$



(a). $\frac{jC\omega}{\frac{1}{R}+jC\omega}\underline{i_0}(t)$ (b). $\frac{C}{R+C}\underline{i_0}(t)$

(c). $-\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{i_0}(t)$ (d). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{i_0}(t)$

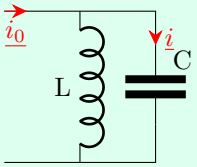
Q28. $\underline{i}(t) =$



(a). $\frac{\frac{1}{jC\omega/2}}{\frac{2}{R}+jC\omega/2}\underline{i_0}(t)$ (b). $\frac{\frac{1}{jC\omega/2}}{\frac{R}{2}+jC\omega/2}\underline{i_0}(t)$

(c). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{R}{2}+jC\omega}\underline{i_0}(t)$ (d). $\frac{j2C\omega}{\frac{2}{R}+j2C\omega}\underline{i_0}(t)$

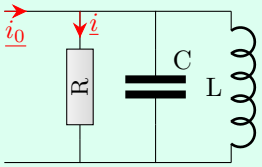
Q29. $\underline{i}(t) =$



(a). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}\underline{i_0}(t)$ (b). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jL\omega}+\frac{1}{jC\omega}}\underline{i_0}(t)$

(c). $\frac{jC\omega}{\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}\underline{i_0}(t)$ (d). $\frac{jC\omega}{jL\omega+jC\omega}\underline{i_0}(t)$

Q30. $\underline{i}(t) =$



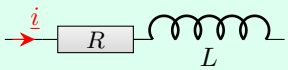
(a). $\frac{R}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\underline{i_0}(t)$ (b). $\frac{R}{\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{jL\omega}}\underline{i_0}(t)$

(c). $\frac{\frac{R}{1}}{\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{jL\omega}}\underline{i_0}(t)$ (d). $\frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\underline{i_0}(t)$

✓ QCM : Puissance reçue par un dipôle ✗

Exprimez la puissance totale reçue par le dipôle représenté, en fonction des données ; quand les circuit deviennent complexe, on se contentera d'une valeur numérique qu'on pourra calculer grâce à une calculatrice travaillant sur les nombres complexes.

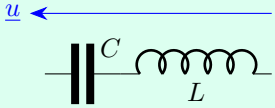
Q31. $\mathcal{P} =$



(a). $R\,|\underline{i}|^2$ (b). $\frac{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}|\underline{i}|^2}{2}$

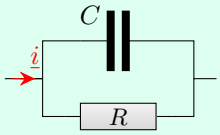
(c). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2}$ (d). $\frac{(R+jL\omega)\underline{i}^2}{2}$

Q32. $\mathcal{P} =$



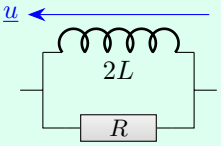
(a). $(C+L)\omega\frac{|\underline{u}|^2}{2}$
(b). $\frac{|\underline{u}|^2}{2(L\omega+\frac{1}{C\omega})}$
(c). ∞
(d). 0

Q33. $\mathcal{P} =$



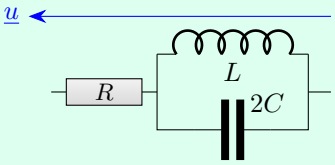
(a). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2}$
(b). $\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}|\underline{i}|^2}{2}$
(c). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2(1+R^2C^2\omega^2)}$
(d). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$

Q34. $\mathcal{P} =$



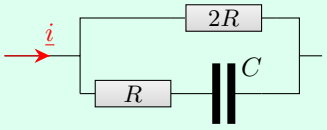
(a). $\frac{|\underline{u}|^2}{2\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$
(b). $\frac{|\underline{u}|^2}{2(R+jL\omega)}$
(c). $\frac{|\underline{u}|^2}{2R}$
(d). $\frac{|\underline{u}|^2}{R}$

Q35. Si $R = 200\,\Omega$, $L = 20\,\text{mH}$, $C = 120\,\text{nF}$, $\omega = 400\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $U_{eff} = 20\,\text{V}$, alors $\mathcal{P} =$



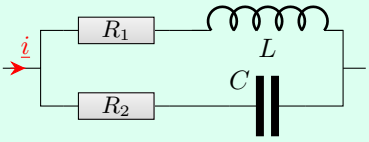
(a). 3,6 mW
(b). 0,46 W
(c). 0,21 W
(d). 1,2 W

Q36. Si $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 220\,\text{nF}$, $\omega = 800\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $I_{eff} = 20\,\text{mA}$, alors $\mathcal{P} =$



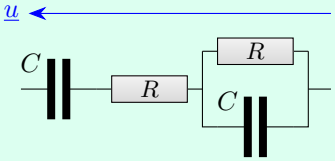
(a). 12,0 W
(b). 2,9 W
(c). 1,3 W
(d). 0,5 W

Q37. Si $R_1 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 1200\,\Omega$, $L = 32\,\text{mH}$, $C = 1\,\mu\text{F}$, $f = 1000\,\text{Hz}$ et $I_{eff} = 50\,\text{mA}$, alors $\mathcal{P} =$



(a). 3,3 W
(b). 1,3 W
(c). 2,2 W
(d). 2,9 W

Q38. Si $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 220\,\text{nF}$, $f = 1200\,\text{Hz}$ et $U_{eff} = 15\,\text{V}$, alors $\mathcal{P} =$



(a). 22 mW
(b). 120 mW
(c). 300 mW
(d). 12 mW

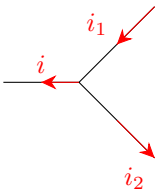
E5. Régime Sinusoïdal Forcé

Exercices

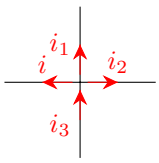
réponses page 619

Exercice E5.1 : Loi des nœuds en RSF [*]

Dans chaque cas de figure, calculez $\underline{i}(t)$ puis $i(t)$ (les intensités sont toutes en Ampères).



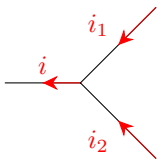
(a) $i_1 = 1,3\cos(\omega t + 0,5)$
$i_2 = -1,3\cos(\omega t - 0,2)$



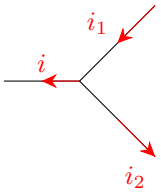
(b) $i_1 = 1,2\cos(300t + 0,2)$
$i_2 = 1,5\cos(300t + 0,6)$
$i_3 = 2,1\cos(300t + 0,4)$

Exercice E5.2 : Loi des nœuds en RSF [*]

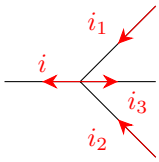
Dans chaque cas de figure, calculez $\underline{i}(t)$ puis $i(t)$; toutes les intensités sont en Ampères.



(a) $i_1 = 2\cos(\omega t)$
$i_2 = 1,5\cos(\omega t + \pi/4)$



(b) $i_1 = 2\cos(\omega t)$
$i_2 = 2,5\cos(\omega t + 3\pi/4)$



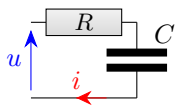
(c) $i_1 = 2\cos(\omega t)$
$i_2 = 1\cos(\omega t + \pi/2)$
$i_3 = 0,5\cos(\omega t - \pi/2)$

Exercice E5.3 : Association de dipôles [*]

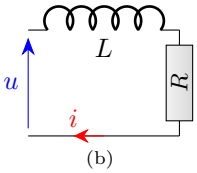
1. À l'aide des lois d'associations d'impédances, montrez que des inductances $L_1, L_2, \ldots, L_n$ placées en série sont équivalentes à une seule inductance $L_{eq} = \sum L_i$.
2. De même, montrez que des inductances $L_1, L_2, \ldots, L_n$ placées en parallèle sont équivalentes à une seule inductance L_{eq} telle que $\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L_i}$.
3. Trouvez de même le condensateur équivalent à des condensateurs placés en série, puis en parallèle.

Exercice E5.4 : Application de la loi d'Ohm généralisée [*]

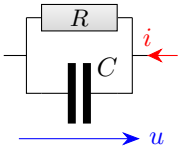
Exprimez $\underline{i}$ en RSF, en fonction de $\underline{u}$. Écrivez alors $i(t)$ si $u(t) = U_0\cos(\omega t)$.



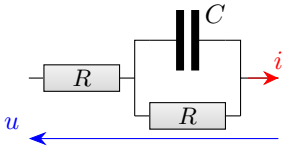
(a)



(b)



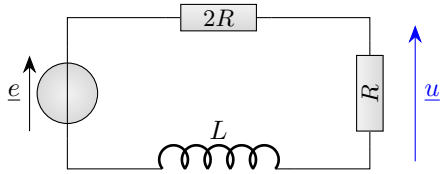
(c)



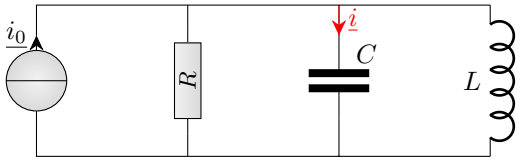
(d)

Exercice E5.5 : Ponts diviseurs [*]

Exprimez $\underline{u}$ ou $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e}$ et des composants ; puis déduisez-en $u(t)$ ou $i(t)$:



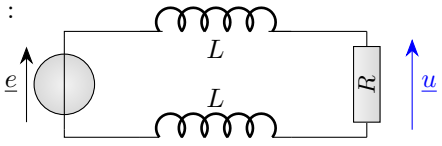
(a) $e(t) = 5\cos(3000t)\text{V}$; $R = 220\,\Omega$; $L = 40\,\text{mH}$



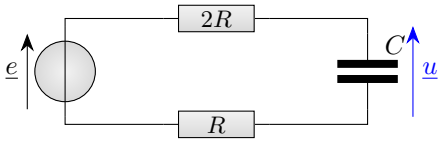
(b) $i_0(t) = 0,6\cos(10000t)\text{A}$; $R = 70\,\Omega$; $L = 32\,\text{mH}$; $C = 220\,\text{nF}$

Exercice E5.6 : Ponts diviseurs [*]

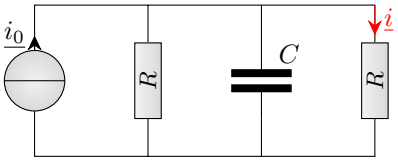
Exprimez $\underline{u}$ ou $\underline{i}$ en fonction des données, puis $u(t)$ ou $i(t)$ en supposant que $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ et $i_0(t) = I_0\cos(\omega t)$:



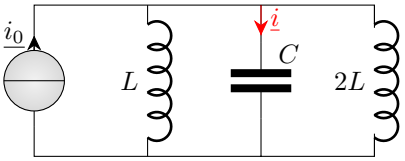
(a)



(b)



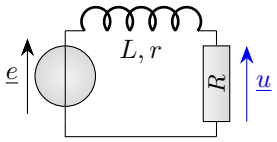
(c)



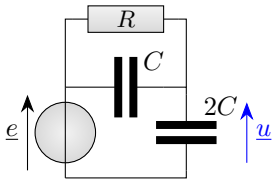
(d)

Exercice E5.7 : Calculs de tensions [**]

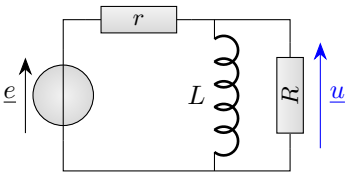
Exprimez $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R et L, puis déduisez-en l'expression de $u(t)$ avec les valeurs suivantes : $e(t) = 3,5\cos(4000t)\text{V}$, $i(t) = 0,12\cos(6000t + 0,3)\text{A}$, $R = 120\,\Omega$, $r = 8\,\Omega$, $C = 470\,\text{nF}$ et $L = 21\,\text{mH}$.



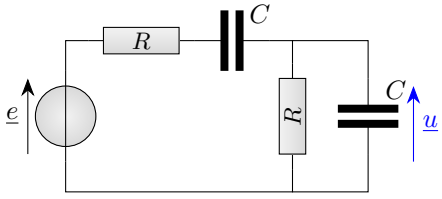
(a) La bobine est modélisée par une inductance L en série avec une résistance r



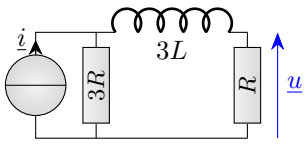
(b) Associez les deux impédances en parallèle.



(c) La tension est la même aux bornes des deux dipôles en parallèle.



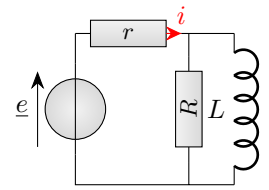
(d)



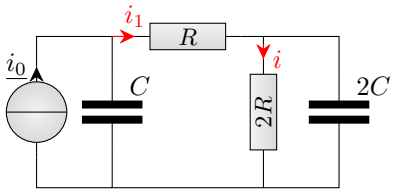
(e) *** Calculez d'abord l'impédance $\underline{Z_{eq}}$ équivalente aux 3 dipôles, puis la tension $\underline{u_1}$ à ses bornes.

Exercice E5.8 : Calculs d'intensités [**]

Exprimez $\underline{i}$ en RSF, puis exprimez numériquement $i(t)$.

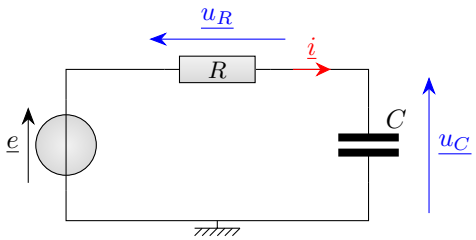


(a) $e(t) = 6\cos(7000t + 0,4)$V ;
$r = 50\,\Omega$; $R = 150\,\Omega$; $L = 37$ mH



(b) *** $i_0(t) = 0,4\cos(500t)$A ;
$C = 1\,\mu$F ; $R = 1500\,\Omega$; exprimez d'abord $\underline{i_1}$.

Exercice E5.9 : Étude du circuit RC série [**]

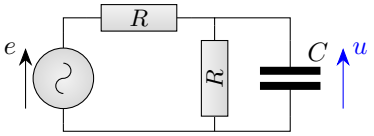


On alimente ce circuit par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\cos(\omega t - 0,4)$ avec $E_0 = 5\,$V. Pour les AN on prendra $R = 200\,\Omega$ et $C = 220\,$nF.

1. Exprimez $\underline{e}$, $\underline{u_C}$, $\underline{u_R}$ et $\underline{i}$.
2. Exprimez numériquement $u_C(t)$, $u_R(t)$ et $i(t)$ si la tension e a pour fréquence $f = 2,2\,$kHz.
3. Justifiez que, quelle que soit la fréquence, $u_R(t)$ est en avance sur $e(t)$ tandis que $u_C(t)$ est en retard.
4. Calculez les limites de $|\underline{u_C}|$, $|\underline{u_R}|$ et $|\underline{i}|$ en basse fréquence ($\omega \to 0$) et en haute fréquence ($\omega \to \infty$).

Exercice E5.10 : Circuit R,RC [**]

On considère le circuit ci-contre : Pour les AN : $R = 2,2\,$kΩ et $C = 470\,$nF.

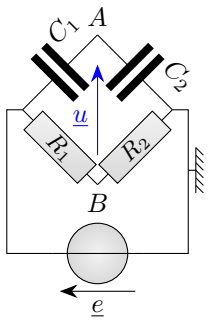


1. $e(t)$ est une tension sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 5\,$V, de pulsation ω quelconque et de phase à l'origine nulle. Écrire la forme de $e(t)$ puis l'image complexe $\underline{e}$.
2. Exprimez $\underline{u}$.
3. On choisit une fréquence $f = 100\,$Hz. Que vaut la pulsation ? Calculez numériquement l'amplitude et la phase à l'origine de u. Déduisez-en $u(t)$. Tracez sur un même graphique e et u.
4. On se place maintenant en très haute fréquence. Vers quelle limite tend l'amplitude de u ? Est-ce cohérent avec le circuit équivalent en HF ?

Exercice E5.11 : Pont de Sauty [**]

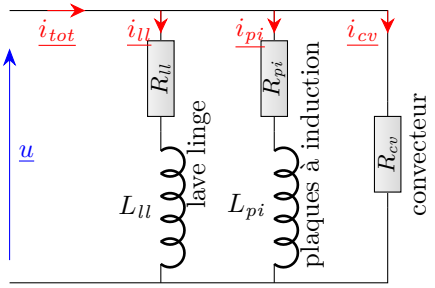
On considère le circuit ci-contre :

1. Exprimez la tension $\underline{u}$ en fonction des données et de $\underline{e}$.
2. Montrez que le pont est équilibré (i.e. $u(t) = 0$) si et seulement si $R_1C_1 = R_2C_2$.
3. On choisit $R_1 = 1,3\,$kΩ, $R_2 = 2,3\,$kΩ, $C_1 = 120\,$nF et $C_2 = 220\,$nF ; $e(t)$ est une tension sinuoïdale d'amplitude 3 V, de fréquence 800 Hz et de phase à l'origine nulle. Exprimez numériquement $u(t)$.



Exercice E5.12 : Alimentation d'un réseau domestique [**]

On considère une installation électrique minimaliste : un lave-linge, une plaque à induction et un convecteur. Le circuit électrique équivalent est représenté ci-dessous :



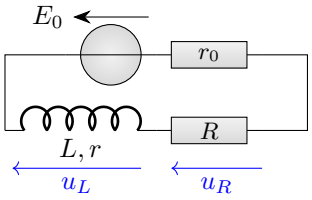
La tension $u(t)$ est une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_0 = 220\,\text{V}$ et de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$, avec une phase prise nulle par convention.
Pour les AN : $R_{ll} = 70\,\Omega$; $L_{ll} = 260\,\text{mH}$; $R_{pi} = 8\,\Omega$; $L_{pi} = 47\,\text{mH}$; $R_{cv} = 48\,\Omega$.

1. Exprimez $\underline{u}$, $\underline{i_{ll}}$, $\underline{i_{pi}}$ et $\underline{i_{cv}}$. Que vaut $\underline{i_{tot}}$ en fonction des autres ?
2. Calculez numériquement les amplitudes des courants : I_{ll}, I_{pi}, I_{cv} puis I_{tot} ; a-t-on $I_{tot} = I_{ll} + I_{pi} + I_{cv}$?
3. On place en parallèle des différents équipements un condensateur de capacité $C = 75\,\mu\text{F}$; recalculez I_{tot}.
4. Quelle valeur faudrait-il donner à C pour que la phase de $\underline{i_{tot}}$ soit nulle ? Que vaut I_{tot} dans ce cas-là ?

Exercice E5.13 : Étude d'une bobine en régime sinusoïdal forcé [**]

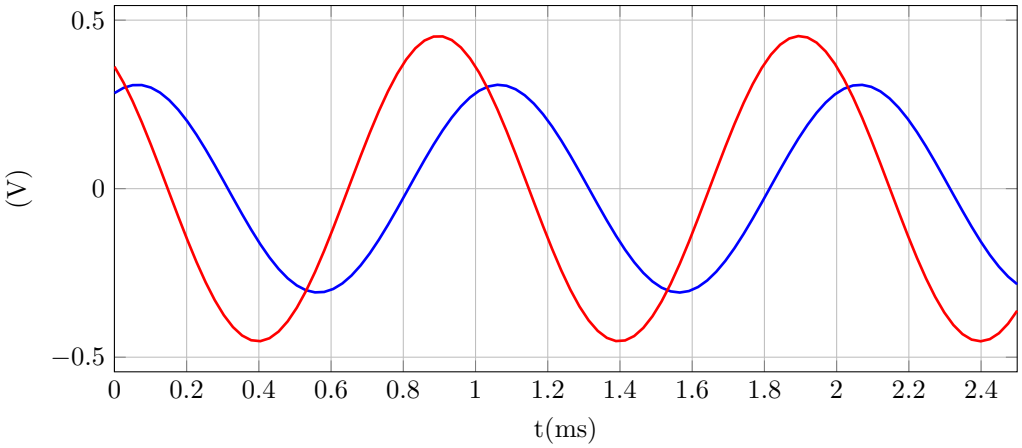
Dans tout cet exercice, on dispose d'une bobine qu'on modélisera par une inductance L en série avec une résistance r.

1. **Détermination directe de r**
   On construit un circuit en mettant en série un générateur de Thévenin (fem $E_0 = 1{,}0\,\text{V}$, résistance interne $r_0 = 2{,}0\,\Omega$), la bobine et une résistance $R = 40\,\Omega$.



   (a) Redessinez le schéma équivalent en régime continu.
   (b) Exprimez la tension U_R aux bornes de R en régime permanent continu.
   (c) On mesure $U_R = 0{,}56\,\text{V}$; calculez r.

2. **Détermination de L à partir d'un oscillogramme**
   On remplace alors le générateur de tension continue par un GBF produisant une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ avec $\frac{\omega}{2\pi} = 1\,\text{kHz}$; la résistance interne du GBF vaut désormais $r_0 = 50\,\Omega$, et R vaut toujours $40\,\Omega$.
   On observe à l'oscilloscope les tensions u_L et u_R ; l'oscillogramme est le suivant :



(a) Exprimez le rapport $\frac{\underline{u_L}}{\underline{u_R}}$ en fonction de r, R et L.

(b) Déduisez-en que $\arg \underline{u_L} - \arg \underline{u_R} = \arctan \frac{L\omega}{r}$.
La tension u_L est-elle en avance ou en retard sur u_R ? Identifiez alors les deux courbes de l'oscillogramme.

(c) Mesurez sur l'oscillogramme le déphasage entre les deux courbes ; déduisez-en L.

(d) À partir de l'expression de $\frac{\underline{u_L}}{\underline{u_R}}$, exprimez puis calculez numériquement le rapport des amplitudes de u_L et u_R. Comparez à la valeur mesurée sur l'oscillogramme.

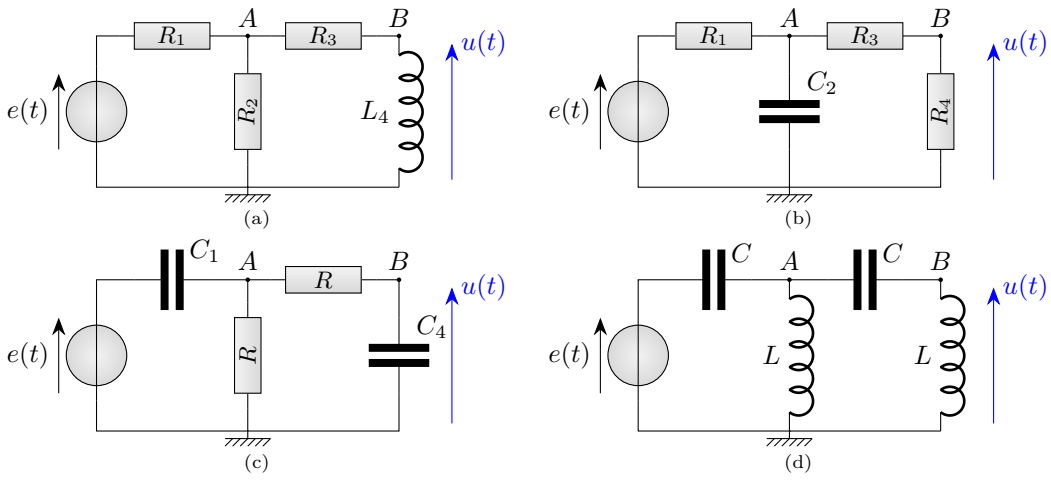
Exercice E5.14 : Circuit à double maille [***]

Ce genre de circuit est assez courant (surtout quand on verra les filtres) et on va beaucoup plus vite si on utilise le théorème de Millman :

— on détermine $\underline{v_A}$ en appliquant le théorème de Millman en A après avoir associé les deux dipôles de droite en série

— on détermine $\underline{v_B} = \underline{u}$ en appliquant le théorème de Millman en B, ou bien le diviseur de tension

Dans les circuits ci-dessous, exprimez $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$.



Exercice E5.15 : Puissance électrique consommée par une bobine [**]

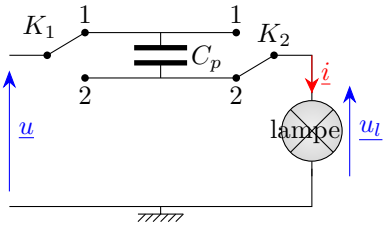
Une bobine d'inductance $L = 21\,\text{mH}$ et de résistance $r = 8\,\Omega$ est alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence f et de valeur efficace E.

1. Exprimez l'intensité $\underline{i}$ à travers cette bobine.
2. Exprimez la puissance moyenne $\mathcal{P}$ dissipée dans la résistance en fonction de E, f, L et r.
3. Que vaut cette puissance pour $f = 0\,\text{Hz}$? pour $f \to \infty$?

4. Pour quelle valeur de f a-t-on $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}(f=0)}{2}$?

Exercice E5.16 : Lampe branchée sur un va-et-vient [***]

Dans un couloir, on branche souvent l'éclairage sur un va-et-vient, c'est-à-dire avec un interrupteur à chaque bout. Le schéma général de câblage est alors le suivant :

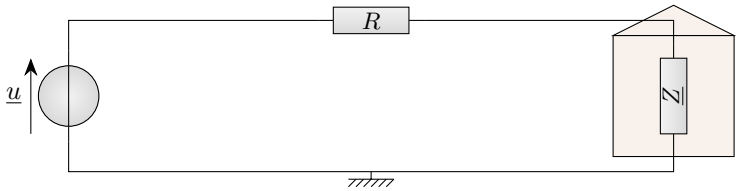


Le système est alimentée par une tension $\underline{u}$ de valeur efficace $U_{eff} = 220\,\text{V}$ et de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$. On a ensuite deux interrupteurs K_1 et K_2 ; s'ils sont tous les deux sur la même position 1 ou 2, le courant passe et la lampe s'allume ; s'ils sont en positions opposées (comme sur la figure), le courant ne devrait pas passer. Néanmoins, le plus souvent, les deux fils qui relient les deux interrupteurs sont situés dans la même gaine, et une capacité parasite C_p apparaît entre ces deux fils ; pour les AN on prendra $C_p = 5\,\text{nF}$.

1. On place comme lampe une ampoule à incandescence qui consomme 60 W sous $U_{eff} = 220\,\text{V}$. On suppose qu'on peut la modéliser par une résistance R_l ; calculez numériquement R_l.
2. Calculez le courant efficace qui traverse la lampe lorsque le système de va-et-vient est en position allumée, puis en position éteinte. Calculez la puissance consommée dans ce dernier cas.
3. On remplace l'ampoule par une ampoule à LEDs. Celle-ci, lorsqu'elle est éteinte, se comporte en première approximation comme une résistance $R_g = 400\,\text{k}\Omega$. Calculez alors le courant efficace qui traverse la lampe, et la puissance consommée ; commentez.
4. Pour compenser ce phénomène, on propose de placer un condensateur C en parallèle de la lampe. Exprimez la nouvelle intensité $\underline{i_l}$ qui passe dans la lampe uniquement, puis sa valeur efficace $I_{l,eff}$.
   Calculez numériquement $I_{l,eff}$ puis la puissance consommée par la lampe, si $C = 100\,\text{nF}$.
   Que se passe-t-il si on augmente encore la capacité C ?

Exercice E5.17 : Relèvement du facteur de puissance [***]

Une installation électrique est branchée sur le réseau qui la relie, via des fils, à une dentrale électrique. On peut modéliser la centrale par un générateur idéal de tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et de tension efficace $U_0 = 220\,\text{V}$, les fils par une résistance $R = 80\,\text{m}\Omega$, et l'installation domestique par une impédance $\underline{Z}$.



Dans la suite, on notera $Z = |\underline{Z}|$ et $\varphi = \arg \underline{Z}$. Le cosinus de φ s'appelle le *facteur de puissance*.

1. Exprimer en fonction de Z, $\cos\varphi$, R et U_0, la puissance moyenne $\mathcal{P}_c$ consommée par l'installation, et la puissance moyenne $\mathcal{P}_f$ consommée par les fils.
2. Le fournisseur 'électricité fournit la puissance $\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c$, mais seule la seconde est facturée. On définit donc le rendement de la distribution par $e = \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c}$. Exprimez ce rendement en fonction de R, Z et du facteur de puissance.
   Comment doit être le facteur de puissance dans l'intérêt du distributeur d'électricité ?
3. Les usines possédant plusieurs moteurs ont souvent un facteur de puissance élogné de 1 ; le distributeur d'électricité leur oblige à le ramener à plus de $0,9$ en ajoutant des condensateurs en parallèle de l'installation.

Considérons par exemple une usine comportant plusieurs moteurs en parallèles, représentée globalement par une bobine de 4,7 mH en série avec une résistance de 0,3 Ω. Calculez :

— son facteur de puissance
— puis la valeur du condensateur C à placer en parallèle pour ramener le facteur de puissance à $0,95$
— les puissances $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_c$ sans ce condensateur, puis avec.

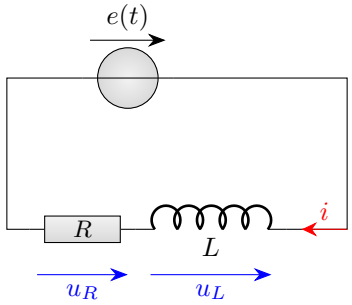
E5. Régime Sinusoïdal Forcé

TDs numériques

réponses page 624

TD numérique : Signaux sinusoïdaux et images complexes .py $x + i.y$

Ce TD a pour but d'aider à mieux cerner le rapport entre un signal sinusoïdal et son image complexe. Pour cela, on va travailler sur un simple circuit RL série :



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par i, en fonction de e et des constantes.
2. On prend : $R = 100\,\Omega$ et $L = 3\,\text{mH}$. On choisit pour $e(t)$ une tension sinusoïdale d'amplitude $E = 5\,\text{V}$, de fréquence $f = 5000\,\text{Hz}$ et de phase à l'origine 0,6 rad.
   Résolvez numériquement sous Python l'équation trouvée au 1 avec comme conditions initiales $i(0) = 0\,\text{A}$, sur une durée de 5 périodes avec 1000 points par période. Tracez la courbe $i(t)$.
3. À la main, passez l'équation de la question 1 en complexes. Isolez $\underline{i}$. À l'aide de Python, calculez $|\underline{i}(0)|$ et $\arg \underline{i}(0)$.
   Indication : pour manipuler des nombres complexes avec Python :
   - les parties imaginaires sont notées avec un `j` accolé ; par exemple `3j` ou `3+1.2j`
   - la librairie `cmath` permet de faire des calculs sur les complexes : `cmath.phase` donne l'argument, `cmath.exp` l'exponentielle,...Pour le module, on utilise la fonction `abs` native de Python
   - la librairie `numpy` permet aussi les calculs sur les complexes : `numpy.abs` donne le module, `numpy.angle` donne l'argument, `numpy.exp` l'exponentielle,...

   À partir de ces deux valeurs, tracez, sur le même graphique que la courbe de la question précédente, la courbe $i_{RSF}(t)$ en RSF, en prenant le même tableau des abscisses que pour $i(t)$. Commentez.
4. Tracez sur un autre graphique $i(t) - i_{RSF}(t)$; que représente cette courbe ?
5. Tracez, sur un autre graphique, $e(t)$ et $u_R(t)$ en RSF. Commentez.
6. *Question optionnelle* : déterminez la solution complète de l'ED avec les conditions initiales proposées.
7. On met maintenant en série la bobine $L = 3\,\text{mH}$, un condensateur $C = 220\,\text{nF}$ et une résistance $R = 15\,\Omega$, alimentés par la même tension $e(t)$. Reprenez les mêmes questions avec u_C.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b) ET (c) ET (f)
Q2.(d)
Q3.(c) ET (d)
Q4.(c)
Q5.(b)
Q6.(b) ET (d)
Q7.(b) ET (c)

Réponses au QCM : Image complexe et signal réel

Q8.(a)
Q9.(c)
Q10.(d)
Q11.(c)
Q12.(a)
Q13.(a)
$\underline{a} = 3e^{300jt}$ et $\underline{b} = \frac{9}{1+2j}e^{300jt}$.
Q14.(b)
$\underline{a} = 3e^{j(500t+0,2)}$ et $2,4.10{-}3j\omega\underline{b} + \underline{b} = 2\underline{a}$ donc $\underline{b} = \frac{2}{1+1,2j}3e^{j(500t+0,2)}$.

Réponses au QCM : Association d'impédances

Q15.(d)
Q16.(a)
Q17.(b)
Q18.(d)
Q19.(a)
Q20.(c)
Q21.(a)
Q22.(c)

Réponses au QCM : Pont diviseur de tension

Q23.(d)
Q24.(c)
Q25.(a)
Q26.(a)

Réponses au QCM : Pont diviseur de courant

Q27.(a)
Q28.(d)
Q29.(c)
Q30.(c)

Réponses au QCM : Puissance reçue par un dipôle

Q31.(c)
Q32.(d)
$\underline{Z}$ est un imaginaire pur.
Q33.(c)
Q34.(c)
Q35.(a)

Q36.(b)
Q37.(c)
Q38.(a)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E5.1 : Loi des nœuds en RSF [*]

(a) $\underline{i}(t) = \left(1,3e^{0,5j} + 1,3e^{-0,2j}\right) e^{j\omega t}$; on calcule $|\underline{i}(0)| = 2,44A$ et $\arg \underline{i}(0) = 0{,}15\,\text{rad}$ donc $i(t) = 2,44\cos(\omega t + 0,15)$

(b) $\underline{i}(t) = \left(-1,2e^{0,2j} - 1,5e^{0,6j} + 2,1e^{0,4j}\right) e^{300jt} = (-0,48 - 0,27j)\, e^{300jt}$; on calcule $|\underline{i}(0)| = 0,55A$ et $\arg \underline{i}(0) = -2{,}7\,\text{rad}$ donc $i(t) = 0,55\cos(300t - 2,7)$

Corrigé de l'exercice E5.2 : Loi des nœuds en RSF [*]

(a) $\underline{i}(t) = \left(2 + 1,5e^{j\pi/4}\right) e^{j\omega t} = (3,1 + 1,1j)\, e^{j\omega t}$; on calcule $|\underline{i}(0)| = 3,2A$ et $\arg \underline{i}(0) = 0{,}33\,\text{rad}$ donc $i(t) = 3,2\cos(\omega t + 0,33)$

(b) $\underline{i}(t) = \left(2 - 2,5e^{j3\pi/4}\right) e^{j\omega t} = (3,8 - 1,8j)\, e^{j\omega t}$; on calcule $|\underline{i}(0)| = 4,2A$ et $\arg \underline{i}(0) = -0{,}44\,\text{rad}$ donc $i(t) = 4,2\cos(\omega t - 0,44)$

(c) $\underline{i}(t) = \left(2 + e^{j\pi/2} - 0,5e^{-j\pi/2}\right) = (2 + 1,5j)\, e^{j\omega t}$; on calcule $|\underline{i}(0)| = 2,5A$ et $\arg \underline{i}(0) = 0{,}64\,\text{rad}$ donc $i(t) = 2,5\cos(\omega t + 0,64)$

Corrigé de l'exercice E5.3 : Association de dipôles [*]

Écrivez à chaque fois l'impédance équivalente, et identifiez-la avec une inductance ou une capacité ; par exemple pour la première question, $\underline{Z_{eq}} = j\left(\sum L_i\right)\omega$.

Les lois des condensateurs sont inverées : en série, $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$ tandis qu'en parallèle, $C_{eq} = \sum_i C_i$.

Corrigé de l'exercice E5.4 : Application de la loi d'Ohm généralisée [*]

(a) $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$ donc $i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{1}{RC\omega}\right)$

(b) $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}}{R + jL\omega} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$ donc $i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{L\omega}{R}\right)$

(c) $\underline{i}(t) = \underline{Y}\,\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)$ donc $i(t) = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}\cos\left(\omega t + \arctan(RC\omega)\right)$

(d) Les deux dipôles en parallèle ont une impédance équivalente $\frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$. L'impédance totale vaut donc $R + \frac{R}{1+jRC\omega} = R\frac{2+jRC\omega}{1+jRC\omega}$. Donc $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R}\frac{1+jRC\omega}{2+jRC\omega} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{R}\frac{1+jRC\omega}{2+jRC\omega}$ et $i(t) = \frac{U_0}{R}\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{\sqrt{4+R^2C^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \arctan(RC\omega) - \arctan\frac{RC\omega}{2}\right)$

Corrigé de l'exercice E5.5 : Ponts diviseurs [*]

(a) Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{3R + jL\omega} = 1,6e^{3000jt - 0,18j}$ donc on en tire $u(t) = 1{,}6\cos(3000t - 0,18)\text{V}$

(b) Par le diviseur de courant : $\underline{i}(t) = \underline{i_0}(t)\frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = 0,092e^{10000jt + 1,63j}$ d'où on tire $i(t) = 0,092\cos(10000t + 1,63)\text{A}$

Corrigé de l'exercice E5.6 : Ponts diviseurs [*]

(a) $\underline{u}(t) = \frac{R}{R + jL\omega + jL\omega}\underline{e}(t) = \frac{R}{R + 2jL\omega}E_0 e^{j\omega t}$ donc $u(t) = \frac{RE_0}{\sqrt{R^2 + (2L\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2L\omega}{R}\right)\right)$

(b) $\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + 2R}\underline{e}(t) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega}E_0 e^{j\omega t}$ donc $u(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(3RC\omega\right)\right)$

(c) $\underline{i}(t) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R}}\underline{i_0}(t) = \frac{1}{2 + jRC\omega}I_0 e^{j\omega t}$ donc $i(t) = \frac{I_0}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{RC\omega}{2}\right)\right)$

(d) $\underline{i}(t) = \frac{jC\omega}{\frac{1}{jL\omega}+jC\omega+\frac{1}{j2L\omega}}\underline{i_0}(t) = \frac{jC\omega}{\frac{3}{2jL\omega}+jC\omega}I_0e^{j\omega t}$ donc $i(t) = \frac{C\omega I_0}{C\omega-\frac{3}{2}L\omega}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$
Remarque : cette formule marche si la partie imaginaire du dénominateur est positive ; si elle est négative, il faut mettre un $-$ dans le dénominateur de l'amplitude, et changer l'argument en $-\frac{\pi}{2}$, ce qui ne change rien : la formule fonctionne en fait tout le temps.

Corrigé de l'exercice E5.7 : Calculs de tensions [**]

(a) Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{R+r+jL\omega}$ donc $\underline{u}(t) = \frac{120}{128+84j}3,5e^{j4000t} = 2,7e^{j(4000t-0,6)}$ d'où on tire $u(t) = 2,7\cos(4000t-0,6)$V

(b) Les deux impédances en parallèle s'associent en $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{j2C\omega}}{\frac{1}{j2C\omega}+\frac{R}{1+jRC\omega}}\underline{e}(t) = \frac{1+jRC\omega}{1+j3RC\omega}\underline{e}(t) = 3,0e^{j4000t-0,37j}$ d'où $u(t) = 3,0\cos(4000t-0,37)$V

(c) On associe les deux dipôles en parallèle : $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}}$ puis par le pont diviseur de tension $\underline{u}(t) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\frac{1}{r}+\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}}\underline{e}(t) = \frac{1}{1+\frac{r}{\underline{Z_{eq}}}}\underline{e}(t) = \frac{1}{1+\frac{r}{R}+\frac{r}{jL\omega}}\underline{e}(t)$. Numériquement on trouve $\underline{u}(t) = 3,27e^{j4000t+0,09j}$ donc $u(t) = 3,27\cos(4000t+0,09)$V

(d) On associe les deux dipôles en parallèle à droite : $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$; par le pont diviseur de tension $\underline{u}(t) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R+\frac{1}{jC\omega}+\underline{Z_{eq}}}\underline{e}(t) = \frac{R}{\left(R+\frac{1}{jC\omega}\right)(1+jRC\omega)+R}\underline{e}(t) = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}+3R+jR^2C\omega}\underline{e}(t) = 0,68e^{j4000t+0,95j}$ donc $u(t) = 0,68\cos(4000t+0,95)$V

(e) $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{3R}+\frac{1}{R+j3L\omega}}$ puis $\underline{u_1}(t) = \underline{Z_{eq}}\underline{i_0}(t)$ enfin par pont diviseur de tension $\underline{u}(t) = \frac{R}{R+j3L\omega}\underline{u_1}(t) = 8,5e^{j(6000t-0,37)}$ d'où on tire $u(t) = 8,5\cos(6000t-0,37)$V

Corrigé de l'exercice E5.8 : Calculs d'intensités [**]

(a) Il y a plusieurs méthodes possible ; la plus simple me semble d'associer les deux impédances à droite en une seule $\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}} = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega}$. On a alors par la loi d'Ohm : $\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{r+\underline{Z}}$. Après quelques calculs on trouve que $\frac{1}{r+\underline{Z}} = 5,7.10^{-3}e^{-0,38j}$ et on en déduit que $i(t) = 34.10^{-3}\cos(7000t+0,02)$A

(b) L'impédance des 3 dipôles de droite vaut $\underline{Z_{eq}} = R+\frac{1}{\frac{1}{2R}+j2C\omega} = R\frac{3+j4RC\omega}{1+j4RC\omega}$ ce qui donne par un premier diviseur de courant $\underline{i_1}(t) = \frac{\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}}{\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}+jC\omega}\underline{i_0}(t) = \frac{1+j4RC\omega}{1+j7RC\omega-4R^2C^2\omega^2}\underline{i_0}(t)$. Puis un second diviseur de courant donne $\underline{i}(t) = \frac{\frac{1}{2R}}{\frac{1}{2R}+j2C\omega}\underline{i_1}(t) = \frac{1}{1+j4RC\omega}\underline{i_1}(t)$. On entre tout cela dans une calculatrice, et on trouve $\underline{i}(t) = 0,146e^{-0,55j}$ donc $i(t) = 0,074\cos(500t-1,80)$A

Corrigé de l'exercice E5.9 : Étude du circuit RC série [**]

1. $\underline{u_C}(t) = \frac{1}{1+jRC\omega}E_0e^{j(\omega t-0,4)}$
   $\underline{u_R}(t) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}E_0e^{j(\omega t-0,4)}$
   $\underline{i}(t) = \frac{jC\omega E_0}{1+jRC\omega}e^{j(\omega t-0,4)}$
2. Si $\omega = 2\pi\times2200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ alors on peut calculer numériquement $\left|\frac{1}{1+jRC\omega}E_0\right| = 4,27V$ et $\arg\frac{1}{1+jRC\omega}E_0 = -0,55$.
   Donc $u_C(t) = 4,27\cos(4400\pi t-0,95)$ en (V).
   De même on trouve $u_R(t) = 2,60\cos(4400\pi t+0,62)$ (en V) et $i(t) = 13\cos(4400\pi t+0,62)$ (en mA).
3. $\arg\underline{u_C}-\arg\underline{e} = -\arctan RC\omega < 0$ donc la tension correspondante est en retard.
4. En BF, $|\underline{u_C}|$ tend vers E_0, $|\underline{u_R}|$ tend vers 0 et $|\underline{i}|$ aussi vers 0.
   En HF, $|\underline{u_C}|$ tend vers 0, $|\underline{u_R}|$ tend vers E_0 et $|\underline{i}|$ aussi vers $\frac{E_0}{R}$.

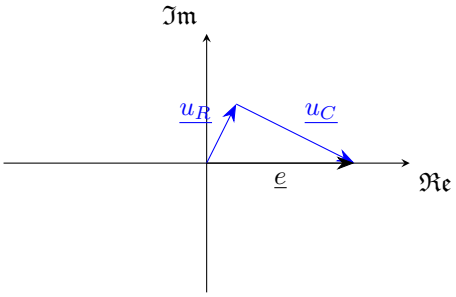


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RC série à basse fréquence

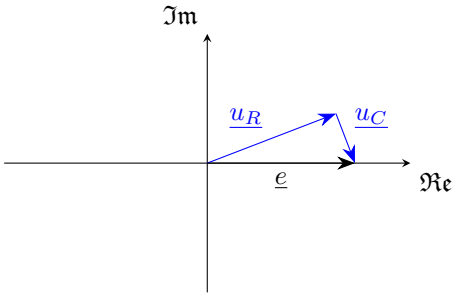
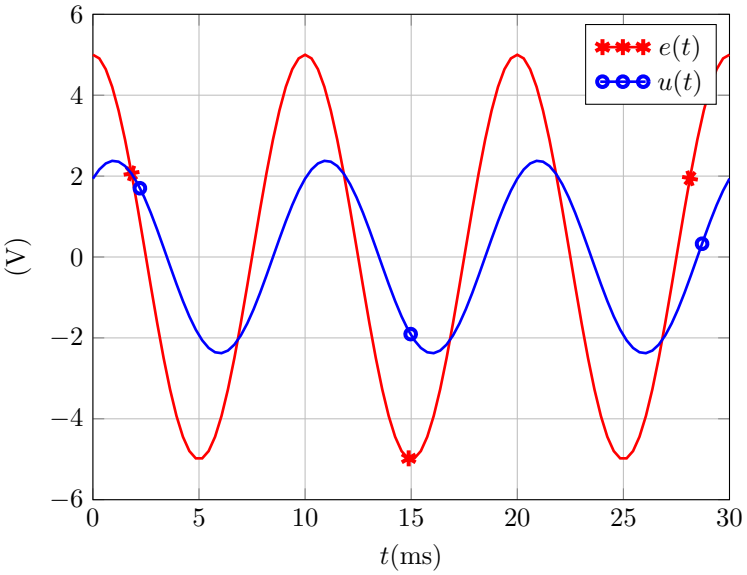


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RC série à haute fréquence

Corrigé de l'exercice E5.10 : Circuit R,RC [**]

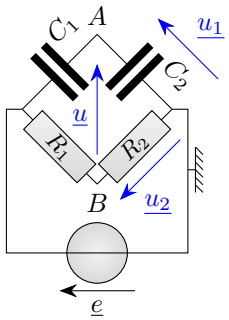
1. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$.
2. Par le diviseur de tension, après avoir associé la résistance en parralèle avec le condensateur : $\underline{u}(t) = \frac{E_0}{2+jRC\omega} e^{j\omega t}$
3. $\omega = 2\pi f = 628\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ donc $\underline{u}(t) = \frac{5}{2+0{,}65j} e^{j628t}$ donc $|\underline{u}| = \frac{5}{\sqrt{2^2+0{,}65^2}} = 2{,}38\,\text{V}$ et $\arg \underline{u}(t=0) = -0{,}31\,\text{rad} = -18°$. On a donc $u(t) = 2{,}38\cos(628t - 0{,}31)\,\text{V}$.



4. $|\underline{u}| = \frac{E_0}{\sqrt{4+R^2C^2\omega^2}} \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$. Sur le circuit équivalent en HF, le condensateur est remplacé par un fil, et la tension aux bornes d'un fil est nulle.

Corrigé de l'exercice E5.11 : Pont de Sauty [**]

1. On peut utiliser le théorème de Millman ; on va faire ici sans :



Par pont diviseur de tension : $\underline{u_1}(t) = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega}+\frac{1}{jC_2\omega}}\underline{e}(t) = \frac{C_1}{C_1+C_2}\underline{e}(t)$.

De même $\underline{u_2}(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\underline{e}(t)$.

Donc $\underline{u}(t) = \underline{u_1}(t) - \underline{u_2}(t) = \left(\frac{C_1}{C_1+C_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\underline{e}(t)$.

2. $\underline{u}(t)=0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2} \Leftrightarrow R_1C_1+R_2C_1=R_2C_1+R_2C_2 \Leftrightarrow R_1C_1=R_2C_2$.
3. $\underline{e}(t)=3e^{1600j\pi t}$ d'où on tire $\underline{u}(t)=-0,863e^{1600j\pi t}$ d'où $u(t)=0,86\cos(1600\pi t+\pi)$ en V.

Corrigé de l'exercice E5.12 : Alimentation d'un réseau domestique [**]

1. $\underline{u}(t)=U_0\sqrt{2}e^{j100\pi t}$ donc par la loi d'Ohm $\underline{i_{ll}}(t)=\frac{U_0\sqrt{2}e^{j100\pi t}}{R_{ll}+j2\pi fL_{ll}}$; de même pour les autres.
   Par la loi des nœuds : $\underline{i_{tot}}(t)=\underline{i_{ll}}(t)+\underline{i_{pi}}(t)+\underline{i_{cv}}(t)$
2. Numériquement, $\underline{i_{ll}}(t)=1,88-2.20j$ donc $I_{ll}=2,9\,\text{A}$. De même on trouve $I_{pi}=18,5\,\text{A}$ et $I_{cv}=6,5\,\text{A}$.
   À partir de la loi des nœuds, on trouve $\underline{i_{tot}}(t)=17,19-18,49j$ donc $I_{tot}=25,2\,\text{A}$. Or $I_{ll}+I_{pi}+I_{cv}=27,9\,\text{A}$: on ajoute les amplitudes complexes, mais pas les amplitudes tout court.
3. On a un nouveau courant qui s'ajoute ; on trouve $\underline{i_{tot}}(t)=17,19-11,15j$ donc $I_{tot}=20,5\,\text{A}$: sans changer le courant fourni à chaque machine, on a diminué le courant total demandé.
4. Sans condensateur, $\underline{i_{tot}}(t)=17,19-18,49j$; pour annuler la partie imaginaire, il faut que $\underline{u}(t)jC\omega=18,49j$ soit $C=\frac{18,49}{220\sqrt{2}\times100\pi}=189\,\mu\text{F}$. On a alors $I_{tot}=17,2\,\text{A}$.

Corrigé de l'exercice E5.13 : Étude d'une bobine en régime sinusoïdal forcé [**]

1. **Détermination directe de r**
   (a) Il faut remplacer la bobine par la seule résistance r.
   (b) Diviseur de tension : $U_R=\frac{R}{R+r_0+r}E_0$
   (c) On isole : $r=R\frac{E_0}{U_R}-R-r_0=29,4\,\Omega$
2. **Détermination de L à partir d'un oscillogramme**
   (a) $\underline{u_R}(t)=R\underline{i}(t)$ et $\underline{u_L}(t)=(r+jL\omega)\underline{i}(t)$ en plaçant le courant i dans le circuit, donc $\frac{\underline{u_L}(t)}{\underline{u_R}(t)}=\frac{r+jL\omega}{R}$
   (b) On prend l'argument : $\arg\underline{u_L}-\arg\underline{u_R}=\arg(r+jL\omega)-\arg(R)=\arctan\frac{L\omega}{r}>0$ donc u_L est en avance sur u_R, c'est donc la courbe de plus grande amplitude.
   (c) On mesure une période $T=1\,\text{ms}$ et un décalage temporel $\Delta t=0,17\,\text{ms}$ soit un déphasage $\Delta\phi=360\frac{0,17}{1}=61°$
   On en déduit que $L=\frac{r}{\omega}\tan(\Delta\phi)=\frac{29,4}{2000\pi}\tan(61°)=8,4\,\text{mH}$
   (d) Le rapport des amplitudes vaut $\frac{|u_L|}{|u_r|}=\left|\frac{r+jL\omega}{R}\right|=\frac{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}{R}=1,5$ ce qui correspond au schéma.

Corrigé de l'exercice E5.14 : Circuit à double maille [***]

Il n'y a pas de façon universelle d'écrire le résultat.

(a) Millman en A, en associant les deux dipôles de droite en $R_3+jL_4\omega$, donne : $\underline{v_A}(t)=\frac{\frac{\underline{e}(t)}{R_1}+\frac{0}{R_2}+\frac{0}{R_3+jL_4\omega}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3+jL_4\omega}}$.

Par le pont diviseur :
$$\begin{aligned}\underline{u}(t)&=\frac{jL_4\omega}{R_3+jL_4\omega}\underline{v_A}(t)\\&=\frac{jL_4\omega}{R_3+jL_4\omega}\times\frac{\frac{\underline{e}(t)}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3+jL_4\omega}}\\&=\frac{jL_4\omega}{R_3+jL_4\omega+\frac{R_1R_3}{R_2}+j\frac{R_1}{R_2}L_4\omega+R_1}\underline{e}(t)\end{aligned}$$

(b) Millman en A : $\underline{v_A}(t)=\frac{\frac{\underline{e}(t)}{R_1}+jC_2\omega\times0+\frac{0}{R_3+R_4}}{\frac{1}{R_1}+jC_2\omega+\frac{1}{R_3+R_4}}$.

Par le pont diviseur :
$$\begin{aligned}\underline{u}(t)&=\frac{R_4}{R_3+R_4}\underline{v_A}(t)\\&=\frac{R_4}{R_3+R_4}\times\frac{\frac{\underline{e}(t)}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+jC_2\omega+\frac{1}{R_3+R_4}}\\&=\frac{R_4}{R_3+R_4+jR_1(R_3+R_4)C_2\omega+R_1}\underline{e}(t)\end{aligned}$$

(c) Millman en A : $\underline{v_A}(t) = \frac{jC_1\omega\underline{e}(t)}{jC_1\omega+\frac{1}{R}+\frac{1}{R+\frac{1}{jC_4\omega}}}$.

Par le pont diviseur : $\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{jC_4\omega}}{R+\frac{1}{jC_4\omega}} \times \frac{jC_1\omega\underline{e}(t)}{jC_1\omega+\frac{1}{R}+\frac{1}{R+\frac{1}{jC_4\omega}}} = \frac{\frac{C_1}{C_4}}{jRC_1\omega+\frac{C_1}{C_4}+2+\frac{1}{jRC_4\omega}}\underline{e}(t)$

(d) $\underline{u}(t) = \frac{-LC\omega^2}{3-LC\omega^2-\frac{1}{LC\omega^2}}\underline{e}(t)$

Corrigé de l'exercice E5.15 : Puissance électrique consommée par une bobine [**]

1. On a $\underline{u}(t) = \sqrt{2}Ee^{j\omega t}$. Par la loi d'Ohm : $\underline{i}(t) = \frac{\sqrt{2}E}{r+jL\omega}e^{j\omega t}$ avec $\omega = 2\pi f$.
2. $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{i}(t).\underline{u}^*(t)\right] = E^2\mathfrak{Re}\left[\frac{1}{R+jL\omega}\right] = \frac{rE^2}{r^2+L^2 4\pi^2 f^2}$
3. $\mathcal{P}(\omega = 0) = \frac{E^2}{r}$ et $\mathcal{P}(\omega \to \infty) = 0$
4. $\mathcal{P} = \frac{E^2}{2r} \Leftrightarrow r^2 + L^2 4\pi^2 f^2 = 2r^2 \Leftrightarrow f = \frac{r}{2\pi L} = 61\,\text{Hz}$

Corrigé de l'exercice E5.16 : Lampe branchée sur un va-et-vient [***]

1. $R_l = \frac{U_{eff}^2}{\langle\mathcal{P}\rangle} = 807\,\Omega$.
2. Position allumée : $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R_l} = 272\,\text{mA}$

   Position éteinte : $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R_l+\frac{1}{jC_p\omega}}$ donc $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R_l^2+\frac{1}{C_p^2\omega^2}}} = 346\,\mu\text{A}$ et $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{R_l U_{eff}^2}{R_l^2+\frac{1}{C_p^2\omega^2}} = 97\,\mu\text{W}$
3. $I_{eff} = 292\,\mu\text{A}$ et $\langle\mathcal{P}\rangle = 34\,\text{mW}$: ça consomme beaucoup plus, la lampe va rester légèrement allumée.
4. La lampe et le condensateur en parallèle forment une impédance $\underline{Z_{eq}} = \frac{R_g}{1+jR_gC\omega}$. Le courant total qui circule dans le circuit vaut $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\frac{1}{jC_p\omega}+\underline{Z}}$ et le courant à travers la lampe vaut $\underline{i_l}(t) = \underline{i}(t)\frac{\frac{1}{R_g}}{\frac{1}{R_g}+jC\omega} = \frac{\underline{i}(t)}{1+jR_gC\omega} = \frac{\underline{u}}{R+R\frac{C}{C_p}+\frac{1}{jC_p\omega}}$; on en déduit que $I_{l,eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R_g^2\left(1+\frac{C}{C_p}\right)^2+\frac{1}{C_p^2\omega^2}}}$

   AN : pour $C = 100\,\text{nF}$ on trouve $I_{eff} = 26\,\mu\text{A}$ et $\langle\mathcal{P}\rangle = 0{,}27\,\text{mA}$: on a divisé par 100 la puissance consommée.

Corrigé de l'exercice E5.17 : Relèvement du facteur de puissance [***]

1. Le courant traversant l'ensemble vaut $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R+Ze^{j.\varphi}}$ donc $I_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{(R+Z\cos\varphi)^2+(Z\sin\varphi)^2}} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2+Z^2+2RZ\cos\varphi}}$ d'où on déduit que $\mathcal{P}_c = I_{eff}^2\mathfrak{Re}\left[\underline{Z}\right] = \frac{U_{eff}^2 Z\cos\varphi}{R^2+Z^2+2RZ\cos\varphi}$ et $\mathcal{P}_f = \frac{U_{eff}^2 R}{R^2+Z^2+2RZ\cos\varphi}$.
2. $e = \frac{Z\cos\varphi}{R+Z\cos\varphi} = \frac{1}{1+\frac{R}{Z\cos\varphi}}$ donc on voit que le facteur de puissance doit être le plus proche possible de 1 pour améliorer le rendement.
3. $\underline{Z} = 0,3 + 1,5j$ donc $\varphi = \arctan\frac{1,5}{0,3} = 78{,}5°$ et $\cos\varphi = 0,2$. En mettant en parallèle un condensateur, on a $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}}+jC\omega}$. On peut calculer avec ça, ou bien il existe une astuce : c'est que $\varphi = \arg\underline{Z} = -\arg\underline{Y}$ donc $\varphi = -\arg\left(\frac{1}{0,3+1,5j}+jC\omega\right) = -\arg(0,13-0,65j+jC\omega) = -\arctan\frac{C\omega-0,65}{0,13}$. On cherche à obtenir $\varphi = \arccos 0,95$, on trouve $C = 1{,}9\,\text{mF}$: il faut un gros condensateur.

   Sans condensateur, on trouve $I_{eff} = 144\,\text{A}$, $\mathcal{P}_f = 1{,}7\,\text{kW}$ et $\mathcal{P}_c = 6{,}3\,\text{kW}$ soit $e = 79\,\%$.

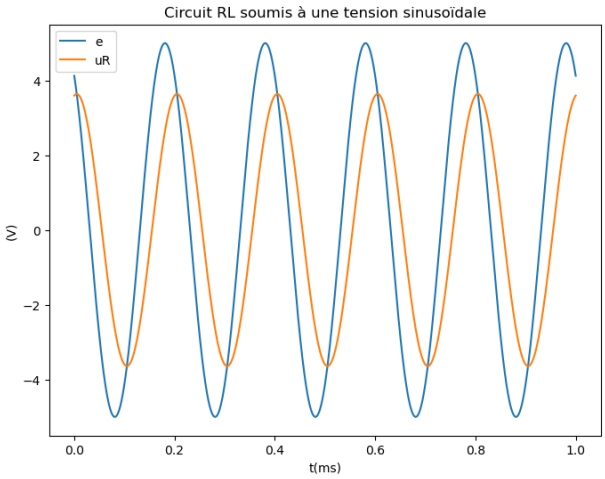
   Avec condensateur, on trouve $I_{eff} = 31\,\text{A}$, $\mathcal{P}_f = 77\,\text{W}$ et $\mathcal{P}_c = 6{,}3\,\text{kW}$ soit $e = 99\,\%$.

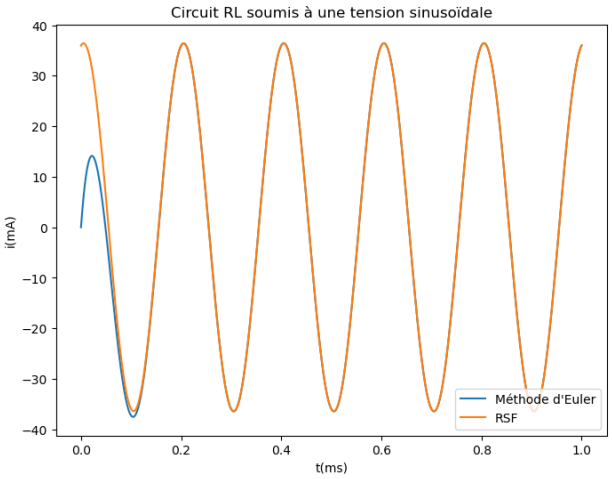
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Signaux sinusoïdaux et images complexes

Pour le RL série, l'équation différentielle $L\frac{di}{dt} + Ri = e(t)$ donne en complexes $\underline{i} = \frac{1}{R+jL\omega}\underline{e}$; avec $\underline{e}(t) = 5e^{j\omega t+0,6j}$ (en V) on trouve $\underline{i}(t) = 36,4e^{j\omega t-0,156j}$ soit $i(t) = 36,4\cos(\omega t - 0,156)$mA.

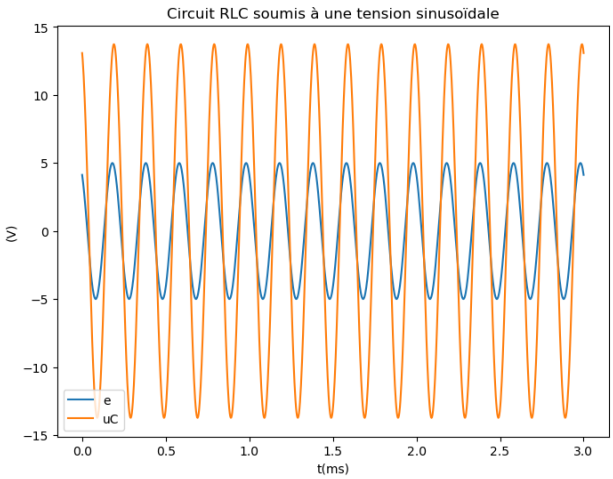
La différence entre les deux courbes fait apparaître une exponentielle : c'est le régime transitoire.

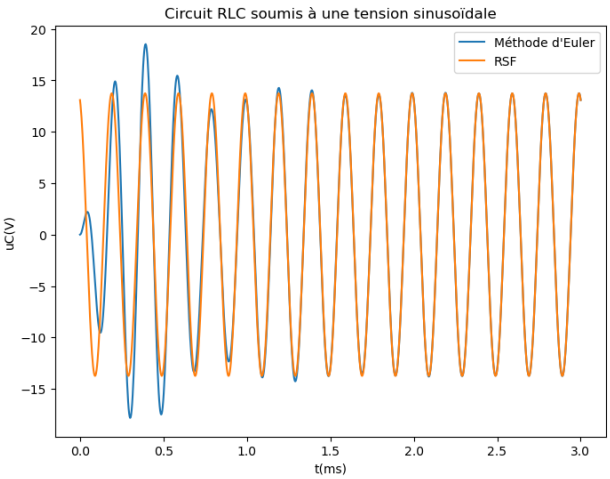




La tension u_R a une amplitude plus faible que $e(t)$ et est en retard. La différence entre la solution $i(t)$ obtenue par la méthode dEuler et celle obtenue par les complexes, est due au transitoire. Si on résout la solution complète de l'équation, on trouve $i(t) = 36,4\cos(\omega t - 0,156) + Ke^{-R/Lt}$ et les conditions initiales indiquent que $K = -36,4\cos(-0,156) = 35,9$ mA.

Avec un RLC, le transitoire est plus complexe, et peut parfois être très important si la fréquence de $e(t)$ est proche de la fréquence propre du circuit.





E6 Chapitre Résonances

Programme p.639

Cours p.626
- E6.A. Équations du RLC en RSF
- E6.B. Étude de la résonance aux bornes de la résistance
- E6.C. Étude de la résonance aux bornes du condensateur
- E6.D. Étude de la résonance aux bornes de la bobine
- E6.E. Résonance en puissance

Conseils p.640

QCMs p.641

Exercices p.642

TDs numériques p.644

E6. Résonances

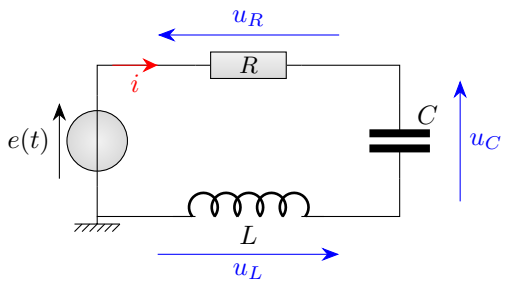
Cours

En étudiant l'électricité puis la mécanique, nous avons mis en évidence deux systèmes modèles présentant de fortes analogies : le RLC série d'une part, l'oscillateur harmonique d'autre part. Nous allons étudier dans ce chapitre le comportement du premier en RSF ; plus exactement, nous allons étudier la réponse en RSF de ce systèmes, mais en changeant de point de vue : au lieu d'étudier le signal en fonction du temps, nous étudierons uniquement son amplitude, mais en fonction de la pulsation (ou de la fréquence), afin de mettre en évidence un phénomène essentiel en physique : la résonance. Dans un prochain chapitre, nous étudierons également sa phase, et plus tard, dans le chapitre OSCILLATEURS MÉCANIQUES, la même étude sera appliquée à l'oscillateur harmonique.

E6.A. Équations du RLC en RSF

On a déjà étudié ce modèle ; on va simplement rappeler ici son équation.

FIGURE E6.1 : Circuit RLC en RSF.



Propriété : ED vérifiée par la tension du condensateur

La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation

$$\ddot{u}_C(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(E6.1)}$$

Démonstration

Par la loi des mailles : $u_C(t)+u_L(t)+u_R(t) = e(t)$ or $u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ et $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}$
donc $LC\ddot{u}_C(t) + RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = e(t)$.
En divisant par LC et en identifiant, on trouve $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, puis $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

On va donc étudier ce système en Régime Sinosoïdal Forcé, c'est-à-dire chercher la solution particulière lorsque le second membre est sinusoïdal. On pourrait commencer par étudier $\underline{u_C}$, mais en fait il vaut mieux commencer par $\underline{u_R}$.

! Dans ce chapitre, l'évolution **temporelle** de $\underline{u_C}$ ou de $\underline{u_R}$ ne nous intéresse plus vraiment ; c'est son évolution en fonction de ω qu'on étudie. On notera donc désormais $\underline{u_{C,R}}(\omega, t)$ ou même simplement $\underline{u_{C,R}}(\omega)$ [a] ou $\underline{x}(\omega)$, mais bien sûr, ces grandeurs dépendent à la fois de t et de ω.

a. Certains préfèrent la notation $\underline{u_C}(j\omega)$, car un ω va toujours de pair avec j.

Dans la suite, on considèrera donc que $e(\omega, t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude E_0 et de phase nulle pour simplifier : $e(\omega, t) = E_0\cos(\omega t)$.

E6.B. Étude de la résonance aux bornes de la résistance

Propriété : Tension aux bornes de la résistance

La tension aux bornes de la résistance vaut

$$\underline{u_R}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1+j\frac{L}{R}\omega+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{E6.2}$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes de la résistance, on peut repartir de l'équation (E6.1), mais il y a plus rapide : il suffit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u_R}(\omega,t) = \frac{R}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1+j\frac{L}{R}\omega+\frac{1}{jRC\omega}}$$

Pour mettre $\underline{u_R}$ sous forme canonique, il faut commencer par remplacer $R = \frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}}$ et on trouve $\underline{u_R}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1+jQ\sqrt{LC}\omega+\frac{Q}{j\sqrt{LC}\omega}}$. Or $\sqrt{LC} = \frac{1}{\omega_0}$ et $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$ d'où la forme proposée :

$$\underline{u_R}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Propriété : Limites de l'amplitude de la tension en basse et haute fréquence

En BF l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance vaut 0.
En HF l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance vaut 0.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe :

$$\left|\underline{u_R}\right|(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \text{ avec } E_0 = |\underline{e}|$$

En basses fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0, le numérateur tend vers E_0 et $\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ tend vers $+\infty$ donc le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $\left|\underline{u_R}\right| \underset{\omega\to 0}{\to} 0$.

En hautes fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers E_0 et $\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ tend vers $+\infty$ donc le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $\left|\underline{u_R}\right| \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0$.

Remarque : On note $\underline{u_R}(\omega,t)$ mais $\left|\underline{u_R}\right|(\omega)$: le module de l'image complexe, qui représente l'amplitude du signal, ne dépend plus du temps (la dépendance temporelle se trouvait dans le terme $e^{j\omega t}$ dont le module vaut 1).

Donc $\left|\underline{u_R}\right|$ est positive (c'est un module) et tend vers 0 en BF et en HF ; donc soit $\left|\underline{u_R}\right|$ est nulle partout, soit elle possède un maximum.

Propriété : Résonance de la tension aux bornes de la résistance

L'amplitude de la tension aux bornes de la résistance passe par un maximum à la pulsation non nulle $\omega = \omega_0$; on appelle cela une *résonance*.

Démonstration

La démonstration exacte consiste à étudier les variations de $|\underline{u_R}|$ en fonction de ω. Pour cela, on calcule la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}|\underline{u_R}|(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right) = -\frac{E_0}{2}\frac{0+2Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(\frac{1}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)}{\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{E_0Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(\frac{1}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)}{\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{3/2}}$$

donc $\frac{d|\underline{u_R}|}{d\omega} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ car on travaille sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit le tableau de variations :

ω	0		ω_0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\lvert\underline{u_R}\rvert}{\mathrm{d}\omega}$		$+$	0	$-$	
$\lvert\underline{u_R}\rvert$	0	↗	E_0	↘	0

Remarque : En exercice, on peut se contenter de montrer qu'il existe une annulation de la dérivée et admettre que c'est un maximum sans le justifier par un tableau de variations complet. On peut même faire plus simple : comme $|\underline{u_R}|$ est de la forme $\frac{\text{cst}}{\sqrt{f(\omega)}}$ on peut se contenter de dériver $f(\omega)$ par rapport à ω pour chercher une annulation de la dérivée.

Calcul : Recherche de la résonance aux bornes de R (méthode simplifiée)

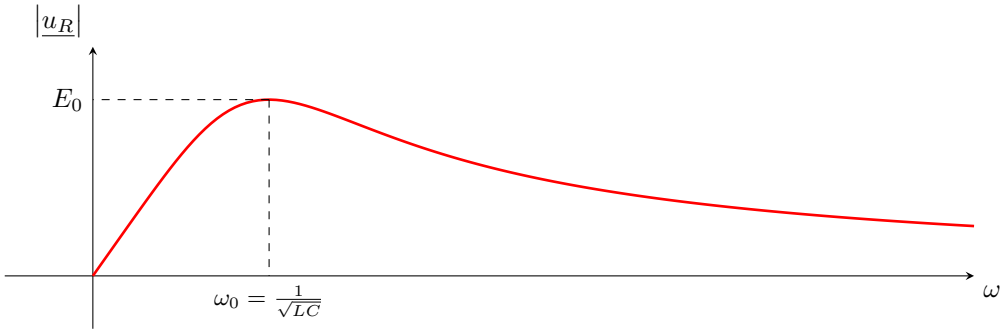
Dans un exercice, on suppose que la résonance est unique, et on écrit

$$\begin{aligned}
|\underline{u_R}|(\omega) \text{ est maximum} &\Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \text{ est maximum} \\
&\Leftrightarrow 1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \text{ est minimum} \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 + 2Q^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right).\left(\frac{1}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega^2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0
\end{aligned}$$

! On cherche le maximum de $|\underline{u_R}|(\omega)$, pas de $\underline{u_R}(\omega)$: le maximum d'une fonction complexe, ça n'a aucun sens, car il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$!

Il est alors facile de calculer le maximum : $|\underline{u_R}|(\omega_0) = E_0$ et de tracer la courbe de la figure E6.2.

FIGURE E6.2 : Allure de la courbe de résonance aux bornes de la résistance.



On a tracé cette allure de courbe en mettant des limites nulles en BF et en HF, et un maximum en ω_0 ; mais quelle est l'allure exacte de la résonance ? Est-ce un pic ou une colline ? Pour savoir cela, il faut utiliser un outil très

important :

Définition : Bande passante à -3 décibels

La bande passante à $-3\,\text{dB}$ est l'**intervalle de pulsations** (ou de fréquences) pour lesquelles $\left|\underline{u_R}\right|(\omega)$ est supérieur à $\frac{|\underline{u_R}|_{max}}{\sqrt{2}}$

L'idée de cette définition, c'est de donner une valeur de la largeur de la bosse. Pour donner une largeur, il faut se mettre d'accord sur où on mesure la largeur ; la règle universelle, c'est de prendre le maximum divisé par $\sqrt{2}$, et de mesure la largeur à cette hauteur-là. On verra plus tard pourquoi on appelle cela « à -3 décibels ».

Propriété : Largeur de la bande passante à $-3\,\text{dB}$ de la résonance en tension aux bornes de la résistance

La tension aux bornes de la résistance a une résonance dont la bande passante à $-3\,\text{dB}$ a pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Démonstration

On a vu que le maximum de $\left|\underline{u_R}\right|_{max}$ valait E_0. On cherche donc à résoudre l'équation $\left|\underline{u_R}\right|(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ pour trouver les bornes de la bande passante.

$$\left|\underline{u_R}\right|(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega} = 1 \text{ ou } Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega} = -1$$

$$\Leftrightarrow Q\omega^2 - \omega\omega_0 - Q\omega_0^2 = 0 \text{ ou } Q\omega^2 + \omega\omega_0 - Q\omega_0^2 = 0$$

ces deux polynômes ont le même discriminant : $\Delta = \omega_0^2 + 4Q^2\omega_0^2 = \omega_0^2\left(1+4Q^2\right)$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \text{ ou } \omega = \frac{-\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

On a donc 4 solutions, mais en les triant on trouve : $\frac{-\omega_0-\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} < \frac{\omega_0-\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} < 0 < \frac{-\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} < \frac{\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$. La bande passante est donc l'intervalle

$$BP_{-3\,\text{dB}} = \left[\frac{-\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}; \frac{\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right]$$

de largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} - \frac{-\omega_0+\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} = \frac{\omega_0}{Q}$.

Ainsi, voit l'influence du facteur de qualité Q : plus il est grand, plus la résonance est étroite (figure E6.3).

Pour mieux comprendre le lien entre la courbe de résonance $\left|\underline{u_R}\right|(\omega)$ et le signal temporel $u_R(t)$, l'animation de la figure E6.4 permet de faire varier la fréquence et de visualiser les variations de $u_R(t)$. En plus de l'effet d'amplitude qu'on a déjà vu, il y a aussi un effet de phase qu'on étudiera plus tard.

E6.C. Étude de la résonance aux bornes du condensateur

Nous avons vu que, aux bornes de la résistance, il y a toujours une résonance, qui a lieu pour $\omega = \omega_0$, et qui est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand. Nous allons voir s'il en est de même aux bornes du condensateur.

FIGURE E6.3 : Courbe de résonance aux bornes de la résistance en fonction du facteur de qualité.

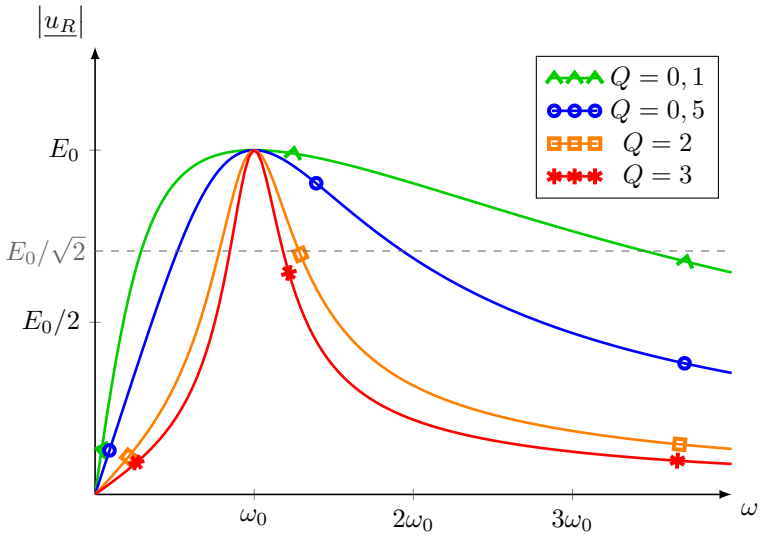
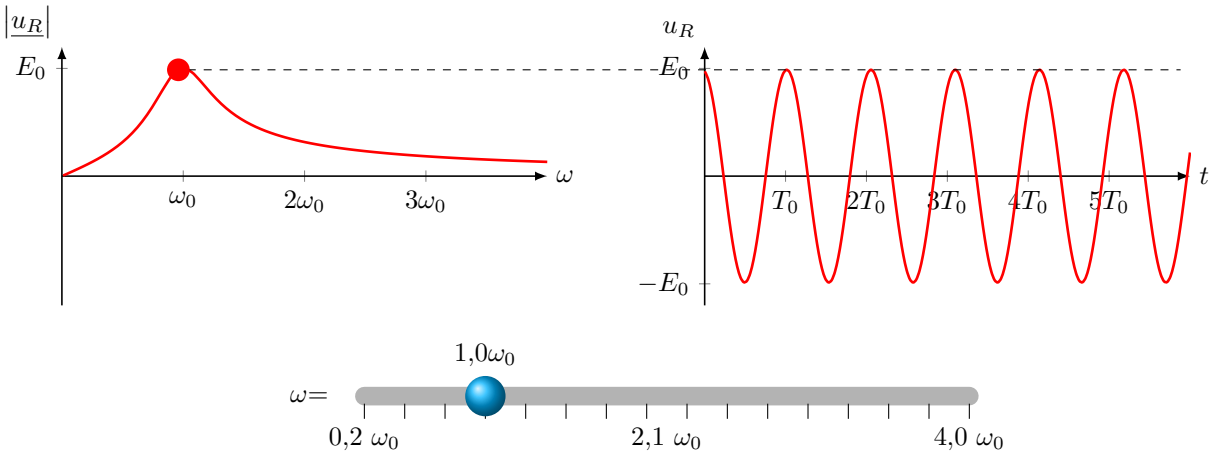


FIGURE E6.4 : Lien entre la courbe de résonance aux bornes de la résistance, et la tension aux bornes de celle-ci ; pour $Q = 2$.



Propriété : Tension aux bornes du condensateur

La tension aux bornes du condensateur vaut

$$\underline{u_C}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{E6.3}$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes du condensateur, il suffit soit de passer l'équation (E6.1) en complexes, soit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u_C}(\omega,t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}\underline{e}(\omega,t)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 + j\frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}}C\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Remarque : On trouve les mêmes expressions pour ω_0 et Q car on travaille sur le même circuit, même si ce n'est pas la même tension ; si on change de circuit, l'expression de ces grandeurs peut changer.

Propriété : Limites de la tension en basse et haute fréquence

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur tend vers $E_0 = |\underline{e}|$ en BF.
L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur tend vers 0 en HF.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe :

$$\left|\underline{u_C}\right|(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

En basses fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers 1 donc $\left|\underline{u_C}\right| \underset{\omega\to 0}{\to} E_0$.
En hautes fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $\left|\underline{u_C}\right| \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0$.

Donc $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$ part de E_0 est tend vers 0 ; est-elle strictement décroissante ?

Propriété : Résonance de la tension aux bornes du condensateur

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur possède une résonance (maximum à une pulsation non nulle) si et seulement si le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration

Comme précédemment, on va faire ici l'étude complète des variations de $\left|\underline{u_C}\right|$:

$$\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_C}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}\right) = -\frac{E_0}{2}\frac{2\left(0-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2}}{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)^{3/2}} = -\frac{E_0}{2}\frac{\frac{2\omega}{\omega_0^2}\left[2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2+\frac{1}{Q^2}\right]}{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)^{3/2}}$$

Le signe de la dérivée est donc du signe opposé à $2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{1}{Q^2}$. Il y a deux cas possibles :

— si $-2+\frac{1}{Q^2} > 0$ c'est-à-dire si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_C}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega} < 0$ d'où le tableau de variations :

ω	0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\left\|\underline{u_C}\right\|}{\mathrm{d}\omega}$	0	$-$	
$\left\|\underline{u_C}\right\|$	E_0	↘	0

— si $-2+\frac{1}{Q^2} < 0$ c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_C}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega} > 0 \Leftrightarrow 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 2 - \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow \omega < \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ (car on travaille sur $\mathbb{R}^+$) d'où le tableau de variations :

ω	0		$\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\left\|\underline{u_C}\right\|}{\mathrm{d}\omega}$	0	$+$	0	$-$	
$\left\|\underline{u_C}\right\|$	E_0	↗	$\frac{QE_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$	↘	0

Ainsi, on voit que la tension aux bornes du condensateur ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; cette résonance a alors lieu en $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ c'est-à-dire un peu avant ω_0 (contrairement à la résonance aux bornes de la résistance, qui a lieu exactement en ω_0).

Remarque : Dans un exercice, on peut se contenter de trouver l'existence d'une annulation de la dérivée.

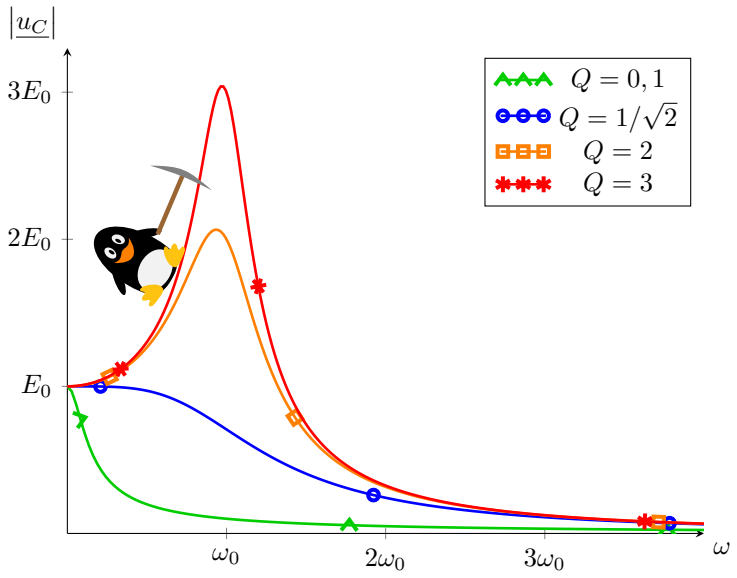
Calcul : Recherche de la résonance aux bornes de C (méthode simplifiée)

On admet que $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$ ne possède pas de point d'inflexion, mais éventuellement un maximum. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\underline{u_C}\right|(\omega) \text{ est maximum} &\Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \text{ est maximum} \\
&\Leftrightarrow \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} \text{ est minimum} \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow 2\frac{-2\omega}{\omega_0^2}.\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(-2+2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{1}{Q^2}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \omega=0 \text{ ou } \frac{\omega^2}{\omega_0^2}=1-\frac{1}{2Q^2} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \omega=0 \\ \text{ou} \\ \omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q>\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut alors tracer la courbe de $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$ pour différentes valeurs de Q (figure E6.5) ; elle fait apparaître quelque chose de très important : quand la résonance existe, le maximum de $\left|\underline{u_C}\right|$ est plus grand que E_0. Autrement dit, on alimente un circuit avec une tension E_0, et on arrive à obtenir une tension supérieure à E_0 dans le circuit : on appelle cela une *surtension à la résonance*. On peut constater en traçant différentes courbes que cette surtension augmente lorsque le facteur de qualité augmente.

FIGURE E6.5 : Courbe de résonance aux bornes du condensateur en fonction du facteur de qualité.



On pourrait alors calculer la largeur de la bande passante pour savoir si le comportement de $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$ avec Q est le même que celui de $\left|\underline{u_R}\right|(\omega)$. En fait, ce calcul est très compliqué, sauf dans un cas particulier :

Propriété : Résonance aux bornes du condensateur lorsque Q grand

Lorsque le facteur de qualité Q est grand devant 1, la résonance a lieu quasiment à ω_0, elle a pour amplitude QE_0 et pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Démonstration

On a trouvé que la résonance a lieu pour $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$; si $Q \gg 1$ alors elle a lieu quasiment pour $\omega = \omega_0$.
Le maximum vaut alors environ $\left|\underline{u_C}\right|(\omega_0) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2\omega_0^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = QE_0$.

Le reste de la démonstration est compliqué, il ne faudra pas savoir le refaire, mais il faut au moins savoir écrire l'équation vérifiée par les limites de la bande passante :

$$\left|\underline{u_C}\right|(\omega) = \frac{\left|\underline{u_C}\right|_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} = \frac{Q.E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} = \frac{2}{Q^2}$$

En posant $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et en développant, on arrive à l'équation $X^2 + \left(\frac{1}{Q^2}-2\right)X + 1 - \frac{2}{Q^2} = 0$. On calcule $\Delta = \left(\frac{1}{Q^2}-2\right)^2 - 4 + \frac{8}{Q^2} = \frac{1}{Q^4} + \frac{4}{Q^2} > 0$. Comme $Q \gg 1$, on va garder le terme en $\frac{1}{Q^2}$ (qui est très très petit) mais négliger le terme en $\frac{1}{Q^4}$ (qui est très très très très petit). On a donc $\Delta = \frac{4}{Q^2} = \left(\frac{2}{Q}\right)^2$. Les racines sont donc $X = \frac{\left(2-\frac{1}{Q^2}\right)\pm\frac{2}{Q}}{2} \approx 1 \pm \frac{1}{Q}$ en négligeant le terme $\frac{1}{Q^2}$ devant $\frac{1}{Q}$ [a].
On a alors $\omega = \omega_0\sqrt{X}$ d'après la définition de X ; donc les limites de la BP sont données par $\omega = \omega_0\sqrt{1\pm\frac{1}{Q}}$. Or, avec les développements limités en maths, on montre que pour un $\varepsilon \ll 1$, on a $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Ici $\frac{1}{Q} \ll 1$ donc $\sqrt{1\pm\frac{1}{Q}} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$. La bande passante à $-3\,\text{dB}$ est donc

$$BP_{-3\,\text{dB}} = \left[\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}\,;\omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}\right]$$

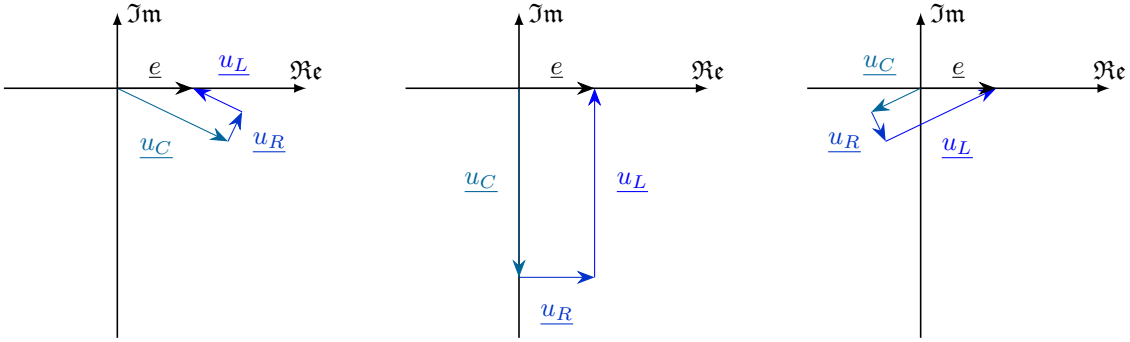
de largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

a. Ces histoires de « négliger des termes » se rapportent aux développements limités en maths. On fait un développement des racines à l'ordre 1 en $\frac{1}{Q}$.

On voit donc que, à fort facteur de qualité, les résonances aux bornes de la résistance et du condensateur ont des comportement quasiment identiques, alors que ce n'est pas le cas pour Q faible. En pratique, la limite se trouve au voisinage de $Q = 2,5$.

Remarque : On pourrait s'étonner qu'en mettant une tension d'amplitude E_0 aux bornes d'un circuit, on obtienne une tension supérieure à E_0 aux bornes d'un des composants. Cela est dû à un effet de déphasage entre les différentes tensions. La figure E6.6 illustre ce qui se passe avant la résonance, à la résonance et après la résonance.

FIGURE E6.6 : Diagramme de Fresnel du RLC série pour $Q = 2,5$.



(a) $\omega = \omega_0/1,5$ (b) $\omega = \omega_0$ (c) $\omega = 1,5\omega_0$

Cet effet est utilisé pour obtenir de fortes tensions dans différents dispositifs ; le plus spectaculaire étant les bobines de Tesla (figure E6.7) produisant, par plusieurs résonances successives, des tensions de millions de Volts créant de gigantesques étincelles.

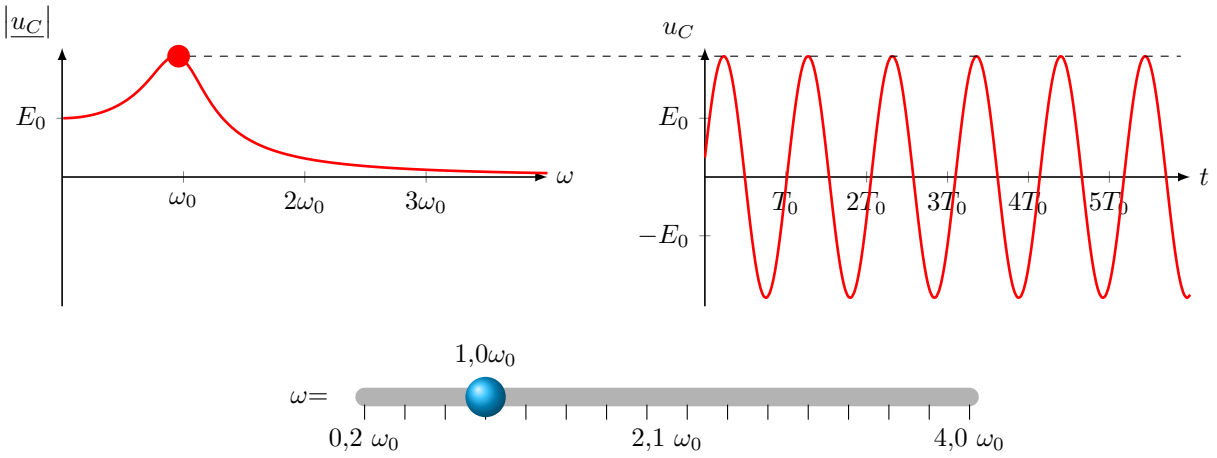
FIGURE E6.7 : Bobines de Tesla. (Crédit : Wikipedia/Antivolt)



Ce phénomène d'amplification à la résonance peut parfois être utile, mais parfois aussi destructeur, c'est pour cela qu'il n'y a pas de règle générale comme quoi il vaut mieux que Q soit grand ou petit.

L'animation de la figure E6.8 permet de faire varier la fréquence et de visualiser les variations de $u_C(t)$.

FIGURE E6.8 : Lien entre la courbe de résonance aux bornes du condensateur, et la tension aux bornes de celui-ci ; pour $Q = 2$.



E6.D. Étude de la résonance aux bornes de la bobine

Il nous reste à considérer la tension aux bornes de la bobine. Nous allons le traiter rapidement, les résultats sont les mêmes qu'aux bornes du condensateur en inversant BF et HF.

Propriété : Tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine vaut

$$\underline{u_L}(\omega,t) = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{\underline{e}(\omega,t)}{1 - j\frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \qquad \text{(E6.4)}$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes de la bobine, il suffit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u_L}(\omega,t)=\frac{jL\omega\underline{e}(\omega,t)}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{\underline{e}(\omega,t)}{1-j\frac{R}{L\omega}-\frac{1}{LC\omega^2}}=\frac{\underline{e}(\omega,t)}{1-j\frac{\sqrt{L}}{QL\sqrt{C}\omega}-\frac{1}{LC\omega^2}}=\frac{\underline{e}(\omega,t)}{1-j\frac{\omega_0}{Q\omega}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Propriété : Limites de la tension en basse et haute fréquence

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine tend vers 0 en BF.
L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine tend vers $E_0=|\underline{e}|$ en HF.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe : $\left|\underline{u_L}\right|(\omega)=\frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}}}$

En basses fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $\left|\underline{u_L}\right|\underset{\omega\to0}{\to}0$.

En hautes fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers 1 donc $\left|\underline{u_L}\right|\underset{\omega\to+\infty}{\to}E_0$.

Propriété : Résonance de la tension aux bornes de la bobine

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine possède une résonance si et seulement si le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration

Comme précédemment, on va faire ici l'étude complète des variations de $\left|\underline{u_L}\right|$:

$$\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_L}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{E_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}}}\right)=-\frac{E_0}{2}\frac{2\left(0+\frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)-\frac{2\omega_0^2}{Q^2\omega^3}}{\left(\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}\right)^{3/2}}=\frac{\frac{E_0\omega_0^2}{\omega^3}\left(2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-2+\frac{1}{Q^2}\right)}{\left(\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}\right)^{3/2}}$$

Le signe de la dérivée est donc le signe de $2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-2+\frac{1}{Q^2}$. Il y a deux cas possibles :

— si $-2+\frac{1}{Q^2}>0$ c'est-à-dire si $Q<\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_L}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega}<0$ d'où le tableau de variations :

ω	0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\left\|\underline{u_L}\right\|}{\mathrm{d}\omega}$	0	$+$	
$\left\|\underline{u_L}\right\|$	0	↗	E_0

— si $-2+\frac{1}{Q^2}<0$ c'est-à-dire si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{\mathrm{d}\left|\underline{u_C}\right|(\omega)}{\mathrm{d}\omega}>0\Leftrightarrow2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}<2-\frac{1}{Q^2}\Leftrightarrow\omega<\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ (car on travaille sur $\mathbb{R}^+$) d'où le tableau de variations :

ω	0		$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\left\|\underline{u_L}\right\|}{\mathrm{d}\omega}$	0	$+$	0	$-$	
$\left\|\underline{u_L}\right\|$	E_0	↗	$\frac{QE_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$	↘	0

Ainsi, on voit que la tension aux bornes de la bobine ne possède une résonance que si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$; cette résonance a alors lieu en $\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ c'est-à-dire un peu après ω_0.

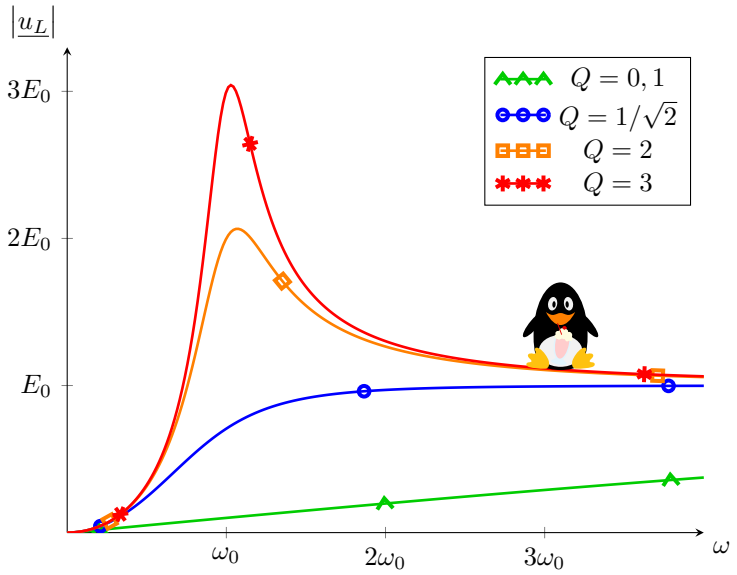
Remarque : Dans un exercice, on peut se contenter de trouver l'existence d'une annulation de la dérivée ; mieux encore, puisque $\left|\underline{u_L}\right|(\omega)$ est de la forme $\frac{\text{cst}}{\sqrt{f(\omega)}}$, on peut se contenter de chercher les pulsations telles que $\frac{\mathrm{d}f(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$. On trouve alors que $\frac{\mathrm{d}f(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\left(2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2 + \frac{1}{Q^2}\right)$, puis que :

— si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée ne s'annule jamais, donc la courbe est strictement monotone de 0 à E_0, donc elle n'a pas de résonance

— si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée s'annule en $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$; cela pourrait correspondre à un point d'inflexion, mais on admet qu'il s'agit d'un maximum.

On peut alors tracer la courbe de $\left|\underline{u_L}\right|(\omega)$ pour différentes valeurs de Q (figure E6.9) ; elle est globalement symétrique de celle de $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$.

FIGURE E6.9 : Courbe de résonance aux bornes de la bobine en fonction du facteur de qualité.



Propriété : Résonance aux bornes de la bobine lorsque Q grand

Lorsque le facteur de qualité Q est grand devant 1, la résonance a lieu quasiment à ω_0, elle a pour amplitude QE_0 et pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

On admettra cette propriété, mais pour la montrer, il suffit de suivre la même méthode qu'avec $\underline{u_C}$.

E6.E. Résonance en puissance

Le phénomène de résonance est commun à beaucoup de domaines de la physique. Dans de nombreux domaines, en particulier dans l'étude de l'infiniment petit, on n'a pas accès à d'autres grandeurs que l'énergie absorbée. On va donc calculer ici la courbe de résonance de la puissance absorbée, même si ce calcul n'est pas explicitement au programme.

Calcul : Bilan énergétique du circuit RLC

On rappelle ce bilan qu'on a déjà vu : la loi des mailles indique que $e(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) = L.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) + R.i(t)$. En multipliant par $i(t)$, il vient $e(t).i(t) = L.i(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t).u_C(t) + r.i(t)^2 = L.i(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + C.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.u_C(t) + r.i(t)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2\right) + R.i(t)^2$ soit

$$\mathcal{P}_{fournie}(t) = \frac{\mathrm{d}(E_C(t) + E_L(t))}{\mathrm{d}t} + R.i(t)^2$$

avec $E_C(t)$ et $E_L(t)$ les énergies stockées respectivement par le condensateur et la bobine, ce qui montre que la puissance fournie par le générateur est partiellement stockée dans le condensateur et la bobine, et partiellement dissipée dans la résistance par effet Joule.
Prenons la valeur moyenne : si f est une fonction T-périodique, alors $\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ par définition ; si on considère sa dérivée, sa moyenne vaut $\langle f'\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}[f]_0^T = \frac{f(T)-f(0)}{T} = 0$ par périodicité de f. On en déduit ce résultat universel : **la dérivée d'une fonction périodique a une moyenne nulle**.
En appliquant ce résultat au calcul précédent, on trouve que

$$\langle \mathcal{P}_{fournie}(t)\rangle = \left\langle Ri(t)^2\right\rangle$$

Propriété : Puissance moyenne dissipée

C'est la résistance qui dissipe de l'énergie ; la puissance moyenne reçue par la résistance vaut

$$\langle \mathcal{P}(t)\rangle(\omega) = \frac{|\underline{e}|(\omega)^2}{2R\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)} \qquad \text{(E6.5)}$$

Démonstration

D'après le calcul préliminaire, et comme $\underline{i}(\omega,t) = \frac{\underline{u_R}(\omega,t)}{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P}(t)\rangle(\omega) &= \frac{1}{2}R.\mathfrak{Re}\left[\underline{i}(\omega,t).\underline{i}(\omega,t)^*\right]\\ &= \frac{1}{2R}\left|\frac{\underline{i}(\omega)}{R}\right|^2 = \frac{1}{2R}\left|\underline{u_R}(\omega)\right|^2\\ &= \frac{1}{2R}\left|\frac{E_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right|^2\\ &= \frac{E_0^2}{2R\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

Propriété : Résonance de la puissance reçue

La puissance moyenne reçue par la résistance a des limites nulles en BF et en HF, et a une résonance en ω_0.

Démonstration

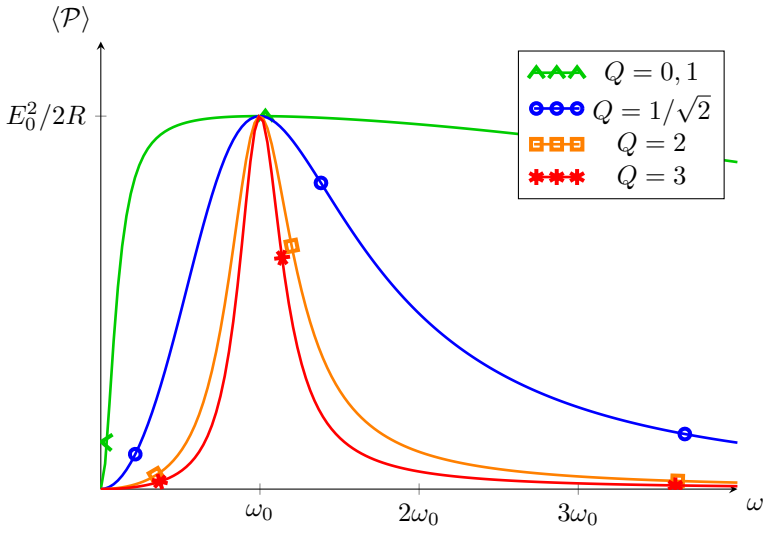
Pour les limites, c'est évident. Pour les variations, on dérive : $\frac{\mathrm{d}\langle\mathcal{P}\rangle(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{E_0^2}{4R}\frac{2Q^2\left(\frac{1}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}{\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^2}$ donc $\frac{\mathrm{d}\langle\mathcal{P}\rangle(\omega)}{\mathrm{d}\omega} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ d'où le tableau de variations :

ω	0		ω_0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\langle\mathcal{P}\rangle}{\mathrm{d}\omega}$		$+$	0	$-$	
$\langle\mathcal{P}\rangle$	0	↗	$\frac{E_0^2}{2R}$	↘	0

Remarque : Pour la puissance, on ne parle pas de largeur de bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$, mais de largeur à mi-hauteur. Pourquoi ? parce que si $|\underline{u_R}|$ est divisé par $\sqrt{2}$ alors la puissance est divisée par 2. On pourrait donc montrer facilement que la largeur à mi-hauteur de la résonance vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Cette résonance en puissance est importante, car nous avons calculé la résonance de la puissance consommée par la résistance, mais c'est aussi la résonance de la puissance fournie par le générateur. Imaginons qu'on possède un circuit électronique inconnu, et qu'on veuille étudier s'il a une résonance. Aux bornes de quel composant faut-il faire des mesures ? Peut-être même que le circuit est enfermé dans une boîte à laquelle nous n'avons pas accès. Mais il est toujours possible de mesurer, avec un wattmètre, la puissance fournie par le générateur qui alimente le circuit. Ainsi,

FIGURE E6.10 : Courbe de résonance en puissance.



la mesure de la résonance en puissance est universelle, non intrusive, ne nécessitant aucune connaissance de ce qui est à l'intérieur, et permet d'avoir accès à plusieurs paramètres caractéristiques du circuit. Comme on le verra plus loin dans le chapitre sur les OSCILLATEURS MÉCANIQUES, il peut même y en avoir plusieurs.

E6. Résonances

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateurs électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

E6. Résonances

Quelques conseils

✎ Une résonance est le maximum (à pulsation non nulle) du **module** de l'image complexe. On ne cherche pas le maximum d'une fonction complexe, car il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$; donc on ne dérive jamais $\underline{u}$ mais $|\underline{u}|$, et non plus par rapport au temps, mais par rapport à ω.

✎ Dans un exercice, pour justifier l'existence de la résonance on vous demande simplement trouver la pulsation pour laquelle la dérivée par rapport à ω de l'amplitude s'annule, sans faire tout le tableau de variations. Attention à ne pas confondre ω (la variable) et ω_0 (qui est une constante). Pensez aussi, quand l'amplitude est de la forme $\frac{\text{cst}}{\sqrt{f(\omega)}}$, à annuler uniquement la dérivée de $f(\omega)$, inutile de dériver la fraction.

✎ Tous les exemples de ce chapitre sont à savoir refaire, car même si le circuit étudié est différent, une fois mis sous forme canonique, les calculs sont les mêmes.

✎ Il faut savoir, à partir d'une courbe de résonance bien marquée ($Q \gg 1$), meurer ω_0 (pulsation du maximum) et Q (à partir de la mesure de la bande passante à $-3\,\text{dB}$).

E6. Résonances

QCMs

réponses page 645

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Le circuit RLC série est le seul circuit d'ordre 2.

(a). Faux (b). Vrai

Q2. La résonance aux bornes de la résistance existe :

(a). Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b). Si $Q > \frac{1}{2}$
(c). Si $Q > 1$ (d). Toujours

Q3. La résonance aux bornes du condensateur existe :

(a). Si $Q > 1$ (b). Si $Q > \frac{1}{2}$
(c). Toujours (d). Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Q4. La résonnance aux bornes de la résistance a lieu pour

(a). $\omega > \omega_0$ (b). $\omega < \omega_0$
(c). $\omega = \omega_0$

Q5. La résonnance aux bornes du condensateur a lieu pour

(a). $\omega = \omega_0$ (b). $\omega < \omega_0$
(c). $\omega > \omega_0$

Q6. La largeur de la BP à $-3\,\text{dB}$ de la résonance aux bornes de la résistance, ou aux bornes du condensateur lorsque $Q \gg 1$, vaut :

(a). $\frac{Q}{\omega_0}$ (b). $\frac{\omega_0}{Q}$
(c). $\frac{\omega_0}{2}$ (d). Q

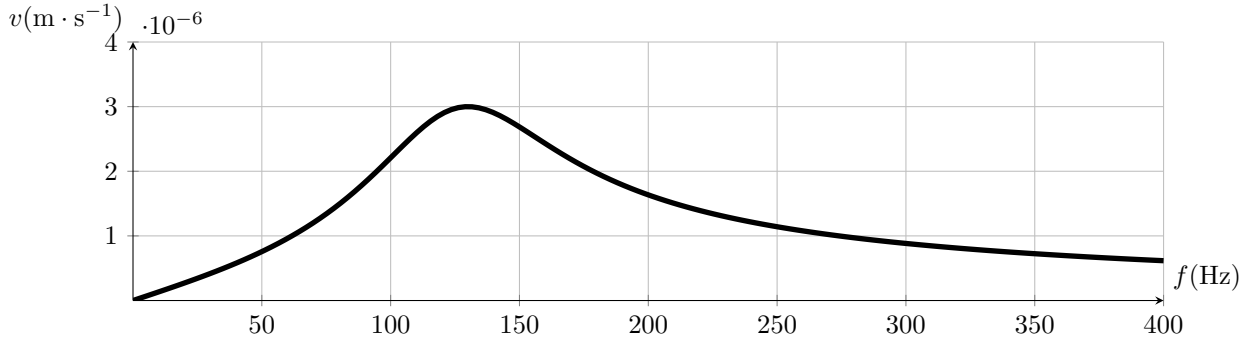
E6. Résonances

Exercices

réponses page 646

Exercice E6.1 : Lecture des caractéristiques d'un résonateur [*]

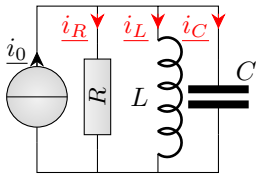
Un résonateur de Helmholtz possède la courbe de résonance suivante (équivalente à celle aux bornes de la résistance) :



Mesurez la fréquence propre, la pulsation propre, et le facteur de qualité de ce résonateur.

Exercice E6.2 : Circuit RLC parallèle [**]

Un circuit composé d'une résistance R, d'une bobine L et d'un condensateur C placés en parallèles, est alimentée par un courant sinusoïdal i_0 de pulsation ω et d'amplitude I_0.



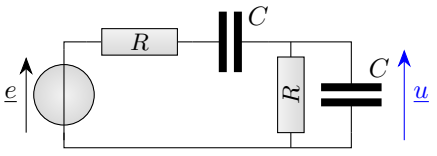
1. **Intensité dans la résistance**
   (a) Exprimez l'amplitude I_R de $\underline{i_R}$ en fonction de I_0 et des constantes.
   (b) Calculez ses limites en basse et haute fréquence.
   (c) Montrer que I_R passe par un maximum lorsque $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et exprimer sa valeur.
   (d) En déduire l'allure de la courbe de résonance de I_R.
2. **Intensité dans la bobine**
   (a) Exprimez l'amplitude I_L de $\underline{i_L}$.
   (b) Calculez ses limites en basse et haute fréquence.
   (c) Montrer que I_L passe par un maximum pour une pulsation à préciser qui n'existe que si R est plus grand qu'une certaine valeur.
   (d) En déduire l'allure de la courbe de résonance de I_L en fonction de la valeur de R.
3. **Intensité dans le condensateur**
   Mêmes questions que pour la bobine.

Exercice E6.3 : Pont de Wien [**]

Le circuit ci-contre, appelé Pont de Wien, est constitué de deux résistances R identiques et de deux condensateurs C identiques.

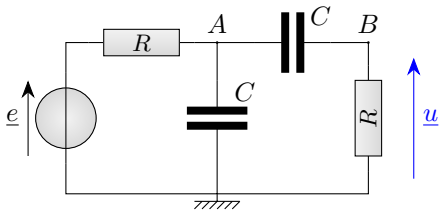
Exprimez $\underline{u}$ et mettez-le sous la forme $\dfrac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}$ en exprimant H_0, ω_0 et Q en fonction de R et C.

Vous pouvez ensuite, si vous le voulez, tracer la courbe de $|\underline{u}|$ en fonction de ω.



Exercice E6.4 : Tracé d'une courbe de résonance [***]

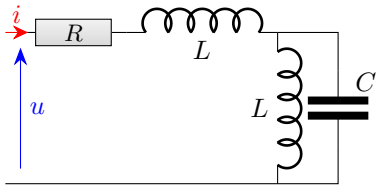
On considère le circuit ci-contre ($R = 2200\,\Omega$, $C = 220\,\text{nF}$) alimenté par une source de tension $e(t) = 10\cos(\omega t)$.



1. Indiquez l'impédance $\underline{Z}$ équivalente aux deux dipôles de droite.
2. À l'aide du théorème de Millman appliqué 2 fois, ou bien du diviseur de tension appliqué 2 fois, montrer que
$$\underline{u} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}\underline{e}$$
3. Exprimez l'amplitude U de $\underline{u}$ et trouvez ses limites en BF et HF.
4. Montrez que U passe par un maximum pour une pulsation ω à exprimer ; on en fera l'AN. Calculez numériquement U_{max}.
5. Écrire l'équation vérifiée par les pulsations ω limitant la bande passante à $-3\,\text{dB}$. Résoudre numériquement cette équation sur la calculatrice, et en déduire la bande passante, et sa largeur.
6. Tracez la courbe de U en fonction de ω.

Exercice E6.5 : Antirésonance en intensité [***]

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension $u(t) = U_0\cos(\omega t)$, qui débite un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$. On note $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\omega_1^2 = 2\omega_0^2$;



1. Montrez que l'impédance du circuit s'écrit $\underline{Z}(\omega) = R + jL\omega\dfrac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$; déduisez-en l'expression de I_0 en fonction de U_0, ω, ω_0, ω_1, R et L.
2. Trouvez les pulsations pour lesquelles I_0 est minimal, puis maximal, ainsi que les valeurs de I_0 correspondantes (normalement, il n'y a pas de gros calculs à faire). Trouvez aussi les limites en haute et basse fréquence.
3. Représentez l'allure de $I_0(\omega)$ graphiquement. On admettra que cette fonction varie de façon monotone entre 0 et ω_0, entre ω_0 et ω_1, et entre ω_1 et $+\infty$.

E6. Résonances

TDs numériques

réponses page 649

TD numérique : Résonances

ad $x+i.y$ ad $f(x)=0$

Dans ce TD nous allons utiliser Python pour faire les calculs sur les nombres complexes.

1. **RLC série**

   On construit un RLC série avec une bobine d'inductance $L = 21\,\text{mH}$, un condensateur $C = 470\,\text{nF}$ et une résistance $R = 70\,\Omega$, alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude $E = 4\,\text{V}$ et de fréquence f variable. On veut tracer la courbe de résonance aux bornes de la bobine.

   (a) Exprimez l'image complexe de la tension aux bornes de la bobine, $\underline{u_L}$, en fonction de ω puis de f.

   (b) Définissez sous Python la fonction `_uL(f)` correspondante (plus exactement, cette fonction renvoie $\underline{u_L}(f, t=0)$; le temps n'apparaît plus) ; pour obtenir le nombre complexe j en Python, on tape `1j` ; par exemple $2+3j$ peut s'écrire `2+3*1j` ou éventuellement `2+3j`.

   (c) Définissez un tableau de fréquences entre 10 Hz et 10 kHz, et générez le tableau des $\underline{u_L}$ correspondant ; générez alors :

   — le tableau des $\left|\underline{u_L}\right|$ à l'aide de la fonction `np.abs`

   — le tableau des $\arg(\underline{u_L})$ à l'aide de la fonction `np.angle`

   (d) Tracez alors $\left|\underline{u_L}\right|(f)$ et $\arg(\underline{u_L})(f)$.

   (e) À l'aide de la fonction `np.max`, mesurez l'amplitude maximale de u_L. Définissez alors une fonction `equation(f)` qui doit s'annuler pour les deux fréquences correspondant aux bornes de la bande passante à $-3\,\text{dB}$.

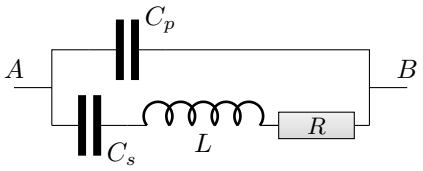
   À l'aide de la fonction `scipy.optimize.bisect`, déterminez les deux fréquences limitant la bande passante. Cette fonction prend trois arguments obligatoires : la fonction à annuler, et deux valeurs encadrant la racine recherchée ; utilisez le graphique pour proposer de bonnes valeurs de départ.

   (f) En réalité, la bobine est modélisable de façon plus réaliste par une inductance L en série avec une résistance $r = 7{,}1\,\Omega$. Reprenez le tracé de la courbe et le calcul de la bande passante.

   (g) Tracez sur le même graphique la courbe de l'amplitude pour $R = 300\,\Omega$.

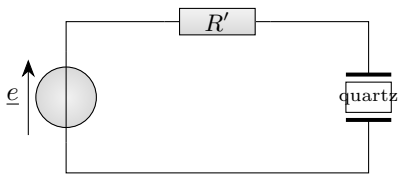
2. **Résonance d'un quartz**

   On considère maintenant le dipôle ci-contre qui modélise un quartz de montre, avec $R = 250\,\Omega$, $L = 500\,\text{mH}$, $C_s = 0{,}0800\,\text{pF}$ et $C_p = 8{,}00\,\text{pF}$:



   (a) Exprimez son impédance $\underline{Z}$ **sans chercher à la simplifier**.

   (b) On réalise un circuit série avec un générateur de tension d'amplitude $E = 5\,\text{V}$ et de fréquence f, une résistance $R' = 100\,\text{k}\Omega$ et le quartz.



   Tracez l'amplitude de la tension aux bornes du quartz, pour des fréquences comprises entre 780 kHz et 820 kHz. Commentez les deux effets observés. Mesurez la largeur de la bande passante à $-3\,\text{dB}$, et déduisez-en le facteur de qualité.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Il en existe plein d'autres, à commencer par le RLC parallèle.
Q2.(d)
Q3.(d)
Q4.(c)
Q5.(b)
En $\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$ mais lorsque Q devient grand alors cette résonance est quasiment à ω_0.
Q6.(b)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E6.1 : Lecture des caractéristiques d'un résonateur [*]

La fréquence propre est celle de la résonance, on mesure $f_0 = 130\,\text{Hz}$ donc $\omega_0 = 2\pi f_0 = 817\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Le maximum de la résonance vaut $v_{max} = 3\times10^{-6}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On cherche la bande passante à $-3\,\text{dB}$ en traçant la ligne horizontale à $v = \frac{3\times10^{-6}}{\sqrt{2}} = 2{,}12\times10^{-6}$; on trouve alors comme limites 100 Hz et 170 Hz donc la BP a pour largeur $\Delta f = 70\,\text{Hz}$. On en déduit $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1{,}9$.

Corrigé de l'exercice E6.2 : Circuit RLC parallèle [**]

1. **Intensité dans la résistance**
   (a) Par le pont diviseur de courant : $\underline{i_R}(\omega,t) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}\underline{i_0}(\omega,t) = \frac{1}{1+\frac{R}{jL\omega}+jRC\omega}\underline{i_0}(\omega,t)$ d'où $I_R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(RC\omega-\frac{R}{L\omega}\right)^2}}I_0$
   (b) $I_R(\omega)$ tend vers 0 en BF et en HF.
   (c) $I_R(\omega)$ est maximal lorsque $1+\left(RC\omega-\frac{R}{L\omega}\right)^2$ est minimal, donc lorsque $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[1+\left(RC\omega-\frac{R}{L\omega}\right)^2\right] = 0$ soit $2\left(RC+\frac{R}{L\omega^2}\right)\left(RC\omega-\frac{R}{L\omega}\right) = 0$. Seule la seconde parenthèse peut s'annuler, lorsque $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; on a alors $I_{R,max} = I_0$.
   (d) C'est la même que $\left|\underline{u_R}\right|(\omega)$ dans le cours.
2. **Intensité dans la bobine**
   (a) Par le pont diviseur de courant, après quelques calculs : $I_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}I_0$
   (b) Limite I_0 en BF et 0 en HF.
   (c) Même raisonnement :
   $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(1-LC\omega^2\right)^2+\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow -4LC\omega(1-LC\omega^2)+2\frac{L^2}{R^2}\omega = 0 \Leftrightarrow 2\omega\left(\frac{L^2}{R^2}-2LC+2L^2C^2\omega^2\right) = 0$
   ce qui a pour solutions $\omega = 0$ et $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{2R^2C^2}}$; cette deuxième solution correspond au maximum, qui n'existe que si $\frac{1}{LC} > \frac{1}{2R^2C^2}$ soit $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$
   (d) C'est la même que $\left|\underline{u_C}\right|(\omega)$ dans le cours ; résonance si R est grand, pas de résonance sinon.
3. **Intensité dans le condensateur**
   (a) $I_C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{LC\omega^2}\right)^2+\left(\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}I_0$
   (b) Limite 0 en BF et I_0 en HF.
   (c) Ce calcul est un peu plus compliqué (comme $\left|\underline{u_L}\right|$ dans le cours). En allant vite :
   $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(1-\frac{1}{LC\omega^2}\right)^2+\left(\frac{1}{RC\omega}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{LC\omega^3}\left(1-\frac{1}{LC\omega^2}\right)-\frac{2}{R^2C^2\omega^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\omega^3}\left[\frac{2}{LC}-\frac{2}{L^2C^2\omega^2}-\frac{1}{R^2C^2}\right] = 0$
   ce qui a pour seule solution $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC-\frac{L^2}{2R^2}}}$ qui n'existe que si $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$
   (d) C'est la même que $\left|\underline{u_L}\right|$ dans le cours ; résonance si R est grand, pas de résonance sinon.

Corrigé de l'exercice E6.3 : Pont de Wien [**]

On associe les deux impédances à droite en une seule $\underline{Z_{eq}}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}(\omega,t) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{1+\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}\left(R+\frac{1}{jC\omega}\right)}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{1+\left(R+\frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R}+jC\omega\right)}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}}\underline{e}(\omega,t)$. En identifiant, on trouve $H_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

On obtient alors une courbe de résonance semblable à $\left|\underline{u_R}\right|$ dans le cours.

Corrigé de l'exercice E6.4 : Tracé d'une courbe de résonance [***]

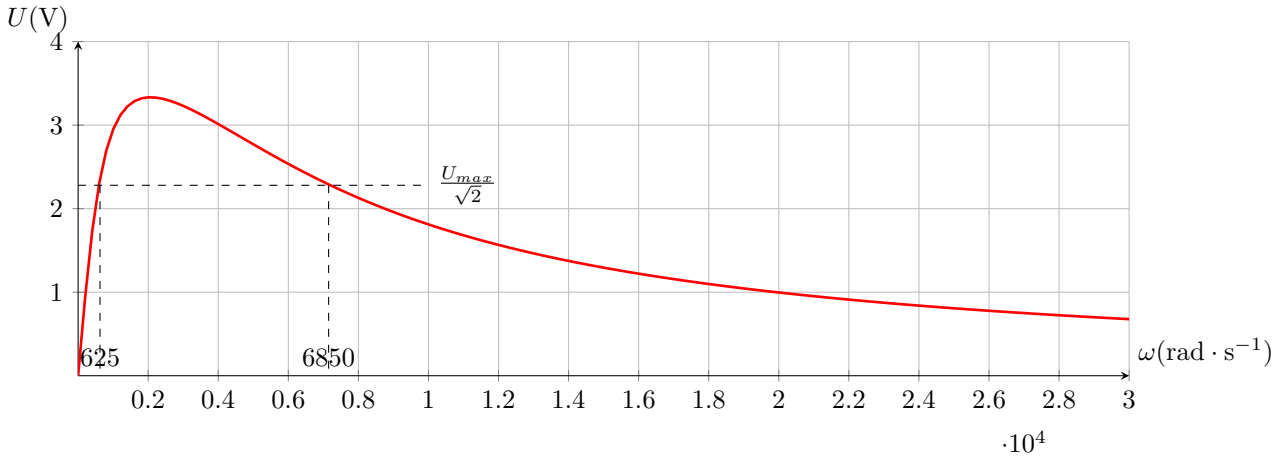
1. $\underline{Z}(\omega) = R + \frac{1}{jC\omega}$
2. Méthode avec Millman en A puis B : $\underline{v_A}(\omega,t) = \frac{\frac{\underline{e}(\omega,t)}{R}}{\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{\underline{Z}}}$ et $\underline{v_B}(\omega,t) = \frac{jC\omega\underline{v_A}(\omega,t)}{jC\omega+\frac{1}{R}} = \underline{u}(\omega,t)$ donc

$$\underline{u}(\omega,t) = \frac{1}{1+jRC\omega+\frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}}}\frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{1+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}+1+1}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}}\underline{e}(\omega,t)$$

Méthode avec le pont diviseur de tension, en notant $\underline{u'}(\omega,t)$ la tension entre la masse et A, on a $\underline{u'}(\omega,t) = \frac{\frac{1}{\underline{Z}+jC\omega}}{\frac{1}{\underline{Z}+jC\omega}+R}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{1+\frac{R}{\underline{Z}}+jRC\omega}\underline{e}(\omega,t)$ puis

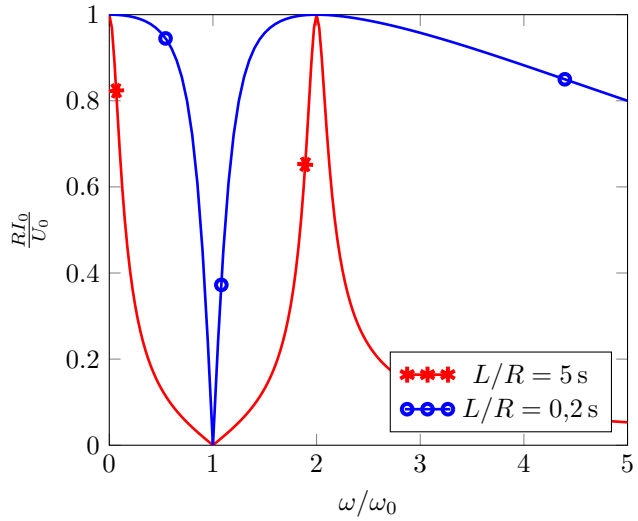
$$\underline{u}(\omega,t) = \frac{R}{\underline{Z}}\underline{u'}(\omega,t) = \frac{1}{\frac{Z}{R}+1+jRC\omega\frac{Z}{R}}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}+1+jRC\omega+1}\underline{e}(\omega,t) = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}}\underline{e}(\omega,t)$$

3. $U(\omega) = \frac{10}{\sqrt{9+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$ qui a pour limites 0 en BF et en HF.
4. $U(\omega)$ est maximum si $9+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2$; pour le déterminer, on dérive :
   $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(9+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2\right) = 2\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)\left(RC+\frac{1}{RC\omega^2}\right)$ qui s'annule lorsque $\omega = \frac{1}{RC}$.
   Donc $U(\omega)$ est maximum lorsque $\omega = \frac{1}{RC} = 2070\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $U_{max} = \frac{10}{3} = 3{,}33\,\mathrm{V}$.
5. Les bornes de la BP sont les pulsations telles que $U(\omega) = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ soit $\frac{10}{\sqrt{9+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}} = \frac{10}{3\sqrt{2}}$. Après quelques calculs, on aboutit à l'équation $\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2 = 9$. On la résout numériquement : la BP est $[625;6850]\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ de largeur $6225\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
6.



Corrigé de l'exercice E6.5 : Antirésonance en intensité [***]

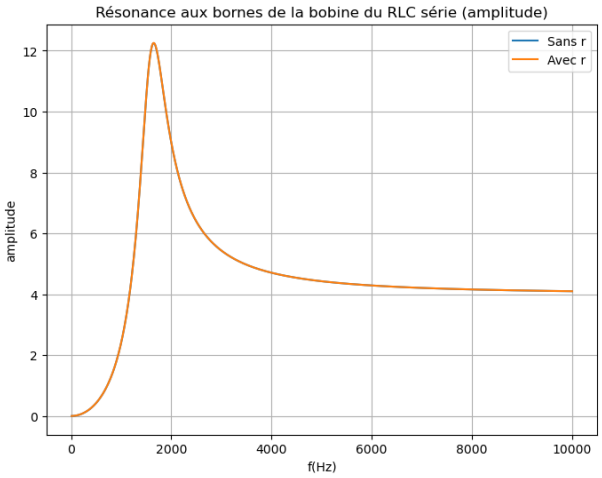
1. $\underline{Z}(\omega) = R + jL\omega + \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2} = R + jL\omega\frac{2-LC\omega^2}{1-LC\omega^2} = R + jL\omega\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$
   $I_0(\omega) = \frac{|\underline{u}|\,(\omega)}{|\underline{Z}|(\omega)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2}}$
2. Le dénominateur de I_0 contient un terme constant et un terme qui dépend de ω : $\left(L\omega\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2$. Les extrêma de I_0 correspondent donc à des extrêma de ce terme. Or il est facile de voir que ce terme est toujours positif, s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$, et diverge pour $\omega = \omega_0$; il tend vers l'infini quand ω tend vers l'infini. On en déduit donc que I_0 a un maximum en 0 qui vaut $\frac{U_0}{R}$ un minimum en ω_0 qui vaut 0, un maximum en ω_1 qui vaut $\frac{U_0}{R}$, et tend vers 0 quand ω tend vers l'infini.
3. Voici deux courbes exactes tracées pour deux valeurs différentes de $\frac{L}{R}$.

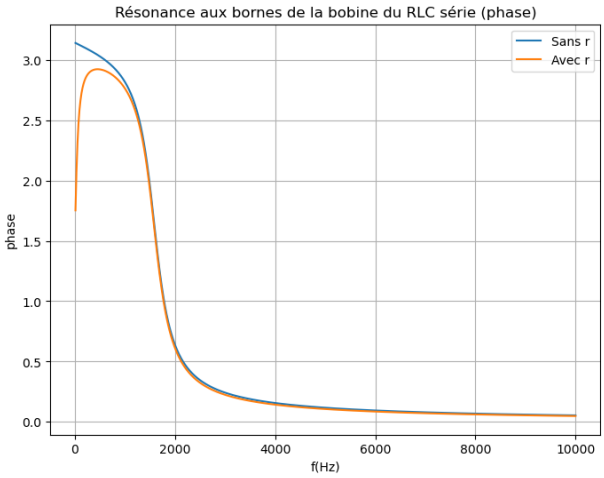

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
$\frac{RI_0}{U_0}$
ω/ω_0
$L/R = 5\,\mathrm{s}$
$L/R = 0{,}2\,\mathrm{s}$

Réponses aux TDs numériques

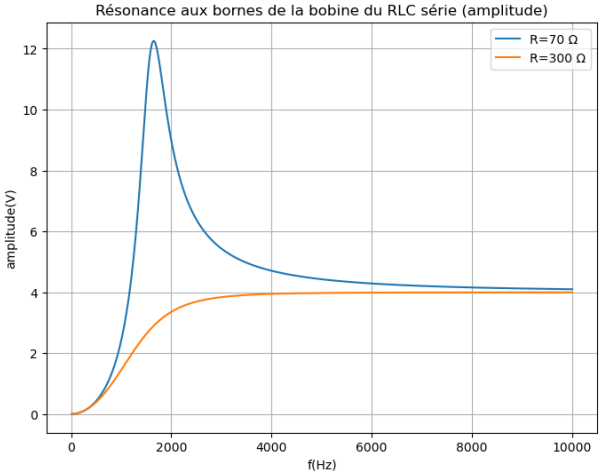
Réponses au TD d'info : Résonances

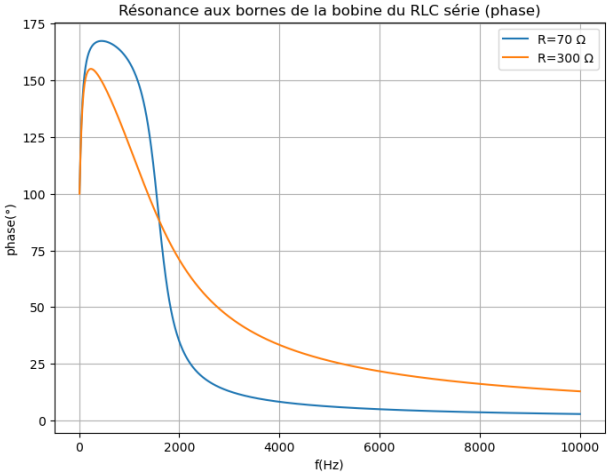
On a simplement $\underline{u_R} = \frac{RE}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}$:



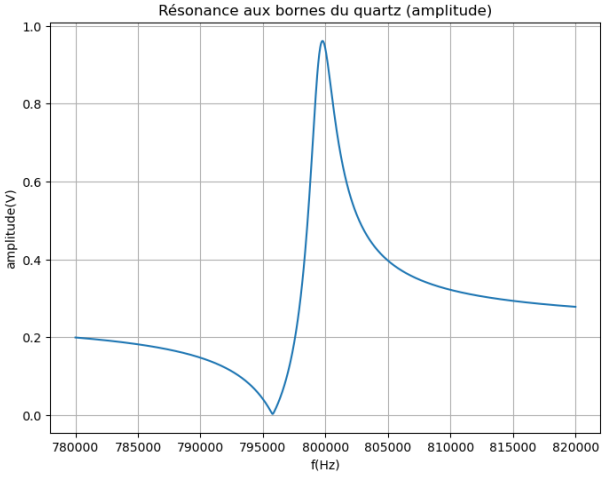


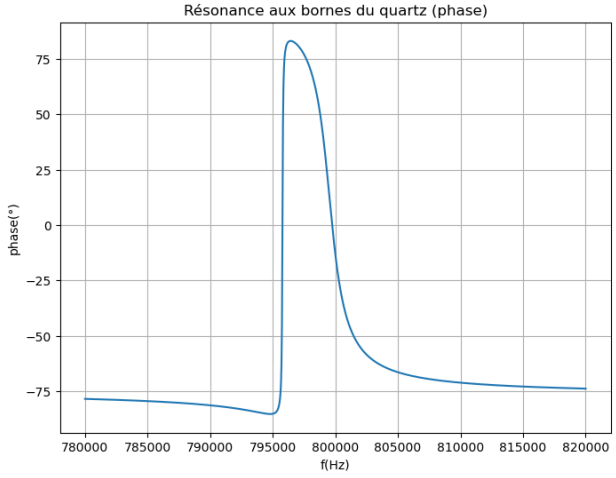
Les limites de la bande passante à $-3\,\text{dB}$ valent $1420\,\text{Hz}$ et $2037\,\text{Hz}$ en l'absence de r, puis $1409\,\text{Hz}$ et $2113\,\text{Hz}$ en tenant compte de r.





L'impédance du quartz vaut $\underline{Z} = \frac{1}{jC_p\omega+\frac{1}{R+jL\omega+\frac{1}{jC_s\omega}}}$; puis on effectue un pont diviseur de tension :





On constate une résonance à $800\,\text{kHz}$ et une antirésonance à $796\,\text{kHz}$.

E7 Chapitre Filtres linéaires

Programme p.669

Conseils p.670

Cours p.652
- E7.A. Les filtres
- E7.B. Étude des filtres linéaires
- E7.C. Filtrage d'un signal périodique quelconque

QCMs p.671

Exercices p.674

TDs numériques p.679

E7. Filtres linéaires

Cours

L'étude du régime sinusoïdal forcé a mis au jour un comportement très important des systèmes physique, qu'ils soient électriques, mécaniques ou autres : leur comportement dépend de la fréquence ; la résonance en est un exemple. En fait, tout système physique réagit, lorsqu'il est soumis à une source périodique, d'une manière qui dépent de la fréquence (ou de la période) de cette source. Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés générales des systèmes physiques soumis à des signaux sinusoïdaux ; l'électricité en est un domaine important, dans le traitement du signal, mais ce chapitre sera très général ; on étudiera plus en détail les filtres électroniques dans le chapitre suivant.

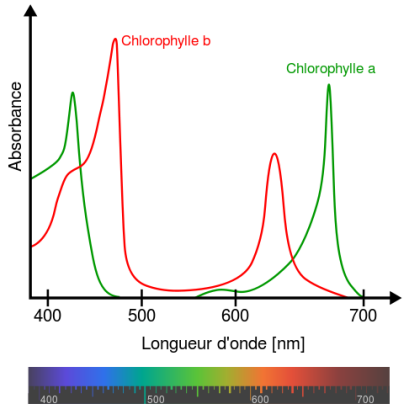
E7.A. Les filtres

Définition : Filtre

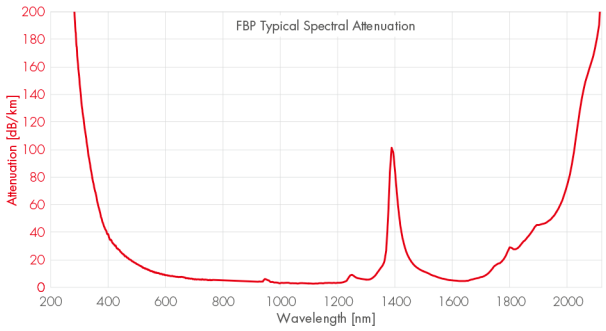
Un filtre est un système qui reçoit en entrée un signal, et donne en sortie un autre signal, de nature identique ou différente, modifiée en fonction de ses caractéristiques, en particulier sa fréquence.

Considérons par exemple une feuille d'arbre : elle reçoit de la lumière blanche, et renvoie de la lumière verte. Si on lui envoie dessus successivement de la lumière de diverses couleurs, du rouge au bleu, on verra que certaines couleurs sont renvoyées, tandis que d'autres sont absorbées. Pour aller plus loin, on peut extraire la chlorophylle qu'elle contient et réaliser son spectre d'absorption (figure E7.1). Ce spectre montre que les couleurs rouges et bleues sont absorbées, tandis que la couleur verte ne l'est pas. La chlorophylle agit donc comme un filtre : elle reçoit de la lumière, et en renvoie plus ou moins en fonction de la longueur d'onde, donc de la fréquence. Sur la même figure, on voit le spectre d'absorption des fibres optiques qui servent à transmettre les informations numériques. [1]

FIGURE E7.1 : Spectres d'absorptions.



(a) Spectre d'absorption de différentes chlorophylles. (Crédit : Wikipedia/D. Pugliesi)

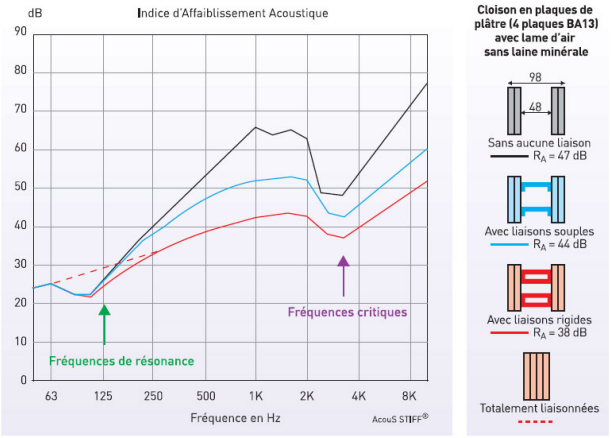


(b) Spectre d'atténuation d'une fibre optique à large spectre. (Crédit : Lasercomponent)

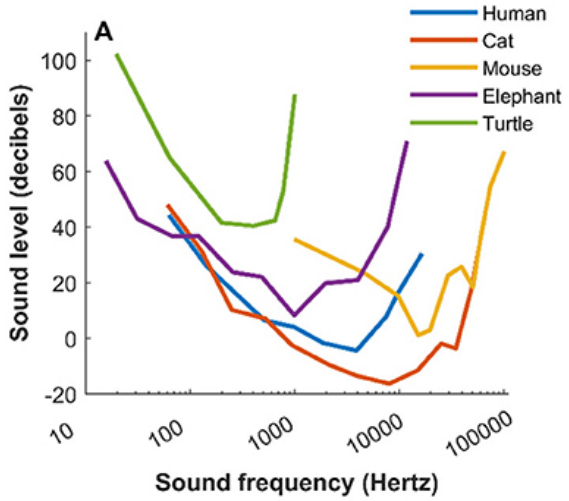
Mais l'optique n'est pas le seul domaine où on trouve des filtres ; l'acoustique en est un autre (figure E7.2). Une paroi ou une vitre permettent d'atténuer le son : elles agissent comme des filtres sonores. Dans la pratique, on constate assez bien que les sons aigus (donc de fréquence élevée) passent assez mal les murs ou les fenêtres, tandis que les sons graves (de basse fréquence) les traversent mieux ; quand au grondement très grave du tonnerre, il n'est absolument pas atténué par les murs : on retrouve le principe d'une transmission du signal qui dépend de la fréquence. De même, l'oreille des animaux a une sensibilité qui varie en fonction de la fréquence, ce qui traduit un filtrage du signal sonore entendu [2] (figure E7.2).

1. On ne s'intéressera pas pour le moment à ce que représente l'échelle verticale.
2. L'oreille est un filtre un peu différent des autres, en ce que la sortie n'est pas un signal analogique, mais nerveux.

FIGURE E7.2 : Exemples de filtres sonores.



(a) Indice d'affaiblissement acoustique de différentes cloisons doubles en plaques de plâtre. *(Crédit : MD)*

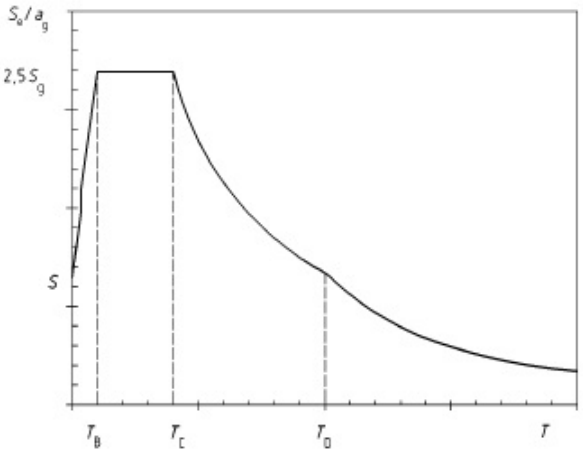


(b) Seuil d'audition de quelques animaux.(Crédit : Sumner, Bergevin, Oxenham and Shera)

Les filtres mécaniques ne sont pas de reste. Les suspensions des voitures servent à atténuer les vibrations de la route ; les ingénieurs adaptent cette réponse fréquentielle au comportement voulu pour la voiture. De même, la figure E7.3, montre l'allure de l'accélération maximale admissible d'un immeuble en fonction de la période des ondes sismiques.

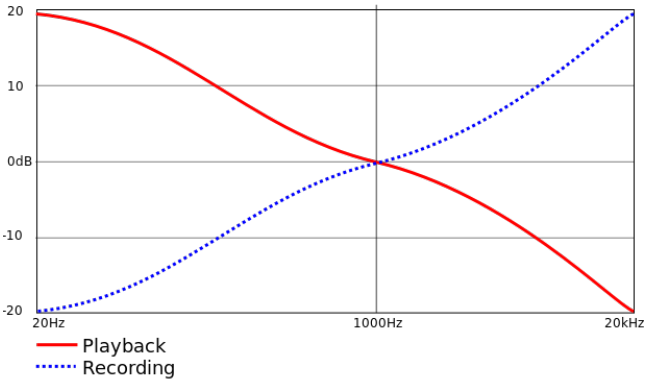
FIGURE E7.3 : Norme européenne NF EN 1998-1 de réponse d'un bâtiment à un séisme.

Classe de sol	S	T_B(s)	T_C(s)	T_D(s)
A	1	0,15	0,4	2
B	1,2	0,15	0,5	2
C	1,15	0,2	0,6	2
D	1,35	0,2	0,8	2
E	1,4	0,15	0,5	2



Il existe ainsi des filtres dans tous les domaines de la physique ; en électricité, par exemple, la figure E7.4 représente les caractéristiques normalisées d'un filtre électronique placé à la sortie des platines lisant les disques vinyle.

FIGURE E7.4 : Courbe de filtrage normalisée RIAA d'une platine tourne disque.(Crédit : Wikipedia/Iainf)





E7.B. Étude des filtres linéaires

B.1. Propriétés d'un filtre linéaire

Définition : Filtre linéaire

Un filtre est linéaire s'il vérifie les propriétés suivantes :

— Si on multiplie par $k \in \mathbb{R}$ le signal d'entrée, le signal de sortie est multiplié par k

— Si on met en entrée la somme de deux signaux, on obtient en sortie la somme des sorties correspondantes.

Autrement dit :

$$\text{si } \begin{cases} e_1(t) & \xrightarrow{\text{filtre}} s_1(t) \\ e_2(t) & \xrightarrow{\text{filtre}} s_2(t) \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} k.e_1(t) & \xrightarrow{\text{filtre}} k.s_1(t) \\ e_1(t)+e_2(t) & \xrightarrow{\text{filtre}} s_1(t)+s_2(t) \end{cases}$$

La grande majorité des filtres que nous avons vus sont linéaires. L'oreille ne l'est pas ; c'est d'ailleurs ce qui est à la base de la compression du son en MP3.

Propriété : Action d'un filtre linéaire sur un signal sinusoïdal

Si on met en entrée d'un filtre linéaire un signal sinusoïdal de pulsation ω, on obtient en sortie un signal sinusoïdal de même pulsation.

Il s'agit d'une propriété mathématique que admettrons.

Considérons donc un signal $e(t) = E_0.\cos(\omega t + \varphi_e)$ en entrée ; alors la sortie est de la forme $s(t) = S_0.\cos(\omega t + \varphi_s)$. Le filtre a donc eu 2 effets : il a modifié l'amplitude, et la phase.

Pour l'écrire de manière plus simple, considérons les images complexes : $\underline{e}(\omega,t) = E_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi_e}$ et $\underline{s}(\omega,t) = S_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi_s}$. Si on calcule le rapport : $\dfrac{\underline{s}(\omega,t)}{\underline{e}(\omega,t)} = \frac{S_0}{E_0} e^{j(\varphi_s-\varphi_e)}$: il ne dépend plus du temps, mais il peut sans doute dépendre de la fréquence (ou de la pulsation), puisqu'on a dit que le filtre modifie différemment les différentes fréquences.

Définition : Fonction de transfert

On définit la fonction de transfert comme le rapport entre l'image complexe $\underline{s}(\omega,t)$ de la sortie et de l'image complexe $\underline{e}(\omega,t)$ de l'entrée du filtre :

$$\underline{H}(\omega) \ ^a = \frac{\underline{s}(\omega,t)}{\underline{e}(\omega,t)}$$

Alors si on met en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation ω, on obtiendra en sortie un signal de même pulsation, amplifié d'un facteur $|\underline{H}(\omega)|$ et déphasé de $\arg \underline{H}(\omega)$, où $\underline{H}$ est calculé à la pulsation du signal d'entrée :

$$e(t) = E\cos(\omega t+\varphi) \xrightarrow{\text{filtre}} s(t) = |\underline{H}(\omega)|\,.E\cos(\omega t+\varphi+\arg \underline{H}(\omega)) \qquad \text{(E7.1)}$$

a. Certains préfèrent noter $\underline{H}(j\omega)$ pour rappeler que ω va toujours avec un j.

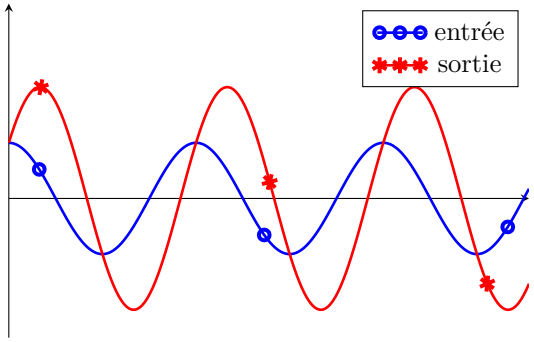
Démonstration

Par définition, $\underline{e}(\omega,t) = Ee^{j(\omega t+\varphi)}$ et d'après la définition de la fonction de transfert, $\underline{s}(\omega,t) = \underline{H}(\omega)Ee^{j(\omega t+\varphi)} = |\underline{H}(\omega)|\,e^{j\arg \underline{H}(\omega)}Ee^{j(\omega t+\varphi)} = |\underline{H}(\omega)|\,Ee^{j(\omega t+\varphi+\arg \underline{H}(\omega))}$.

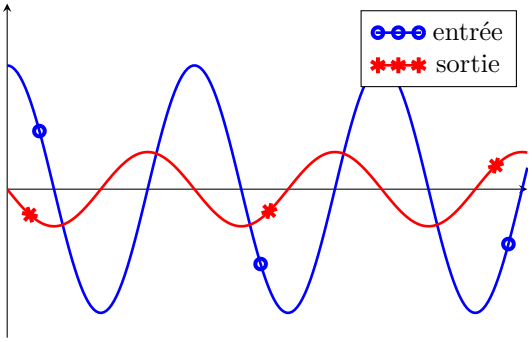
La figure E7.5 montre l'effet d'un filtre dans deux cas particuliers.

Remarque : Un filtre linéaire est un filtre dans lequel la sortie et l'entrée sont reliées par une équation différentielle linéaire. La fonction de transfert est la transcription dans le domaine des complexes de cette relation. Par exemple, si un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{1+j\alpha\omega}{2+j\beta\omega}$. Cela signifie que $\frac{\underline{s}(\omega,t)}{\underline{e}(\omega,t)} = \frac{1+j\alpha\omega}{2+j\beta\omega}$ donc que $(2+j\beta\omega)\underline{s}(\omega,t) = (1+j\alpha\omega)\underline{e}(\omega,t)$ donc que $s(t)$ et $e(t)$ (signaux réels) sont reliés par l'équation différentielle $2s(t)+\beta\dot{s}(t) = e(t)+\alpha\dot{e}(t)$. L'étude que l'on fait ici du régime sinusoïdal forcé ne tient compte que de la solution particulière de cette équation, c'est-à-dire du régime permanent ; mais il faut garder à l'esprit qu'un filtre possède aussi un régime transitoire : le filtrage met un certain temps à se mettre en place ; on verra d'ailleurs dans le prochain chapitre que ce régime transitoire est relié à la réponse fréquentielle du filtre.

FIGURE E7.5 : Exemples de l'effet d'un filtre linéaire sur un signal sinusoïdal.



(a) Effet d'un filtre tel que $|\underline{H}| = 2$ et $\arg \underline{H} = -60°$



(b) Effet d'un filtre tel que $|\underline{H}| = 0{,}3$ et $\arg \underline{H} = +90°$

B.2. Diagramme de Bode

Les deux caractéristiques d'un filtre sont donc le module et l'argument de sa fonction de transfert, et surtout comment ils varient en fonction de la pulsation ou de la fréquence. On pourrait donc tracer ces deux fonctions, mais la lecture de $|\underline{H}|$ sera difficile. En effet, un filtre va souvent être utilisé pour… filtrer, c'est-à-dire éliminer certaines fréquences. Pour éliminer un signal, il faut multiplier son amplitude par un petit nombre. Si $|\underline{H}| = 0{,}1$, c'est pas mal ; si $|\underline{H}| = 0{,}01$, c'est mieux ; si $|\underline{H}| = 0{,}001$ c'est encore mieux. Or sur une échelle classique, il est très difficile de faire la différence entre de si petites valeurs. On définit donc le gain du filtre :

Définition : Gain en décibels d'un filtre

On définit le gain en décibels du filtre :

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \qquad \text{(E7.2)}$$

qui, comme son nom l'indique, se mesure en décibels (dB).

À l'inverse, si on connaît le gain, alors $|\underline{H}| = 10^{G_{\text{dB}}/20}$.

Remarque : Il est bon de connaître quelques valeurs particulières de gain :

- un gain de 0 dB correspond à une amplitude inchangée : $|\underline{H}| = 1$
- un gain de +20 dB correspond à une amplitude multipliée par 10 : $|\underline{H}| = 10$
- un gain de −20 dB correspond à une amplitude divisée par 10 : $|\underline{H}| = 0{,}1$
- un gain de −40 dB correspond à une amplitude divisée par 100 : $|\underline{H}| = 0{,}01$
- etc…
- un gain de −3 dB correspond à une amplitude divisée par $\sqrt{2}$: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exemple : Filtrage d'un signal sinusoïdal

On envoie en entrée d'un filtre un signal d'amplitude 4 (peu importe l'unité) et de phase nulle. À la fréquence du signal, le gain vaut −5 dB et la phase vaut 40° ; que vaut la sortie $s(t)$?

L'entrée vaut $e(t) = 4\cos(\omega t)$. Or $|\underline{H}| = 10^{-5/20} = 0{,}56$ donc l'amplitude de la sortie vaut $0{,}56 \times 4 = 2{,}2$ et la phase de sortie vaut $0 + 40 = 40° = 0{,}7$ rad donc le signal de sortie vaut $s(t) = 2{,}2\cos(\omega t + 0{,}7)$

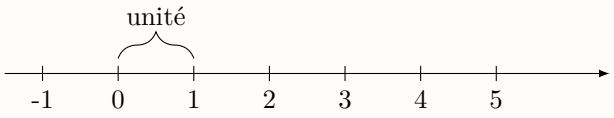
Définition : Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est constitué de deux diagrammes représentant le gain et la phase (c'est-à-dire l'argument de $\underline{H}$) du filtre en fonction de la fréquence ou de la pulsation, tracée en échelle logarithmique.

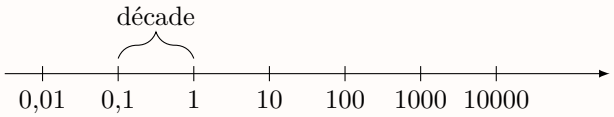
Un peu de maths : Échelle logarithmique

Pour représenter une grandeur sur un axe (abscisses ou ordonnées), il existe 2 types d'échelles : l'échelle linéaire et l'échelle logarithmique :

— en *échelle linéaire* : on choisit une distance représentant une *unité* : à chaque fois qu'on avance de 1 unité, la valeur augmente de 1.



— en *échelle logarithmique* : on choisit une distance représentant une *décade* : à chaque fois qu'on avance de 1 décade, la valeur est multipliée par 10.

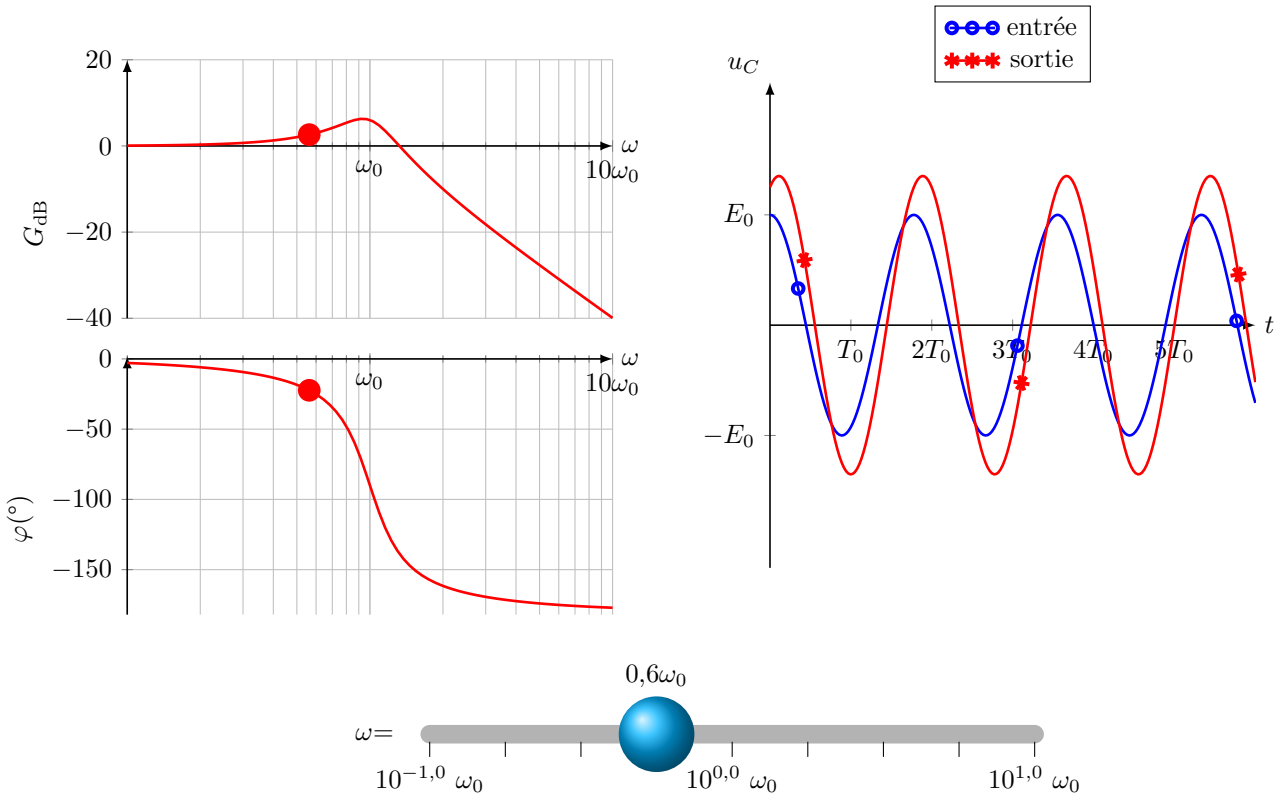


Remarque : Sur une échelle logarithmique, seules les valeurs strictement positives peuvent être représentées. Quand on trace une allure de diagramme de Bode, on ne place qu'un point toutes les décades ; quand on aura besoin de placer des points intermédiaires (en TP en particulier), on utilisera du papier semi-logarithmique dont l'axe des abscisses est déjà gradué en échelle log.

Pourquoi utiliser cette échelle logarithmique en abscisses ? Parce que les fréquences qu'on va utiliser varient sur beaucoup d'ordres de grandeurs, et une échelle linéaire n'est pas adaptée. Par exemple, en TP, on va travailler entre 10 Hz et 100 kHz ; si on met une échelle linéaire entre 0 et 100000, il va être difficile de représenter les valeurs 10 ou 100 !

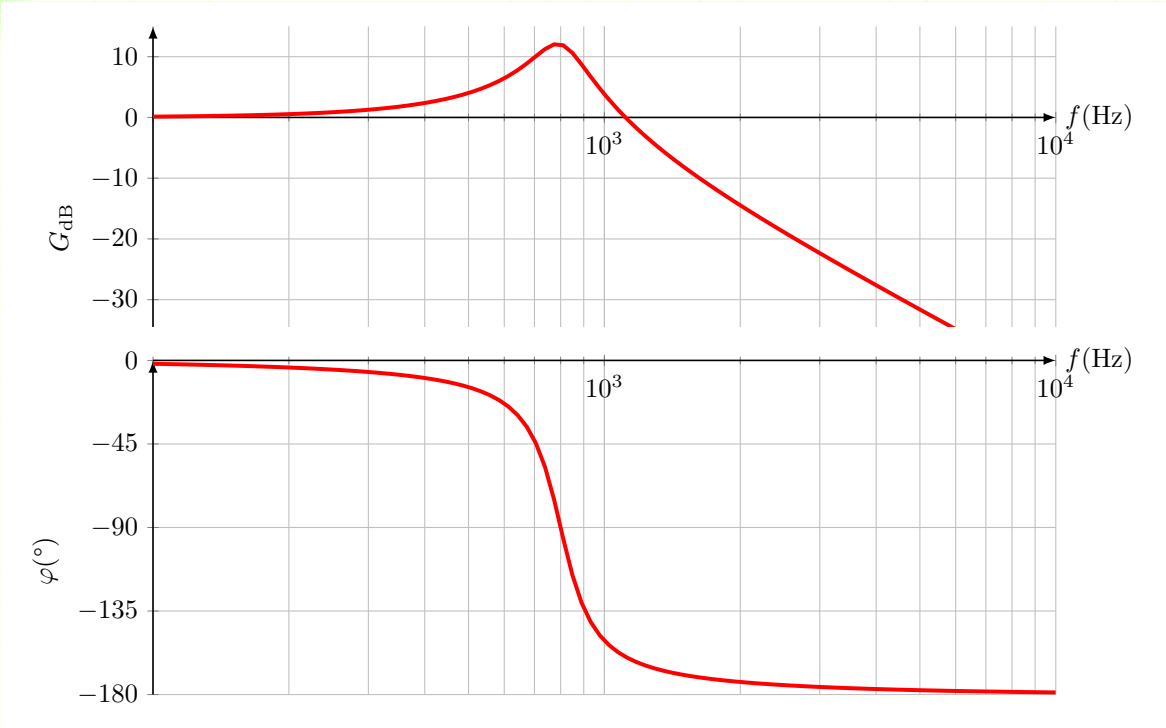
Ainsi, sur un diagramme de Bode, on peut lire, à une pulsation (ou fréquence) donnée, le gain G_{dB} et la phase φ ; ainsi, si on connaît le signal sinusoïdal placé en entrée, et surtout sa pulsation ω, on peut récupérer les valeurs de $|\underline{H}(\omega)|$ et de $\arg \underline{H}(\omega)$, et en déduire les caractéristiques du signal de sortie. Par exemple, sur la figure E7.6, on peut visualiser l'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal, en regard de la valeur du gain et de la phase lus sur le diagramme de Bode du filtre.

FIGURE E7.6 : Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal d'amplitude E_0.



Exemple : Lecture d'un diagramme de Bode

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



1. On met en entrée un signal d'amplitude 5 (unités arbitraires), de phase nulle et de fréquence $f = 500\,\text{Hz}$. Déterminez les caractéristiques du signal de sortie.
2. Même question si la fréquence vaut désormais 4000 Hz.
3. À partir de quelle fréquence le signal de sortie aura-t-il une amplitude inférieure à 1 ?

1. On lit le diagramme de Bode à 500 Hz : $G_{\text{dB}} = +5\,\text{dB}$ donc $|\underline{H}(500\,\text{Hz})| = 10^{5/20} = 1{,}8$ et $\arg \underline{H}(500\,\text{Hz}) = -20° = -0{,}35\,\text{rad}$, donc $s(t) = 8{,}9\cos(1000\pi t - 0{,}35)$
2. De même $|\underline{H}(4000\,\text{Hz})| = 10^{-27/20} = 0{,}045$ et $\arg \underline{H}(4000\,\text{Hz}) = -175° = -3{,}05\,\text{rad}$ donc $s(t) = 0{,}23\cos(8000\pi t - 3{,}05)$
3. L'amplitude du signal de sortie vaut $|\underline{H}| \times 5$. Elle est donc inférieure à 1 si et seulement si $|\underline{H}| < \frac{1}{5} = 0{,}2$ soit $G_{\text{dB}} < -14\,\text{dB}$; sur le diagramme, on voit que c'est le cas à partir de 2000 Hz environ

B.3. Familles de filtres

La plupart des filtres ont des comportements qui peuvent être rangés dans 4 grandes catégories. Pour les comprendre, il faut se souvenir que plus le gain tend vers $-\infty$, plus $|\underline{H}|$ tend vers 0, donc plus le signal de sortie est atténué. Ainsi, si $G_{\text{dB}} \to -\infty$ en basses ou en hautes fréquences, on dira que le filtre coupe ces fréquences ; au contraire, si le gain a une limite finie, le filtre laisse passer ces fréquences. Il existe aussi le cas où $G_{\text{dB}} \to +\infty$, ce qui signifie que les fréquences correspondantes sont infiniment amplifiées ; un tel cas n'est pas possible tel quel, mais on en verra formant une partie d'un filtre plus grand.

Propriété : Filtre passe-bas

Un filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences.

La figure E7.7 montre quelques exemples : un amortisseur de voiture, par exemple, filtre essentiellement les secousses rapides, donc les hautes fréquences. Il en va de même des isolants phoniques, qui arrêtent les sons aigus mais pas le grondement du tonnerre. On y voit aussi deux exemples de diagrammes de Bode de filtres passe-bas réels, un électronique, l'autre mécanique.

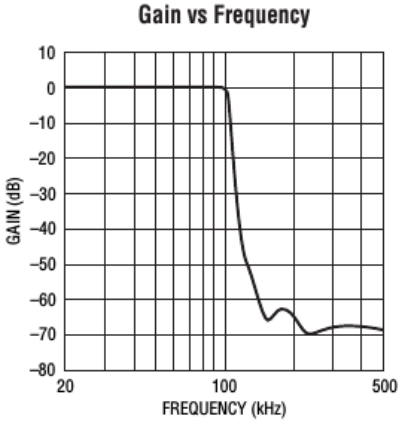
FIGURE E7.7 : Exemples de filtres passe-bas.



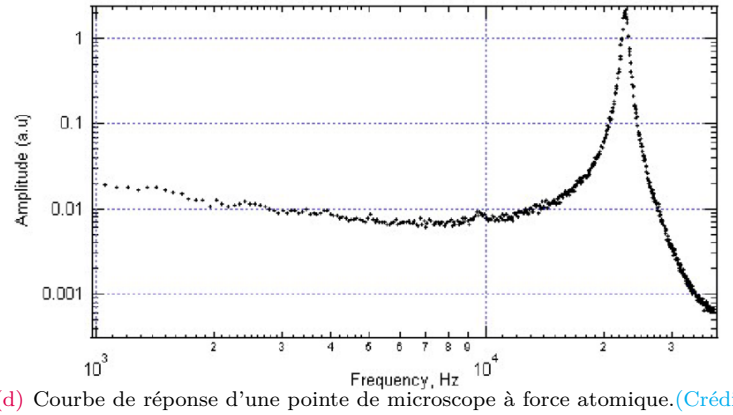
(a) Isolation phonique par 10 mm de liège : les aigus sont mieux absorbés que les graves



(b) Amortisseur de voiture



(c) Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas basé sur un circuit LTC 1068



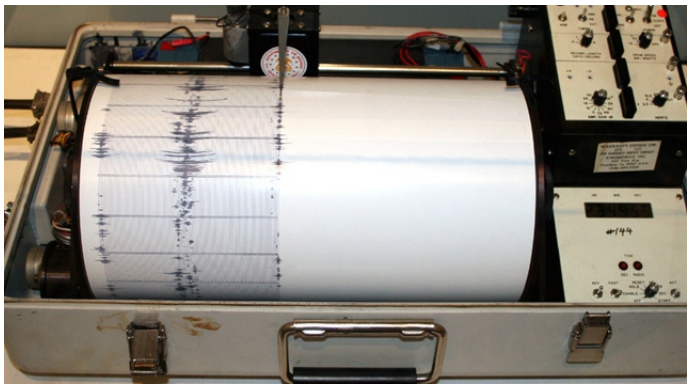
(d) Courbe de réponse d'une pointe de microscope à force atomique.(Crédit : S.K.Ayop et al.)

Propriété : Filtre passe-haut

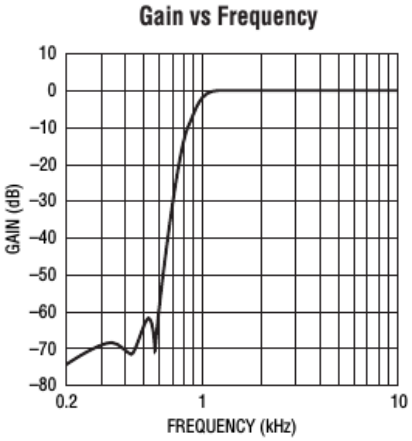
Un filtre passe-haut coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences.

Un sismomètre, par exemple (figure E7.8), ne garde trace que des mouvements rapides du sol.

FIGURE E7.8 : Exemples de filtres passe-haut.



(a) Sismographe (Crédit : Wikipedia/Yamaguchi)



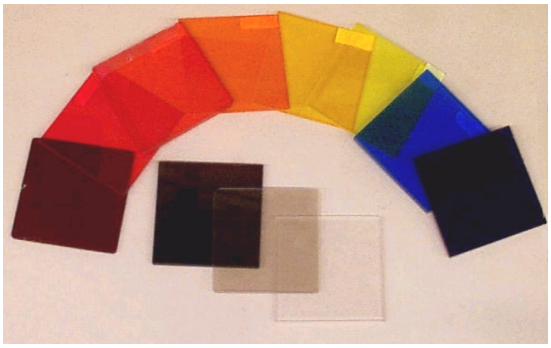
(b) Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut basé sur un circuit LTC 1068

Propriété : Filtre passe-bande

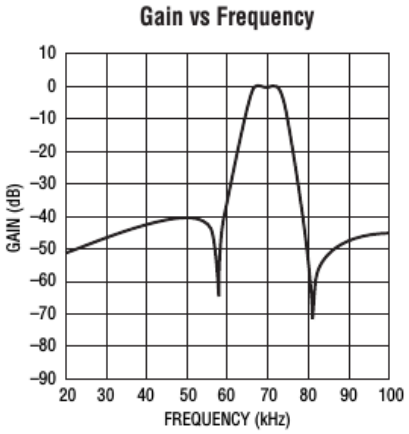
Un filtre passe-bande coupe les basses et les hautes fréquences et laisse passer juste un intervalle de fréquences.

Un filtre coloré, par exemple (figure E7.9), est un filtre passe-bande optique. On utilise aussi un filtre passe-bande pour sélectionner une radio particulière.

FIGURE E7.9 : Exemples de filtres passe-bande.



(a) Filtres colorés.(Crédit : Wikipedia/DrBob)



(b) Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande basé sur un circuit LTC 1068

Propriété : Filtre coupe-bande

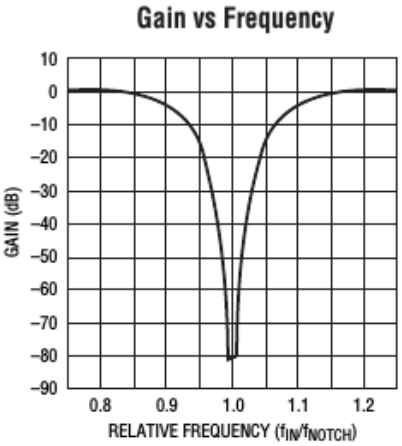
Un filtre coupe-bande laisse tout passer sauf un intervalle de fréquences.

Ce genre de filtre est peu utilisé, parfois pour éliminer un parasite. Un autre exemple est donné sur la figure E7.10, des lunettes qui ne filtrent que la longueur d'onde précise émise par un laser dans un labo de physique.

FIGURE E7.10 : Exemples de filtres coupe-bande.



(a) Lunettes interférentielles de protection contre les lasers.*(Crédit : Laser 2000)*



(b) Diagramme de Bode d'un filtre coupe-bande basé sur un circuit LTC 1068

B.4. Gabarits (Hors programme)

Quand on a besoin de concevoir un filtre, il faut commencer par préciser ce qu'on attend de ce filtre.

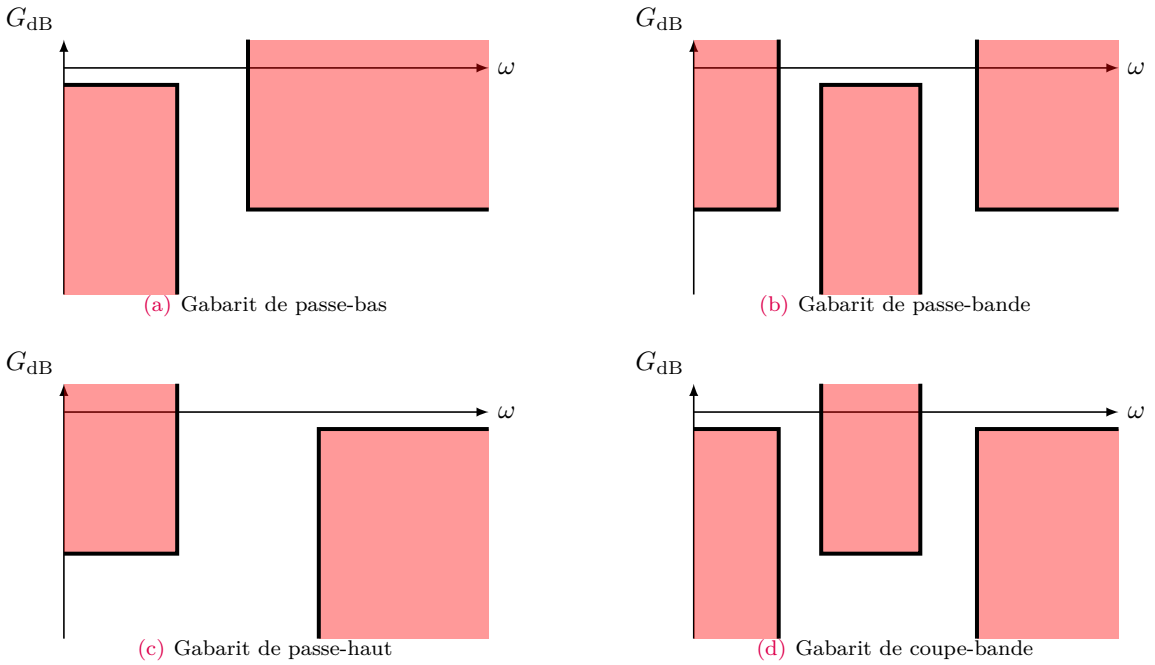
Définition : Gabarit

Un gabarit est une représentation, sur un diagramme de Bode en gain, des contraintes imposées par le cahier des charges, par le moyen de zones interdites.

En pratique, on hachure ou on colorie des zones pour dire : « pour telle fréquence, le gain doit être supérieur ou inférieur à telle valeur.

La figure E7.11 montre ainsi des gabarits correspondant aux 4 familles de filtres vues précédemment.

FIGURE E7.11 : Gabarits des principaux filtres.



(a) Gabarit de passe-bas

(b) Gabarit de passe-bande

(c) Gabarit de passe-haut

(d) Gabarit de coupe-bande

Exemple : Tracé d'un gabarit

On souhaite construire un filtre ayant les caractéristiques suivantes :

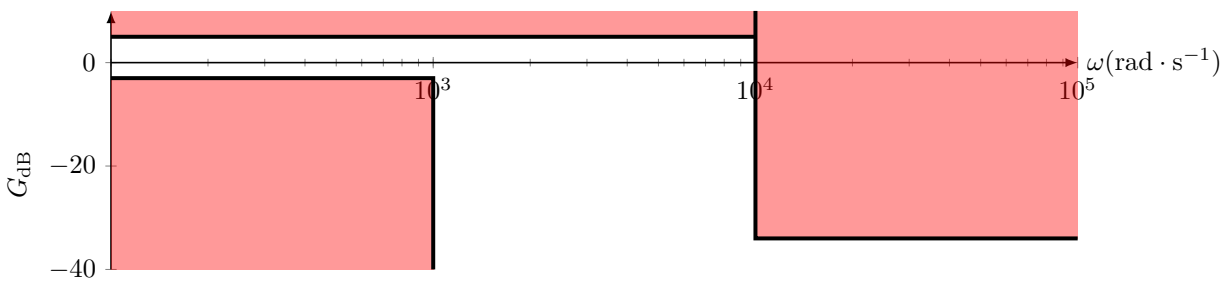
- Filtre passe-bas
- La bande passante à $-3\,\text{dB}$ doit aller de 0 à au moins $1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
- La résonance (si elle existe) ne doit pas dépasser $5\,\text{dB}$
- Les fréquences au-delà de $10\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ doivent être atténuées par un facteur égal au moins à 50

Tracez le gabarit de ce filtre.

Prenons les spécifications une à une :

- la première n'apporte rien, hormis une idée de l'allure finale.
- la seconde indique que toutes les pulsations inférieures à $1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ doivent avoir $|\underline{H}| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{\text{dB}} > 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,\text{dB}$; donc pour toutes les pulsations $< 1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ on hachure les gains $< -3\,\text{dB}$.
- la troisième ne donne pas de condition de pulsations : pour toute pulsations, le gain doit être inférieur à $5\,\text{dB}$. On hachure donc la zone $> 5\,\text{dB}$ pour toute pulsation.
- la quatrième est plus subtile. Atténuer un signal, c'est le diviser ; ici on veut le diviser par au moins 50, ce qui signifie que $|\underline{H}| < \frac{1}{50}$ soit $G_{\text{dB}} < 20\log\frac{1}{50} = -34\,\text{dB}$. On hachure donc la zone $> -34\,\text{dB}$ pour les pulsations $> 10\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

On obtient donc le gabarit suivant :



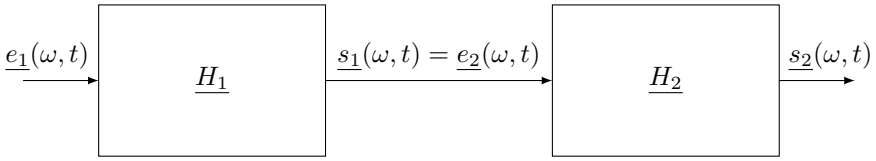
B.5. Filtres en cascade

Définition : Filtres en cascade

Des filtres sont en cascade (ou en série) si la sortie du premier est l'entrée du second.

Dans la vie courante, il y a des filtres en cascade de partout. Par exemple, vous écoutez de la musique : le signal électrique passe dans un amplificateur (filtre 1), puis dans un haut-parleur (filtre 2), qui produit un son ; ce son se propage dans l'environnement qui vous entoure (filtre 3) jusqu'à votre oreille ; votre oreille (filtre 4) capte le son et envoie un signal au cerveau. Tous ces filtres sont à la suite l'un de l'autre.

FIGURE E7.12 : Filtres en cascade.



Propriété : Filtres en cascade

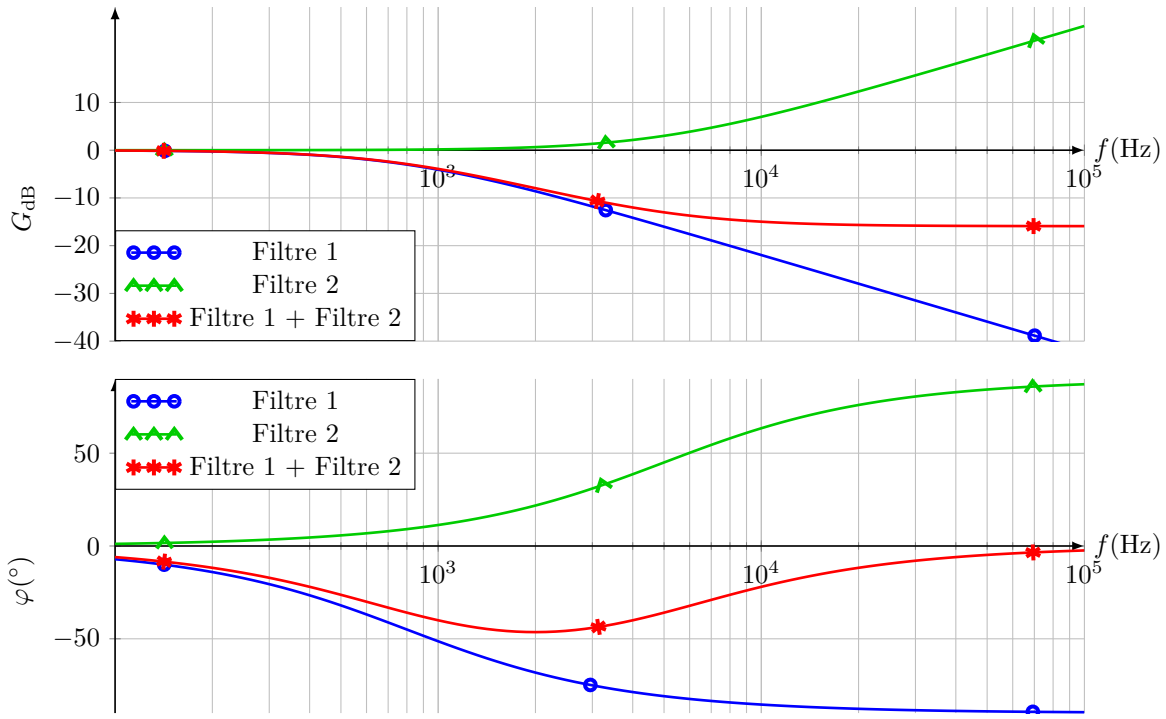
Lorsqu'on met des filtres en cascade, leurs fonctions de transfert se multiplient ; par conséquent, leurs gains et leurs phases s'ajoutent.

Démonstration

Notons $\underline{e_1}(\omega,t)$ l'entrée du filtre 1 et $\underline{s_1}(\omega,t)$ sa sortie ; de même pour le filtre 2. Par définition des fonctions de transfert, $\underline{s_1}(\omega,t) = \underline{H_1}(\omega).\underline{e_1}(\omega,t)$ et $\underline{s_2}(\omega,t) = \underline{H_2}(\omega).\underline{s_2}(\omega,t)$. Or $\underline{e_2}(\omega,t) = \underline{s_1}(\omega,t)$, donc $\underline{s_2}(\omega,t) = \underline{H_2}(\omega).\underline{s_1}(\omega,t) = \underline{H_2}(\omega).\underline{H_1}(\omega).\underline{e_1}(\omega,t)$. Donc la fonction de transfert de l'ensemble vaut $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s_2}(\omega,t)}{\underline{e_1}(\omega,t)} = \underline{H_1}(\omega).\underline{H_2}(\omega)$.
On en déduit que $|\underline{H}(\omega)| = \left|\underline{H_1}(\omega)\right| . \left|\underline{H_2}(\omega)\right|$ et $\arg \underline{H}(\omega) = \arg \underline{H_1}(\omega) + \arg \underline{H_2}(\omega)$: les phases s'ajoutent. De plus, en prenant le logarithme des modules : $\log|\underline{H}(\omega)| = \log\left|\underline{H_1}(\omega)\right| + \log\left|\underline{H_2}(\omega)\right|$ d'où $G_{\text{dB}}(\omega) = G_{dB,1}(\omega) + G_{dB,2}(\omega)$.

Le figure E7.13 montre un exemple du diagramme de Bode de deux filtres en cascade.

FIGURE E7.13 : Diagramme de Bode d'un filtre composé de 2 filtres.



B.6. Équivalents et asymptotes

Les fonctions de transfert s'expriment toujours comme des quotients de polynômes en ω (ou plus précisément en $j\omega$). Cela a des conséquences sur l'allure des diagrammes de Bode.

Pour tracer le diagramme de Bode, on pourrait calculer exactement $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg\underline{H}(\omega)$. En fait, en pratique, tous les diagrammes de Bode de fonctions de transferts simples auront un comportement en basses fréquences (BF) et en hautes fréquences (HF) qui tendra vers des asymptotes d'équation $a\log\omega + b$ (car l'abscisse du diagramme de Bode est en réalité $\log\omega$ à cause de l'échelle logarithmique) où a est la pente. On a donc l'habitude de tracer d'abord ces asymptotes, puis de compléter le tracé en regardant rapidement ce qui se passe au milieu.

Pour tracer les asymptotes, on va utiliser un outil mathématique pratique : les équivalents.

Un peu de maths : Fonctions équivalentes

Soient 2 fonctions f et g définies au voisinage du même réel a. On dit que f et g sont équivalentes en a, si le quotient des deux tend vers 1 :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 1$$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto x + 2x^2 + x^3$ sont équivalentes en 0 ; mais elles ne sont pas équivalentes à $x \mapsto x^2$, bien qu'elles aient la même limite.

Pour nous, en physique, on se contentera de quelques propriétés à appliquer :

- un polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré
- un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré
- comme équivalent d'un quotient, on peut prendre le quotient des équivalents du numérateur et du dénominateur

Par exemple, $x \mapsto \frac{x+x^3}{3x^2+x^3} \underset{0}{\sim} x \mapsto \frac{x}{3x^2}$ soit $\frac{1}{3x}$.

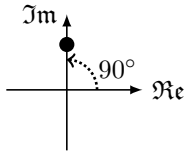
Exemple : Diagramme de Bode asymptotique

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2j\frac{\omega_0}{\omega}}$ avec ω_0 une constante.

1. Déterminer les asymptotes du gain et de la phase en basse fréquence.
2. Déterminer les asymptotes du gain et de la phase en haute fréquence.
3. Déterminer la pulsation où les asymptotes du gain se coupent, et la valeur du gain correspondante.
4. Tracez le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.

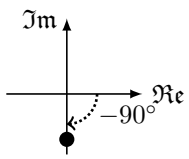
1. En BF, les termes de plus bas degré dominent, donc $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{1}{-2j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{j\omega}{2\omega_0}$.

   Le gain vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log\left|\frac{j\omega}{2\omega_0}\right| = 20\log\frac{\omega}{2\omega_0} = 20\log\omega - 20\log(2\omega_0)$. Or $\log\omega$ est l'abscisse d'un diagramme de Bode, donc le gain a pour asymptote une droite dont la pente vaut $+20$ dB/déc (c'est ainsi qu'on exprime la pente).
   Pour la phase, on a un imaginaire pur de partie imaginaire positive : un simple schéma montre que sa phase vaut $+90°$.



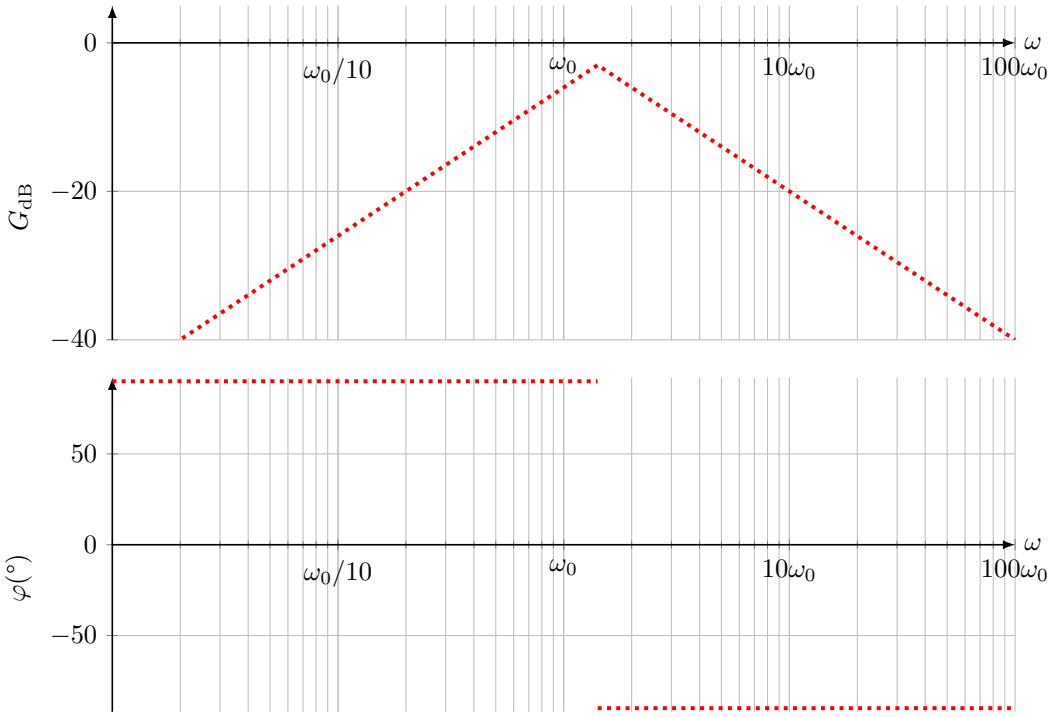
2. En HF, les termes de plus haut degré dominent, donc $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{j\omega_0}{\omega}$.

   Le gain vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log\left|\frac{-j\omega_0}{\omega}\right| = 20\log\frac{\omega_0}{\omega} = 20\log\omega_0 - 20\log\omega$, donc le gain a pour asymptote une droite dont la pente vaut -20 dB/déc.
   Pour la phase, on a un imaginaire pur de partie imaginaire négative : un simple schéma montre que sa phase vaut $-90°$.



3. On a donc deux asymptotes du gain : $20\log\frac{\omega}{2\omega_0}$ en BF et $20\log\frac{\omega_0}{\omega}$ en HF. On cherche leur intersection : $20\log\frac{\omega}{2\omega_0} = 20\log\frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow \frac{\omega}{2\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_0$. Pour avoir l'ordonnée du point d'intersection, on renvoie cette valeur de ω dans l'équation d'une des deux asymptotes, et on trouve $20\log\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui fait environ -3 dB.

4. On trace alors le diagramme de Bode asymptotique :



Remarque : On constatera en pratique que les pentes des asymptotes du gain sont toujours des multiples de 20 dB/déc ; elles peuvent être nulles parfois (asymptote horizontale).

B.7. Propriétés générales des filtres linéaires d'ordre n

Définition : Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre est la différence de degré entre le terme de plus haut degré et le terme de plus bas degré au dénominateur de la fonction de transfert, considéré comme un polynôme en ω.

Par exemple, un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{1+3j\omega}{1+2j\omega-j\frac{3}{\omega}}$ est d'ordre 2.

Un théorème de maths montre que tout filtre d'ordre $n > 2$ peut être décomposé comme le produit de filtres d'ordre 1 et 2. On doit donc surtout apprendre à étudier ces filtres. On verra cela dans le prochain chapitre.

Pour le moment, on va admettre quelques propriétés des filtres linéaires d'ordre n de numérateur simple (polynôme contenant un seul terme) :

Propriété : Pentes des asymptotes

Pour un filtre d'ordre n de numérateur simple, la différence entre les pentes des asymptotes HF et BF vaut $-20 \times n$ dB/déc.

Ainsi, on a une différence de -20 dB/déc pour un ordre 1, de -40 dB/déc pour un ordre 2, etc.

Propriété : Limites de la phase

Pour un filtre d'ordre n de numérateur simple, la différence entre les limites de la phase en HF et en BF vaut $-90° \times n$.

Propriété : Résonance

Un filtre d'ordre 1 n'a jamais de résonance. Un filtre d'ordre 2 passe-haut ou passe-bas a une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; un filtre d'ordre 2 passe-bande a toujours une résonance.

Enfin, une propriété qu'on n'utilisera pas vraiment, mais qui rappelle pourquoi on se contente d'étudier les ordres 1 et 2 :

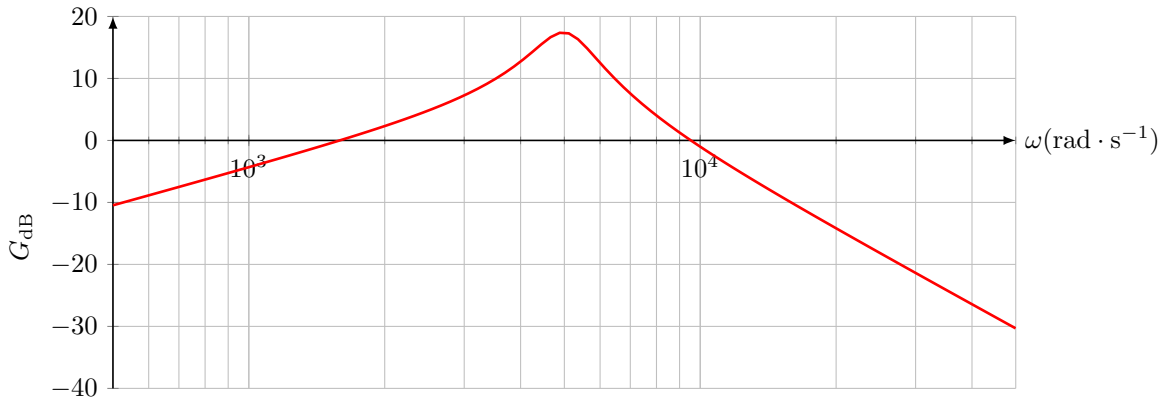
Propriété : Filtre d'ordre $n > 2$

Un filtre d'ordre quelconque peut se factoriser en un produit de filtres d'ordre 1 ou 2.

Ces propriétés générales des filtres d'ordre n montrent l'intérêt d'utiliser des filtres d'ordre élevé : en ayant des pentes plus grandes des asymptotes, ils permettent une coupure plus abrupte des fréquences qu'on souhaite enlever du signal. En TP, on ne dépassera pas l'ordre 2, mais dans les montages électroniques, on utilise couramment des filtres d'ordre 6 ou 8.

Exemple : Ordre d'un filtre

On considère un filtre dont le diagramme de Bode est le suivant :



Mesurez les pentes des deux asymptotes, et déduisez-en l'ordre de ce filtre.

Cet exercice présente un point important : la mesure de pentes. D'abord, pour mesurer les pentes, il faut bien être dans la zone asymptotique.
Par exemple, pour l'asymptote BF, on va considérer entre $500\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (au bord du diagramme) et $1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On mesure les gains : $-11\,\text{dB}$ à $500\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $-4\,\text{dB}$ à $1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Si on ne réfléchit pas, on écrit que la pente en BF vaut $p_{BF} = \frac{-4-(-11)}{1000-500} = 0{,}014\,\text{dB}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$: la valeur est bizarre, et l'unité aussi.
En fait, il faut comprendre l'échelle logarithmique en abscisse : c'est comme si la véritable abscisse était $\log\omega$ et non pas ω. La pente vaut donc $p_{BF} = \frac{-4-(-11)}{\log(1000)-\log(500)} = 23\,\text{dB/déc}$ donc sans doute $+20\,\text{dB/déc}$.
De même en HF, on mesure $-1\,\text{dB}$ à $10\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $-30\,\text{dB}$ à $50\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où une pente $p_{HF} = \frac{-30-(-1)}{\log(50000)-\log(10000)} = -41\,\text{dB/déc}$ donc sans doute $-40\,\text{dB/déc}$.
La différence des pentes vaut donc $-60\,\text{dB/déc}$, donc ce filtre est d'ordre 3.

E7.C. Filtrage d'un signal périodique quelconque

Jusqu'ici, nous n'avons étudié que l'influence d'un filtre sur un signal sinusoïdal. Mais la plupart des signaux périodiques ne sont pas de pures sinusoïdes.

C.1. Principe de superposition

Le principe de superposition est une conséquence fondamentale de la propriété de linéarité des filtres :

Principe de superposition

Si on met en entrée d'un filtre linéaire la somme de plusieurs signaux, le signal en sortie sera égal à la somme des sorties correspondant à chaque terme de l'entrée.

Exemple : Filtrage d'une somme de deux cosinus

Un filtre a pour FT $\underline{H}(j\omega) = 0,5 + \frac{j\omega}{500}$. On met en entrée un signal $e(t) = 4\cos(400t + 0,4) + 2,7\cos(800t - 0,2) + 3,4$. Déterminez le signal de sortie $s(t)$.

L'entrée est une somme de 3 termes ; on les traite un après l'autre :

- le terme $e_1(t) = 4\cos(400t + 0,4)$ est sinusoïdal à la pulsation $\omega = 400\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; on calcule $\underline{H}(400) = 0,5+0,8j$ de module $|\underline{H}| = 0,94$ et d'argument $\arg\underline{H} = 1,0\,\text{rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_1(t) = 0,94 \times 4\cos(400t + 0,4 + 1,0) = 3,8\cos(400t + 1,4)$.
- le terme $e_2(t) = 2,7\cos(800t - 0,2)$ est sinusoïdal à la pulsation $\omega = 800\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; on calcule $\underline{H}(800) = 0,5+1,6j$ de module $|\underline{H}| = 1,7$ et d'argument $\arg\underline{H} = 1,3\,\text{rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_2(t) = 1,7 \times 2,7\cos(800t - 0,2 + 1,3) = 4,5\cos(800t + 1,1)$.
- le terme $s_3(t) = 3,4$ est constant ; il faut le traiter comme un terme de pulsation nulle : $s_3(t) = 3,4\cos(0t)$; on calcule $\underline{H}(0) = 0,5$ de module $|\underline{H}| = 0,5$ et d'argument $\arg\underline{H} = 0\,\text{rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_3(t) = 0,5 \times 3,4\cos(0t) = 1,7$

La sortie complète est la somme des trois : $s(t) = 3,8\cos(400t + 1,4) + 4,5\cos(800t + 1,1) + 1,7$

C.2. Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Nous savons donc maintenant filtrer une somme de cosinus. Une théorème mathématique que nous admettrons nous indique que nous savons alors filtrer n'importe quel signal périodique :

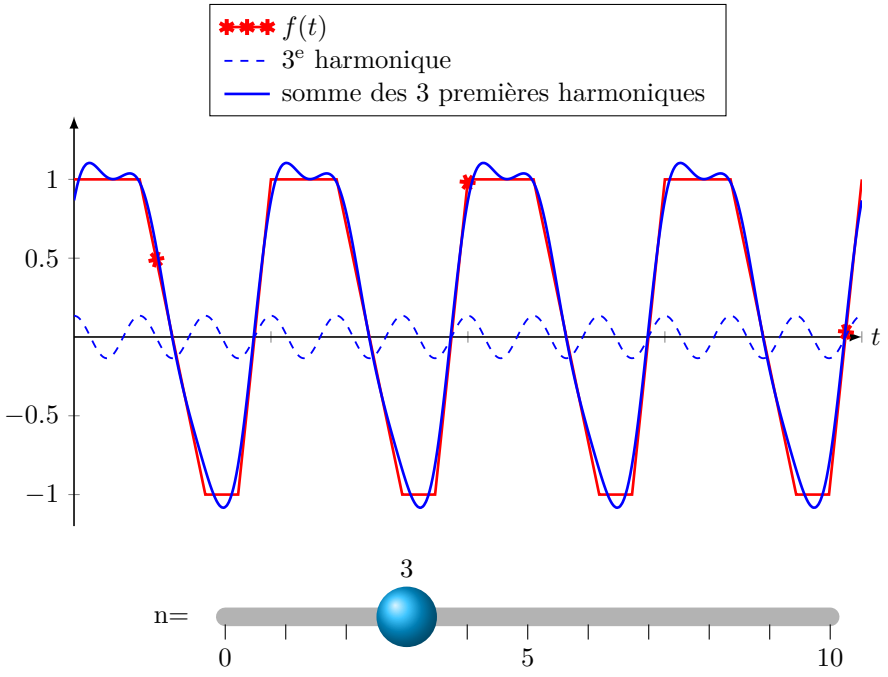
Décomposition en série de Fourier

Tout signal T-périodique $f(t)$ peut être décomposé sous la forme d'une somme infinie de cosinus de période $\frac{T}{k}$ avec k un entier ; autrement dit on peut écrire

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + \varphi_k\right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right)$$

où les coefficients c_k et φ_k (ou a_k et b_k) peuvent être calculés à partir du signal $f(t)$.
Le terme en $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + \varphi_k\right)$, de fréquence $k \times \frac{1}{T}$, s'appelle *l'harmonique de rang k*.
L'harmonique de rang 1 s'appelle le *fondamental*, car elle a la même fréquence que le signal.

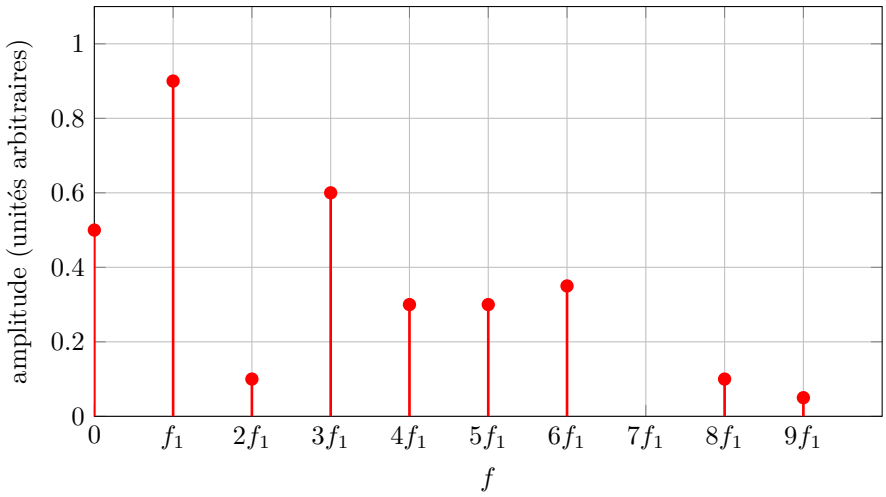
FIGURE E7.14 : Recomposition d'un signal périodique par somme de ses harmoniques.



Remarque : Le terme c_0, ou harmonique d'ordre 0, correspond à la valeur moyenne de la fonction : $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$. Ainsi, un filtre passe-bas coupant à très basse fréquence donnera en sortie la valeur moyenne de l'entrée.

Un signal périodique est donc la somme de plusieurs cosinus de fréquences fixées, multiples du fondamental. On peut tracer le spectre de ce signal : c'est un graphique avec la fréquence et abscisse et l'amplitude en ordonnée ; pour chaque harmonique, on place un point relié par une droite au bas du graphique, comme sur la figure E7.15. Un tel graphique peut s'obtenir sous Python avec la fonction `matplotlib.pyplot.stem`.

FIGURE E7.15 : Exemple de spectre d'un signal périodique ; les amplitudes tracées correspondent aux $|c_k|$ de la décomposition en série de Fourier.



On peut citer aussi un théorème concernant l'énergie d'une fonction décomposée en série de Fourier.

Théorème de Parseval

La valeur efficace d'une fonction périodique se calcule en fonction des coefficients de sa série de Fourier : avec les notations de la propriété précédente,

$$\left\langle f^2(t)\right\rangle = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \qquad \text{(E7.3a)}$$

ou encore avec $c_{k,eff} = \frac{c_k}{\sqrt{2}}$:

$$f_{eff} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k,eff}^2} \qquad \text{(E7.3b)}$$

De nombreuses énergies sont associées au carré d'un signal. Par exemple, la puissance reçue par une résistance vaut $\mathcal{P}_{Joule}(t) = \frac{u(t)^2}{R}$; il en va de même pour les ondes sonores, lumineuses,.... Dans ce cas, le théorème de Parseval indique que, pour une fonction périodique de moyenne nulle, l'énergie moyenne du signal $f(t)$ est la somme des énergies moyennes contenues dans ses harmoniques.

Vous devez connaître le principe de la décomposition d'un signal en série de Fourier, mais n'avez pas à savoir calculer les coefficients c_k qui interviennent. Par contre, si on vous donne la décomposition d'une fonction en série de Fourier, vous devez savoir appliquer le théorème de superposition pour déterminer la sortie d'un filtre, selon la méthode illustrée sur la figure E7.16 :

- on décompose le signal initial en harmoniques ; on coupe au bout de quelques harmoniques, en fonction de la précision recherchée
- on calcule la sortie correspondant à chaque harmonique
- on somme ces sorties pour obtenir la sortie complète.

L'effet du filtrage sur un tel signal est donc de conserver les fréquences de toutes les harmoniques, mais de modifier leurs amplitudes (figure E7.17).

FIGURE E7.16 : Filtrage d'un signal décomposé en harmoniques.

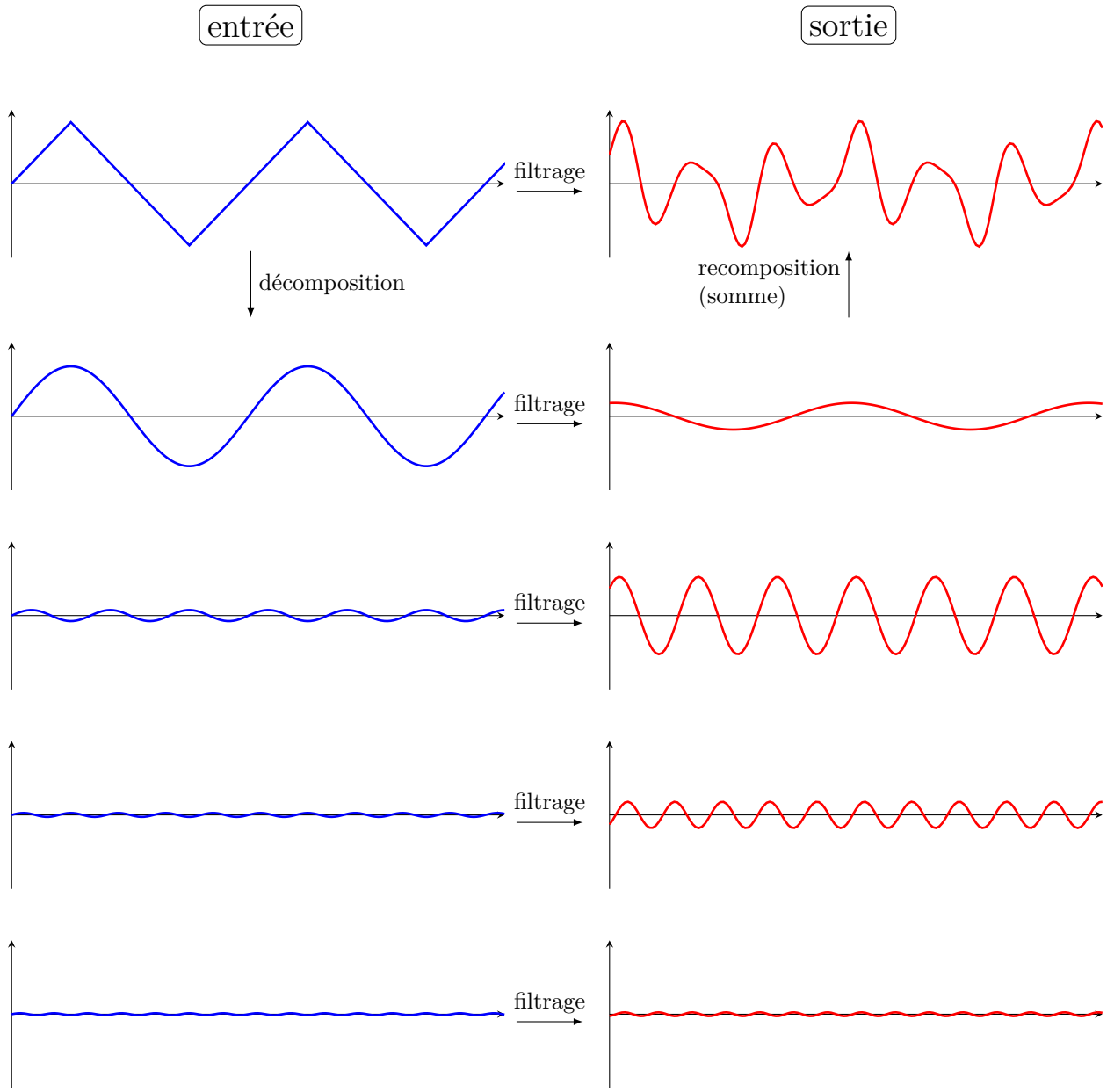
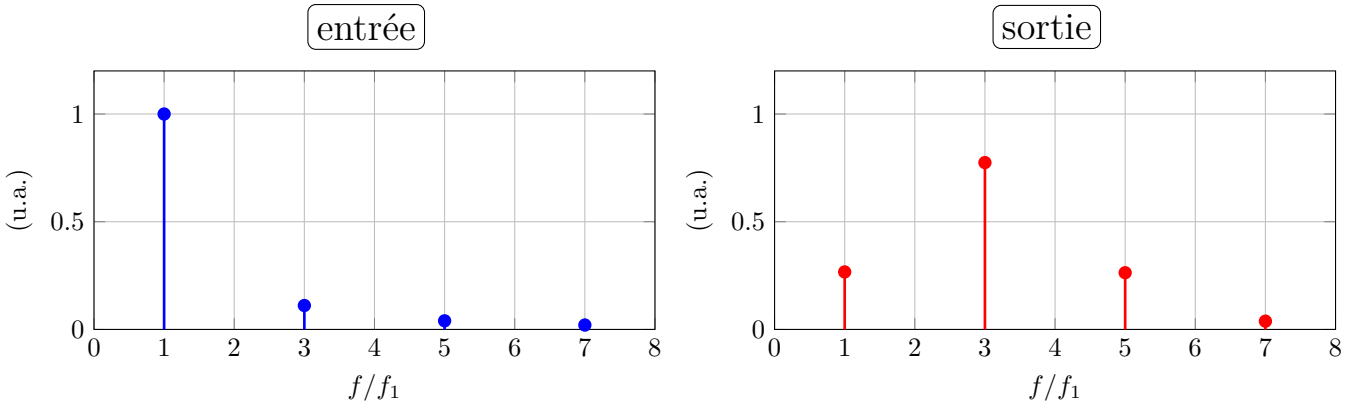


FIGURE E7.17 : Évolution du spectre du signal de la figure E7.16 après filtrage.



C.3. Cas d'un filtre non linéaire

La propriété fondamentale des filtres linéaires, c'est qu'ils conservent les fréquences des signaux d'entrée. Dès qu'on travaille avec des filtres non linéaires, on constate des modifications de fréquences, ou plus exactement l'apparition

de nouvelles fréquences, mais pas n'importe lesquelles : les nouvelles fréquences sont le plus souvent des multiples des fréquences initiales, ou bien des sommes/différences.

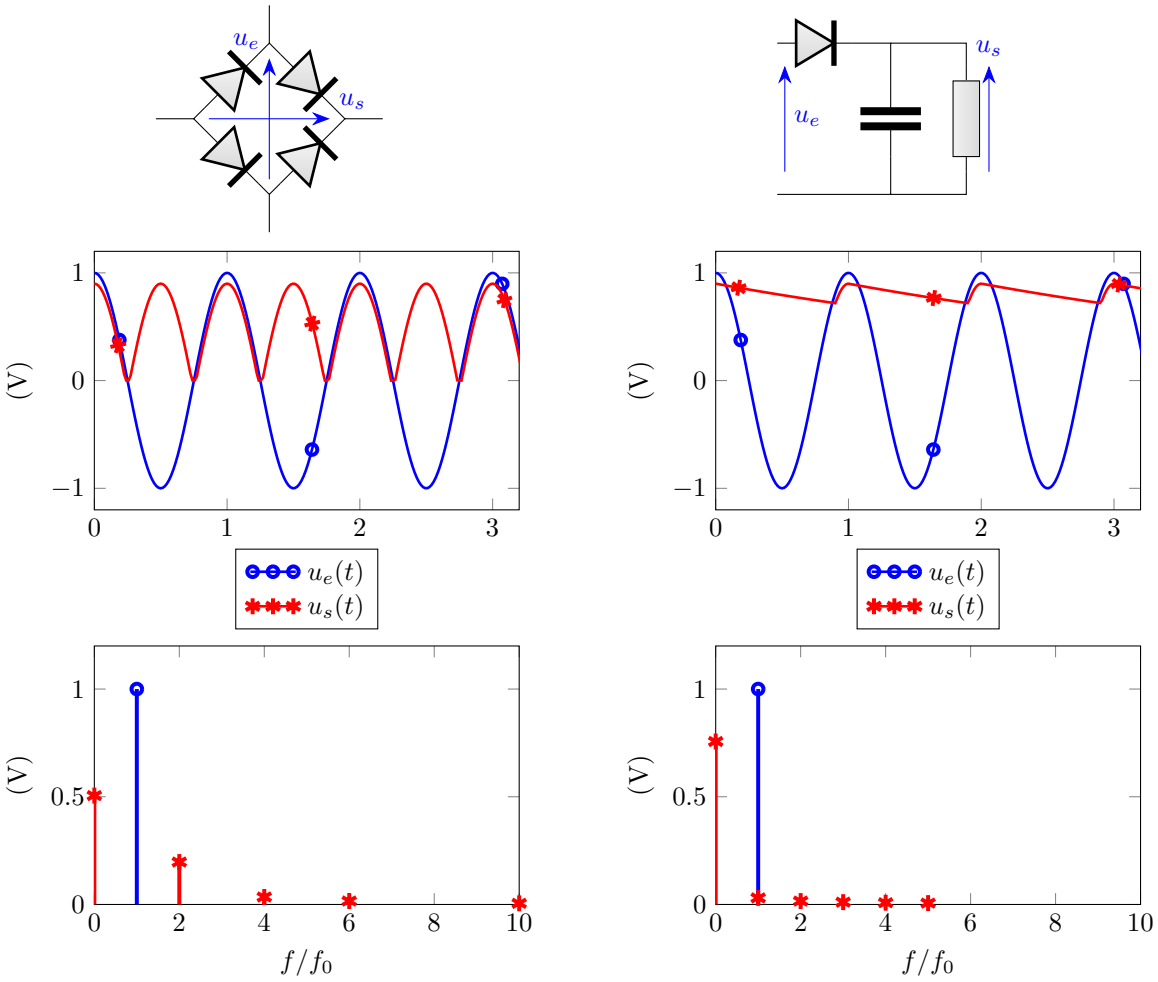
Les filtres peuvent être non linéaires pour deux raisons :

— par la présence de composants fondamentalement non linéaires, en particulier en électronique ; par exemple les diodes sont des composants non linéaires

— par l'utilisation de signaux de fortes amplitudes ; en effet, on verra (chapitre Oscillateurs mécaniques) que lorsqu'un système linéaire commence à osciller avec trop d'amplitude, des termes non linéaires apparaissent souvent

La figure E7.18 illustre cela sur deux exemples très courants en électronique : le circuit redresseur, qui transforme un signal en sa valeur absolue (à peu près), et le détecteur de crête, qui relie approximativement les maxima locaux du signal. Avec un signal d'entrée sinusoïdal, on voit apparaître en sortie de nombreuses harmoniques.

Figure E7.18 : Effet de deux filtres non linéaires sur un signal sinusoïdal de fréquence f_0.



(a) Pont redresseur

(b) Détecteur de crête

L'étude des filtres non linéaires est compliquée, mais elle est très riche, car elle offre beaucoup plus de possibilités que les filtres linéaires qui ont à peu près tous le même comportement.

E7. Filtres linéaires

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique. Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

E7. Filtres linéaires

Quelques conseils

- ✎ Il est essentiel de bien retenir l'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal. On voit souvent des élèves capables de faire des études de diagrammes de Bode compliqués, mais qui sont incapable de donner du sens physique à leurs courbes.
- ✎ Retenez l'échelle des décibels : ajouter 20 dB, c'est multiplier par 10.
- ✎ Faites attention à l'axe horizontal des diagrammes de Bode, il peut représenter la fréquence ou la pulsation ; il y a 2π d'écart entre eux !
- ✎ Quand vous recherchez la sortie d'un filtre correspondant à une entrée comprenant plusieurs signaux sinusoïdaux, pensez à bien recalculer (ou mesurer) pour chaque cosinus la fonction de transfert à la pulsation correspondante.

E7. Filtres linéaires

QCMs

réponses page 683

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un filtre est linéaire si :

(a). sa sortie est toujours sinusoïdale
(b). si on somme deux entrées, alors la sortie est la somme des sorties correspondantes
(c). sa sortie est proportionnelle à son entrée
(d). si on multipie l'entrée par k, alors la sortie est multipliée par k

Q2. Le gain en décibels est défini par $G_{\text{dB}} =$

(a). $20\log|\underline{H}|$
(b). $\arg\underline{H}$
(c). $20\log\underline{H}$
(d). $|\underline{H}|$

Q3. Sur une échelle logarithmique, l'intervalle pour passer d'une valeur à 10 fois plus s'appelle :

(a). une décurie
(b). une décennie
(c). une dizaine
(d). une décade

Q4. L'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal est de :

(a). changer sa pulsation
(b). multiplier son amplitude par G_{dB} et le déphaser de $\arg\underline{H}$
(c). multiplier son amplitude par $|\underline{H}|$ et le déphaser par $\arg\underline{H}$
(d). le multiplier par $\underline{H}$

Q5. Un filtre d'ordre 3 a une asymptote en HF de pente :

(a). la pente en BF moins 20 dB/déc
(b). la pente en BF moins 60 dB/déc
(c). -60 dB/déc
(d). 0 dB/déc

Q6. Il n'existe que des filtres de type passe-bas, passe-bande ou passe-haut.

(a). Faux
(b). Vrai

Q7. La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{2}{\frac{4}{j\omega}+1+2j\omega}$ a pour équivalents :

(a). 2 en BF et $\frac{1}{j\omega}$ en HF
(b). $\frac{1}{j\omega}$ en BF $\frac{j\omega}{2}$ en HF
(c). $\frac{j\omega}{2}$ en BF et $\frac{1}{j\omega}$ en HF
(d). 2 en BF et 2 en HF

✓ QCM : Filtrage d'un signal sinusoïdal ✗

Q8. On envoie un signal $e(t) = 3\cos(300t)$ sur un filtre de FT : $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+0{,}02j\omega}$. La sortie vaut :

(a). $1,2\cos(300t+1,2)$ (b). $3\cos(300t+0,02)$
(c). $0,6\cos(-1,4)$ (d). $0,5\cos(300t-1,4)$

Q9. On envoie un signal $e(t)=2\cos(1000t+0,5)$ sur un filtre de FT : $\underline{H}(\omega)=\frac{1}{1-j\frac{1200}{\omega}}$. La sortie vaut :

(a). $2,3\cos(1000t)$ (b). $0,45\cos(1000t-1,4)$
(c). $1,3\cos(1000t+1,4)$ (d). $0,8\cos(1000t+1,7)$

Q10. On envoie un signal $e(t)=1,2\cos(150t)+2,1\cos(800t+0,2)$ sur un filtre de FT : $\underline{H}(\omega)=\frac{1.7}{1+j\frac{\omega}{250}}$. La sortie vaut :

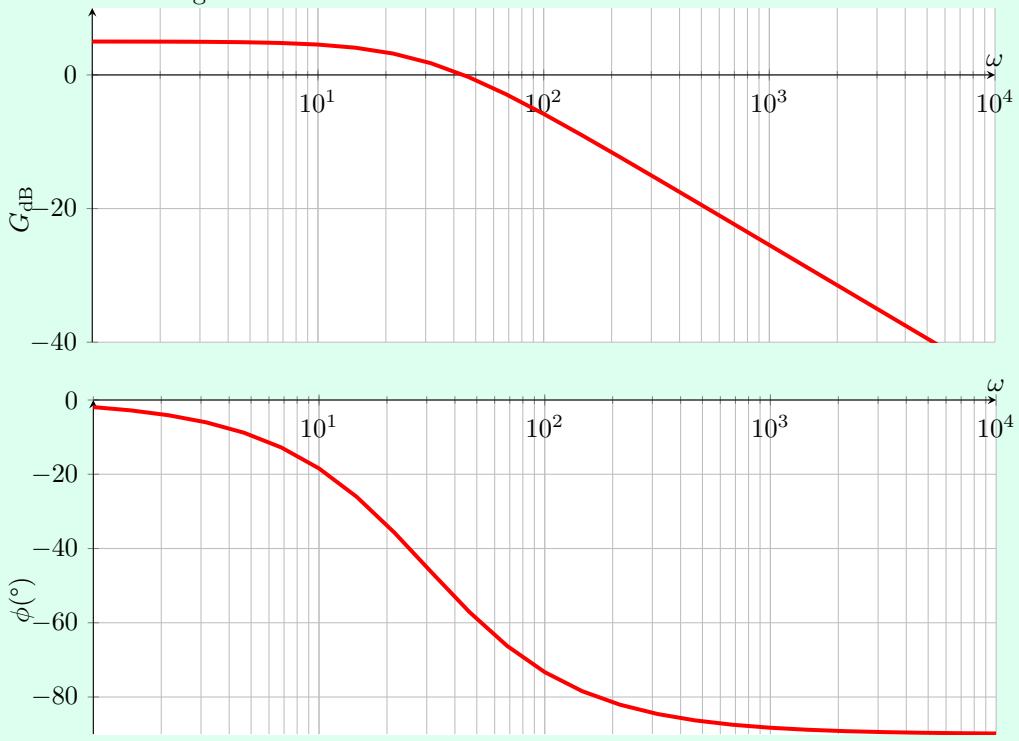
(a). $0,7\cos(150t-0,2)+0,3\cos(800t-0,2)$ (b). $1,7\cos(150t-0,5)+1,1\cos(800t-1,1)$
(c). $0,3\cos(150t-0,7)+0,5\cos(800t+1,3)$ (d). $1,1\cos(150t-0,7)+2,1\cos(800t-1,1)$

Q11. On envoie un signal $e(t)=3+3\cos(500t)$ sur un filtre de FT : $\underline{H}(\omega)=\frac{0,5}{1+j\frac{\omega}{400}-\frac{\omega^2}{400^2}}$. La sortie vaut :

(a). $1,5+1,1\cos(500t-1,2)$ (b). $1,5+1,3\cos(500t+1,2)$
(c). $0,6\cos(500t-0,7)$ (d). $1,2\cos(500t-0,2)$

✓ QCM : Lecture d'un diagramme de Bode ✗

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



Q12. Que vaut $|\underline{H}|$ à $2000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$?

(a). $0,04$ (b). $0,1$
(c). -35 (d). $0,03$

Q13. Un signal en entrée a pour fréquence $11\,\text{Hz}$; par combien son amplitude est-elle multipliée ?

(a). 1
(b). $1,8$
(c). $0,7$
(d). $0,1$

Q14. Pour quelles pulsations le signal est-il atténue d'un facteur supérieur à 10 ?

(a). $> 200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
(b). toute pulsation
(c). $> 650\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
(d). $> 430\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Q15. À quelle fréquence le signal est-il déphasé de $-45°$?

(a). 35 Hz
(b). 60 Hz
(c). 220 Hz
(d). 6 Hz

E7. Filtres linéaires

Exercices

réponses page 684

Exercice E7.1 : Filtrage de cosinus [*]

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{2}{1 + j\omega/1000}$.

1. On met en entrée une tension $e(t) = 2,5\cos(2000t + 0,2)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.
2. On met en entrée une tension $e(t) = 3\cos(50t) + 3\cos(5000t + 0,52)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.

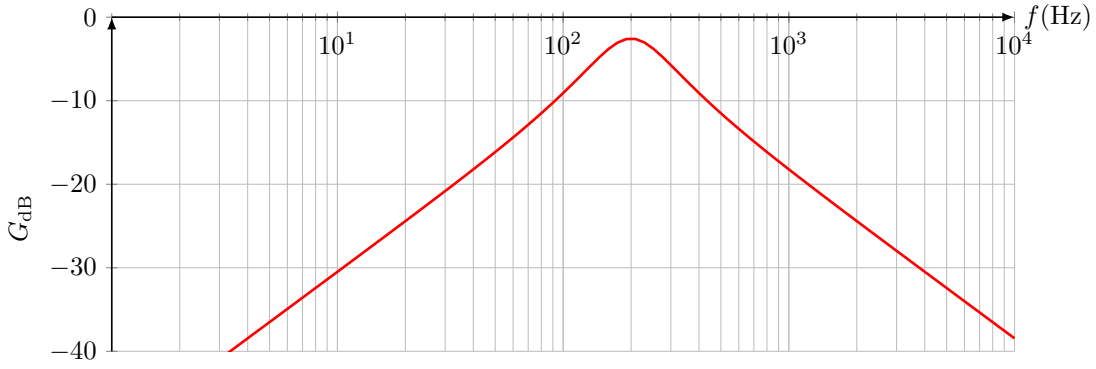
Exercice E7.2 : Filtrage par un filtre [*]

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1 + \frac{j\omega}{300}}{0,7 + \frac{j\omega}{800} - \frac{\omega^2}{10^5}}$.

1. On met en entrée une tension $e(t) = 5\cos(500t + 0,2) + 5\cos(1500t)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.
2. On met en entrée une tension $e(t) = 6 + 2\cos(300t) + 12\cos(3000t - 1,5)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.

Exercice E7.3 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

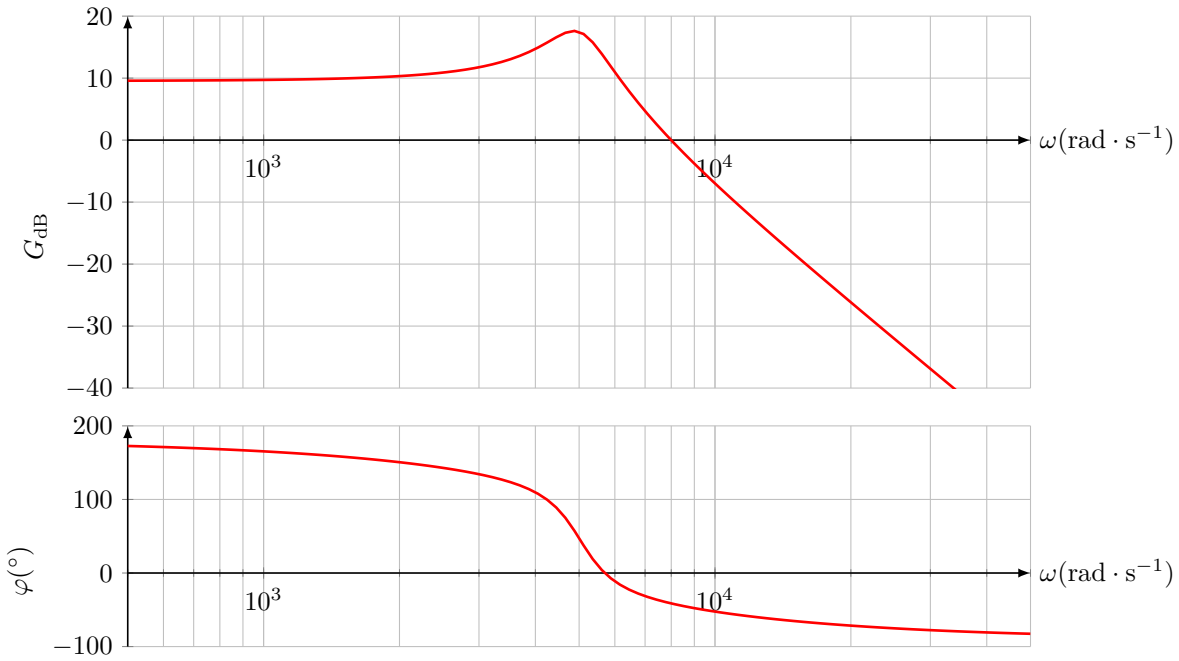
Un filtre a le diagramme de Bode en gain suivant :



1. Que vaut le gain à 100 Hz ? à 200 Hz (le maximum) ? à 1000 Hz ?
2. Déduisez-en $|\underline{H}|$ à ces trois fréquences.
3. On met en entrée de ce filtre une tension d'amplitude 10 V. Que vaut l'amplitude de la sortie si la tension a pour fréquence 100 Hz ? à 200 Hz ? à 1000 Hz ?

Exercice E7.4 : Caractéristiques d'un filtre [**]

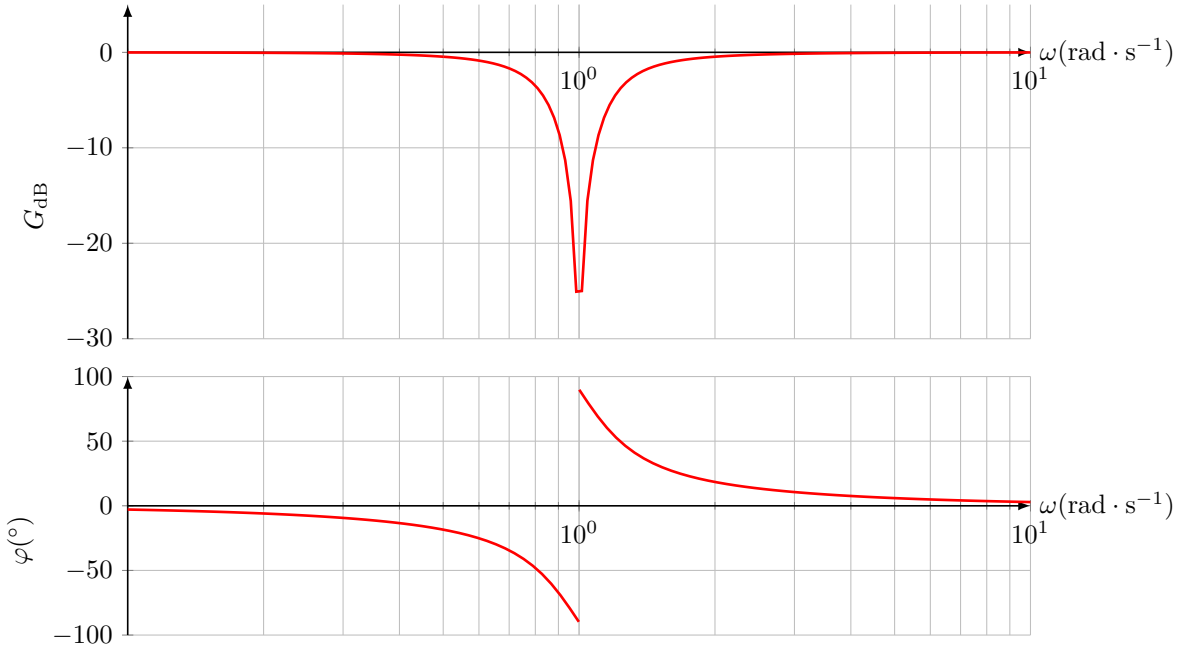
Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



1. Quel est la famille de ce filtre ?
2. Déterminez la valeur de l'amplification en basse fréquence, notée H_0.
3. Quelle est la **fréquence** de résonance ? Que vaut la largeur en fréquence de la bande passante à $-3\,\text{dB}$?
4. Mesurez la pente de l'asymptote HF de la courbe du gain. Déduisez-en l'ordre de ce filtre. Est-ce cohérent avec la courbe en phase ?

Exercice E7.5 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



1. On met en entrée un signal $e(t) = 2\cos(10t)$; déterminez le signal de sortie.
2. On met en entrée un signal $e(t) = 2\cos(10t) + 5\cos(0,9t)$; déterminez le signal de sortie.
3. Quel est (très approximativement) l'intervalle des pulsations qui sont atténuées par un facteur supérieur à $\sqrt{2}$?

Exercice E7.6 : Filtre d'ordre 1 [*]

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{2 + j\frac{\omega}{100}}$

1. Tracez son diagramme de Bode asymptotique.
2. Calculez sa pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ en admettant que l'amplitude de $\underline{H}$ atteint son maximum en $\omega = 0$.

Exercice E7.7 : Filtre d'ordre 1 [*]

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{2 - j\frac{100}{\omega}}$

1. Tracez son diagramme de Bode asymptotique.
2. Calculez sa pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ en admettant que l'amplitude de $\underline{H}$ atteint son maximum en $\omega = +\infty$.

Exercice E7.8 : Isolation phonique [**]

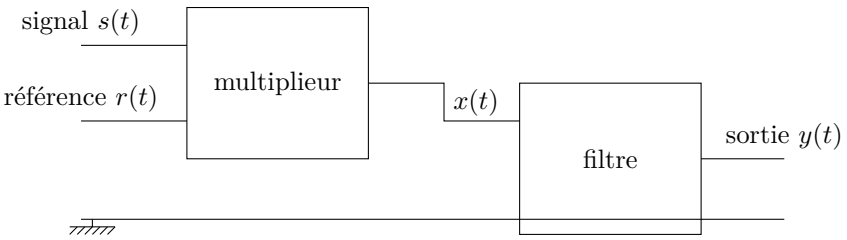
Une cloison en plaques de plâtre remplie de laine de chanvre a une atténuation égale à 34 dB à 250 Hz et 43 dB à 1500 Hz. On pose par-dessus une plaque de liège ayant une atténuation de 14 dB à 250 Hz et 31 dB à 1500 Hz ; c'est comme si on mettait ces deux filtres sonores en cascade.

1. Calculez l'atténuation en dB à 250 Hz et à 1500 Hz, puis le facteur par lequel est divisé le son à ces fréquences.
2. En supposant que l'atténuation varie linéairement entre 250 Hz et 1500 Hz, calculez la pente du gain dans le diagramme de Bode, en dB/déc.
3. *** Déterminez alors l'atténuation à 800 Hz.

Exercice E7.9 : Mesure de la vitesse d'éloignement des galaxie [**]

Quand on observe les galaxies lointaines, on observe que leur spectre est décalé vers les basses fréquences (grandes longueurs d'ondes) à cause de l'effet Doppler : cela traduit le fait qu'elles s'éloignent de nous.
Pour mesurer cette vitesse, on s'intéresse à la « raie à 21 cm » de l'hydrogène de longueur d'onde $\lambda_0 = 21{,}11\,\text{cm}$.
Données : vitesse de la lumière $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

1. Calculez la fréquence f_0 correspondante.
2. Quand une galaxie s'éloigne de nous à la vitesse v, la raie à 21 cm est décalée en fréquence : la fréquence captée vaut $f = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f_0$.
   Calculez le décalage pour la galaxie du Sombrero qui s'éloigne de nous à $1368\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; commentez.
3. Un radiotélescope mesure le signal émis par la galaxie et isole la raie à 21 cm ; on a alors un signal $s(t) = S_0.\cos(2\pi f t)$. Le but est de mesurer f pour connaître la vitesse v de fuite de la galaxie.
   Pour cela, on génère sur place une raie à 21 cm de référence, $r(t) = R_0.\cos(2\pi f_0 t)$, et on envoie ces deux signaux dans le montage suivant :

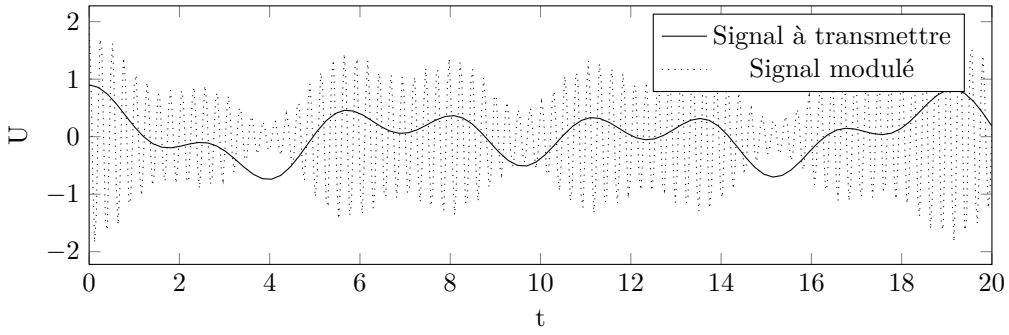


   La première étape est le passage par un multiplieur qui donne en sortie $x(t) = K.s(t).r(t)$ avec K une constante.
   Montrez que $x(t)$ est la somme de deux cosinus dont on précisera la fréquence en fonction de f et f_0, puis en fonction de f_0 et $\frac{v}{c}$.

4. On envoie alors le signal dans un filtre passe-bas.
   Proposer un choix d'ordre et de fréquence de coupure de ce filtre pour que le cosinus basse fréquence passe, et que l'autre soit atténué d'un facteur 100 ? Quelle est alors la forme de $y(t)$ en négligeant les termes qui sont négligeables ?
5. Pour une autre galaxie, on observe que $y(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence $f_1 = 2{,}4\,\text{MHz}$. Calculez la vitesse de fuite de cette galaxie.

Exercice E7.10 : Démodulation d'amplitude [***]

La modulation est une technique consistant à coder un signal $s(t)$ qu'on veut transmettre dans un autre signal $p(t)$, appelé *porteuse*, de haute fréquence. La technique la plus simple est la modulation d'amplitude (AM) qui consiste à créer un signal de la même fréquence que p, mais dont l'amplitude varie comme $s(t) + C$ où C est une constante.



On va s'intéresser ici au cas le plus simple d'un signal sinusoïdal. On prendra donc $s(t) = S_0 \cos \omega_s t$; la porteuse est de la forme $p(t) = P_0 \cos \omega_p t$ avec $\omega_p \gg \omega_s$.
Pour les applications numériques, on considérera la radio France Inter sur grandes ondes ; elle émet à une fréquence de porteuse $f_p = 162\,\text{kHz}$ et les signaux transmis ont pour fréquence maximale $f_s = 4{,}5\,\text{kHz}$.

1. Pour créer le signal modulé, on prend la porteuse qui a une amplitude constante, et on la multiplie par $s(t)$ auquel on a ajouté une constante. On obtient donc $m(t) = K.p(t).(s(t) + C)$ avec K et C des constantes.
   Montrez que $m(t)$ est la somme de 3 tensions sinusoïdales de pulsations à exprimer.
2. Le résultat $m(t)$ est transmis par voie hertzienne, car il est composé de très hautes fréquences qui se propagent bien. Il est reçu par l'utilisateur qui veut le démoduler, c'est-à-dire récupérer le signal $s(t)$.
   Pour cela, on remultiplie $m(t)$ par $p(t)$. On obtient la tension $d(t) = K'.p(t).m(t)$ dont on peut montrer par des calculs (admis) qu'elle vaut

$$d(t) = A.\left(\frac{C}{2} + \frac{C}{2}\cos 2\omega_p t + \frac{S_0}{2}\cos \omega_s t + \frac{S_0}{4}\cos\left(2\omega_p - \omega_s\right)t + \frac{S_0}{4}\cos\left(2\omega_p + \omega_s\right)t\right)$$

   avec $A = K'.K.P_0$.
   Dans le tableau ci-dessous, remplissez pour chacun des 5 termes de $d(t)$ les colonnes 1 et 2.

Fréquence	Amplitude dans $d(t)$	$\lvert\underline{H}\rvert$	Amplitude dans $f(t)$
0			
$f_s =$			
$2f_p - f_s =$			
$2f_p =$			
$2f_p + f_s =$			

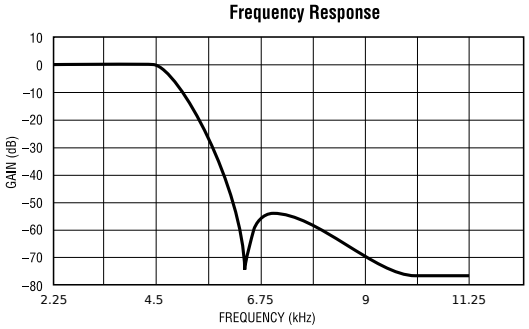
3. On envoie $d(t)$ dans un filtre passe-bas. Comment doit-on choisir sa pulsation de coupure si on veut conserver le signal initial et éliminer la porteuse ?

4. On propose d'envoyer $d(t)$ dans un filtre de fonction de transfert $\underline{H}_1 = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}-\frac{f^2}{f_0^2}}$ avec $f_0 = 4{,}5\,\text{kHz}$; on obtient en sortie un signal $f(t)$.
   Remplissez alors les colonnes 3 et 4 du tableau.
   Déduisez-en que le signal de sortie, à un facteur près, est égal à $C + s(t)$, si on suppose que le filtre n'amène pas de déphasage.
5. On envoie ce signal restant dans un filtre $\underline{H}_2 = \frac{1}{1-j\frac{f_1}{f}}$ avec $f_1 = 1\,\text{Hz}$. Que reste-t-il en sortie ?
6. En réalité, cela ne fonctionne pas. En effet, une autre radio peut émettre sur une porteuse voisine. Les signaux de cette autre radio se retrouvent très proches dans $d(t)$, entre 5,5 kHz et 14,5 kHz. Il faut donc que notre filtre laisse passer le 4,5 kHz et coupe le 5,5 kHz. Justifiez que ce n'est pas vraiment le cas.
7. On achète un filtre LTC 1069-1 de Linear Technology ; il s'agit d'un filtre passe-bas du 8ème ordre. Son gain en fonction de la fréquence est donné dans la notice (la pulsation de coupure peut être réglée entre 3 kHz et 4,5 kHz, ici on a réglé sur 4,5 kHz) :

LINEAR TECHNOLOGY

LTC1069-1

Low Power, 8th Order Progressive Elliptic, Lowpass Filter



Déterminer par combien va être multiplié un cosinus de fréquence 5,5 kHz ; puis 6 kHz.
Conclusion ?

E7. Filtres linéaires

TDs numériques

réponses page 688

TD numérique : Série de Fourier et filtrage

Nouveau $x + i.y$ Nouveau plot

Nous allons simuler le filtrage d'une tension périodique par un filtre.

1. Filtre passe-bas d'ordre 2

   On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-\frac{f^2}{f_0^2}+j\frac{f}{2f_0}}$ avec $H_0 = 2$ et $f_0 = 1500\,\text{Hz}$.

   (a) Définissez sous Python une fonction `H_(f)` qui renvoie $\underline{H}$, puis deux fonctions `modH(f)` et `argH(f)` qui renvoient son module et sa phase.

   Rappel : le module se calcule avec `np.abs` et la phase avec `np.angle`.

   (b) Tracez le diagramme de Bode de ce filtre entre 100 Hz et 100 kHz ; pour cela, il faudra tracer une courbe comme on le fait habituellement, mais avec deux différences :

   — l'échelle horizontale doit être logarithmique ; cela s'obtient avec `plt.xscale("log")`

   — les points de l'abscisse (tableau des fréquences) doivent se répartir de façon régulière sur cette échelle logarithmique ;, ce qui n'est pas le cas avec un `numpy.linspace` ; on utilisera donc la commande `numpy.logspace(2,5,1000)` qui crée 1000 point entre 10^2 et 10^5 régulièrement espacés sur l'échelle logarithmique (cette commande est équivalente à `10**numpy.linspace(2,5,1000)`).

   Rappel : le logarithme en base 10 se calcule avec `np.log10()`.

   (c) On suppose qu'on met pour le moment en entrée une fonction $e_1(t)$ sinusoïdale d'amplitude 5 V, de fréquence $f = 500\,\text{Hz}$ et de phase nulle.

   Écrivez la forme mathématique de $e_1(t)$ et tracez-la avec Python entre 0 et $3T$ (T la période).

   (d) Quelle est la forme mathématique de la sortie $s_1(t)$ (on gardera l'expression avec $|\underline{H}|$ et $\arg \underline{H}$) ?

   Tracez alors sur le même graphique $s_1(t)$.

   (e) On met maintenant en entrée en signal dont la décomposition en série de Fourier est

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t) \text{ avec } a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1}\right)(\cos(2\alpha k\pi) - 1)$$

$$\text{et } b_k = \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1}\right)\sin(2\alpha k\pi) \text{ pour } \alpha = 0,8$$

   Tracez le signal e_2 obtenu en faisant la somme, par exemple, des 25 premiers termes.

   (f) Tracez alors sur le même graphique la sortie correspondante.

   Remarque : les sinus sont transformés au passage du filtre de la même manière que les cosinus.

2. Filtre dérivateur/intégrateur

   Tracez de même l'effet d'un filtre dérivateur $\underline{H} = j\frac{f}{f_0}$ sur les dents de scie, puis d'un filtre intégrateur $\underline{H} = -j\frac{f_0}{f}$.

3. Vous pouvez reprendre la même chose avec un signal en créneaux de fréquence f. On admet qu'il se décompose en série de Fourier selon la formule

$$e_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2\pi(2k+1)ft) \text{ avec } b_k = 5 \times \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

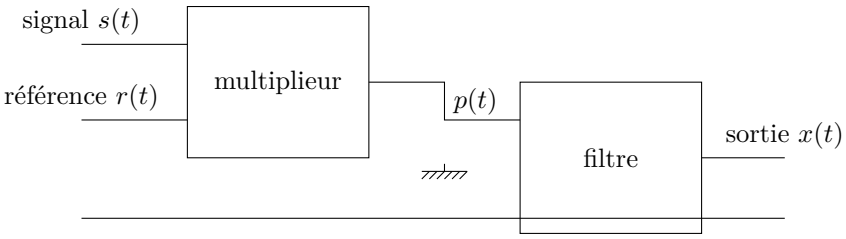
   et on prendra au moins 100 harmoniques.

TD numérique : Mesure d'un effet Doppler

Nouveau plot Nouveau EDO

Pour mesurer la vitesse d'un objet, un sonar envoie une onde ultrasonore de fréquence bien connue f_0 ; on prendra $f_0 = 40\,\text{kHz}$ dans la suite. Cette onde se réfléchit sur un objet et revient avec une fréquence $f_0 + \Delta f$ différente, le décalage Δf étant proportionnel à la vitesse de l'objet : c'est l'effet Doppler. En mesurant Δf on

peut en déduire la vitesse de l'objet. Mais c'est difficile car $\Delta f \ll f_0$.
Numériquement, pour les simulations, on prendra $\Delta f = 500\,\text{Hz}$.
Le but est de mesurer le décalage en fréquence Δf. Pour cela, on envoie le signal dans un multiplieur puis un filtre passe-bas :



1. *Signal et référence*
   On prendra pour le signal et pour la référence des fonctions sinusoïdales d'amplitude 1 et de phase nulle, pour simplifier. Le signal a pour fréquence $f_0 + \Delta f$ tandis que la référence a pour fréquence f_0.
   (a) Écrivez littéralement les formes de $s(t)$ et $r(t)$.
   (b) Définissez ces deux fonctions sous Python.
2. *Spectre de s et r*
   (a) Dessinez à la main sur un même graphique le spectre de s et celui de r.
   (b) On va maintenant tracer ces spectres automatiquement avec Python. Pour cela, commencez par générer un tableau `tab_t` des temps avec 250000 points entre 0 et $\frac{5}{\Delta f}$ (pour faire un bon spectre, il faut beaucoup de points et plusieurs de périodes), et générez les tableaux `tab_s` et `tab_r` correspondant.
   (c) Le programme suivant permet de tracer le spectre de s grâce à un algorithme appelé *transformée de Fourier rapide* (FFT) :

```
import numpy.fft as nfft # librairie pour la fft
tab_a_s=np.abs(nfft.rfft(tab_s))*2/len(tab_s) # amplitudes de la fft réelle
tab_f=nfft.rfftfreq(len(tab_t),d=tab_t[1]) # fréquences de la fft
plt.figure()
plt.plot(tab_f,tab_a_s,label="spectre de s")
plt.xlim([0,100e3]) # échelle horizontale, les trop hautes fréquences ne servent à rien
plt.xlabel("f(Hz)")
plt.ylabel("(V)")
plt.legend()
plt.show()
```

   Exécutez-le, puis modifiez-le pour y ajouter le spectre de r. Zoomez pour bien voir le décalage en fréquence entre les deux signaux.
3. *Sortie du multiplieur*
   À la sortie du multiplieur, on obtient $p(t) = K.s(t).r(t)$ avec $K = 1$.
   (a) Montrez théoriquement que p est la somme de deux cosinus de fréquences à préciser.
   (b) Calculez le tableau `tab_p` des valeurs de $p(t)$ sous Python, et tracez $p(t)$; calculez aussi le tableau `tab_a_p` des amplitudes de son spectre par FFT, tracez-le et vérifiez la cohérence avec la théorie.
4. *Filtrage*
   On filtre $p(t)$ par un simple passe-bas $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{f}{f_c}}$ avec $H_0 = 1$ et $f_c = 1\,\text{kHz}$.
   (a) Quel est l'effet théorique du filtre sur l'amplitude d'un signal de fréquence f ? En déduire comment on peut calculer le tableau des amplitudes du spectre de x en fonction de `tab_f` et `tab_a_p`. Tracez ce spectre et commentez le résultat.
   (b) On peut retrouver ce spectre d'une autre façon. En effet, la fonction de transfert du filtre peut être vue comme une équation différentielle linéaire reliant son entrée et sa sortie.
   Établissez l'ED reliant $x(t)$ et $p(t)$.
   (c) Résolvez alors cette ED par méthode d'Euler ; on prendra comme pas temporel `tab_t[1]` (pas temporel du tableau des temps) et comme nombre total de points `len(tab_t)`. Tracez $x(t)$.
   (d) Tracez le spectre par FFT de $x(t)$ obtenu, et vérifiez la cohérence avec la question 4a.

TD numérique : Détection synchrone

Ad. EDO

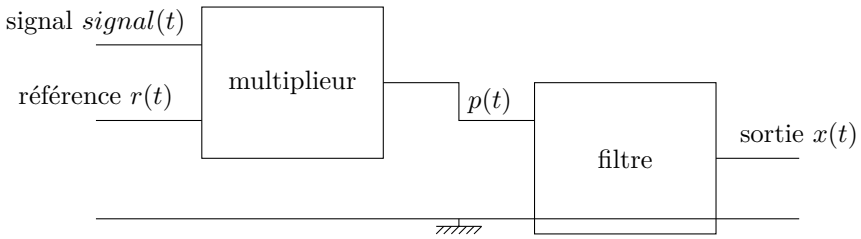
On suppose qu'on enregistre un son à la fréquence $f_0 = 400\,\text{Hz}$ noyé dans du bruit. Par exemple, on génèrera le signal avec le programme suivant :

```
f0=400
A=0.1
np.random.seed(2)
tsf=np.arange(0,1000,20)
i0=np.where(tsf==f0)[0]
tsf=tsf+np.random.uniform(-2,2,len(tsf))
tsA=np.random.uniform(-0.15,0.15,len(tsf))
tsp=np.random.uniform(0,2*np.pi,len(tsf))
tsf[i0],tsA[i0],tsp[i0]=f0,A,0
def signal(t):
    if isinstance(t,int|float):
        return np.sum(tsA*np.cos(2*np.pi*tsf*t+tsp))
    else:
        return [np.sum(tsA*np.cos(2*np.pi*tsf*xt+tsp)) for xt in t]
tab_t=np.linspace(0,400/f0,500000)
tab_signal=signal(tab_t)
```

1. Recopiez ce programme et tracez le signal en fonction du temps.
2. Le programme suivant permet de tracer le spectre du signal grâce à un algorithme appelé *transformée de Fourier rapide* (FFT) :

```
import numpy.fft as nfft # librairie pour la fft
tab_a_signal=np.abs(nfft.rfft(tab_signal))*2/len(tab_signal) # amplitudes de la fft réelle
tab_f=nfft.rfftfreq(len(tab_t),d=tab_t[1]) # fréquences de la fft
plt.figure()
plt.plot(tab_f,tab_a_signal,label="spectre du signal")
plt.xlim([0,1e3]) # échelle horizontale, les trop hautes fréquences ne servent à rien
plt.xlabel("f(Hz)")
plt.ylabel("(V)")
plt.legend()
plt.show()
```

   Exécutez-le et constatez que le son à f_0 ne ressort pas franchement.
3. Le but est de mesurer dans ce fouillis l'amplitude A du cosinus intéressant. Pour cela, on traite le signal de la façon suivante :



   Le signal de référence $r(t)$ est de la forme $R_0\cos(2\pi f_0 t)$ avec $R_0 = 1$. À la sortie du multiplieur, on obtient $p(t) = K.signal(t).r(t)$ avec $K = 1$.

   Étude théorique : on écrit le bruit sous la forme d'une somme de plein de cosinus de fréquences aléatoires. On écrit donc le signal sous la forme $signal(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + \sum_k B_k\cos(2\pi f_k t)$.

   Écrivez la sortie $p(t)$ du multiplieur sous la forme d'une somme de beaucoup de cosinus et d'un terme constant.
4. Si on récupère le terme constant, on peut avoir accès à l'amplitude A. Pour cela, on passe $p(t)$ dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 2\,\text{Hz}$ et de gain statique $H_0 = 10$. On supposera pour le moment un filtre idéal : tout signal de fréquence $f < f_c$ est multiplié par H_0 tandis que tout signal de fréquence $f > f_c$ est supprimé.

   Que vaut la sortie théorique si on suppose que $\forall k, |f_k - f_0| \gg f_c$?
5. On prend pour commencer un filtre d'ordre 1, de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{2\pi f_c}}$.

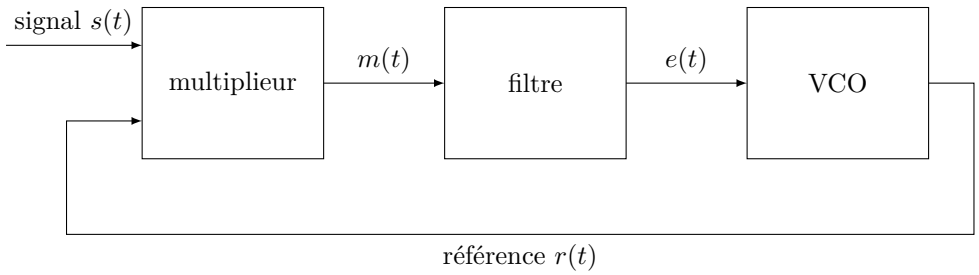
Pour appliquer ce filtre à $p(t)$ sous Python, on est embêté car il n'est pas sinusoïdal. Mais on peut s'en sortir en remarquant que $\underline{H}$ traduit en fait une équation différentielle reliant $p(t)$ à $x(t)$.
Établissez cette ED.

6. À l'aide d'une méthode d'Euler (de pas `tab_t[1]-tab_t[0]` avec `len(tab_t)` pas), générez $x(t)$ avec comme condition initiale $x(0) = 0$ et tracez-le Observez qu'après un court régime transitoire, la valeur de $x(t)$ se stabilise autour d'une valeur constante, d'où on peut tirer A, mais qu'il reste pas mal d'oscillations.
7. S'il vous reste du temps, essayer avec un filtre d'ordre 2 : $\underline{H} = \frac{10}{1-\frac{\omega^2}{(2\pi f_c)^2}+j\frac{\omega}{\pi f_c}}$

TD numérique : Boucle à verrouillage de phase

EDO

Lorsqu'on souhaite démoduler un signal, il faut disposer d'un signal de référence exactement de même fréquence que la porteuse. Or il est impossible de générer un tel signal ayant exactement la même fréquence ; on utilise alors un système asservi appelé Boucle à Verrouillage de Phase (PLL en anglais).
Le schéma d'une PLL est représenté ci-dessous :



— le signal $s(t)$ est celui qu'on capte, sa porteuse est de fréquence f_s ; on le notera $s(t) = S_0\cos(2\pi f_s t)$
— il est multiplié par un signal de référence $r(t)$ (cf. ci-dessous)
— le produit $m(t) = K.s(t).r(t)$ passe dans un filtre passe-bas
— la sortie $e(t)$ du filtre sert de commande à un Oscillateur Commandé en Tension (VCO) qui génère en sortie le signal de référence $r(t)$, sinusoïdal, et de fréquence f_1 variable en fonction de e selon une loi affine : $f_1 = f_0 + \alpha.e$

1. On suppose pour le moment que la PLL a réussi à se fixer sur la bonne fréquence, c'est-à-dire que $r(t) = R_0\cos(2\pi f_s t + \varphi)$.
   Que vaut $m(t)$? et $e(t)$? Établir la relation entre f_s, f_0, α et $\cos\varphi$, et en déduire que la PLL ne peut se fixer sur la bonne fréquence que si f_s appartient à un intervalle $[f_0 - \Delta f\,;f_0 + \Delta f]$ avec Δf à exprimer en fonction de f_0, K, S_0, R_0 et α.
2. Pour savoir si la PLL arrive à atteindre cet état, on va faire une simulation :
   — le filtre passe-bas est un simple filtre d'ordre 1 de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\tau\omega}$
   — on admet que, lorsque $e(t)$ est variable, le VCO donne en sortie une tension s'écrivant $r(t) = R_0\cos\left(2\pi\int(f_0+\alpha e(t))\mathrm{d}t\right)$
   On pose $E(t) = \int e(t)\mathrm{d}t$. Montrer que E vérifie l'équation différentielle

$$\tau\ddot{E} + \dot{E} = K.S_0.R_0.\cos(2\pi f_s t)\cos(2\pi(f_0+E)t) \quad (1)$$

3. Résolvez cette équation différentielle avec `odeint` avec les valeurs suivantes : $f_0 = 5000\,\mathrm{Hz}$; $f_s = 4980\,\mathrm{Hz}$; $\tau = 50\,\mathrm{ms}$; $K.S_0.R_0 = 10\,\mathrm{V}$ et $\alpha = 50\,\mathrm{Hz}\cdot\mathrm{V}^{-1}$; on prendra des conditions initiales nulles pour $E(t)$ et $e(t)$, et on tracera $e(t)$ puis $f_1(t)$ sur une durée de 500 ms.
4. L'intérêt de la PLL est d'obtenir en $r(t)$ un signal sinusoïdal de même fréquence que la porteuse, même si le signal est modulé. Par exemple, dans la simulation précédente, changer l'amplitude du signal en $S_0\,(1 + 0,3\cos(200\pi t))$ et observez que la PLL se stabilise aussi bien.
5. La PLL peut être stable dans un intervalle $f_0 \pm \Delta f$, mais cela ne prouve pas qu'elle réussira à se stabiliser. Pour le savoir, on remplace maintenant le signal en entrée par un signal dont la fréquence varie continument : $f_s(t) = 4600 + 400t$ en Hertz, ce qui donne un signal $s(t) = S_0\cos(2\pi\int f_s(t)\mathrm{d}t)$.
   Simulez la PLL pendant 2 s et tracez $f_1(t)$ et $f_s(t)$. Observez la valeur pour laquelle la PLL accroche le signal, et la valeur pour laquelle elle se décroche.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b) ET (d)
Q2.(a)
Q3.(d)
Q4.(c)
Q5.(b)
Q6.(a)
Ce sont les 3 principaux, mais il existe aussi les coupe-bande, des correcteurs, …
Q7.(c)
Le terme $\frac{4}{j\omega}$ est de degré -1, le terme constant de degré 0, le terme $2j\omega$ de degré 1.

Réponses au QCM : Filtrage d'un signal sinusoïdal

Q8.(d)
$\underline{H} = \frac{1}{1+6j} = 0,16e^{-1,4j}$
Q9.(c)
$\underline{H} = \frac{1}{1-1,2j} = 0,64e^{0,9j}$
Q10.(b)
Il faut calculer $\underline{H}$ à deux pulsations différentes.
Q11.(a)
Le terme constant 3 correspond à un cosinus de pulsation nulle.

Réponses au QCM : Lecture d'un diagramme de Bode

Q12.(d)
$G_{\text{dB}} = -30\,\text{dB}$ environ.
Q13.(c)
$\omega = 2\pi f = 70\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ donc $G_{\text{dB}} = -3\,\text{dB}$ environ
Q14.(c)
$G_{\text{dB}} < -20\,\text{dB}$
Q15.(d)
On lit $35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ qu'on divise par 2π pour avoir la fréquence.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E7.1 : Filtrage de cosinus [*]

1. On calcule le module et l'argument de la fonction de transfert à $\omega = 2000$: $|\underline{H}| = 0,89$ et $\arg \underline{H} = -1{,}11\,\text{rad}$ donc $s(t) = 2,24\cos(2000t + 0,2 - 1,11)$
2. On travaille sur chaque cosinus à part. Pour le premier $3\cos(50t)$, on trouve après calculs que la sortie vaudra $2 \times 3\cos(50t - 0,05) = 6\cos(50t - 0,05)$
   On procède de même pour la seconde : la sortie vaut $1,2\cos(5000t - 0,85)$.
   La sortie complète vaut donc $s(t) = 6\cos(50t - 0,05) + 1,2\cos(5000t - 0,85)$.

Corrigé de l'exercice E7.2 : Filtrage par un filtre [*]

1. $\underline{H}(500) = 1,0e^{-1,8j}$ et $\underline{H}(1500) = 0,23e^{-1,7j}$ donc $s(t) = 1,0\times5\cos(500t+0,2-1,8)+0,23\times5\cos(1500t-1,7) = 5,0\cos(500t - 1,6) + 1,2\cos(1500t - 1,7)$
2. Le terme constant doit être considéré comme un terme de pulsation nulle.
   $\underline{H}(0) = 1,4$, $\underline{H}(300) = 3,3e^{-1,3j}$ et $\underline{H}(3000) = 0,1e^{-1,6j}$ donc $s(t) = 8,4 + 6,6\cos(300t - 1,3) + 1,2\cos(3000t - 3,1)$

Corrigé de l'exercice E7.3 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

1. On lit $-9\,\text{dB}$ à $100\,\text{Hz}$; $-3\,\text{dB}$ à $200\,\text{Hz}$ et $-17\,\text{dB}$ à $1000\,\text{Hz}$.
2. On sait que $G_{\text{dB}} = 20\log|\underline{H}|$ donc $\log|\underline{H}| = \frac{G_{\text{dB}}}{20}$ soit $|\underline{H}| = 10^{G_{\text{dB}}/20}$
   On en déduit que le module de la fonction de transfert vaut 0,35 à $100\,\text{Hz}$; 0,71 à $200\,\text{Hz}$ et 0,14 à $1000\,\text{Hz}$.
3. L'amplitude de l'entrée est multipliée par $|\underline{H}|$, donc l'amplitude de la sortie vaut 3,5 V à $100\,\text{Hz}$, 7,1 V à $200\,\text{Hz}$ et 1,4 V à $1000\,\text{Hz}$.

Corrigé de l'exercice E7.4 : Caractéristiques d'un filtre [**]

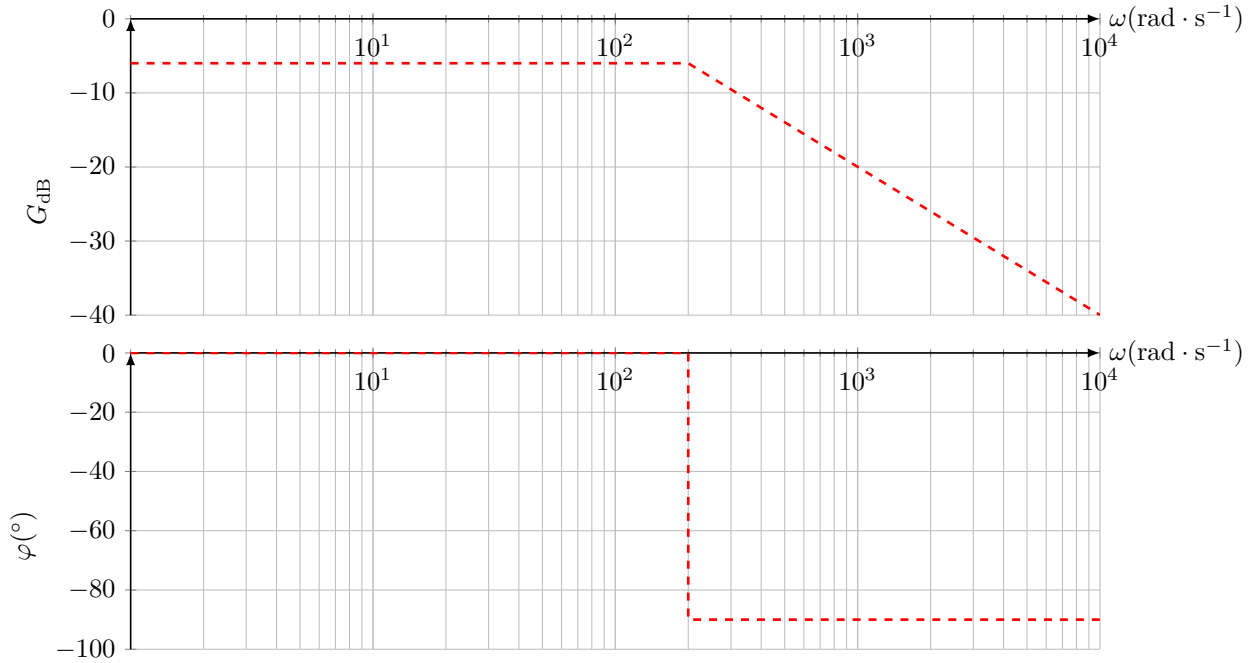
1. C'est un filtre passe-bas.
2. En BF, on lit $G_{\text{dB}} \approx 10\,\text{dB}$ d'où on tire $H_0 = 10^{10/20} = 3,2$.
3. La résonance a lieu à $\omega_r = 5 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 800\,\text{Hz}$.
   Le gain maximal vaut environ $18\,\text{dB}$ donc on trace une droite horizontale $3\,\text{dB}$ plus bas et on mesure la plage de pulsations : environ $[4000; 5500]\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit en fréquence $[640; 880]\text{Hz}$ ce qui donne une largeur $\Delta f = 240\,\text{Hz}$.
4. On note les points $(10\,000\,\text{Hz}\,; -7\,\text{dB})$ et $(30\,000\,\text{Hz}\,; -37\,\text{dB})$; la pente vaut alors (attention à l'abscisse !) $p = \frac{-37-(-7)}{\log(30000)-\log(10000)} = -63\,\text{dB/déc}$ ce qui fait environ $-60\,\text{dB/déc}$ de différence de pente entre les deux asymptotes, donc c'est un ordre 3. C'est confirmé par la différence de $-270°$ entre BF et HF pour la phase.

Corrigé de l'exercice E7.5 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

1. À $\omega = 10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ le gain vaut $0\,\text{dB}$ et la phase aussi donc $s(t) \approx e(t)$.
2. À $\omega = 0{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ le gain vaut $-10\,\text{dB}$ et la phase $-70°$ (environ ; désolé, c'est petit mais il faut bien rentrer plusieurs exercices sur la feuille) donc après quelques calculs on trouve $s(t) = 2\cos(10t) + 1,6\cos(0,9t - 1,22)$
3. $20\log(\sqrt{2}) = 3\,\text{dB}$ ce qui donne approximativement l'intervalle $[0,7 : 1,5]\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigé de l'exercice E7.6 : Filtre d'ordre 1 [*]

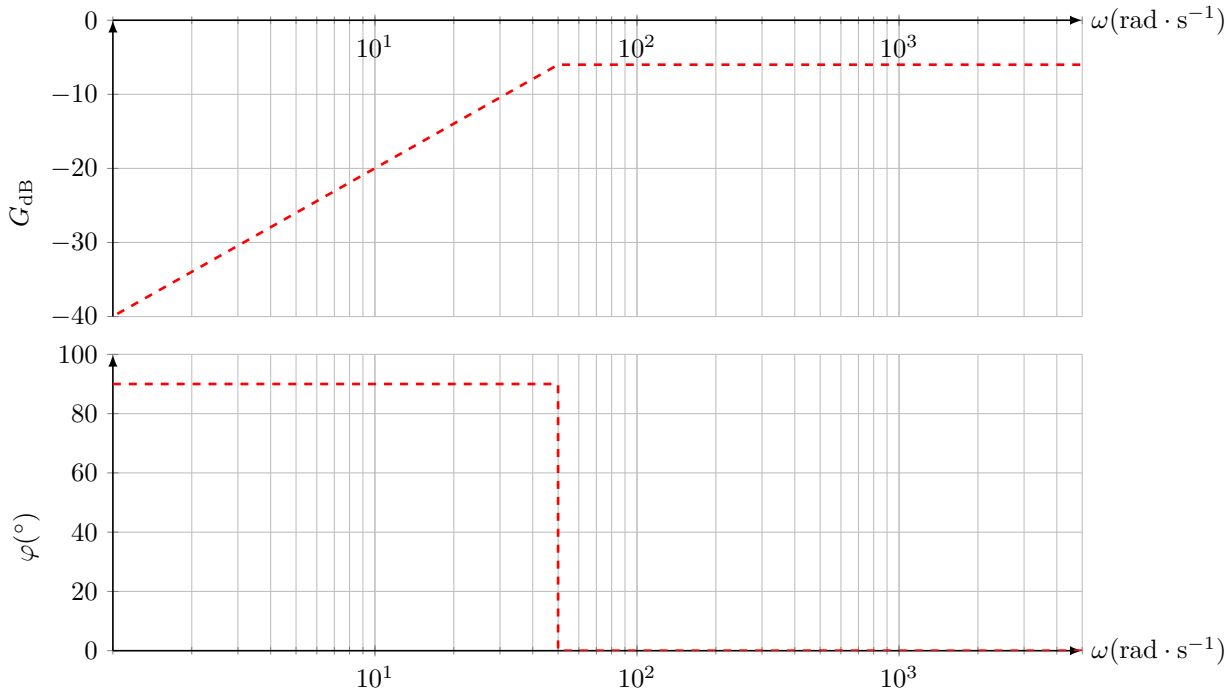
1. $\underline{H}(\omega) \underset{\omega\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc le gain a une asymptote horizontale à basse fréquence, de valeur $-6\,\text{dB}$, et la phase tend vers $0°$.
   $\underline{H}(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\sim} \dfrac{100}{j\omega}$ donc $G_{dB}(\omega) \sim 40 - 20\log\omega$: le gain a une asymptote de pente $-20\,\text{dB/déc}$ à haute fréquence, et la phase tend vers $-90°$.
   Il s'agit donc d'un filtre passe-bas. Les deux asymptotes se croisent lorsque $\frac{100}{\omega} = \frac{1}{2}$ soit pour $\omega_c = 200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; à cette pulsation, elles valent $-6\,\text{dB}$. Pour tracer le vrai diagramme de Bode, on peut calculer le vrai gain et la vraie phase pour cette pulsation : $\underline{H}(\omega_c) = \dfrac{1}{2(1+j)}$, donc le gain vaut -9dB et la phase vaut $-45°$.



2. Pour calculer la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$, il faut d'abord remarquer que le maximum de $|\underline{H}|(\omega)$ se trouve en BF, et vaut $\frac{1}{2}$.
   Il faut donc résoudre l'équation $|\underline{H}|(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ soit $\frac{1}{\sqrt{4+\frac{\omega^2}{10^4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Après quelques calculs, on trouve $\omega = 200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice E7.7 : Filtre d'ordre 1 [*]

1. $\underline{H}(\omega) \underset{\omega\to 0}{\sim} \dfrac{1}{-j\frac{100}{\omega}} = j\frac{\omega}{100}$ donc $G_{dB}(\omega) \sim 20\log\omega - 40$ (pente $+20\,\text{dB/déc}$) et la phase tend vers $+90°$.
   $\underline{H}(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc le gain a une asymptote horizontale à $-6\,\text{dB}$ et la phase tend vers $0°$.
   Il s'agit donc d'un filtre passe-haut. Les deux asymptotes se croisent lorsque $\frac{\omega}{100} = \frac{1}{2}$ soit pour $\omega_c = 50\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; à cette pulsation, elles valent $-6\,\text{dB}$. Pour tracer le vrai diagramme de Bode, on peut calculer le vrai gain et la vraie phase pour cette pulsation : $\underline{H}(\omega_c) = \dfrac{1}{2(1+j)}$, donc le gain vaut $-9\,\text{dB}$ et la phase vaut $+45°$.



2. Pour calculer la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$, il faut d'abord remarquer que le maximum de $|\underline{H}|(\omega)$ se trouve en HF, et vaut $\frac{1}{2}$.
   Il faut donc résoudre l'équation $|\underline{H}|(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ soit $\frac{1}{\sqrt{4+\frac{10^4}{\omega^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Après quelques calculs, on trouve $\omega = 50\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice E7.8 : Isolation phonique [**]

1. Leurs gains (et donc leurs atténuations) s'ajoutent donc : on a une atténuation totale de 48 dB à 250 Hz (soit une division par un facteur $10^{48/20} = 250$) et 74 dB à 1500 Hz (facteur 5000).
2. Dans le diagramme de Bode, l'abscisse est $\log\omega$ (ou $\log f$), l'ordonnée est la gain. La pente vaut donc $p = \frac{74-48}{\log(1500)-\log(250)} = 33{,}4\,\text{dB/déc}$
3. Question difficile. Une solution est d'écrire que la pente vaut aussi $\frac{A-48}{\log(800)-\log(250)}$ où A est l'atténuation recherchée, et on en tire $A = 64{,}9\,\text{dB}$

Corrigé de l'exercice E7.9 : Mesure de la vitesse d'éloignement des galaxie [**]

1. $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 1{,}420\,\text{GHz}$
2. $f = 1{,}414\,\text{GHz}$ soit un décalage de 0,5 % ce qui est faible même pour une si grande vitesse.
3. $x(t) = K.R_0.S_0.\cos(2\pi ft)\cos(2\pi f_0 t) = \frac{K.R_0.S_0}{2}\left(\cos\left(2\pi(f_0+f)t\right) + \cos\left(2\pi(f_0-f)t\right)\right)$ ce qui est la somme d'un cosinus de fréquence $f_0 + f = f_0\left(2-\frac{v}{c}\right)$ et d'un cosinus de fréquence $f_0 - f = f_0\frac{v}{c}$.
4. Le cosinus de fréquence $f_0 - f = f_0\frac{v}{c}$ est de très basse fréquence par rapport à l'autre de fréquence environ $2f_0$, qu'on veut atténuer 100 fois ce qui correspond à $-40\,\text{dB}$. Une solution est de prendre un filtre filtre passe-bas d'ordre 2 de fréquence de coupure $\frac{f_0}{5}$: dans ce cas le terme à $2f_0$ est à une décade au-dessus de la coupure, ce qui fait qu'il sera bien atténue de 40 dB. En sortie, il ne restera que $y(t) = \frac{K.R_0.S_0}{2}\cos\left(2\pi(f_0-f)t\right)$
   Il suffit donc de mesurer la fréquence de $y(t)$ avec un fréquencemètre, et on remonte facilement à v.
5. $f_0\frac{v}{c} = f_1$ donc $v = 507\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigé de l'exercice E7.10 : Démodulation d'amplitude [***]

1. À l'aide de la formule de linéarisation d'un produit de cosinus :
   $m(t) = KP_0\left(C\cos\omega_p t + S_0/2\cos\left(\omega_p-\omega_s\right)t + S_0/2\cos\left(\omega_p+\omega_s\right)\right)$
2. Tableau complet (y compris questions suivantes) :

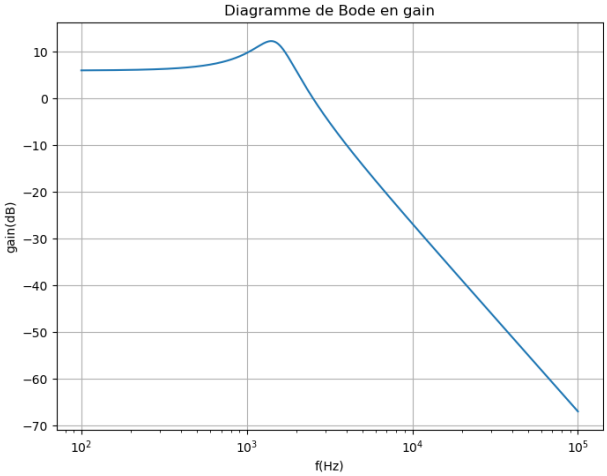
Fréquence	Amplitude dans $d(t)$	$\lvert\underline{H}\rvert$	Amplitude dans $f(t)$
0	$\frac{AC}{2}$	1	$\frac{AC}{2}$
$f_s = 4,5kHz$	$\frac{AS_0}{2}$	≈ 1	$\frac{AS_0}{2}$
$2f_p - f_s = 320kHz$	$\frac{AS_0}{4}$	8×10^{-4}	≈ 0
$2f_p = 324kHz$	$\frac{AC}{2}$	8×10^{-4}	≈ 0
$2f_p + f_s = 329kHz$	$\frac{AS_0}{4}$	7×10^{-4}	≈ 0

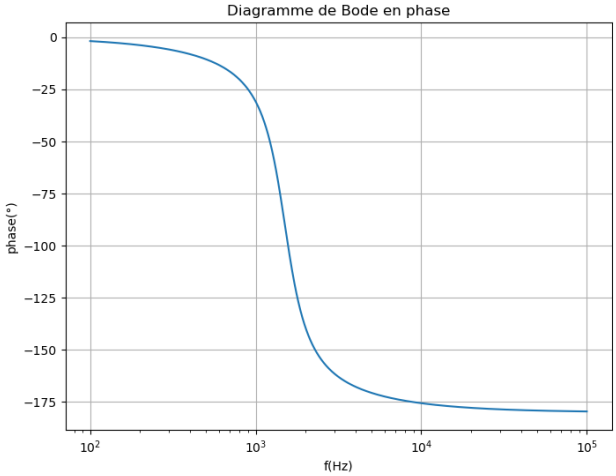
3. Il faut conserver le 4,5 kHz et couper le plus possible le 320 kHz, donc on choisit la fréquence de coupure juste au-dessus de 4,5 kHz.
4. Cf. tableau ; pour les 3 dernières lignes, l'amplitude en sortie est négligeable ; on peut considérer qu'il reste 0. Le signal final est donc $\frac{A}{2}\left(C + S_0\cos(\omega_s t)\right)$.
5. $\underline{H_2}(0) = 0$ et $\underline{H_2}(4500) = 1$ donc il reste $\frac{A}{2}S_0\cos\omega_s t$ c'est-à-dire le signal initial.
6. Un signal à 5,5 kHz est multiplié par 0,76 par le premier filtre et 1 par le second : il n'a donc pas disparu.
7. Le signal à 5,5 kHz va être multiplié par 0,1 (-20 dB) et le signal à 6 kHz par 0,01 (-40 dB) donc ce sera mieux.

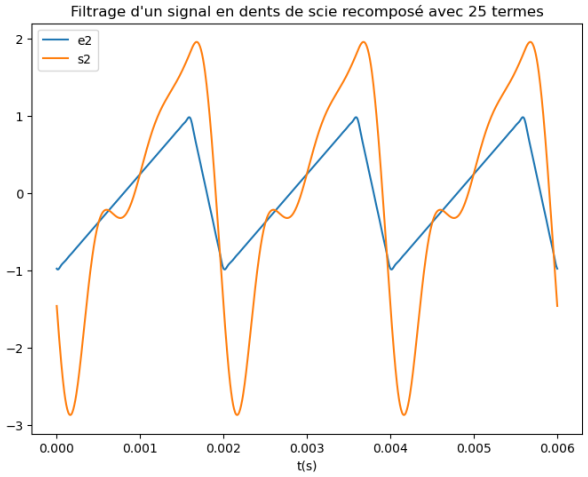
Réponses aux TDs numériques

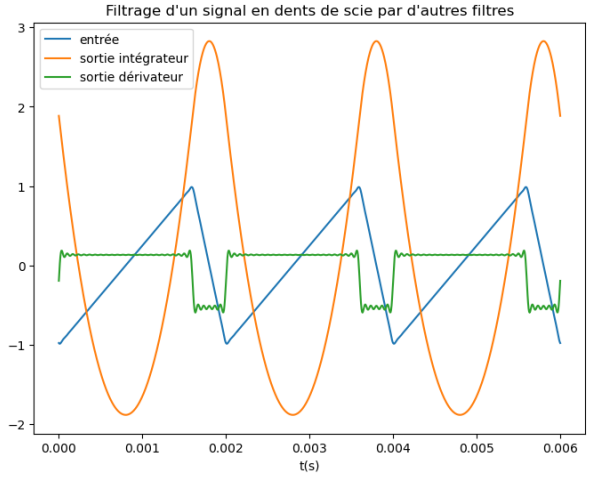
Réponses au TD d'info : Série de Fourier et filtrage

Le diagramme de Bode montre un filtre passe-bas d'ordre 2 avec une petite résonance :

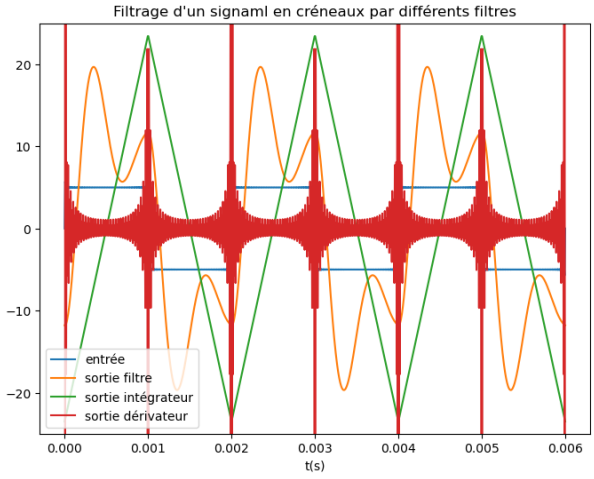








Le filtrage de la tension en dents de scie par $\underline{H}$ donne une courbe quelconque. Dans le cas d'un dérivateur, on voit des portions à peu près constantes correspondant aux morceaux de pente constante dans l'entrée ; l'intégrateur, lui, donne des portions de paraboles.

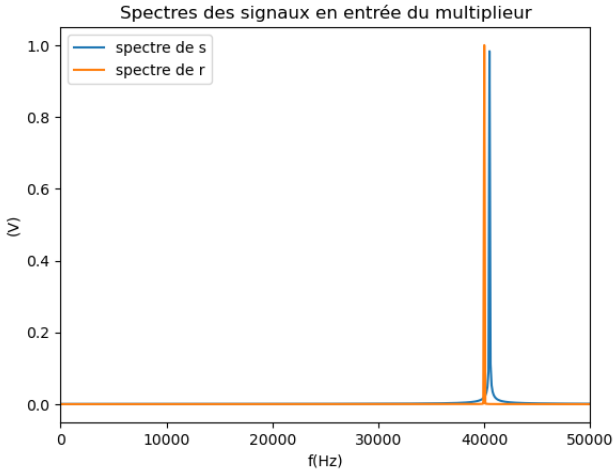


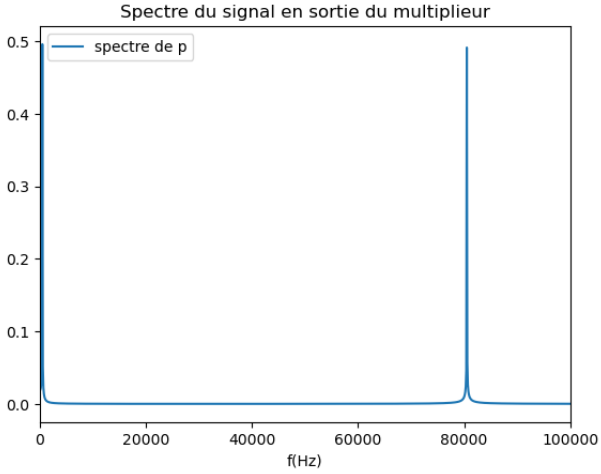
La tension en créneaux présente des discontinuités : sur de telles tensions, la décomposition en série de Fourier est peu performante (convergence simple mais non uniforme) et donne lieu à des oscillations résiduellesz. Quand on

envoie cela dans un filtre intégrateur, l'intégration lisse ces oscillations ; par contre le filtre dérivateur les amplifie, et le résultat est assez peu satisfaisant.

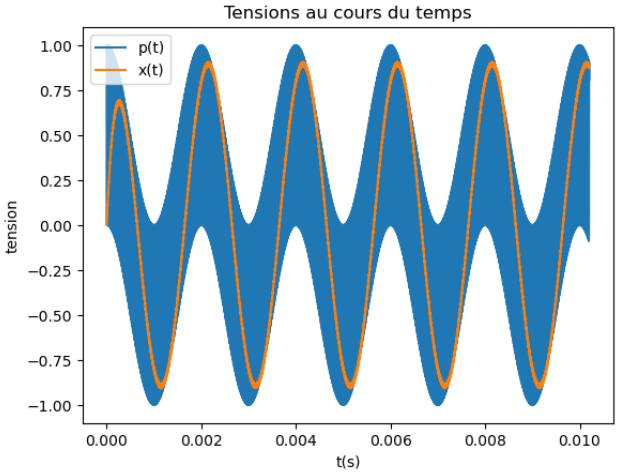
Réponses au TD d'info : Mesure d'un effet Doppler

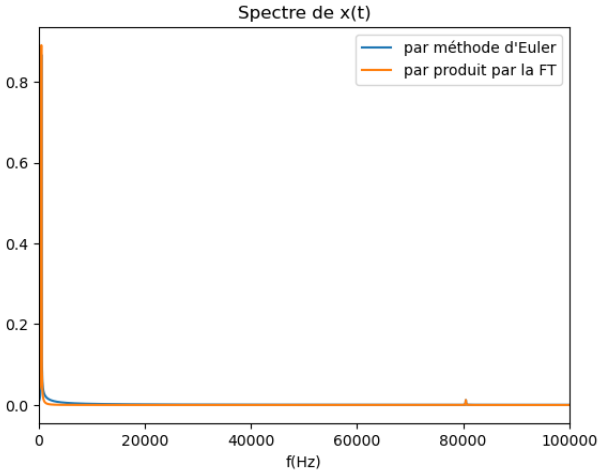
Au départ, on a les fréquences f_0 et $f_0 + Df$; après le multiplieur on a les fréquences Df et $2f_0 + Df \approx 2f_0$.



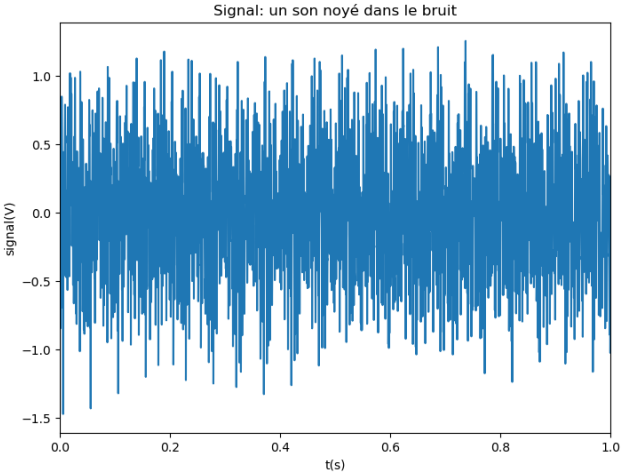


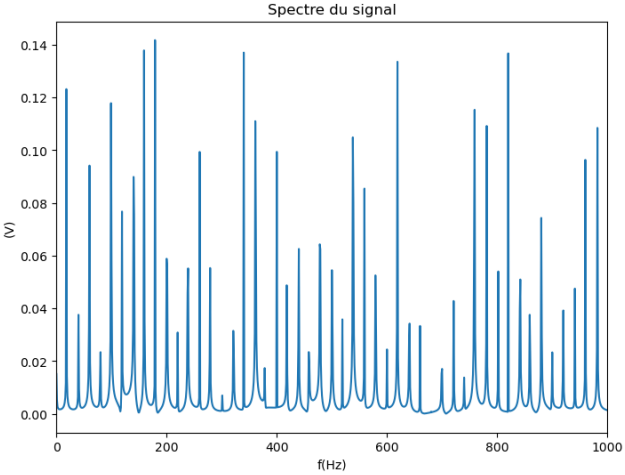
Le filtre passe-bas ne laisse que le terme de fréquence Df, qui est la fréquence qu'on veut mesurer. La méthode par équation différentielle donne le même résultat après un transitoire d'une durée d'environ $\frac{1}{f_0} = 1\,\text{ms}$.



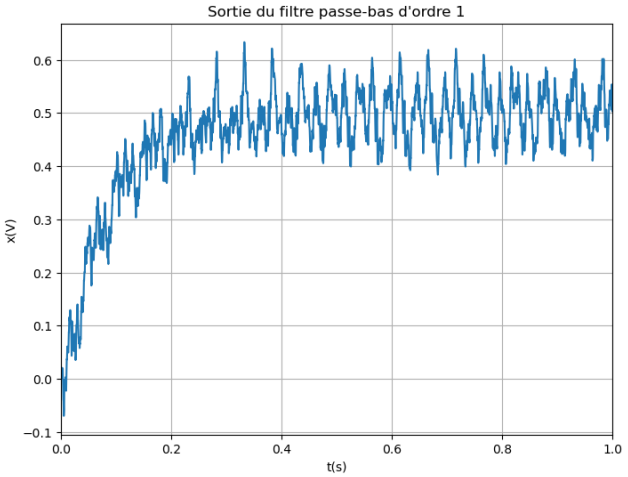


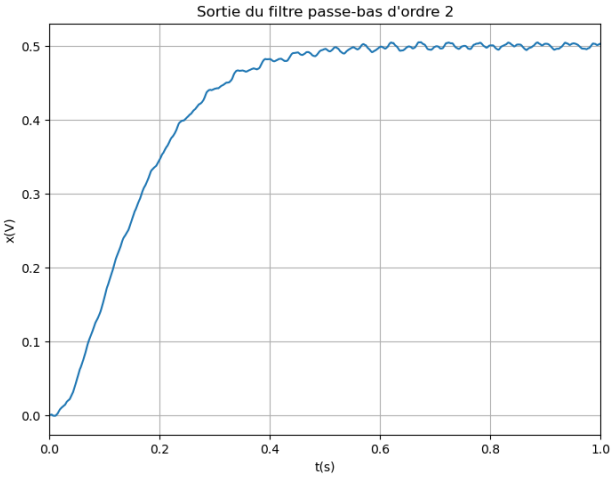
Réponses au TD d'info : Détection synchrone





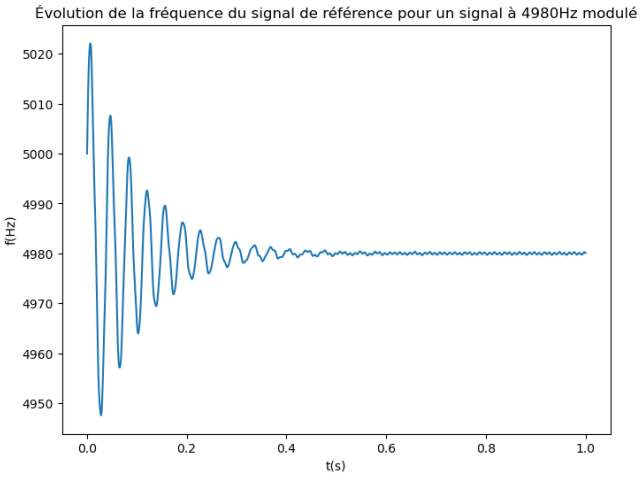
Après linéarisation, $p(t) = \frac{K.R_0.A}{2} + \frac{K.R_0.A}{2}\cos(4\pi f_0 t) + \sum_k \frac{K.R_0.B_k}{2}\left(\cos(2\pi(f_k+f_0)t) + \cos(2\pi(f_k-f_0)t)\right)$
Le filtre passe-bas ne laisse idéalement que le terme constant qui vaut $\frac{K.R_0.A}{2} = 5A$ ici.
Pour le filtrage, le premier filtre réalise l'équation différentielle $\frac{1}{2\pi f_c}\dot{x} + x = 10p$ tandis que pour le second, $\frac{1}{4\pi^2 f_c^2}\ddot{x} + \frac{1}{4\pi f_c}\dot{x} + x = 10p$. Plus l'ordre est élevé, plus les oscillations résiduelles sont faibles. On pourrait aussi diminuer f_c, mais alors la durée du transitoire du filtre augmenterait.

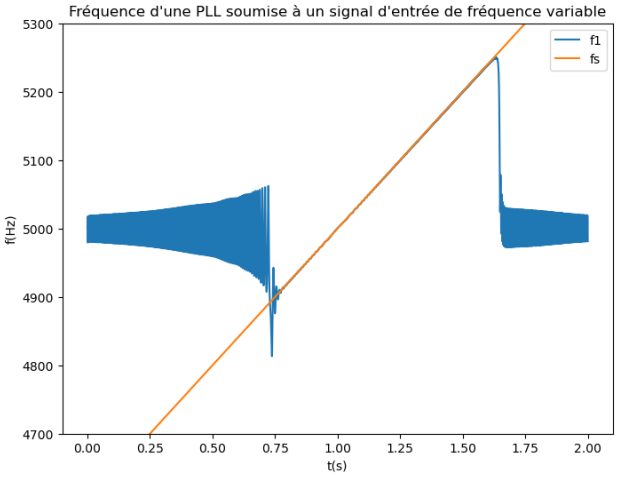




Réponses au TD d'info : Boucle à verrouillage de phase

En régime stabilisé, $m(t) = \frac{K.S_0.R_0}{2}\left(\cos(4\pi f_s t + \varphi) + \cos\varphi\right)$ donc après filtrage $e(t) = \frac{K.S_0.R_0}{2}\cos\varphi$ et $f_1 = f_0 + \alpha\frac{K.S_0.R_0}{2}\cos\varphi = f_s$. On en déduit que $f_s \in [f_0 - \Delta f\,;\, f_0 + \Delta f]$ avec $\Delta f = \frac{\alpha.K.S_0.R_0}{2}$
En régime variable, le filtre introduit l'équation $\tau\dot{e} + e = m(t)$ ce qui donne facilement l'équation différentielle non linéaire d'ordre 2 $\tau\ddot{E} + \dot{E} = K.S_0.R_0.\cos(2\pi f_s t)\cos(2\pi(f_0+E)t)$; on la résout avec `odeint` :





Sur un signal sisusoïdal ou modulé, la PLL converge très vite vers f_s. En balayant f_s, l'accroche se fait à 4900 Hz $\approx f_0 - 0,4\Delta f$ et le décrochage à $f_0 + \Delta f$: la plage d'accroche est donc plus faible que la plage de stabilité.

E8 Chapitre Filtres électroniques

Programme p.708

Conseils p.709

Cours p.692
- E8.A. Étude de filtres simples
- E8.B. Filtres en cascade
- E8.C. Filtres actifs avec AOp
- E8.D. Annexe : Bande passante et temps de réponse d'un filtre

QCMs p.710

Exercices p.711

TDs numériques p.715

E8. Filtres électroniques

Cours

Après avoir vu de manière générale ce qu'est un filtre linéaire et comment il agit, nous allons appliquer maintenant ces connaissances aux filtres électroniques, très utiles dans une chaîne d'acquisition ou de transmission de données. On n'étudiera dans ce chapitre que des filtres en tension, mais il existe aussi des filtres en intensité.

E8.A. Étude de filtres simples

A.1. Filtre passe-bas d'ordre 1

Définition : Filtre passe-bas d'ordre 1

Un filtre passe-bas d'ordre 1 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

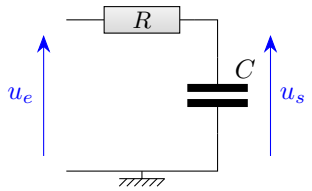
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \text{(E8.1)}$$

Il est utile de connaître, pour chaque type de filtre que nous allons voir, un exemple de circuit simple. Pour le passe-bas d'ordre 1, il s'agit du filtre « R-C série » qui prend u_e en entrée et donne u_s en sortie.

On va donc tracer le diagramme de Bode ce ce filtre. Mais avant de se lancer dans l'étude des asymptotes, on peut vérifier par des schémas équivalents le caractère de ce filtre. En effet, on a vu qu'en basses fréquences (BF), une bobine est équivalente à un fil et un condensateur à un interrupteur ouvert ; au contraire, en hautes fréquences (HF), la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil.

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un filtre « RC série » — **À connaître**

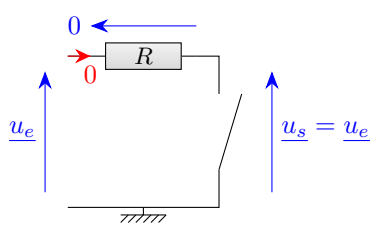
On considère le filtre suivant d'entrée u_e et de sortie u_s :



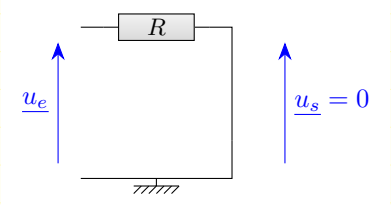
1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
   Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Tracez le diagramme de Bode.

1. On va montrer que ce filtre sera bien un passe-bas. Pour cela, on redessine le circuit en BF et en HF et utilisant les équivalents du condensateur :

   En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm. La loi d'additivité des tensions indique donc que $\underline{u_s} = \underline{u_e}$: ce filtre laisse passer les basses fréquences.



En HF : le condensateur est équivalent à un fil ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc $\underline{u_s} = 0$: ce filtre coupe les hautes fréquences.

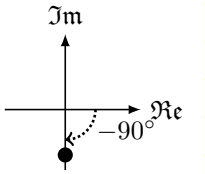


Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

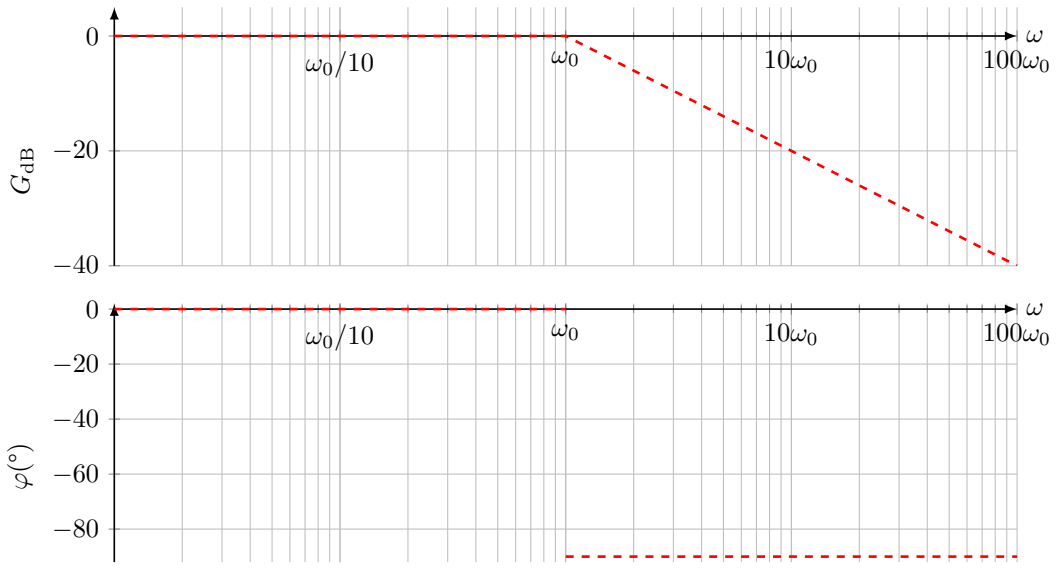
2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u_s}(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{u_e}(\omega) = \frac{1}{jRC\omega+1}\underline{u_e}(\omega)$. Donc

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. On part de $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. En haut, le numérateur n'a qu'un seul terme ; en bas, on a un terme constant (ordre 0) et un terme d'ordre 1 ($j\frac{\omega}{\omega_0}$) puisque la variable est ω.
En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{1} = H_0$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log|H_0| = 20\log H_0$ et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} 0$. [a] Donc le gain admet en BF une asymptote horizontale $G_{\text{dB}} = 20\log H_0$, et la phase tend vers 0°.
En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0\omega_0}{j\omega} = -j\frac{H_0\omega_0}{\omega}$ puisque $\frac{1}{j} = -j$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\left|-j\frac{H_0\omega_0}{\omega}\right| = 20\log\frac{H_0\omega_0}{\omega}$; pour faire apparaître l'asymptote, on cherche une équation de type $y = a.x + b$ avec ici $y = G_{\text{dB}}$ et $x = \log\omega$ (car on trace ω en échelle logarithmique). Pour cela, on sépare le ω du reste dans la fraction : $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log(H_0\omega_0) - 20\log\omega$, ce qui donne comme asymptote une droite de pente -20 dB/déc (qu'on lit « -20 décibels par décade » ; en effet, une décade représente une multiplication par 10 de ω. Si ω est multipliée par 10, alors $\log\omega$ augmente de 1, et le gain diminue de 20 dB).
Pour ce qui est de la phase en HF, on a $\varphi(\omega) \underset{+\infty}{\to} \arg\left(-j\frac{\omega_0}{\omega}\right)$. Il s'agit de placer dans le plan complexe un imaginaire pur de partie réelle négative ; une fois cela fait, on voit que son argument vaut $-90°$. Donc $\varphi \underset{+\infty}{\to} -90°$.

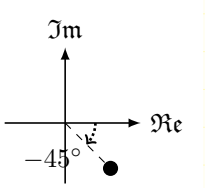


Pour terminer le tracé des asymptotes, on a l'habitude de calculer le point où elles se croisent. On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log H_0$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\frac{H_0\omega_0}{\omega}$. Elles se croisent lorsque $H_0 = \frac{H_0\omega_0}{\omega}$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log H_0$.
On peut alors tracer le diagramme de Bode asymptotique (ici $20\log H_0 = 0$ dB ; si ce n'est pas le cas, la courbe est translatée verticalement) :

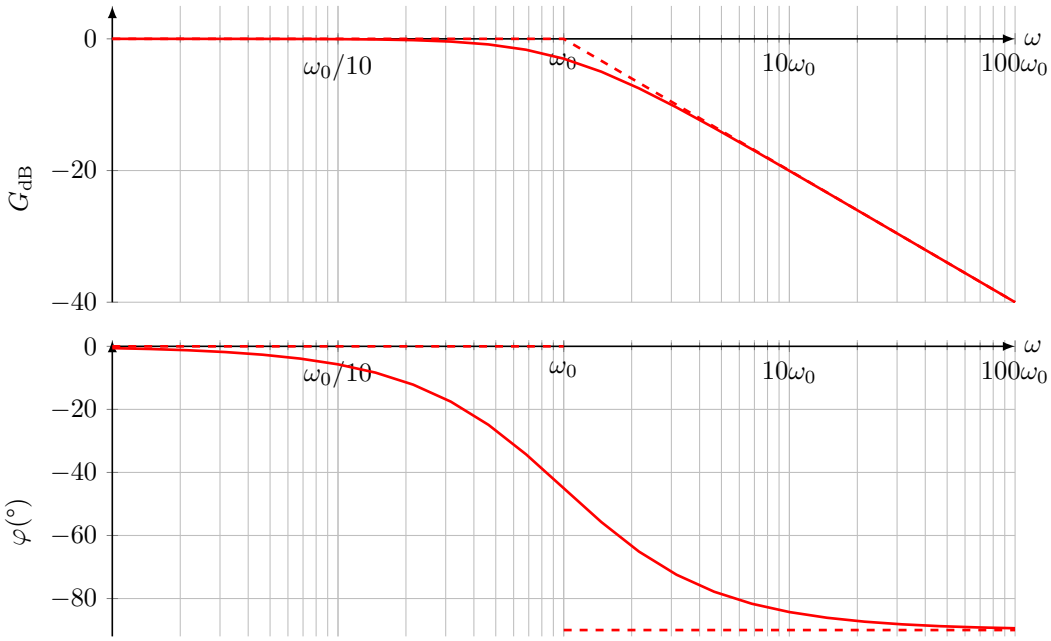


4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0. On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1+j}$.

Le gain à cette pulsation vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log\left|\frac{H_0}{1+j}\right| = 20\log\frac{H_0}{\sqrt{1^2+1^2}} = 20\log H_0 - 3\,\text{dB}$ et la phase vaut $\varphi(\omega_0) = \arg\frac{1}{1+j} = \arg\frac{1-j}{2} = -45°$ en plaçant le point correspondant dans le plan complexe.



5. On trace alors le diagramme de Bode complet (avec $H_0 = 1$) :



a. Il est incorrect en maths d'écrire ~ 0, mais on ne vous embêtera pas avec ça si vous le faites pour la phase.

Un dernier calcul qu'on peut faire, c'est celui de la bande passante à $-3\,\text{dB}$:

Calcul : Bande passante à $-3\,\text{dB}$

Pour cela, il faut d'abord remarquer sur le diagramme de Bode que le gain maximum est atteint en BF et vaut $20\log H_0$, ce qui correspond à $|\underline{H}|_{max} = H_0$. La bande passante est donc constituée des pulsations telles que

$$|\underline{H}(\omega)| > \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} > \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$$

Donc la BP est $[0\,;\omega_0]$; on dit parfois que ω_0 est la *pulsation de coupure*, au-delà de laquelle le filtre commence à couper les signaux.

Remarque : En HF, $\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0\omega_0}{j\omega}$ donc $j\omega\underline{u_s}(\omega,t) = H_0\omega_0\underline{u_e}(\omega,t)$; or $j\omega$ correspond à la dérivation dans le domaine temporel, donc $\frac{\mathrm{d}u_s(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 u_e(t)$ soit $u_s(t) = \omega_0\int u_e(t)\mathrm{d}t$: la sortie est, à une constante près, la primitive de l'entrée. On dit que le filtre a un **caractère intégrateur** lorsqu'il est équivalent à $\frac{\text{cst}}{j\omega}$.

A.2. Filtre passe-haut d'ordre 1

Définition : Filtre passe-haut d'ordre 1

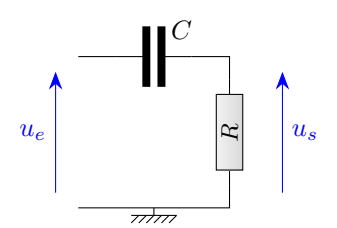
Un filtre passe-haut d'ordre 1 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \text{(E8.2)}$$

Le circuit type est le « filtre C-R ».

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un filtre « CR série » **À connaître**

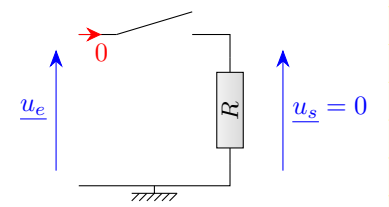
On considère le filtre suivant d'entrée u_e et de sortie u_s :



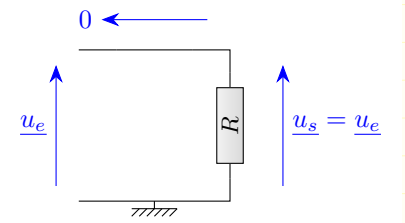
1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
   Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Tracez le diagramme de Bode.

1. On dessine des schémas équivalents :

   En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm $\underline{u_s} = 0$: ce filtre coupe les basses fréquences.



   En HF : le condensateur est équivalent à un fil ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc par la loi d'additivité on trouve $\underline{u_s} = \underline{u_e}$: ce filtre laisse passer les hautes fréquences.



   Il s'agit donc bien d'un filtre passe-haut.
2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u_s}(\omega) = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{u_e}(\omega) = \frac{1}{1-j\frac{1}{RC\omega}}\underline{u_e}(\omega)$. Donc

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{RC\omega}} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. On part de $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$. Il faut bien faire attention au dénominateur : le terme 1 est d'ordre 0, le terme $-j\frac{\omega_0}{\omega}$ est d'ordre -1 (car c'est du ω^{-1}). Donc le terme constant est celui de plus haut degré.
   En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{-j\frac{\omega_0}{\omega}} = j\frac{H_0\omega}{\omega_0}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log\left|j\frac{H_0\omega}{\omega_0}\right| = 20\log\frac{H_0\omega}{\omega_0} = 20\log\omega + 20\log\frac{H_0}{\omega_0}$: le gain admet en BF une asymptote de pente +20 dB/déc ; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\sim} \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$; or $j\frac{\omega}{\omega_0}$ est un imaginaire pur

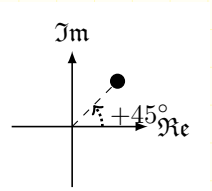
de partie imaginaire positive, d'argument $+90°$, donc $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} +90°$.

En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{1} = 20\log H_0$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log H_0$ et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg 1 = 0°$.

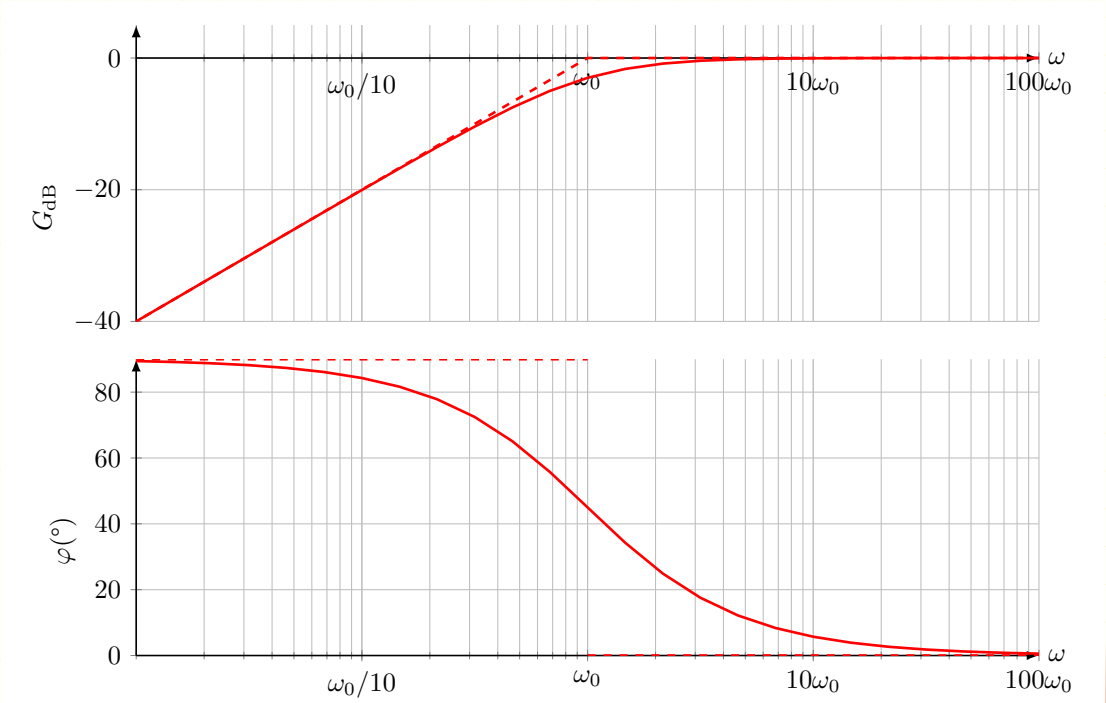
On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log\frac{H_0\omega}{\omega_0}$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log H_0$. Elles se croisent lorsque $\frac{H_0\omega}{\omega_0} = H_0$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log H_0$.

4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0. On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1-j}$.

   Le gain à cette pulsation vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log\left|\frac{H_0}{1-j}\right| = 20\log\frac{H_0}{\sqrt{1^2+1^2}} = 20\log H_0 - 3\,\text{dB}$ et la phase vaut $\varphi(\omega_0) = \arg\frac{1}{1-j} = \arg\frac{1+j}{2} = +45°$ en plaçant le point correspondant dans le plan complexe.



5. Diagramme en tenant compte de $H_0 = 1$ (sinon, la courbe est translatée verticalement) :



Calcul : Bande passante à $-3\,\text{dB}$

On remarque sur le diagramme de Bode que le gain maximum est atteint en HF et vaut $20\log H_0$, ce qui correspond à $|\underline{H}|_{max} = H_0$. La bande passante est donc constituée des pulsations telles que

$$|\underline{H}(\omega)| > \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} > \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$$

Donc la BP est $[\omega_0\,;+\infty[$

Remarque : En BF, $\underline{H}(\omega) \approx \frac{jH_0\omega}{\omega_0}$ donc $\underline{u_s}(\omega,t) = j\frac{H_0}{\omega_0}\omega\underline{u_e}(\omega,t)$; or $j\omega$ correspond à la dérivation dans le domaine temporel, donc $u_s(t) = \frac{H_0}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_e(t)}{\mathrm{d}t}$: la sortie est, à une constante près, la dérivée de l'entrée. On dit que le filtre a un **caractère dérivateur** lorsqu'il est équivalent à cst $\times\, j\omega$.

A.3. Filtre passe-bas d'ordre 2

Les deux filtres d'ordre 1 étudiés ont montré des comportements assez semblables, avec des courbes symétriques. Nous allons maintenant étudier rapidement un filtre d'ordre 2.

Le circuit type est le filtre RLC dont la tension de sortie est prise aux bornes de C

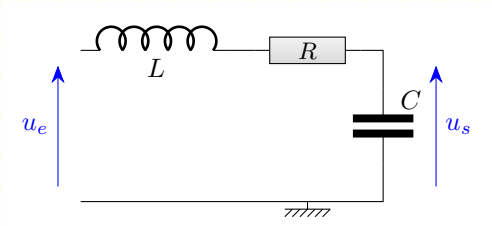
Définition : Filtre passe-bas d'ordre 2

Un filtre passe-bas d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{E8.3}$$

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un RLC aux bornes de C **À connaître**

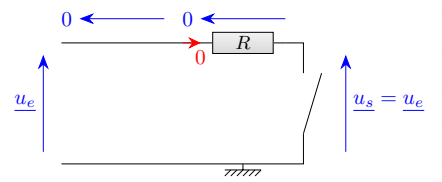
On considère le circuit suivant de tension d'entrée u_e et de tension de sortie u_s :



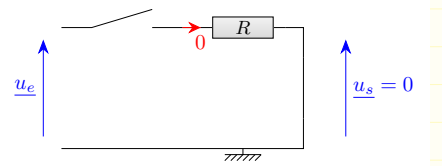
1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
   Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Montrez que ce filtre ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
6. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 3$.

1. On dessine des schémas équivalents :

   En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm. Par la loi d'additivité des tensions $\underline{u_s} = \underline{u_e}$: ce filtre laisse passer les basses fréquences.

   En HF : le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un interrupteur ouvert ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc $\underline{u_s} = 0$: ce filtre coupe les hautes fréquences.

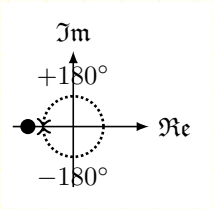
   Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u_s}(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega}\underline{u_e}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega-LC\omega^2}\underline{u_e}(\omega)$. Pour identifier avec la forme canonique, il faut écrire $RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0}$ et $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. On en déduit que

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{1} = H_0$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log H_0$: le gain admet en BF une asymptote horizontale ; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg 1 = 0°$.

En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2} = 20\log(H_0\omega_0^2) - 40\log\omega$ donc le gain admet en HF une asymptote de pente $-40\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \pm 180°$. [a]

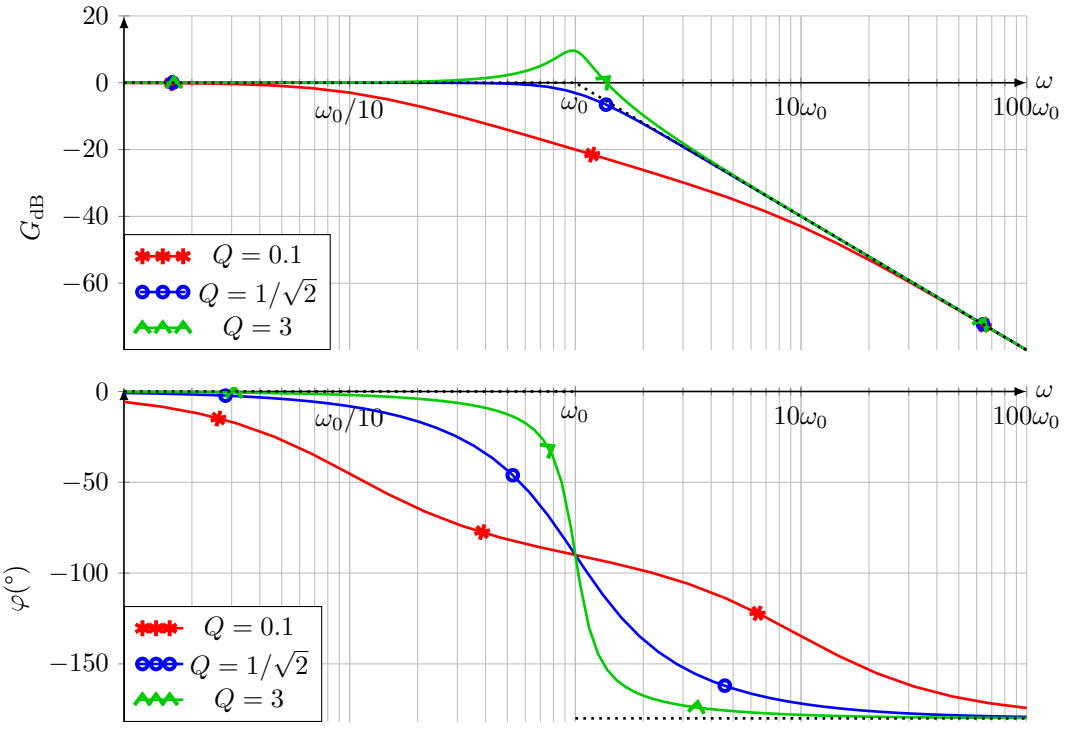


On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log H_0$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}$. Elles se croisent lorsque $\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2} = H_0$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log H_0$.

4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0. On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1+\frac{j}{Q}-1} = -jH_0Q$.
   Le gain à cette pulsation vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log|jH_0Q| = 20\log(H_0Q)$ et la phase vaut $\varphi(\omega_0) = \arg(-jQ) = -90°$. On voit que la valeur du gain au centre va dépendre de la valeur du facteur de qualité ; elle sera supérieure à $20\log H_0$ si $Q > 1$ et inférieure si $Q < 1$.
5. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ passe par un minimum. Pour savoir cela, on dérive :

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(-2+2\omega^2+\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ou } \omega^2 = \omega_0.\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)$$

   La seconde équation n'a de solution que si $1-\frac{1}{2Q^2} > 0$ donc $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est la condition de résonance.
6. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q (en tenant compte de $H_0 = 1$) :



a. À ce moment-là de l'étude, on ne peut pas choisir le signe. On le choisira plus tard par continuité, lorsqu'on aura trouvé une valeur intermédiaire de la phase.

On voit que la condition d'existence d'un maximum ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) est légèrement différente de la condition pour que la courbe passe au-dessus du point d'intersection des asymptotes ($Q > 1$). Dans l'intervalle $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 1$, le comportement est celui-ci : la courbe a un maximum bien avant ω_0, puis plonge avant ω_0 sous l'asymptote $G_{\text{dB}0}(\omega) = 0\,\text{dB}$. C'est un cas très rare.

Remarque : Le calcul de la bande passante à $-3\,\text{dB}$ est compliqué. On peut montrer que, si $Q \gg 1$, alors la largeur de la BP vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

A.4. Filtre passe-bande d'ordre 2

En prenant la tension de sortie aux bornes de la résistance d'un RLC série, on obtient un filtre passe-bande d'ordre 2.

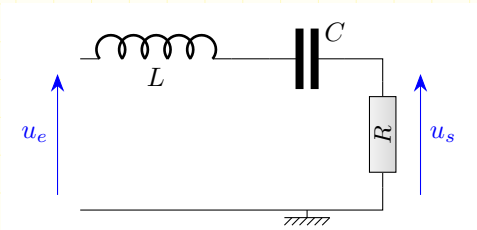
Définition : Filtre passe-bande d'ordre 2

Un filtre passe-bande d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \qquad \text{(E8.4)}$$

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un RLC aux bornes de R **À connaître**

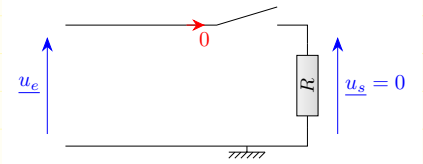
On considère le circuit suivant de tension d'entrée u_e et de tension de sortie u_s :



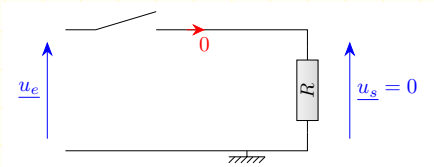
1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
   Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Montrez que ce filtre possède une résonance en $\omega = \omega_0$.
6. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 3$.

1. On dessine des schémas équivalents :

   En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle : $\underline{u_s} = 0$: ce filtre coupe les basses fréquences.



   En HF : cette fois, c'est la bobine qui est équivalente à un interrupteur ouvert ; par la loi d'Ohm $\underline{u_s} = 0$: ce filtre coupe les hautes fréquences.



   Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bande.
2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u_s}(\omega) = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\underline{u_e}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{jRC\omega}}\underline{u_e}(\omega)$. Pour identifier avec la forme canonique, il faut écrire $\frac{L}{R}\omega = \frac{Q\omega}{\omega_0}$ et $\frac{1}{RC\omega} = \frac{Q\omega_0}{\omega}$. En faisant le produit et le quotient, on trouve

$\frac{L}{R^2C} = Q^2$ et $LC = \omega_0^2$. On en déduit que

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} = j\frac{H_0\omega}{Q\omega_0}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log\frac{H_0\omega}{Q\omega_0} = 20\log\omega + 20\log\frac{H_0}{Q\omega_0}$: le gain admet en BF une asymptote de pente $+20\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg j\frac{H_0\omega}{Q\omega_0} = +90°$.

   En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = -j\frac{H_0\omega_0}{Q\omega}$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\frac{H_0\omega_0}{Q\omega} = 20\log\frac{H_0\omega_0}{Q} - 20\log\omega$ donc le gain admet en HF une asymptote de pente $-20\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg -j\frac{H_0\omega_0}{Q\omega} = 90°$.

   On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log\frac{H_0\omega}{Q\omega_0}$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\frac{H_0\omega_0}{Q\omega}$. Elles se croisent lorsque $\frac{H_0\omega}{Q\omega_0} = \frac{H_0\omega_0}{Q\omega}$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log\frac{H_0}{Q}$.

4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0. On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1+0} = H_0$.

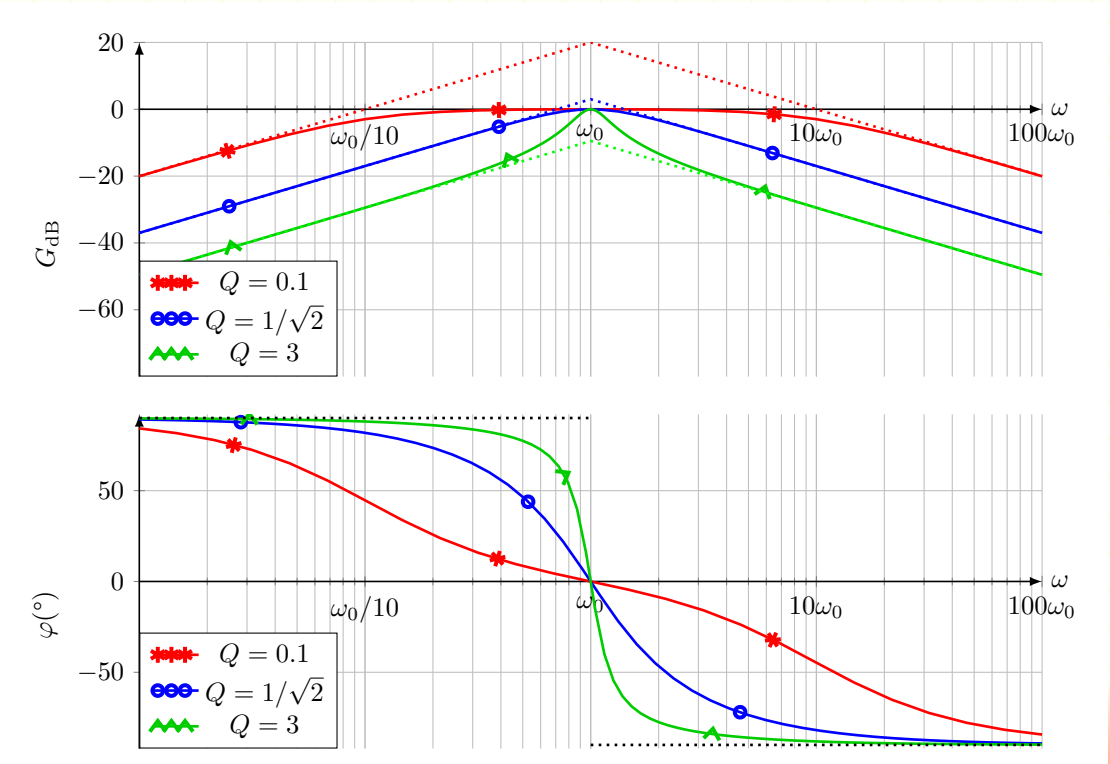
   Le gain à cette pulsation vaut donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log H_0$ et la phase vaut $\varphi(\omega_0) = \arg(H_0) = 0°$.

   On voit que la valeur du gain au centre ne va pas dépendre de la valeur du facteur de qualité, mais celle de l'intersection des asymptotes va en dépendre.

5. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ passe par un minimum. Pour savoir cela, on dérive :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) = 0 &\Leftrightarrow 2Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega}\\ &\Leftrightarrow \omega = \omega_0\end{aligned}$$

6. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q (en tenant compte de $H_0 = 1$) :



Remarque : On peut refaire ici le calcul de la bande passante, comme dans le chapitre sur les RÉSONANCES.

A.5. Filtre passe-haut d'ordre 2

En prenant la tension de sortie aux bornes de la bobine d'un RLC série, on obtient un filtre passe-haut d'ordre 2. On va donner ici uniquement les résultats généraux.

Définition : Filtre passe-haut d'ordre 2

Un filtre passe-haut d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

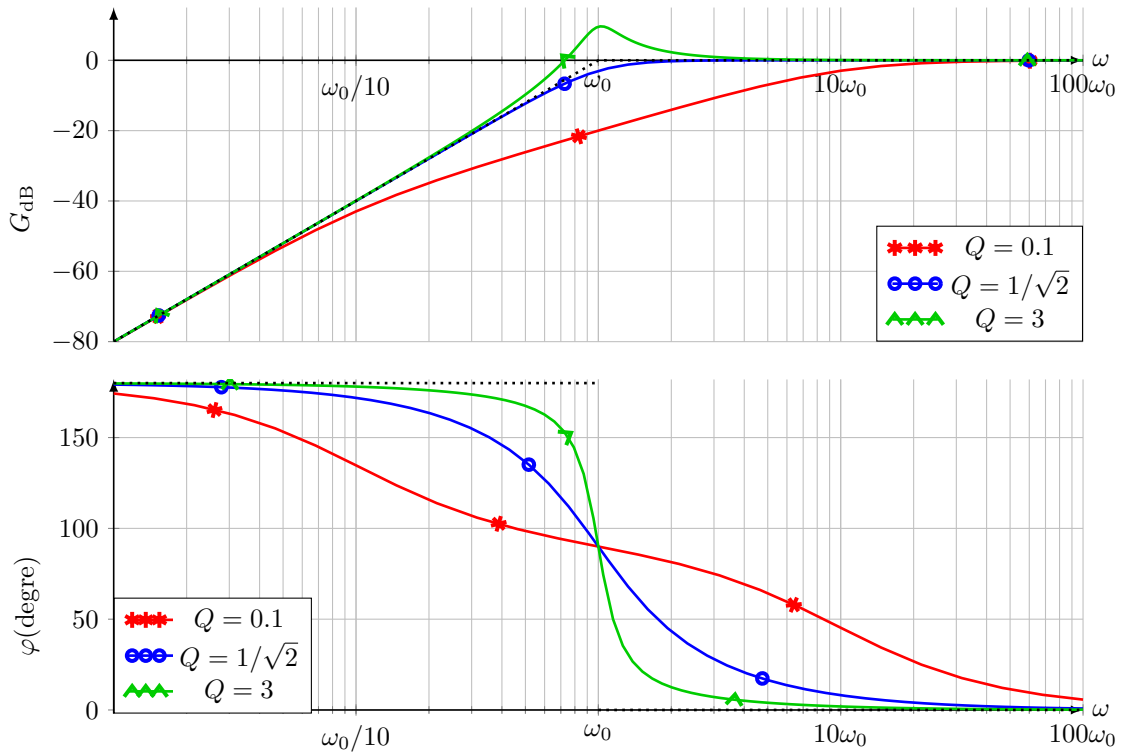
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \qquad \text{(E8.5)}$$

Calcul : Diagramme de Bode

Résultats rapides sans calculs :
En BF, $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} -\frac{H_0\omega^2}{\omega_0^2}$ donc le gain a une asymptote de pente $+40\,\text{dB/déc}$ et la phase tend vers $\pm 180°$.
En HF, $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} H_0$ donc le gain a une asymptote horizontale $G_{\text{dB}\,\infty} = 20\log H_0$ et la phase tend vers $0°$.
Les asymptotes se coupent en $(\omega_0; 0)$. À cette pulsation-là, le vrai gain vaut $20\log Q$ et la phase vaut $+90°$.
Il existe une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On trace alors le diagramme de Bode complet (figure E8.1) pour différentes valeurs de Q :

FIGURE E8.1 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 2.



E8.B. Filtres en cascade

Nous avons étudié les filtres essentiels, d'ordre 1 et 2. Que se passe-t-il si on met ces filtres en cascade ? A priori, leurs fonctions de transfert vont se multiplier, permettant de réaliser des filtres d'ordre plus élevé. En réalité, c'est

le cas, mais à un détail près très important : les filtres peuvent se perturber l'un l'autre, et changer la fonction de transfert l'un de l'autre.

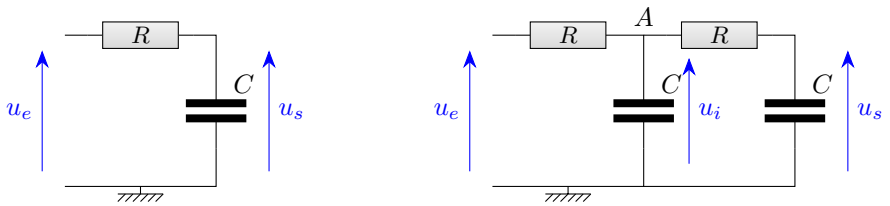
Prenons l'exemple de la figure E8.2. À gauche, on reconnaît un simple filtre RC de fonction de transfert $\underline{H_1}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$. À droite on place deux filtres RC en cascade, c'est-à-dire que le premier filtre a pour entrée u_e et pour sortie u_i, qui devient l'entrée du second filtre, qui en donne une sortie u_s. On pourrait alors penser que la fonction de transfert de ce « double RC » vaudra $\underline{H_1}(\omega).\underline{H_1}(\omega) = \frac{1}{(1+jRC\omega)^2} = \frac{1}{1+2jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$.

Calcul : Fonction de transfert du filtre « double RC »

Calculons la vraie FT $\underline{H_2}(\omega) = \frac{\underline{u_s}(\omega)}{\underline{u_e}(\omega)}$ pour voir. Le calcul est un peu compliqué, mais il faut d'abord appliquer le théorème de Millman au nœud A en associant les deux dipôles de droite, pour obtenir $\underline{u_i}(\omega) = \underline{v_A}(\omega) = \frac{\frac{\underline{u_e}(\omega)}{R}}{\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}} = \frac{\underline{u_e}(\omega)}{1+jRC\omega+\frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}}}$. Ensuite, par le pont diviseur de tension, $\underline{u_s}(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R}\underline{u_i}(\omega)$. En combinant les deux équations, on trouve $\underline{H_2}(\omega) = \frac{\underline{u_s}(\omega)}{\underline{u_e}(\omega)} = \frac{1}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$.

On voit alors que $\underline{H_2}$ vaut presque $\underline{H_1}.\underline{H_1}$…presque, mais pas exactement, il y a un 3 à la place d'un 2. Pourtant, on a vu que les FT de filtres en cascade se multiplient. La seule explication, c'est qu'en mettant les deux filtres l'un à côté de l'autre, leurs fonctions de transfert ont été modifiées.

FIGURE E8.2 : Filtre RC et double RC.



(a) Filtre $R-C$ (b) Filtre double $R-C$

Pour comprendre ce qui se passe, il faut étudier de façon un peu plus complète le fonctionnement d'un filtre.

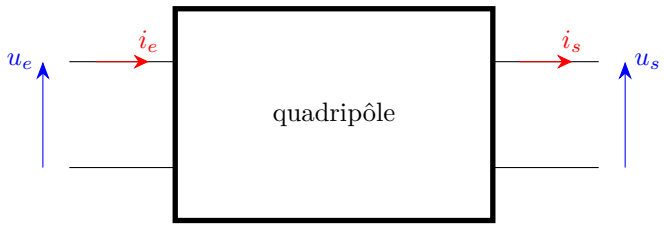
Définition : Quadripôle

Un quadripôle est une portion de circuit reliée au reste par 4 bornes. On distingue 2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie et on place (figure E8.3) :

- le courant d'entrée i_e et la tension d'entrée u_e
- le courant de sortie i_s et la tension de sortie u_s

Remarque : Souvent, la masse est une borne commune à l'entrée et à la sortie.

FIGURE E8.3 : Schéma général d'un quadripôle.



Définition : Quadripôle linéaire

Un quadripôle est linéaire s'il existe des relations linéaires entre i_e, i_s, u_e et u_s.
Un filtre linéaire est un quadripôle linéaire.

Définition : Impédance d'entrée

L'entrée d'un quadripôle linéaire vérifie la relation $\underline{u_e}(\omega) = \underline{Z_e}(\omega)\underline{i_e}(\omega)$ où $\underline{Z_e}$ représente l'impédance d'entrée du quadripôle.

Autrement dit, un quadripôle est vu, du côté de l'entrée, comme une simple impédance. Par exemple, quand on branche un voltmètre dans un circuit, tout se passe comme si ce voltmètre se comportait comme une forte résistance ; or, en fait, les deux bornes du voltmètre qu'on branche ne sont que les deux bornes d'entrée d'un quadripôle — un convertisseur analogique-numérique, qui va mesurer la tension d'entrée.

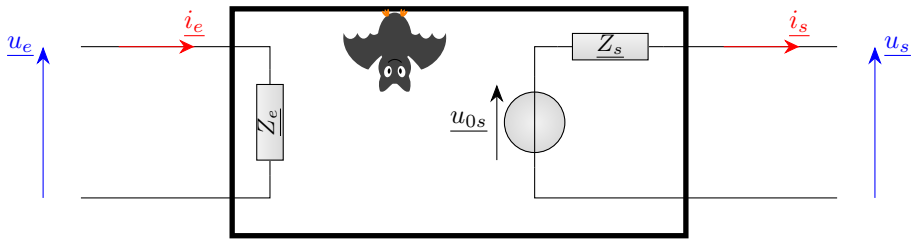
Remarque : Parfois, la relation en entrée est affine : $\underline{u_e}(\omega) = \underline{Z_e}(\omega).\underline{i_e}(\omega) - \underline{u_{0e}}(\omega)$ où $\underline{u_{0e}}$ s'appelle la force contre-électromotrice. On ne verra pas de tels cas.

Définition : Impédance et fem de sortie

La sortie d'un quadripôle linéaire vérifie la relation $\underline{u_s}(\omega) = \underline{u_{0s}}(\omega) - \underline{Z_s}(\omega).\underline{i_s}(\omega)$ avec $\underline{u_{0s}}$ la fem de sortie et $\underline{Z_s}$ l'impédance de sortie du quadripôle.

Par exemple, un générateur GBF est un quadripôle : son entrée, c'est la prise électrique qu'on branche ; la sortie, ce sont les deux bornes qu'on utilise pour alimenter le circuit, et qu'on modélise habituellement par un générateur de Thévenin.

FIGURE E8.4 : Schéma équivalent d'un quadripôle linéaire.

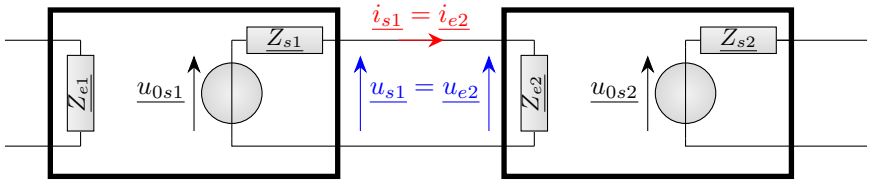


Regardons alors ce qui se passe si on met en cascade deux filtres linéaires. Avec les notations de la figure E8.5, on voit au milieu apparaître un circuit avec un générateur de fem $\underline{u_{s01}}$ et deux impédances $\underline{Z_{s1}}$ et $\underline{Z_{e2}}$ en série. Par le pont diviseur de tension, on peut calculer la tension de sortie du premier quadripôle :

$$\underline{u_{s1}}(\omega) = \underline{u_{0s1}}(\omega)\frac{\underline{Z_{e2}}(\omega)}{\underline{Z_{e2}}(\omega) + \underline{Z_{s1}}(\omega)} = \underline{u_{0s1}}(\omega)\frac{1}{1 + \frac{\underline{Z_{s1}}(\omega)}{\underline{Z_{e2}}(\omega)}}$$

On voit que, en l'absence d'un second filtre, on a $\underline{Z_{e2}} = \infty$ et $\underline{u_{s1}} = \underline{u_{0s1}}$; si on met un second filtre, la tension de sortie du premier sera peu modifiée si $\left|\frac{\underline{Z_{s1}}}{\underline{Z_{e2}}}\right| \ll 1$, c'est-à-dire si $|\underline{Z_{e2}}| \gg |\underline{Z_{s1}}|$.

FIGURE E8.5 : Quadripôles en cascade.



Propriété : Influences des filtres

Un filtre 2 n'a pas d'influence sur la FT du filtre 1 placé avant lui si $|\underline{Z_{e2}}| \gg |\underline{Z_{s1}}|$

Propriété : Filtre idéal

Un filtre idéal présente une impédance d'entrée très grande et une impédance de sortie très faible.

Un tel filtre idéal ne perturbera pas un filtre placé avant lui, et ne sera pas perturbé par un filtre placé après lui. Mais les filtres passifs, c'est-à-dire constitués de composants passifs, n'ont jamais cette propriété. Il faut alors se tourner vers des filtres actifs.

E8.C. Filtres actifs avec AOp

C.1. Rappels sur le composant

Propriété : AOp en régime linéaire

Lorsque le circuit dans lequel est placé l'AOp permet un *rebouclage sur l'entrée inverseuse*, l'AOp essaye de fonctionner en *régime linéaire* ; l'AOp idéal a alors les propriétés suivantes :

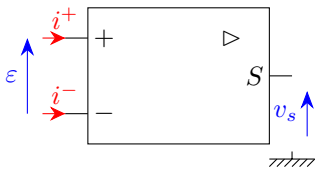
— Les courants de polarisation sont nuls : $i^+ = i^- = 0\,\text{A}$

— La tension différentielle est nulle : $\varepsilon = 0\,\text{V}$ donc $v^+ = v^-$

— La tension de sortie ne doit pas dépasser V_{sat} en valeur absolue : $|v_s| < V_{sat}$

L'AOp possède cependant des limitations, entre autres, le courant fourni par sa sortie est limité à quelques dizaines de mA, et son comportement change en très hautes fréquences.

FIGURE E8.6 : Schéma d'un AOp.



C.2. Montages fondamentaux

On a déjà vu trois circuits fondamentaux ; le plus courant, c'est le suiveur.

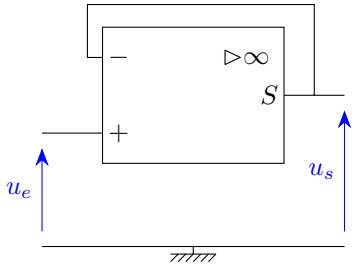
Propriété : Montage suiveur

Le montage suiveur est un montage qui, avec un AO idéal, a les propriétés suivantes :

— sa fonction de transfert vaut $\underline{H}(\omega) = 1$

— son impédance d'entrée $\underline{Z_e}$ est infinie

— son impédance de sortie $\underline{Z_s}$ est nulle



Démonstration

En régime linéaire, $\underline{v}^+(\omega) = \underline{v}^-(\omega)$; en suivant les fils, on en déduit que $\underline{u_s}(\omega) = \underline{u_e}(\omega)$ donc $\underline{H}(\omega) = 1$.

Le courant d'entrée est le courant entrant dans l'entrée +, il est nul pour un AO idéal, donc $\left|\underline{Z_e}\right| = \frac{|\underline{u_e}(\omega)|}{|\underline{i_e}(\omega)|} = \infty$.

La tension de sortie vaut $\underline{u_s}(\omega) = \underline{u_e}(\omega)$ quel que soit le courant $\underline{i_s}(\omega)$ en sortie, ce qui montre que $\underline{Z_s} = 0$ (sinon on aurait un terme de la forme $\underline{u_s}(\omega) = \underline{u_e}(\omega) - \underline{Z_s}.\underline{i_s}(\omega)$).

Ce montage est donc idéal pour faire « tampon » entre deux autres filtres. On le retrouve par exemple en entrée des bornes d'un voltmètre ou d'un oscilloscope. Si l'AO n'est pas idéal, on a 3 corrections dont les valeurs exactes dépendent des caractéristiques de l'AO :

— la fonction de transfert est un passe-bas, le gain décroît au-delà d'une certaine fréquence

— l'impédance d'entrée n'est pas infinie, mais très grande, supérieure au moins au MΩ

— l'impédance de sortie est non nulle, inférieure au Ω ; de plus, il existe un courant de sortie maximal au-delà duquel l'AO sature

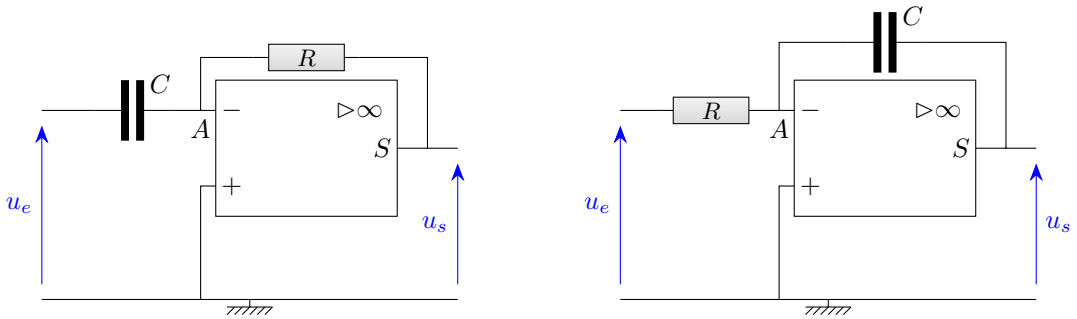
On a déjà vu aussi deux autres montages, l'amplificateur inverseur et l'amplificateur non inverseur :

— le montage amplificateur inverseur a pour fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1}$; son impédance d'entrée vaut R_1 (facile à montrer) ; son impédance de sortie est quasiment nulle.

— le montage amplificateur non inverseur a pour fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{R_1+R_2}{R_1}$; son impédance d'entrée quasiment infinie (intensité d'entrée quasi nulle) ; son impédance de sortie est quasiment nulle.

Il existe deux autres montages fondamentaux : le dérivateur et l'intégrateur (figure E8.7).

FIGURE E8.7 : Montages dérivateur et intégrateur.



(a) Montage dérivateur (b) Montage intégrateur

Calcul : FT du montage dérivateur

Par linéarité de l'AOp : $\underline{v^-}(\omega) = \underline{v^+}(\omega)$ donc $\underline{v_A}(\omega) = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $\underline{v_A}(\omega) = \frac{\underline{u_e}(\omega)jC\omega+\frac{\underline{u_s}(\omega)}{R}}{jC\omega+\frac{1}{R}}$ d'où on tire $\underline{u_e}(\omega)jC\omega + \frac{\underline{u_s}(\omega)}{R} = 0$ donc $\underline{u_s}(\omega) = -jRC\omega\underline{u_e}(\omega)$ donc $\underline{H}(\omega) = -jRC\omega$

Calcul : FT du montage intégrateur

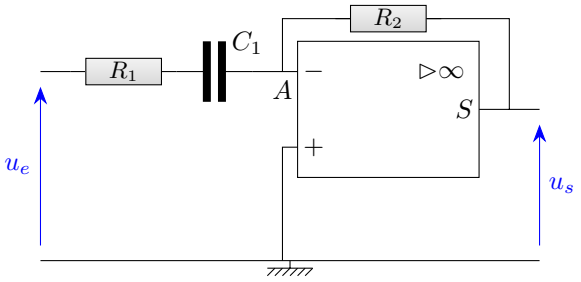
Par linéarité de l'AOp : $\underline{v^-}(\omega) = \underline{v^+}(\omega)$ donc $\underline{v_A}(\omega) = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $\underline{v_A}(\omega) = \frac{\frac{\underline{u_e}(\omega)}{R}+\underline{u_s}(\omega)jC\omega}{jC\omega+\frac{1}{R}}$ d'où on tire $\underline{u_s}(\omega)jC\omega + \frac{\underline{u_e}(\omega)}{R} = 0$ donc $\underline{u_s}(\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{u_e}(\omega)$ donc $\underline{H}(\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}$

C.3. Filtres actifs

Les montages précédents ne sont que des cas particuliers de filtres qu'on peut fabriquer avec un AOp. Cette famille de filtre s'appelle les *filtres actifs*. Ils n'ont pas tous une impédance d'entrée infinie, mais ont tous une impédance de sortie très faible.

Exemple : Filtre actif

Calculez la FT du filtre suivant :



et mettez-la sous forme canonique.

Par linéarité de l'AOp : $\underline{v^-}(\omega) = \underline{v^+}(\omega)$ donc $\underline{v_A}(\omega) = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $\underline{v_A}(\omega) = \frac{\frac{\underline{u_e}(\omega)}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}}+\frac{\underline{u_s}(\omega)}{R_2}}{\frac{1}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}}+\frac{1}{R_2}}$ d'où on tire $\frac{\underline{u_e}(\omega)}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}} + \frac{\underline{u_s}(\omega)}{R_2} = 0$ donc $\underline{H}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1-j\frac{1}{R_1C_1\omega}}$: c'est un passe-haut d'ordre 1, avec $H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ et $\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}$

Les filtres actifs sont essentiels en électronique ; ce sont ceux qui sont le plus utilisés. Aujourd'hui, ces filtres sont intégrés dans des puces électroniques ; on trouve facilement des filtres actifs d'ordre 6, 8 ou 10 qu'on a juste à brancher. Néanmoins, il faut faire attention aux limitations (courant de sortie limité, fréquence maximale au-delà de laquelle le comportement du filtre se détériore,... Il existe tout type de filtres pour toutes sortes d'applications.

De plus, nous nous sommes limités dans ce cours aux filtres analogiques ; les signaux numériques, que manipulent les ordinateurs ou les cartes d'acquisition, peuvent eux aussi être filtrés par des filtres numériques, dont le comportement est assez différent des filtres analogiques.

E8.D. Annexe : Bande passante et temps de réponse d'un filtre

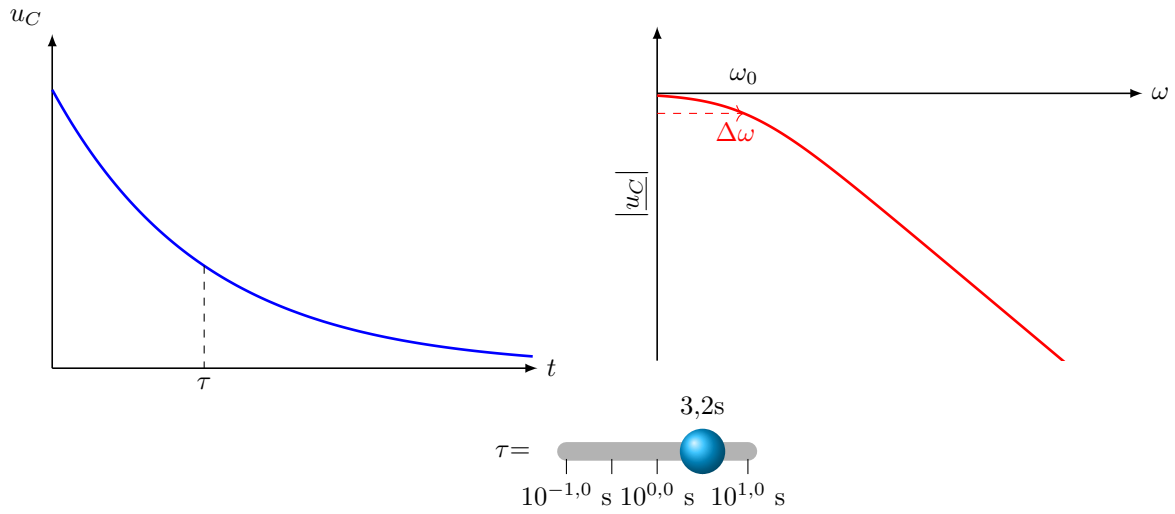
Dans ce chapitre, nous avons étudié l'aspect fréquentiel de la réponse d'un filtre : on met en entrée un signal sinusoïdal, et on observe la sortie. On peut définir une bande passante de largeur $\Delta\omega$: plus un filtre sélectionne une bande étroite de fréquences, plus sa bande passante est étroite.

Mais la fonction de transfert d'un filtre traduit en réalité une équation différentielle. La fonction de transfert permet d'obtenir le régime permanent de cette équation différentielle, mais il y a aussi un régime transitoire, caractérisé par un temps τ tel que, au bout de quelques τ (le temps de réponse), le régime transitoire est établi et le régime permanent reste seul.

En réalité, ces deux caractéristiques d'un filtre sont reliées par une formule magique, due à une théorie mathématique derrière tout cela : la théorie de la transformée de Fourier. Observons seulement deux exemples illustrant cette relation.

Prenons un simple filtre d'ordre 1 passe-bas : le RC série. Son temps de réponse est $\tau = RC$, tandis que la largeur de sa bande passante est $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$: cf. figure E8.8.

FIGURE E8.8 : Tension aux bornes du condensateur du RC en régime libre et forcé.



Si on considère maintenant un circuit RLC pris aux bornes de C, l'allure des courbes tant fréquentielles que temporelles dépend non seulement de ω_0, mais aussi du facteur de qualité Q. Les relations générales sont complexes, mais les cas limites sont faciles à étudier (cf. figure E8.9) :

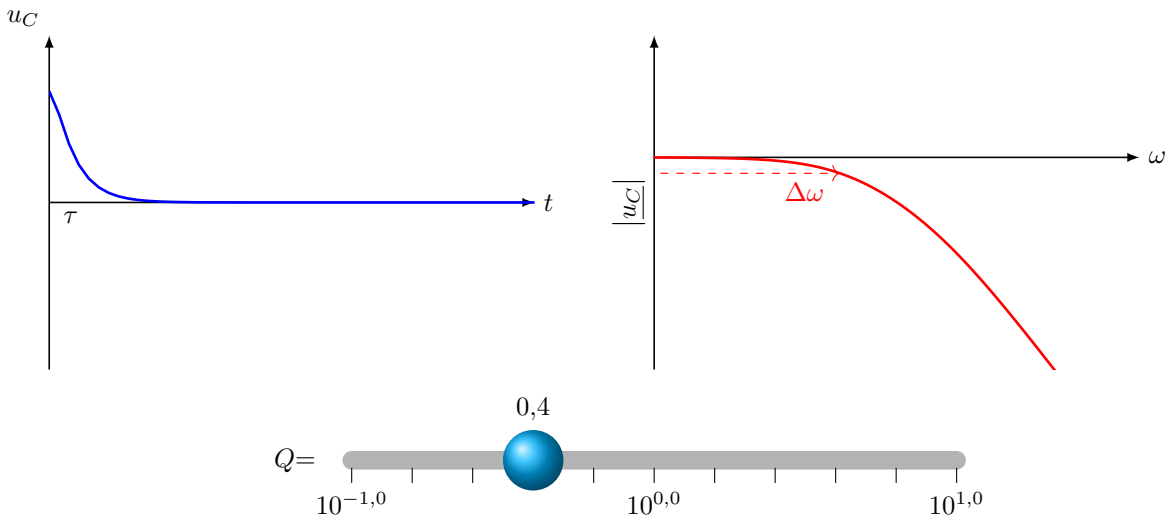
- si $Q \gg 1$ alors la largeur de la bande passante vaut environ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ tandis que, en régime transitoire, le système effectue environ $N = Q$ oscillations de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$ donc le temps de réponse vaut environ $\frac{2\pi Q}{\omega_0}$
- si $Q \ll 1$ alors le passe-bas n'a pas de résonance ; un calcul de bande passante montre que celle-ci s'étend de 0 à environ $Q\omega_0$, soit $\Delta\omega = Q\omega_0$, tandis que le régime transitoire possède deux exponentielles dont la plus lente s'atténue en un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{Q\omega_0}$

Ces deux exemples nous donnent la relation suivante :

Propriété : Temps de décroissance et bande passante

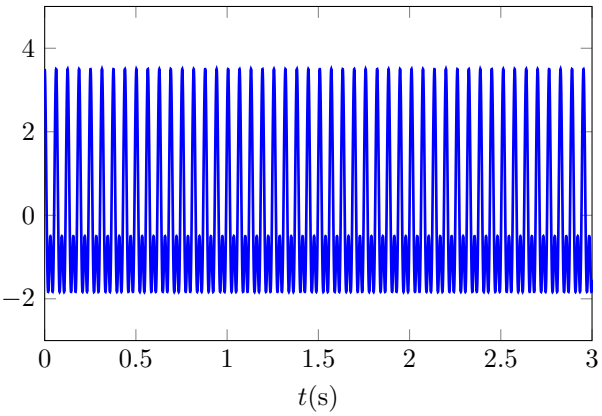
Le produit de la largeur de la bande passante d'un filtre par le temps de réponse de ce filtre est toujours de l'ordre de l'unité.

FIGURE E8.9 : Tension aux bornes du condensateur du *RLC* en régime libre et forcé.

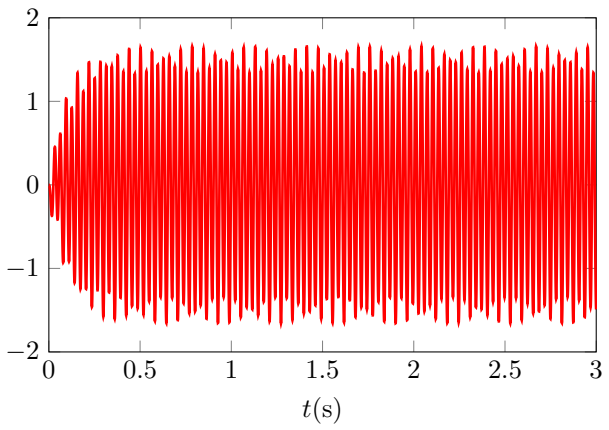


La conséquence, c'est que plus un filtre est sélectif (c'est-à-dire qu'il ne laisse passer que peu de fréquences), plus son temps de réponse est long. Par exemple, sur la figure E8.10, on voit une somme de deux cosinus filtrés par un filtre passe-bas. Si le filtre a un facteur de qualité pas trop élevé, le cosinus à $110\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ est mal filtré, ce qui donne des oscillations de l'amplitude en sortie. Si on augmente le facteur de qualité, on filtre mieux, mais la mise en place est plus longue.

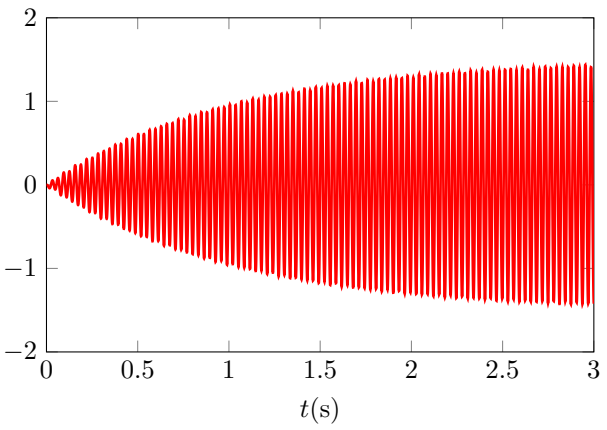
FIGURE E8.10 : Filtrage d'une somme de cosinus.



(a) Signal d'origine, somme de deux cosinus de pulsations $110\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



(b) Signal filtré par un passe-bande d'ordre 2 de pulsation propre $200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité 10.



(c) Signal filtré par un passe-bande d'ordre 2 de pulsation propre $200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité 100.

E8. Filtres électroniques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude+phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
Modèles de filtres passif passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). **Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.**
Filtres actifs en électronique. Modèle de l'ALI idéal en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages.

E8. Filtres électroniques

Quelques conseils

✎ Pour étudier un diagramme de Bode, il suffit d'être méthodique. La méthode par les équivalents permet d'éviter des calculs mathématiques compliqués. Attention aux puissance négatives de ω, ce sont celles qui causent le plus d'erreurs.

✎ Il faut savoir étudier et tracer le diagramme de Bode d'un filtre, mais il ne faut pas oublier ce qu'on a vu au chapitre précédent, à savoir quelle est la véritable action de ce filtre sur un signal.

✎ Les calculs de FT peuvent donner lieu à des erreurs ; tout le reste de l'exercice est alors faux. Pour les repérer, utilisez l'homogénéité : $RC\omega$, $\frac{L}{R}\omega$ et $LC\omega^2$ sont homogènes à rien.

✎ La méthode la plus générale pour calculer la FT d'un filtre actif consiste à appliquer le théorème de Millman à tous les nœuds **sauf à la sortie et à la masse** (car l'AO injecte du courant dans la sortie, et les alimentations injectent du courant dans la masse).

E8. Filtres électroniques

QCMs

réponses page 717

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un filtre électronique prend toujours une tension en entrée, et donne une tension en sortie.

(a). Faux
(b). Vrai

Q2. Quelle est la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 ?

(a). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$
(b). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega}{\omega_0}}$
(c). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
(d). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Q3. Quelle est la forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 ?

(a). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
(b). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$
(c). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega}{\omega_0}}$
(d). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Q4. Un circuit RC série dont on prend la tension de sortie aux bornes du condensateur donne un filtre :

(a). passe-haut d'ordre 1
(b). passe-haut d'ordre 2
(c). passe-bas d'ordre 1
(d). passe-bas d'ordre 2

Q5. Avec un circuit RLC série, on peut réaliser :

(a). un passe-haut
(b). un passe-bas
(c). un coupe-bande
(d). un passe-bande

Q6. Un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\text{cst}}{j\omega}$ joue un rôle

(a). de dérivateur
(b). d'intégrateur
(c). d'amplificateur
(d). de suiveur

Q7. Pour qu'un filtre 2 placé après un filtre 1 ne le perturbe pas, il faut que :

(a). $\left|\frac{Z_{s1}}{Z_{e1}}\right| \ll \left|\frac{Z_{e2}}{Z_{s2}}\right|$
(b). $\left|\frac{Z_{e2}}{Z_{s2}}\right| \ll \left|\frac{Z_{s1}}{Z_{e1}}\right|$
(c). $\left|\frac{Z_{s1}}{Z_{e1}}\right| \ll \left|\frac{Z_{e2}}{Z_{s2}}\right|$
(d). $\left|\frac{Z_{e2}}{Z_{s2}}\right| \ll \left|\frac{Z_{s1}}{Z_{e1}}\right|$

Q8. On dispose de deux filtres passifs de FT $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$. Comment obtenir un filtre de FT $\underline{H_1}.\underline{H_2}$?

(a). On met le filtre 2, puis le filtre 1
(b). On met le filtre 1, un montage suiveur, puis le filtre 2
(c). On met le filtre 1, puis le filtre 2
(d). On ne peut pas

E8. Filtres électroniques

Exercices

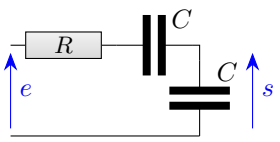
réponses page 718

Exercice E8.1 : Filtre passe-haut à partir d'un RLC série [**]

On a vu en cours le filtre passe-bas d'ordre 2 formé en prenant la tension de sortie aux bornes du condensateur dans un RLC série, et le filtre passe-bande en la prenant aux bornes de la résistance. On considère le même schéma ; la tension de sortie est celle aux bornes de la bobine.
Effectuez l'étude du diagramme de Bode de ce filtre (tracé pour $Q = 0,5$ et $Q = 3$). On pourra mettre sa FT sous la forme canonique $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{\omega_0}{Q\omega}}$

Exercice E8.2 : Filtre d'ordre 1 [**]

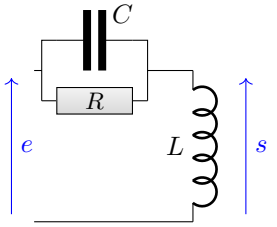
On considère le filtre ci-contre.



1. Dessinez les schémas équivalents en basse et haute fréquence ; peut-on conclure quelque chose en BF ?
2. Calculez sa fonction de transfert.
3. Tracez son diagramme de Bode.
4. Calculez sa pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$.

Exercice E8.3 : Filtre non canonique [**]

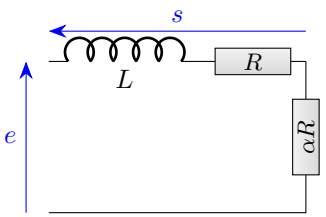
On considère le filtre ci-contre, avec $R = 120\,\Omega$, $L = 22\,\text{mH}$ et $C = 220\,\text{nF}$.



1. Déterminez sans calculs le type de ce filtre.
2. Calculez sa fonction de transfert.
3. Étudiez les asymptotes du gain et de la phase, ainsi que l'intersection des asymptotes du gain. Calculez le vrai gain et la vraie phase à ce point.
4. Tracez son diagramme de Bode.

Exercice E8.4 : Filtre atténuateur de basses [**]

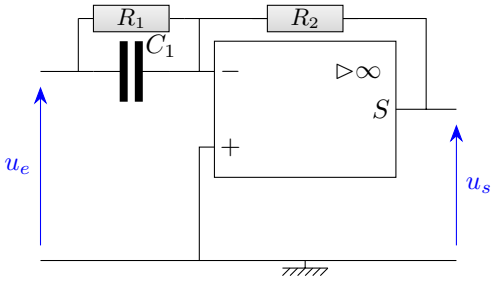
On considère le filtre ci-contre (les deux résistances sont différentes, le coefficient α est un réel positif) :



1. Exprimez sa fonction de transfert $\underline{H}$. Mettez-la sous la forme $\underline{H} = K.\underline{H_1}.\underline{H_2}$ avec K un réel positif, $\underline{H_1} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_2} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$
2. Quelle sont les limites du gain total (de $\underline{H}$) en BF et en HF ?
3. Pour déterminer vraiment ce qui se passe entre ces deux limites, il faut étudier la fonction de transfert en deux morceaux.
   Déterminer les asymptotes de $\underline{H_1}$ dans le diagramme de Bode.
4. Déterminez les asymptotes de $\underline{H_2}$ dans le diagramme de Bode.
5. Tracez alors le diagramme de Bode asymptotique de $\underline{H}$. Comme on ne connaît pas α, on ne cherchera pas des valeurs exactes sur les échelles, mais on respectera le fait que $\omega_2 > \omega_1$ et $K < 1$.

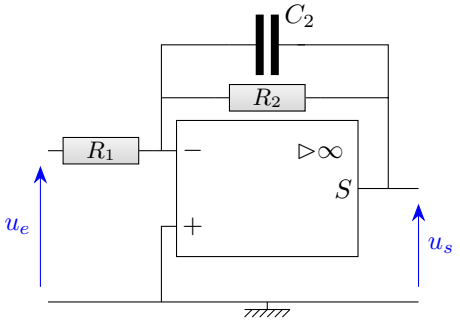
Exercice E8.5 : Filtre actif [**]

Calculez la FT du filtre ci-contre, et tracez son diagramme de Bode dans le cas $\frac{R_2}{R_1} = 5$; on posera $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1 C_1}$.



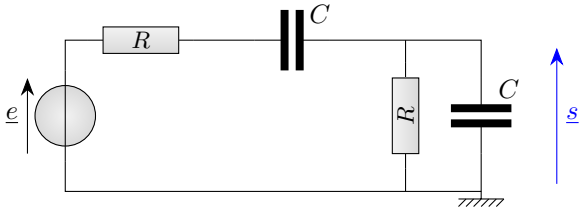
Exercice E8.6 : Filtre actif [**]

On considère le filtre ci-contre où l'AO fonctionne en régime linéaire :
Exprimez sa fonction de transfert, et mettez-la sous forme canonique.
Vous pouvez ensuite tracer son diagramme de Bode pour vous entraîner, avec les valeurs : $R_1 = 2{,}2\,\text{k}\Omega$; $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$; $C_2 = 10\,\text{nF}$.



Exercice E8.7 : Filtre de Wien [**]

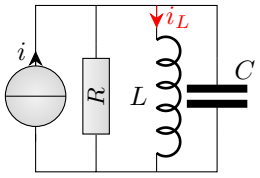
1. Déterminez la fonction de transfert de ce filtre.
2. Déterminez ses asymptotes, entre autres le point où elles se coupent.
3. Montrez que le gain passe par un maximum en $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et déterminez la vraie valeur du gain et de la phase pour cette pulsation-là.
4. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.
5. On prend $R = 1\,\text{k}\Omega$ et $C = 220\,\text{nF}$. Si l'entrée vaut $e(t) = 3 + 5\cos(1000t + 0,2)$, que vaut la sortie ?



Exercice E8.8 : RLC parallèle [**]

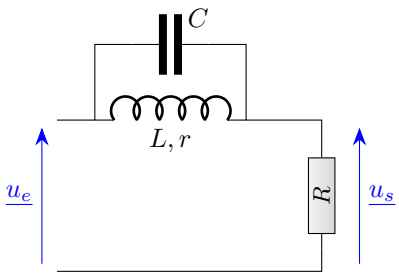
On considère le circuit RLC parallèle ci-contre comme un filtre en intensité dont l'entrée est i et la sortie i_L.

1. Exprimez la fonction de transfert de ce filtre.
2. On prend $L = 20\,\text{mH}$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$ et $R = 600\,\Omega$; déterminez les pentes des asymptotes du gain, les valeurs de limite de la phase, et la pulsation pour laquelle les asymptotes du gain se coupent.
3. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω_m à calculer ; calculer aussi la valeur du gain maximum.
4. Déterminer numériquement les limites de la bande passante à $-3\,\text{dB}$.
5. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.



Exercice E8.9 : Circuit bouchon [**]

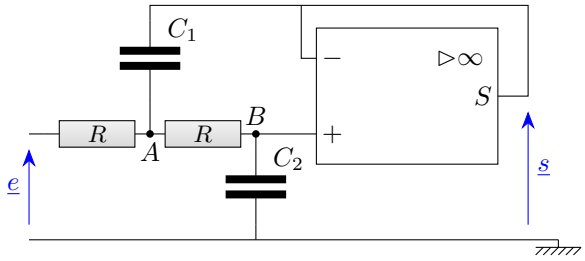
On considère le filtre ci-contre avec $R = 100\,\Omega$, $C = 220\,\text{nF}$, $L = 22\,\text{mH}$ et $r = 6{,}3\,\Omega$.



1. Étudiez sans calculs les comportements en BF et HF ; commentez.
2. Déterminez sa fonction de transfert ; on ne cherchera ni à la simplifier, ni à la mettre sous forme canonique.
3. Tracez son diagramme de Bode entre $1 \times 10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $1 \times 10^6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ avec Python. Quel est le type de ce filtre ?
4. *** Définissez et mesurez sur le graphique la bande coupante à $+3\,\text{dB}$

Exercice E8.10 : Filtre de type "Sallen-Key" [***]

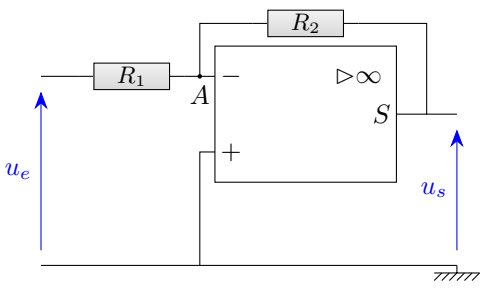
On considère le filtre suivant où l'AO fonctionne en régime linéaire :



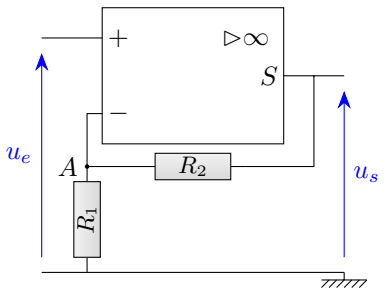
1. Appliquez le théorème de Millman en A et reliez $\underline{v_A}$, $\underline{e}$ et $\underline{s}$. On pensera à appliquer la condition de linéarité de l'AO.
2. Appliquez le théorème de Millman en B et reliez $\underline{v_A}$ et $\underline{s}$ par une seconde relation.
3. En éliminant $\underline{v_A}$ entre les deux relations, montrer que $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ en exprimant ω_0 et Q.
4. Proposez des valeurs des composants pour avoir $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1600\,\text{Hz}$ et $Q = 8$.
5. Étudiez les asymptotes de ce filtre dans le diagramme de Bode.
6. Montrez que le gain admet une résonance, donc on calculera numériquement la pulsation et le gain.
7. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.

Exercice E8.11 : AO non idéal [****]

On considère deux montages amplificateurs classiques :



(a) Montage amplificateur inverseur



(b) Montage amplificateur non inverseur

Pour chaque montage on définit la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

1. On prend un premier modèle d'AO « à gain fini » dans lequel les courants de polarisation sont toujours nuls, mais la tension différentielle est faible mais non nulle : la tension de sortie est reliée à la tension différentielle par la relation $\underline{v_S} = \frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{\varepsilon}$ avec $\mu_0 \approx 1 \times 10^5$ et $\omega_0 \approx 1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Déterminer $\underline{H}$ pour les deux montages avec ce modèle. Calculez les caractéristiques du filtre obtenu si $R_2 = 10R_1$.

2. Pour tenir encore plus compte du caractère non idéal de l'AO, on suppose maintenant qu'en plus les courants de polarisation ne sont pas nul, mais qu'il y a entre les deux entrée une impédance équivalente à une résistance R_e de valeur supérieure à $1\,\mathrm{G\Omega}$ (cela dépend des AO).

   Retrouver $\underline{H}$ pour l'un des deux montages. Est-il modifié de façon significative pour des résistances R_1 et R_2 typiques utilisées en TP ?

3. Déterminez pour les deux montages la valeur de l'impédance d'entrée du quadripole dans la limite des basses fréquences.

4. Que se passe-t-il si on inverse les entrée + et - des montages ?

E8. Filtres électroniques

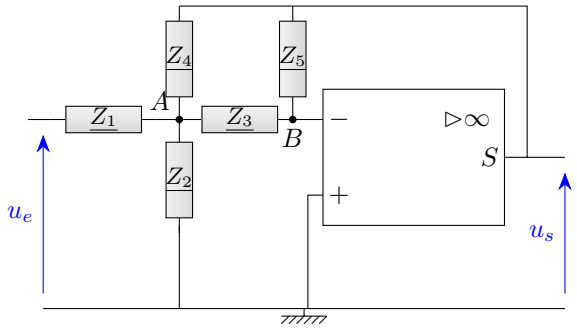
TDs numériques

réponses page 727

TD numérique : Filtre à structure de Rauch

A.X=B

La structure de Rauch est une structure de filtre actif très utilisée ; elle comprend 5 impédances qui, suivant les composants qu'elles représentent (résistances ou condensateurs) et leurs valeurs, permettent de réaliser tous les filtres d'ordre 2 possibles.



L'AO est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.

1. Appliquez le théorème de Millman au point A et exprimez $\underline{v_A}$ en fonction de $\underline{v_B}$, $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$.
   Indication : plutôt que d'écrire une grosse fraction, écrivez plutôt le théorème de Millman sous la forme $\left(\sum_{\text{nœuds voisins } k} \frac{1}{\underline{Z_k}}\right) \underline{v_A} = \sum_{\text{nœuds voisins } k} \frac{\underline{v_k}}{\underline{Z_k}}$
2. Appliquez de même le théorème de Millman en B.
3. Pour calculer $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$, on va choisir $\underline{u_e} = 1$ et calculer $\underline{u_s}$. Montrez que les équations à résoudre se ramènent au système linéaire $\underline{x} = (\underline{v_A}, \underline{v_B}, \underline{u_s})$ est alors solution du système linéaire $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{B}$ avec $\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}} + \frac{1}{\underline{Z_4}} & -\frac{1}{\underline{Z_2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{v_A} \\ \underline{v_B} \\ \underline{u_s} \end{pmatrix}$ et $\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z_1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Remarque : on pourrait supprimer une inconnue, $\underline{v_B}$, mais on va garder cette forme pour pouvoir, à la fin, tenir compte du fait que l'AO n'est pas idéal.
4. On rappelle qu'un système linéaire se résout sous Python ainsi :
   - on définit les matrices : `A=np.array([[ligne 1],[ligne 2],[ligne 3]])` et `B=np.array([colonne])`
   - on utilise la commande `x=np.linalg.solve(A,B)` pour avoir le vecteur des inconnues

   Écrivez une fonction `H_Rauch_(Z1,Z2,Z3,Z4,Z5)` qui prend comme argument 5 impédances, et
   - crée les matrices $\underline{A}$ et $\underline{B}$ avec les arguments donnés
   - résout le système
   - renvoie $\underline{u_s}$
5. On place :
   - en $\underline{Z_1}$ et en $\underline{Z_3}$, deux condensateurs $C = 22\,\text{nF}$
   - en $\underline{Z_4}$, un condensateur $C_4 = 10\,\text{nF}$
   - en $\underline{Z_2}$, une résistance $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$
   - en $\underline{Z_5}$, une résistance $R_5 = 100\,\text{k}\Omega$

   Écrivez une fonction `H1_(w)` qui renvoie la fonction de transfert de ce filtre à la pulsation ω. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre entre $100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $1\,\text{Mrad}\cdot\text{s}^{-1}$. Indiquer son type, et mesurez approximativement sa pulsation propre et son facteur de qualité.
   Attention : `numpy.linalg.solve` ne permet par une vectorisation ; il faut donc calculer le tableau des $\underline{H_1}(\omega)$ par une boucle.

6. On remplace $\underline{Z_1}$ par une résistance $R_1 = R_2$; la nouvelle FT est $\underline{H_2}$. Tracez le nouveau diagramme de Bode.

   Remarque : la courbe de phase est problématique : d'une part la phase varie très brusquement au passage de la résonance, d'autre part elle traverse 360° ce qui crée une discontinuité apparente.

7. En réalité, l'AO n'est pas idéal, ce qui se traduit d'abord par un gain fini : la tension différentielle $\underline{\epsilon} = \underline{v^+} - \underline{v^-}$ n'est pas nulle, mais vaut $\underline{\epsilon} = \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\mu_0}\underline{u_s}$ avec $\omega_0 = 1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\mu_0 = 10^5$. Modifiez le système d'équations précédent, et tracez le nouveau diagramme de Bode de $\underline{H_2}$. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Il existe des filtres en intensité.
Q2.(d)
Q3.(b)
Q4.(c)
Q5.(a) ET (b) ET (c) ET (d)
Eh oui, même un coupe bande, même si on ne l'a pas vu. C'est le complémentaire du passe-bande, il suffit donc de prendre la tension de sortie aux bornes de C et L.
Q6.(b)
Q7.(a)
Q8.(b)
Il faut un suiveur entre les deux pour que les filtres ne s'influencent pas l'un l'autre.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice E8.1 : Filtre passe-haut à partir d'un RLC série [**]

Les schémas équivalents montrent que c'est un passe-haut.

La FT vaut $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1-j\frac{R}{L\omega}-\frac{1}{LC\omega^2}}$ donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

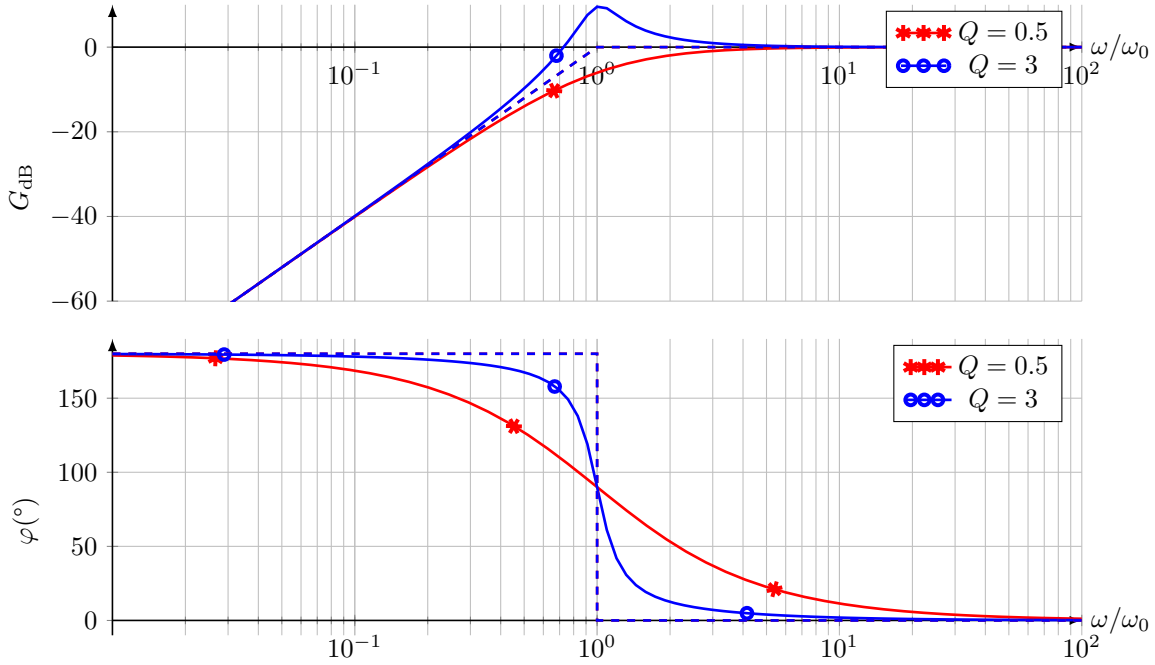
$\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\sim} -LC\omega^2$ donc $G_{\text{dB}} \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\log LC + 40log\omega$: le gain a une asymptote de pente +40 dB/déc, et la phase tend vers ±180°.

$\underline{H} \underset{\omega\to\infty}{\sim} 1$ donc $G_{\text{dB}} \underset{\omega\to\infty}{\sim} 0\,\text{dB}$ (pente nulle) et la phase tend vers 0°.

Les deux asymptotes se coupent lorsque $LC\omega^2 = 1$ soit pour $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$; à cette pulsation, elles valent 0 dB.

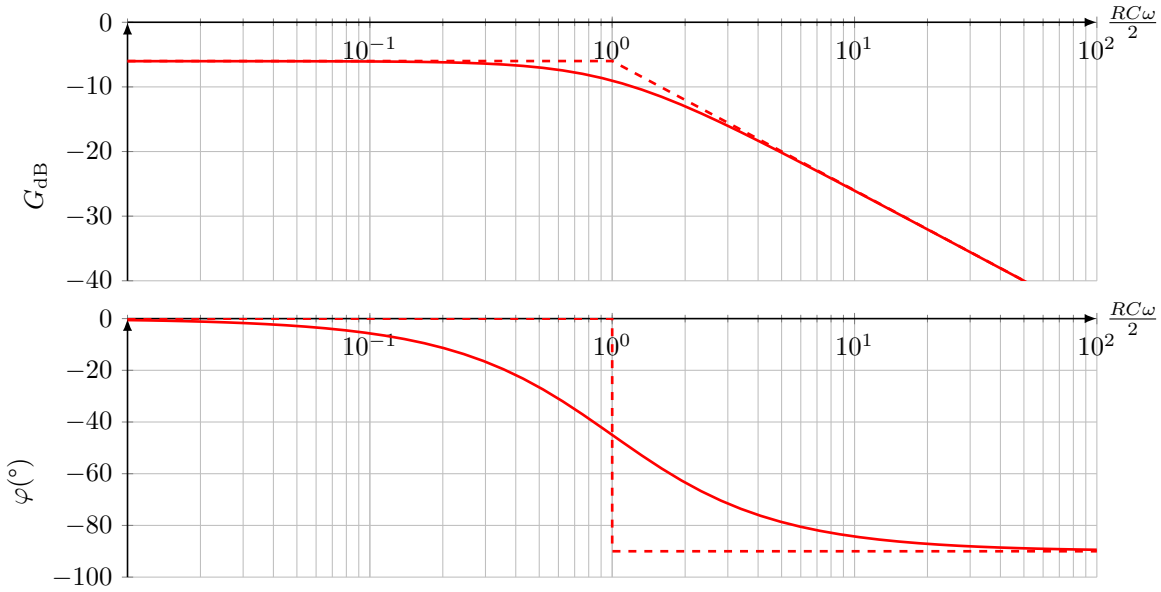
Pour cette pulsation, $\underline{H}(\omega_c) = jQ$ donc le gain vaut $20\log Q$ et la phase vaut 90°.

On pourrait ensuite montrer qu'il y a une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (c'est compliqué) :



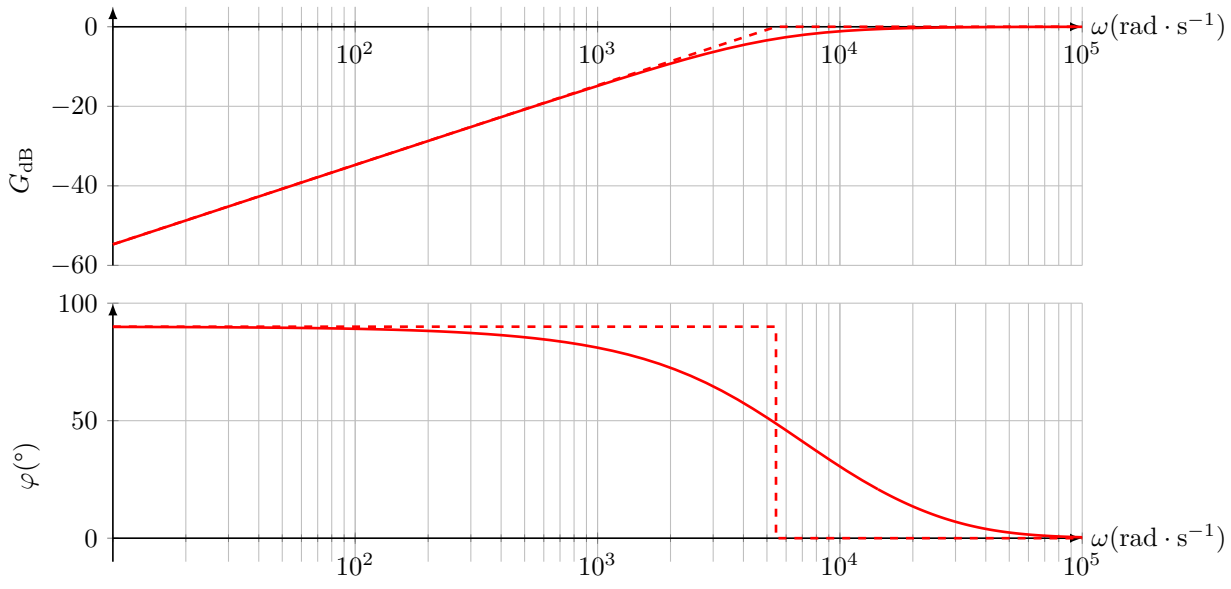
Corrigé de l'exercice E8.2 : Filtre d'ordre 1 [**]

1. Je vous laisse faire les schémas. En HF, on trouve $\underline{s} \approx 0$, mais en BF on n'en sait rien (deux interrupteurs ouverts en série).
   En fait, on peut dire quelque chose en BF, mais c'est compliqué.
2. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{jC\omega}+R} = \dfrac{1}{2+jRC\omega}$
3. $\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc le gain a une asymptote horizontale à basse fréquence, de valeur −6 dB, et la phase tend vers 0°.
   $\underline{H} \underset{\omega\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{jRC\omega}$ donc $G_{\text{dB}} \underset{\omega\to\infty}{\sim} -20\log RC - 20\log\omega$: le gain a une asymptote de pente −20 dB/déc à haute fréquence, et la phase tend vers −90°.
   Il s'agit donc d'un filtre passe-bas. Les deux asymptotes se coupent lorsque $RC\omega = 2$ soit pour $\omega_c = \dfrac{2}{RC}$; à cette pulsation, elles valent −6 dB. Pour cette pulsation, $\underline{H}(j\omega_c) = \dfrac{1}{2(1+j)}$, donc le gain vaut −9 dB et la phase vaut −45°.



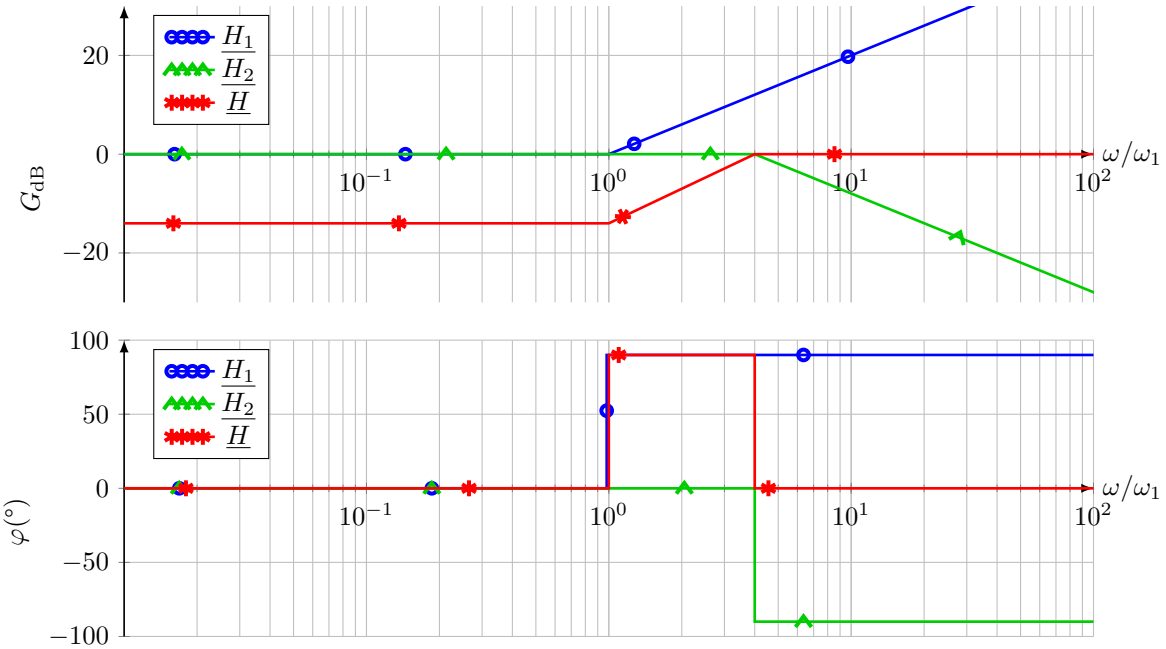
4. Pour calculer la pulsation de coupure à -3dB, il faut d'abord remarquer que le maximum de $|\underline{H}|(\omega)$ se trouve en BF, et vaut $\frac{1}{2}$.
   Il faut donc résoudre l'équation $|\underline{H}|(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ soit $\frac{1}{\sqrt{4+R^2C^2\omega^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Après quelques calculs, on trouve $\omega = \frac{2}{RC}$.

Corrigé de l'exercice E8.3 : Filtre non canonique [**]

1. Je vous laisse faire les schémas. En HF, on trouve $\underline{s} = \underline{e}$ par loi d'additivité, et en BF $\underline{s} = 0$ aux bornes d'un fil. C'est donc un passe-haut.
2. $\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega+\frac{1}{R}}} = \frac{jL\omega - RLC\omega^2}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$
3. En BF : $\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\sim} \frac{jL\omega}{R}$ donc $G_{\text{dB}} \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\log L/R + 20\log\omega$: le gain a une asymptote de pente +20 dB/déc, et la phase tend vers 90°.
   En HF : $\underline{H} \underset{\omega\to\infty}{\sim} \frac{-RLC\omega^2}{-RLC\omega^2} = 1$ donc $G_{\text{dB}} \underset{\omega\to\infty}{\sim} 0\,\text{dB}$ (asymptote horizontale) et la phase tend vers 0°.
   Les deux asymptotes se coupent lorsque $\frac{L\omega}{R} = 1$ soit pour $\omega_c = \dfrac{R}{L}$; à cette pulsation, elles valent 0 dB. On trouve $\omega_c = 5450\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
   Pour cette pulsation, $\underline{H}(j\omega_c) = \dfrac{jR - R^3C/L}{R + jR - R^3C/L} = 0,5 + 0,6j$, donc le gain vaut $20\log 0,77 = -2,3\,\text{dB}$ et la phase vaut 49°.
4. 

Corrigé de l'exercice E8.4 : Filtre atténuateur de basses [**]

1. Par le diviseur de tension : $\underline{s}(\omega) = \frac{R+jL\omega}{R+\alpha R+jL\omega}\underline{e}(\omega)$ donc $\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R+\alpha R}\frac{1+j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R+\alpha R}\omega}$. On a donc bien la forme demandée, avec $K = \frac{1}{1+\alpha}$, $\omega_1 = \frac{R}{L}$ et $\omega_2 = \frac{R+\alpha R}{L} = (1+\alpha)\omega_1$
2. $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+\alpha}$ donc le gain total tend vers $-20\log(1+\alpha) < 0$ en BF.
   $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} 1$ donc le gain total tend vers 0 dB en HF.
3. $\underline{H_1}(\omega) \underset{0}{\sim} 1$ donc le gain a une asymptote horizontale à 0 dB et la phase vaut 0° en BF.
   $\underline{H_1}(\omega) \underset{\infty}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_1}$ donc le gain a une asymptote $G_{\text{dB}\infty} = 20\log\omega - 20\log\omega_1$ de pente +20 dB/déc et la phase vaut +90° en BF.
   Les asymptotes se coupent en ω_1 pour un gain nul.
4. $\underline{H_2}(\omega) \underset{0}{\sim} 1$ donc le gain a une asymptote horizontale à 0 dB et la phase vaut 0° en BF.
   $\underline{H_2}(\omega) \underset{\infty}{\sim} j\frac{\omega_2}{\omega}$ donc le gain a une asymptote $G_{\text{dB}\infty} = 20\log\omega_2 - 20\log\omega$ de pente −20 dB/déc et la phase vaut −90° en BF.
   Les asymptotes se coupent en ω_2 pour un gain nul.
5. On trace les asymptotes précédentes, et on les ajoute en tenant compte aussi du facteur K qui va avoir pour effet de ramener le gain à 0 en HF. C'est une question plus ou moins difficile suivant qu'on visualise bien l'ajout des deux courbes ou pas.
   Exemple avec $\alpha = 4$:



Corrigé de l'exercice E8.5 : Filtre actif [**]

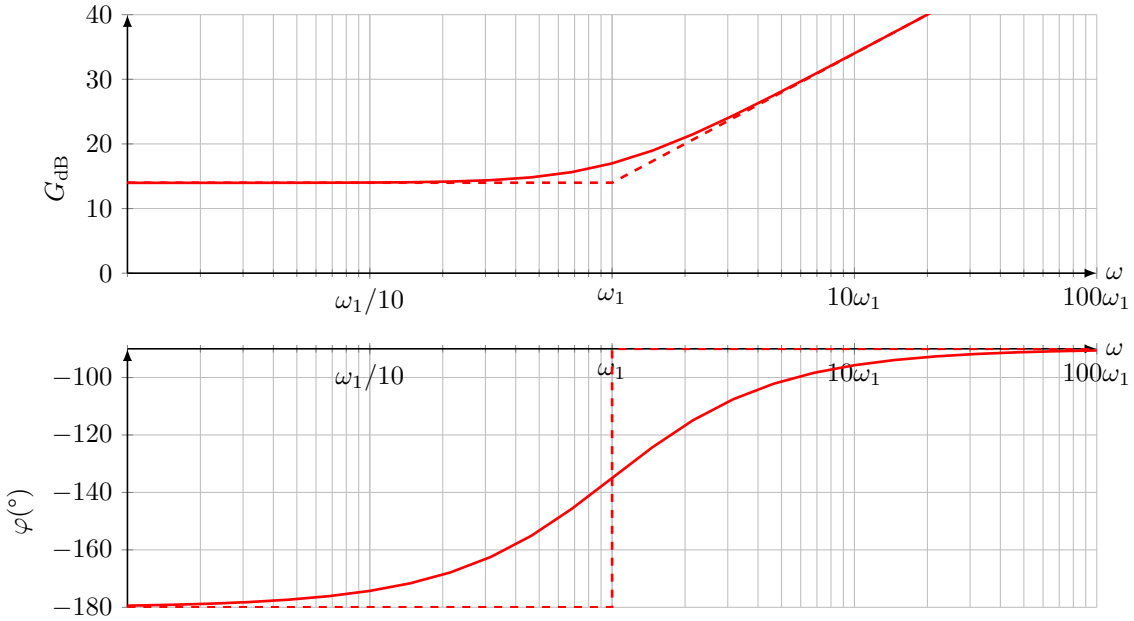
Soit A le nœud relié à l'entrée inverseuse ; par linéarité de l'AO, $\underline{v_A}(\omega) = \underline{v^-}(\omega) = \underline{v^+}(\omega) = 0$ car l'entrée + est reliée à la masse. On applique alors le théorème de Millman : $\underline{v_A}(\omega) = \frac{\frac{\underline{u_e}(\omega)}{R_1}+jC_1\omega\underline{u_e}(\omega)+\frac{\underline{u_s}(\omega)}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+jC_1\omega}$ car le courant d'entrée est nul. On en déduit que $\frac{\underline{u_s}(\omega)}{R_2} = -\left(\frac{1}{R_1}+jC_1\omega\right)\underline{u_e}(\omega)$ d'où $\underline{H}(\omega) = -R_2\left(\frac{1}{R_1}+jC_1\omega\right)$

En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} -\frac{R_2}{R_1}$: asymptote horizontale $G_{\text{dB}0} = 20\log\frac{R_2}{R_1} = +14$ dB et phase de ±180°.

En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} -jR_2C_1\omega$: asymptote $G_{\text{dB}\infty} = 20\log R_2C_1\omega$ de pente +20 dB/déc et phase de −90°.

Les asymptotes se coupent lorsque $20\log\frac{R_2}{R_1} = 20\log R_2C_1\omega$ soit $\omega = \frac{1}{R_1C_1} = \omega_1$. En cette pulsation, le gain des asymptotes vaut $20\log\frac{R_2}{R_1} = 14$ dB, le gain réel vaut 17 dB et la phase −135°.

D'où le diagramme de Bode :



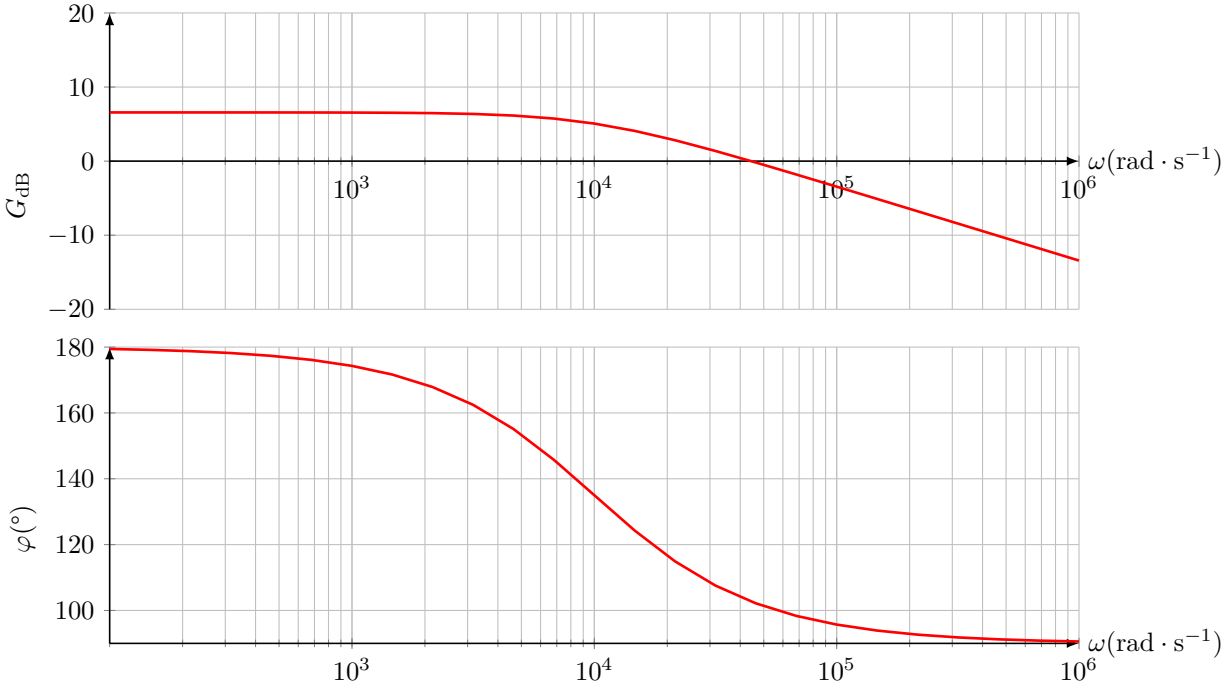
Le gain tend vers $+\infty$ en haute fréquences : cela pose problème, tous les parasites vont être amplifiés. Un tel filtre n'est pas utilisable en pratique.

Corrigé de l'exercice E8.6 : Filtre actif [**]

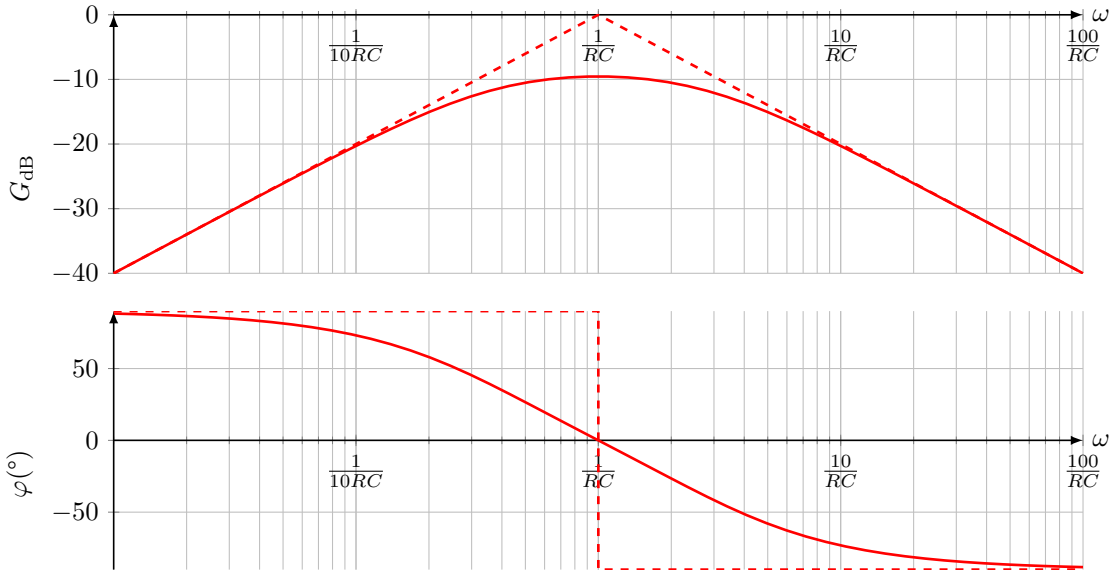
Si on associe R_2 et C_2, on obtient une impédance $\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_2}+jC_2\omega}$. En appliquant Millman à l'entrée inverseuse de l'AO, on trouve $\underline{v^-}(\omega) = \frac{\frac{u_e(\omega)}{R_1}+\frac{u_s(\omega)}{\underline{Z}}-\underline{i^-}(\omega)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\underline{Z}}}$. Or par linéarité de l'AO : $\underline{v^-}(\omega) = \underline{v^+}(\omega) = 0$ et de plus $\underline{i^-}(\omega) = 0$ donc $\frac{u_e(\omega)}{R_1} + \frac{u_s(\omega)}{\underline{Z}} = 0$ soit $\underline{u_s}(\omega) = -\frac{\underline{Z}}{R_1}\underline{u_e}(\omega)$. Donc

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{\underline{Z}}{R_1} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2}+jR_1C_2\omega} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+jR_2C_2\omega}$$

On a donc un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\frac{1}{R_2C_2}$ et de gain en basse fréquence $20\log\frac{R_2}{R_1}$.



Corrigé de l'exercice E8.7 : Filtre de Wien [**]

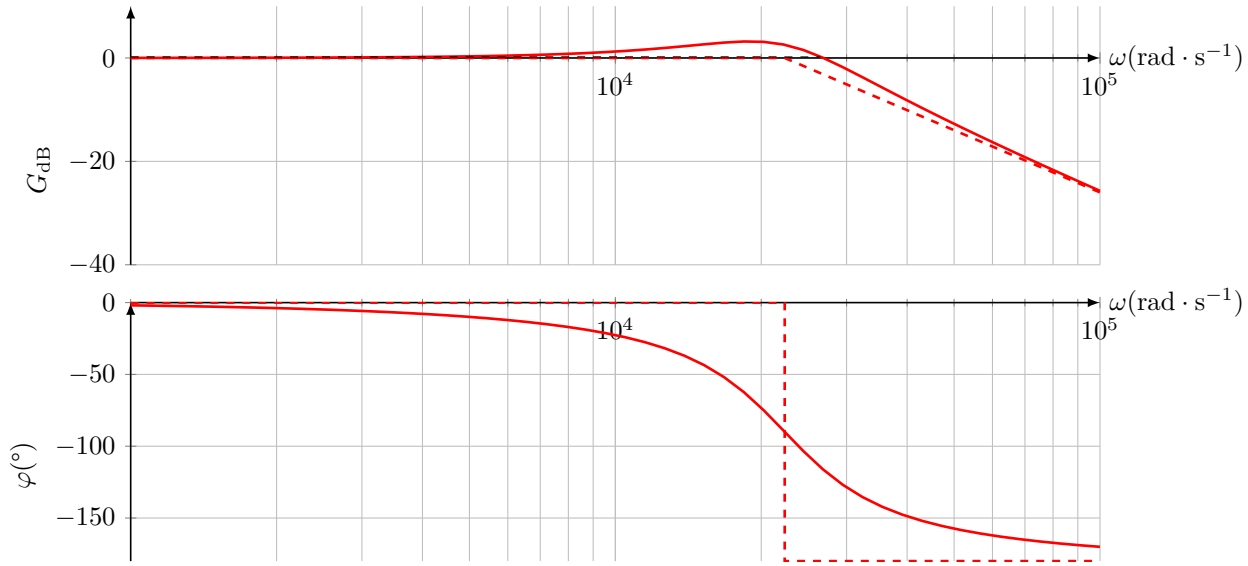
1. Si on associe les deux impédances de droite, on trouve $\underline{Z_{eq}}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$. Par un diviseur de tension, on a alors $\underline{s}(\omega) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}(\omega) = \frac{R}{(1+jRC\omega)\left(\frac{R}{1+jRC\omega}+R+\frac{1}{jC\omega}\right)}\underline{e}(\omega) = \frac{R}{R+R+jR^2C\omega+\frac{1}{jC\omega}+R}\underline{e}(\omega)$ d'où on tire $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}}$
2. En basse fréquence, $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} jRC\omega$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log(RC) + 20\log\omega$ (asymptote de pente +20 dB/déc) et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} +90°$.
   En haute fréquence, $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{jRC\omega}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\infty}{\sim} -20\log(RC) - 20\log\omega$ (asymptote de pente −20 dB/déc) et $\varphi(\omega) \underset{\infty}{\to} \pm -90°$.
   Les asymptotes se coupent lorsque $\log(RC\omega) = \log\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$ soit $\omega = \frac{1}{RC}$ pour un gain nul.
3. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}|(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3^2+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$ passe par un maximum. Pour savoir cela, on dérive : $\frac{d}{d\omega}\left[3^2+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2\right] = 0 + 2\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)\left(RC+\frac{1}{RC\omega^2}\right)$ qui s'annule lorsque $RC\omega = \frac{1}{RC\omega}$ soit $\omega = \frac{1}{RC}$.
   Pour cette pulsation, $\underline{H}\left(\frac{1}{RC}\right) = \frac{1}{3}$ donc $G_{\text{dB}}\left(\frac{1}{RC}\right) = -20\log 3 = -9{,}5\,\text{dB}$ et $\varphi\left(\frac{1}{RC}\right) = 0°$.
4. 

5. $\underline{H}(0) = 0$ donc le terme constant sera multiplié par 0 ; il n'en restera rien en sortie.
   $\underline{H}(1000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}) = 0,19e^{-0,96j}$ donc le second terme est multiplié par 0,19 et déphasé de −0,96 rad.
   En sortie, il restera donc $s(t) = 0,95\cos(1000t - 0,76)$.

Corrigé de l'exercice E8.8 : RLC parallèle [**]

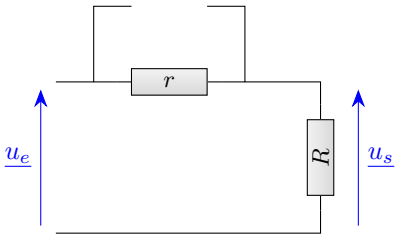
1. Par un diviseur de courant : $\underline{i_L}(\omega) = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{jL\omega}+\frac{1}{R}+jC\omega}\underline{i}(\omega)$ d'où on tire $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}$
2. En basse fréquence, $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} 1$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\to} 0$ (asymptote horizontale) et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} 0°$.
   En haute fréquence, $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{LC\omega^2}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\infty}{\sim} -20\log(LC\omega^2) = -20\log(LC) - 40\log\omega$ (asymptote de pente −40 dB/déc) et $\varphi(\omega) \underset{\infty}{\to} \pm 180°$.
   Les asymptotes se coupent lorsque $\log(LC\omega^2) = 0$ soit $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 22\,400\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour un gain nul.
3. Le gain passe par un maximum lorsque $|\underline{H}|(\omega)$ passe par un maximum, donc quand $\left(1-LC\omega^2\right)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}$ passe par un maximum. Pour savoir cela, on dérive : $\frac{d}{d\omega}\left[\left(1-LC\omega^2\right)^2+\frac{L^2\omega^2}{R^2}\right] = -4LC\omega\left(1-LC\omega^2\right) + 2\frac{L^2}{R^2}\omega = 2\omega\left[\frac{L^2}{R^2} - 2LC + 2L^2C^2\omega^2\right]$ qui s'annule en $\omega = 0$ et en $\omega = \sqrt{\frac{2LC-\frac{L^2}{R^2}}{2L^2C^2}} = 19\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ qui correspond à ω_m.
   À cette pulsation, $|\underline{H}|_m = 1,44$ donc le gain vaut 3,2 dB, et la phase vaut −66°.

4. On résout numériquement $\frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{|\underline{H}|_m}{\sqrt{2}}$ et on trouve la bande passante $[3950; 26500]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
5.

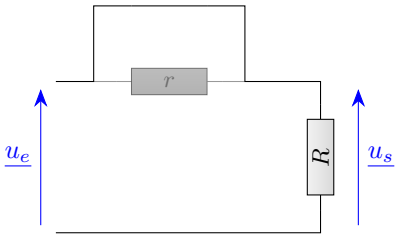


Corrigé de l'exercice E8.9 : Circuit bouchon [**]

1. En BF :



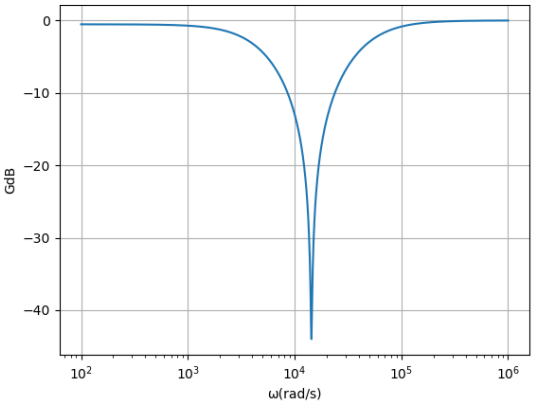
Donc $\underline{u_s}(\omega) = \frac{R}{r+R}\underline{u_e}(\omega)$.
En HF :

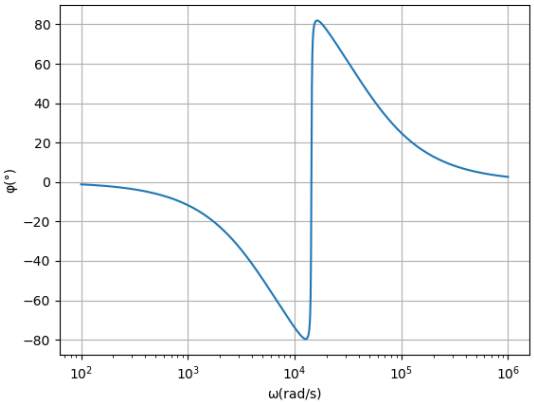


Donc $\underline{u_s}(\omega) = \underline{u_e}(\omega)$.
Ce filtre laisse passer les BF et les HF, il faut étudier ce qu'il fait pour les fréquences intermédiaires.
2. On associe les deux dipôles en parallèles : $\underline{Z_{eq}}(\omega) = \frac{1}{jC\omega+\frac{1}{r+jL\omega}}$ puis par le diviseur de tension $\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega+\frac{1}{r+jL\omega}}}$
3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
R,C,L,r=100,220e-9,22e-3,6.3
def H_(w):
    return R/(R+1/(1j*C*w+1/(r+1j*L*w)))
tab_w=np.logspace(2,6,1000)
tab_GdB=20*np.log10(np.abs(H_(tab_w)))
tab_phi=np.angle(H_(tab_w))
plt.figure()
plt.plot(tab_w,tab_GdB)
plt.xscale("log")
```

```
plt.xlabel(r"$\\omega$(rad/s)")
plt.ylabel("GdB")
plt.grid()
plt.figure()
plt.plot(tab_w,tab_phi*180/np.pi)
plt.xscale("log")
plt.xlabel(r"$\\omega$(rad/s)")
plt.ylabel(r"$\\phi$(°)")
plt.grid()
plt.show()
```





C'est donc un coupe-bande.

4. Le gain minimal vaut $-43\,\text{dB}$ donc on peut définir la bande coupante à $+3\,\text{dB}$ comme l'intervalle de fréquences qui coupe à moins que $-43+3=-40\,\text{dB}$. On mesure sur le graphique (en zoomant) l'intervalle de pulsations $[14192\,;14556]\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit en fréquences $[2259\,;2317]\text{Hz}$ de largeur $58\,\text{Hz}$.

Corrigé de l'exercice E8.10 : Filtre de type "Sallen-Key" [***]

1. $\underline{v_A}(\omega)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+jC_1\omega\right)=\frac{\underline{e}(\omega)}{R}+\underline{s}jC_1\omega+\frac{\underline{s}(\omega)}{R}$ puisque $\underline{v_B}(\omega)=\underline{s}(\omega)$ par linéarité de l'AO.
2. $\underline{s}(\omega)\left(\frac{1}{R}+jC_2\omega\right)=\frac{\underline{v_A}(\omega)}{R}-\underline{i^+}(\omega)$, ce dernier terme étant nul.
3. On en tire $\underline{v_A}(\omega)=(1+jRC_2\omega)\,\underline{s}(\omega)$ donc $(1+jRC_2\omega)\left(\frac{2}{R}+jC_1\omega\right)\underline{s}(\omega)=\frac{\underline{e}(\omega)}{R}+\underline{s}(\omega)jC_1\omega+\frac{\underline{s}(\omega)}{R}$ soit en regroupant les termes $(1+jRC_2\omega)(2+jRC_1\omega)\,\underline{s}(\omega)-\underline{s}(\omega)-jRC_1\omega\underline{s}(\omega)=\underline{e}(\omega)$. On développe tout à gauche, il y a des termes qui se simplifient, et on tombe sur $\underline{s}(\omega)=\frac{1}{2+2jRC_2\omega+jRC_1\omega-R^2C_1C_2\omega^2-1-jRC_1\omega}\underline{e}(\omega)$ soit

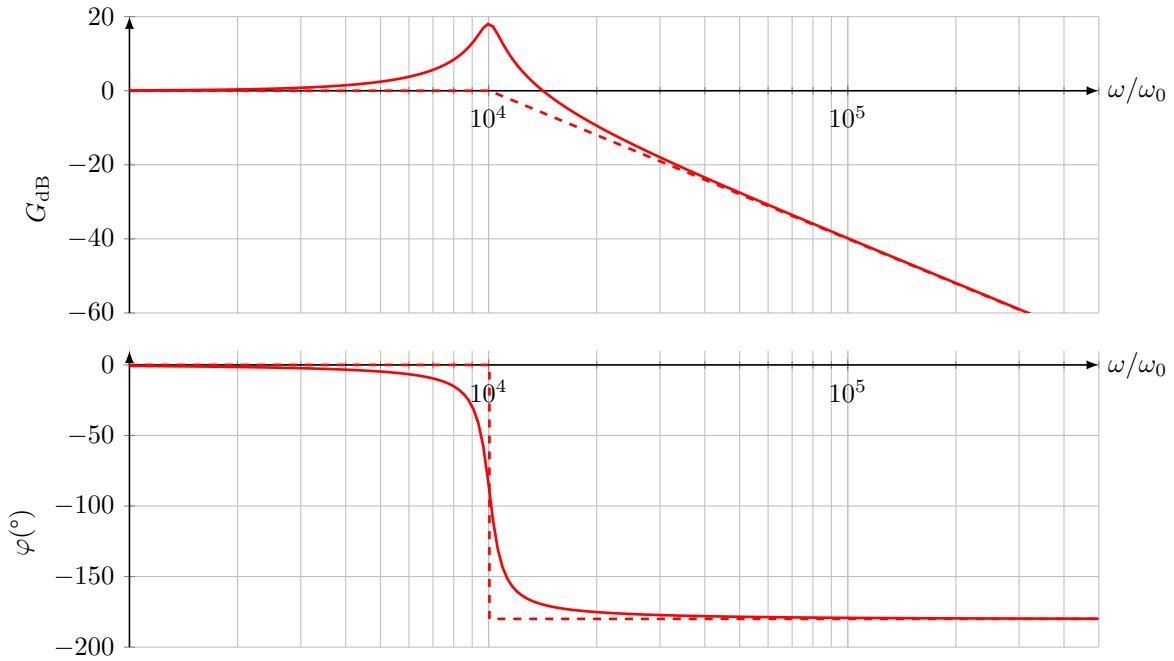
$$\underline{H}(\omega)=\frac{1}{1+2jRC_2\omega-R^2C_1C_2\omega^2}$$

donc $\omega_0=\frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $Q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

4. On a 3 inconnues pour 2 équations, donc un degré de liberté. Prenons par exemple $C_1=1\,\mu\text{F}$, alors on trouve $C_2=\frac{C_1}{4Q^2}=4\,\text{nF}$ et $R=\frac{1}{2\pi f_0\sqrt{C_1C_2}}=1{,}6\,\text{k}\Omega$
5. En BF : $\underline{H}(\omega)\underset{0}{\sim}1$ donc asymptote horizontale $G_{\text{dB}0}=0\,\text{dB}$ et phase nulle.

   En HF : $\underline{H}(\omega)\underset{\infty}{\sim}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ d'où une asymptote du gain de pente $-40\,\text{dB/déc}$ et une phase de $\pm180°$.

   Les asymptotes se coupent en ω_0 pour un gain nul ; à cette pulsation, le vrai gain vaut $20\log Q=18\,\text{dB}$ et la phase vaut $-90°$.
6. Le gain admet un maximum si $|\underline{H}|(\omega)$ admet un maximum, donc si $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ admet un minimum. On dérive et après quelques calculs (toujours les mêmes) on trouve une annulation de la dérivée pour $\omega_m=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}=10\,013\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (fréquence $1593\,\text{Hz}$) et le gain correspondant vaut $18{,}1\,\text{dB}$.
7.



Corrigé de l'exercice E8.11 : AO non idéal [****]

1. Pour le montage amplificateur inverseur :
   On applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\underline{v^-}=\frac{\underline{u_e}}{R_1}+\frac{\underline{u_s}}{R_2}$. De plus $\underline{u_s}=\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{\varepsilon}$ avec $\underline{\varepsilon}=\underline{v^+}-\underline{v^-}=-\underline{v^-}$ car l'entrée non inverseuse est reliée à la masse. Donc $-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\mu_0}\underline{u_s}=\frac{\underline{u_e}}{R_1}+\frac{\underline{u_s}}{R_2}$ ce qui donne $\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\mu_0}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right)\underline{u_s}=-\frac{1}{R_1}\underline{u_e}$. On en tire après quelques calculs $\underline{H}=\frac{-\frac{R_2}{R_1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}}{1+j\frac{R_1+R_2}{1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}\frac{\omega}{\mu_0\omega_0}}$.
   On voit que pour des facteurs d'amplifications faibles ($R_2 \ll R_1\mu_0$) on a à peu près $\underline{H}=-\frac{R_2}{R_1}$ en basses fréquences, mais ça coupe en hautes fréquences. Ici on trouve numériquement $\underline{H}=\frac{-9{,}999}{1+j\frac{\omega}{9092\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}}$
   Pour le montage amplificateur non inverseur :
   On écrit de même $\underline{u_s}=\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}(\underline{u_e}-\underline{v^-})=\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\left(\underline{u_e}-\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\underline{u_s}\right)$ d'où on tire après quelques calculs $\underline{H}=\frac{\frac{R_1+R_2}{R_1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}}{1+j\frac{R_1+R_2}{R_1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}\frac{\omega}{\mu_0\omega_0}}=\frac{10{,}999}{1+j\frac{\omega}{9092\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}}$.
   Dans les deux cas on voit que plus on amplifie, plus la bande passante diminue.
2. Le calcul devient affreux. Pour l'amplificateur inverseur, par exemple, les équations sont $\underline{v^-}=\frac{\frac{\underline{u_e}}{R_1}+\frac{\underline{u_s}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_e}}$ et $\underline{u_s}=-\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{v^-}$. On en tire $\underline{H}=\frac{-\frac{R_2}{R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_e}+\frac{R_1R_2}{\mu_0}}}{1+j\frac{R_1+R_2}{1+\frac{R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_e}}{\mu_0}}\frac{\omega}{\mu_0\omega_0}}$
   En TP on utilise des résistances entre 1 kΩ et 1 MΩ donc $\frac{R_1R_2}{R_e}\ll R_1+R_2$ et la prise en compte de R_e ne change pas la FT ; par contre dans certains cas particuliers avec de fortes résistances, il faut en tenir compte et prendre, par exemple, un AO avec une forte résistance d'entrée (AO à transistors à effet de champ).
3. Il suffit de placer le courant $\underline{i_e}$ qui entre et de le relier à $\underline{u_e}$.
   — pour l'amplificateur inverseur, $\underline{i_e}=\frac{\underline{u_e}-\underline{v^-}}{R_e}=\frac{\underline{u_e}-\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\mu_0}\underline{u_s}}{R_1}$ avec $\underline{u_s}=\underline{H}\,\underline{u_e}$. Pour $\omega\to 0$, $\underline{H}\to H_0=-\frac{R_2}{R_1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}$ et $\underline{i_e}=\frac{\underline{u_e}}{R_1}\left(1-\frac{H_0}{\mu_0}\right)$ donc $\underline{Z_e}=\frac{R_1}{1+\frac{R_2}{\mu_0R_1+R_1+R_2}}=0{,}9999R_1\approx R_1$.
   — pour l'amplificateur non inverseur, $\underline{i_e}=\frac{\underline{\varepsilon}}{R_e}=\frac{\underline{H}\underline{u_e}}{R_e}$ donc $\underline{Z_e}=\frac{R_e}{\underline{H}}$. Pour $\omega\to 0$, on trouve $\underline{Z_e}=R_e\frac{R_1+\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}{R_1+R_2}=0{,}0909R_e$ qui est donc très grand si R_e est très grand.

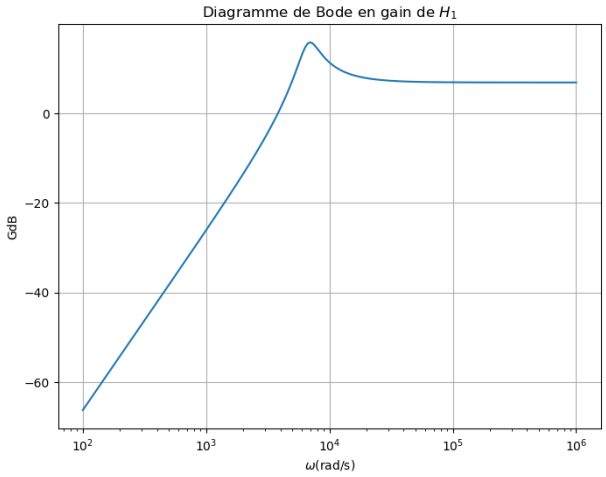
4. Prenons par exemple le montage amplificateur inverseur, inverser les entrées revient à changer μ_0 et $-\mu_0$ ce qui donne $\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{R_1-\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}}{1+j\frac{R_1+R_2}{1-\frac{R_1+R_2}{\mu_0}}\frac{\omega}{\mu_0\omega_0}}$. Le terme devant $j\frac{\omega}{\mu_0\omega_0}$ devient alors négatif, ce qui traduit que u_s vérifie désormais une équation différentielle instable de la forme $-\tau\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + u_s = k.u_e$ donc u_s va diverger et l'AO va saturer : l'AO ne fonctionne plus en régime linéaire s'il n'est pas rebouclé sur l'entrée inverseuse.

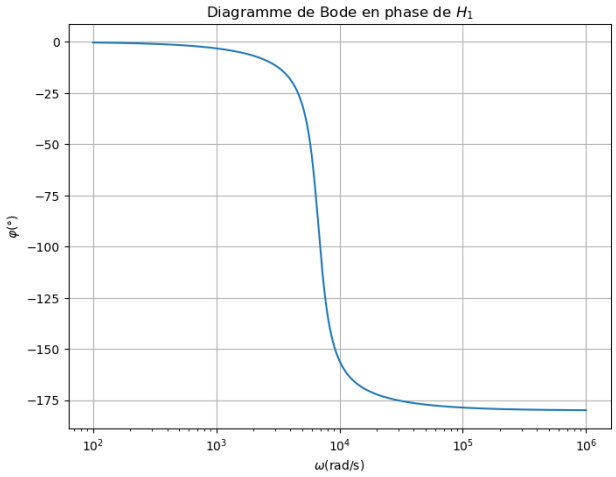
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Filtre à structure de Rauch

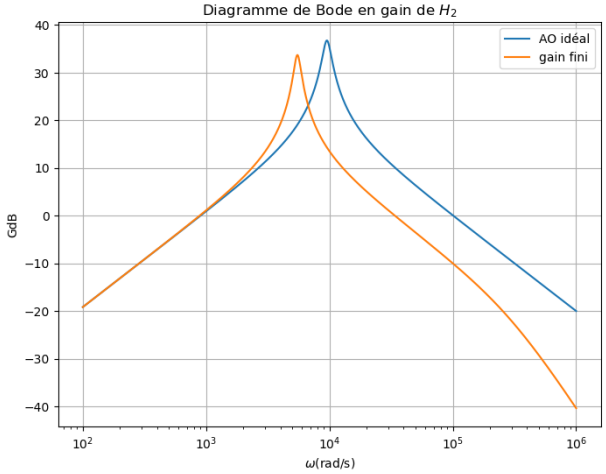
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}+\frac{1}{\underline{Z_3}}+\frac{1}{\underline{Z_4}} & -\frac{1}{\underline{Z_2}} & -\frac{1}{\underline{Z_4}} \\ -\frac{1}{\underline{Z_3}} & \frac{1}{\underline{Z_3}}+\frac{1}{\underline{Z_5}} & \frac{1}{\underline{Z_5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{v_A} \\ \underline{v_B} \\ \underline{u_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z_1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

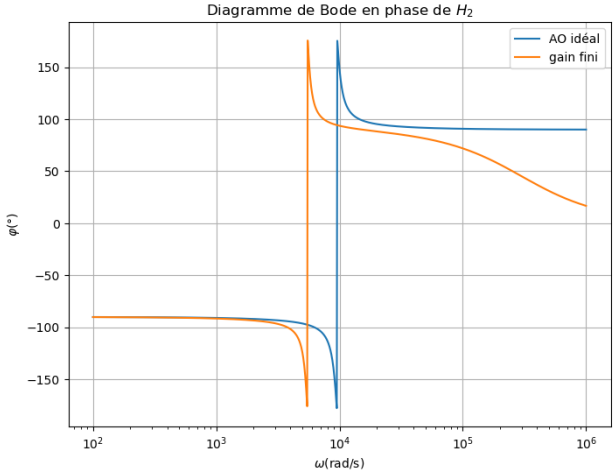
Le premier filtre est un filtre passe-haut de pulsation propre égale à environ $1000\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ avec une résonance, et une bande passante $\left[970\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}};1640\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\right]$ d'où on tire $Q=1,5$.





Le seconde filtre est un filtre passe-bande, de pulsation propre $1370\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et de facteur de qualité $Q=30$. Si on tient compte du gain fini de l'AO, l'équation $\underline{v_B}=0$ est remplacée par $\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{v_B}+\underline{u_s}=0$; on voit que la courbe est modifiée : la pulsation de résonance change, la pente HF aussi.





Mécanique

Chapitre M5 Oscillateurs mécaniques

Programme p.754

Conseils p.755

Cours p.732

M5.A. Oscillateur harmonique en RSF

M5.B. Oscillations d'un système à 1 degré de liberté au voisinage de sa position d'équilibre

M5.C. Oscillateurs couplés (Hors programme)

QCMs p.756

Exercices p.758

TDs numériques p.764

M5. Oscillateurs mécaniques

Cours

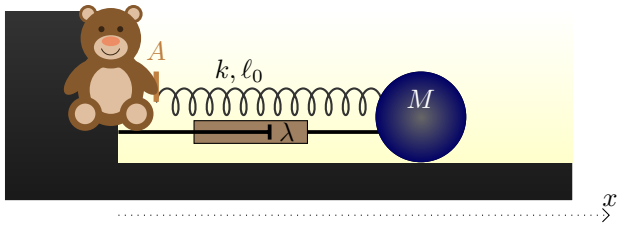
Nous avons vu, en électricité, les propriétés du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé ; or nous avions vu qu'il existe un système mécanique dont le comportement est très proche du RLC série : l'oscillateur harmonique. Le but de ce chapitre est de transposer les résultats vus sur le RLC à l'oscillateur harmonique, et d'expliquer pourquoi ce modèle est si important en mécanique.

M5.A. Oscillateur harmonique en RSF

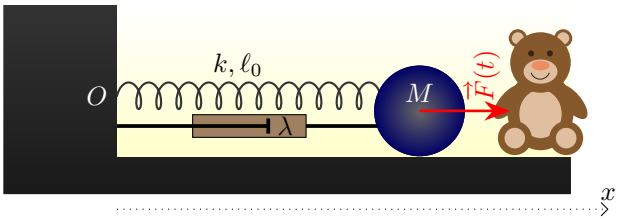
A.1. Équations

Pour exciter un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal forcé, il y a deux solutions : exercer une force sinusoïdale sur la masse, ou secouer sinusoïdalement l'autre bout du ressort (noté A sur le schéma, d'abscisse $x_A(t)$). On va étudier rapidement les deux cas.

FIGURE M5.1 : Oscillateurs harmoniques en RSF.



(a) Oscillateur Harmonique secoué



(b) Oscillateur Harmonique soumis à une force sinusoïdale

Propriété : ED vérifiée par la position

L'allongement $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ du ressort de l'oscillateur harmonique vérifie l'équation

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} = \omega_0^2 x_A(t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} \quad \text{(M5.1)}$$

Démonstration

La masse a pour accélération $\ddot{x}(t)\vec{e}_x$.

Sur la figure de droite, elle est soumise à son poids, vertical, à la réaction du support, verticale aussi en l'absence de frottements solides, à la force du ressort, $-kx(t).\vec{e}_x$, à la force de l'amortisseur, $-\lambda.\dot{x}(t).\vec{e}_x$, et à la force $F(t)$. Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne donc l'équation $m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \lambda.\dot{x}(t) + F(t)$ soit $\ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m}$.

Sur la figure de gauche, elle est soumise à son poids, vertical, à la réaction du support, verticale aussi en l'absence de frottements solides, à la force du ressort, $-k.(\ell(t) - x_A(t) - \ell_0).\vec{e}_x = -k.(x(t) - x_A(t))\vec{e}_x$, et à la force de l'amortisseur, $-\lambda.\dot{x}(t).\vec{e}_x$. Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne donc l'équation $m\ddot{x}(t) = -kx(t) + kx_A(t) - \lambda.\dot{x}(t)$ soit $\ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_A(t)$.

Il ne reste plus qu'à identifier avec la forme canonique.

Remarque : Sur le schéma de gauche, on ne secoue que le ressort, pas l'amortisseur ; sinon, l'équation est légèrement différente, avec un terme $\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_A(t)$ en plus au second membre.

A.2. Étude de la position

On va étudier le système du masse-ressort secoué comme un filtre, l'entrée étant l'amplitude $x_A(t)$ avec laquelle on le secoue, et la sortie étant pour le moment la position. Si on prend le modèle avec une force sinusoïdale s'exerçant

directement sur la masse, on obtient les mêmes résultats à une constante près.

Exemple : Tracé du diagramme de Bode de la position de l'oscillateur harmonique secoué — À connaître

On considère l'oscillateur harmonique de la figure M5.1(a). On pose $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{x}(\omega)}{\underline{x_A}(\omega)}$.

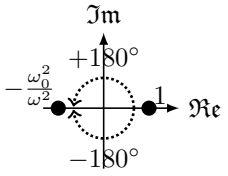
1. Exprimez la fonction de transfert.
2. Étudiez le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
3. Montrez que ce filtre ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 3$.

1. L'équation (M5.1) en complexes donne $-\omega^2\underline{x}(t) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{x}(t) + \omega_0^2\underline{x}(t) = \omega_0^2\underline{x_A}(t)$ d'où on tire

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

2. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} 1$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\to} 20\log 1 = 0\,\text{dB}$: le gain admet en BF une asymptote horizontale ; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg 1 = 0°$.

   En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 20\log(\omega_0^2) - 40\log\omega$ donc le gain admet en HF une asymptote de pente $-40\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \pm 180°$. [a]



   On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log 1$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Elles se croisent lorsque $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1$ donc à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log 1 = 0\,\text{dB}$. De plus, à cette pulsation, la véritable FT vaut $\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{1+\frac{j}{Q}-1} = -jQ$ donc le gain vaut $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log|-jQ| = 20\log(Q)$ et la phase $\varphi(\omega_0) = \arg(-jQ) = -90°$.
   On voit que la valeur du gain au centre va dépendre de la valeur du facteur de qualité ; elle sera supérieure à $0\,\text{dB}$ si $Q > 1$ et inférieure si $Q < 1$.

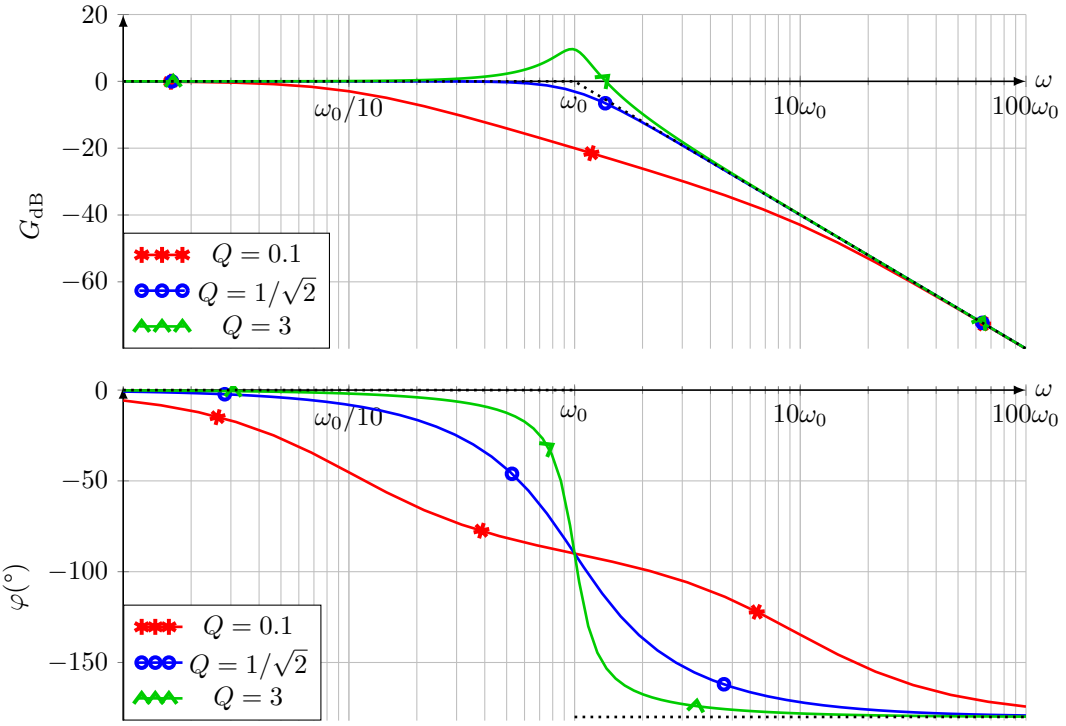
3. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ passe par un minimum. Pour chercher cette condition, on dérive :

$$\frac{\text{d}}{\text{d}\omega}\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(-2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ou } \omega = \omega_0.\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

   La seconde équation n'a de solution que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ donc $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est la condition de résonance.

4. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q :

FIGURE M5.2 : Diagramme de Bode de la réponse d'un OH en position.



a. À ce moment-là de l'étude, on ne peut pas choisir le signe. On le choisira plus tard par continuité, lorsqu'on aura trouvé une valeur intermédiaire de la phase.

On voit que la condition d'existence d'un maximum ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) est légèrement différente de la condition pour que la courbe passe au-dessus du point d'intersection des asymptotes ($Q > 1$). Dans l'intervalle $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 1$, le comportement est celui-ci : la courbe a un maximum bien avant ω_0, puis plonge avant ω_0 sous l'asymptote $G_{\text{dB}} = 0\,\text{dB}$. C'est un cas très rare.

Remarque : Le calcul de la bande passante à $-3\,\text{dB}$ est compliqué. On peut montrer que, si $Q \gg 1$, alors la largeur de la BP vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

A.3. Étude de la vitesse

Ainsi, on a vu que la position se comporte comme la tension aux bornes du condensateur dans le RLC ; on va maintenant étudier la vitesse, et prouver qu'elle se comporte comme la tention aux bornes de la résistance.

Exemple : Tracé du diagramme de Bode de la vitesse de l'oscillateur harmonique secoué **À connaître**

On considère l'oscillateur harmonique de la figure M5.1(a). On pose $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{v}(\omega)}{\underline{x_A}(\omega)}$ où $v(t)$ est la vitesse.

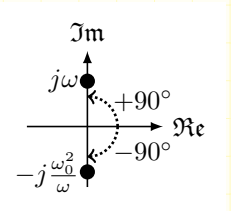
1. Exprimez la fonction de transfert.
2. Étudiez le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
3. Montrez que ce filtre possède une résonance.
4. *Question optionnelle* : Montrez que la largeur de la bande passante à $-3\,\text{dB}$ vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
5. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 3$.

1. L'équation (M5.1) en complexes nous a déjà fourni $\underline{x}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\underline{x_A}(\omega)$; de plus on sait que

$v(t) = \dot{x}(t)$ soit $\underline{v}(\omega) = j\omega\underline{x}(\omega)$, d'où on tire

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\omega_0}{j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{1}{Q}}$$

2. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{\omega_0}{-j\frac{\omega_0}{\omega}} = j\omega$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log(\omega)$: le gain admet en BF une asymptote de pente $+20\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg(j\omega) = 90°$.



En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = -j\frac{\omega_0^2}{\omega}$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\frac{\omega_0^2}{\omega} = 20\log(\omega_0^2) - 20\log\omega$ donc le gain admet en HF une asymptote de pente $-20\,\text{dB/déc}$; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg -j\frac{\omega_0^2}{\omega} = -90°$.

On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log\omega$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\frac{\omega_0^2}{\omega}$. Elles se croisent lorsque $\frac{\omega_0^2}{\omega} = \omega$ donc à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log\omega_0$. De plus, à cette pulsation, la véritable FT vaut $\underline{H}(\omega_0) = \frac{\omega_0}{1-1+\frac{1}{Q}} = Q\omega_0$ donc le gain vaut $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log(Q\omega_0)$ et la phase $\varphi(\omega_0) = \arg(Q\omega_0) = 0°$.
On voit que la valeur du gain au centre va dépendre de la valeur du facteur de qualité ; elle sera supérieure à l'intersection des asymptotes si $Q > 1$ et inférieure si $Q < 1$.

3. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}(\omega)| = \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}$ passe par un minimum. Pour chercher cette condition, on dérive :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right) = 0 &\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0\\ &\Leftrightarrow \omega = \omega_0 \text{ (on ne garde que la solution positive)}\end{aligned}$$

Il y a donc toujours une résonance.

4. La valeur maximale (à la résonance) de $|\underline{H}|$ vaut $\omega_0 Q$. Les limites de la bande passante sont données par

$$\begin{aligned}|\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} = \frac{Q\omega_0}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} = \frac{2}{Q^2}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}\\ &\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{Q} \text{ ou } \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{Q}\\ &\Leftrightarrow \omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \text{ ou } \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \omega = \frac{\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} \text{ ou } \omega = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2}\end{aligned}$$

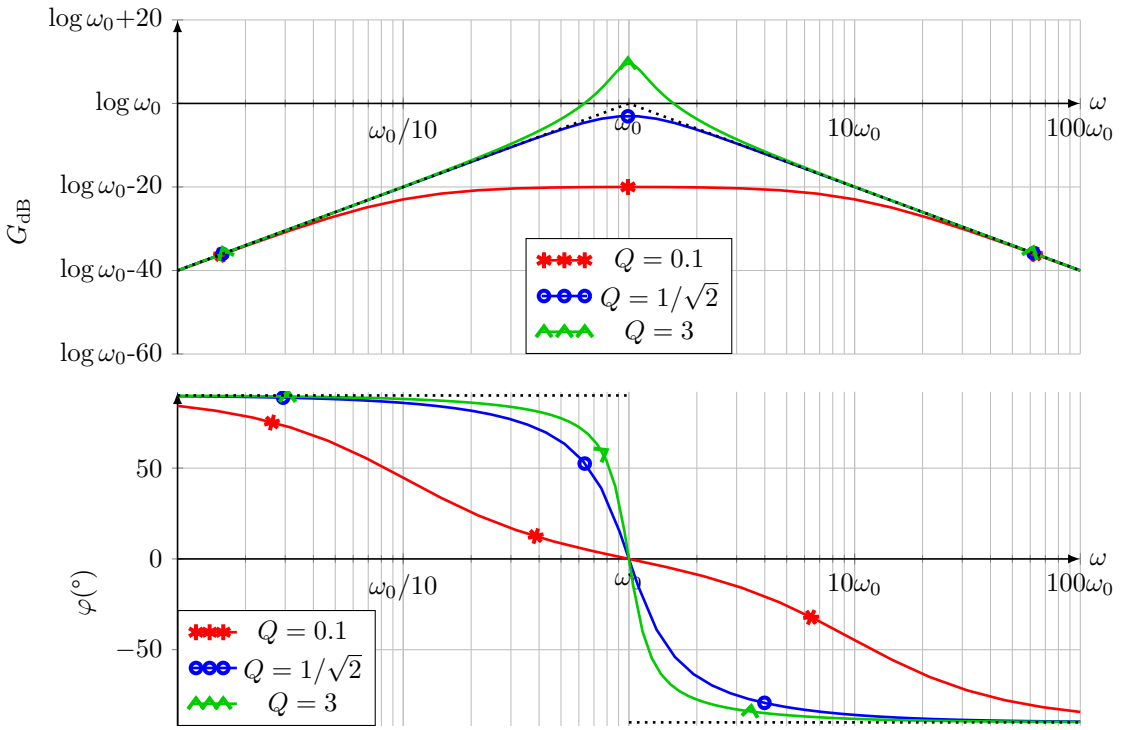
En ne gardant que les deux solutions positives, on trouve que la bande passante à $-3\,\text{dB}$ est l'intervalle

$$BP_{-3\,\text{dB}} = \left[\frac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} - \frac{\omega_0}{2Q} ; \frac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} + \frac{\omega_0}{2Q}\right]$$

et sa largeur vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

5. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q :

FIGURE M5.3 : Diagramme de Bode de la réponse d'un OH en vitesse.



A.4. Étude de la résonance en accélération

Il nous reste à considérer l'accélération ; c'est identique à la tension aux bornes de la bobine d'un RLC.

Exemple : Tracé du diagramme de Bode de l'accélération de l'oscillateur harmonique secoué — **À connaître**

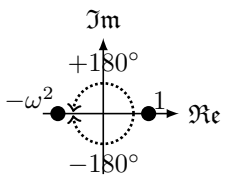
On considère l'oscillateur harmonique de la figure M5.1(a). On pose $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{a}(\omega)}{\underline{x_A}(\omega)}$ où $a(t)$ est l'accélération.

1. Exprimez la fonction de transfert.
2. Étudiez le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
3. Montrez que ce filtre ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 3$.

1. L'équation (M5.1) en complexes nous a déjà fourni $\underline{x}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\underline{x_A}(\omega)$; de plus on sait que $a(t) = \ddot{x}(t)$ soit $\underline{a}(\omega) = -\omega^2\underline{x}(\omega)$, d'où on tire

$$\underline{H}(\omega) = \frac{-\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{\omega_0}{Q\omega}}$$

2. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{\omega_0^2}{-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = -\omega^2$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\sim} 20\log\omega^2 = 40\log\omega$: le gain admet en BF une asymptote de pente $+40$ dB/déc ; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg(-\omega^2) = \pm 180°$.



En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega_0^2}{1} = \omega_0^2$. Donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 20\log\omega_0^2$ donc le gain admet en HF une asymptote horizontale ; et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg(\omega_0^2) = 0°$.

On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}0}(\omega) = 20\log\omega^2$ et $G_{\text{dB}\infty}(\omega) = 20\log\omega_0^2$. Elles se croisent lorsque

$\omega^2 = \omega_0^2$ donc à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $G_{\text{dB}\,intersection} = 20\log\omega_0^2 = 40\log\omega_0$. De plus, à cette pulsation, la véritable FT vaut $\underline{H}(\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{1-1-j\frac{1}{Q}}$ donc le gain vaut $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log\left|jQ\omega_0^2\right| = 40\log\omega_0 + 20\log(Q)$ et la phase $\varphi(\omega_0) = \arg(jQ\omega_0) = 90°$. On voit que la valeur du gain au centre va dépendre de la valeur du facteur de qualité ; elle sera supérieure à l'intersection des asymptotes si $Q > 1$ et inférieure si $Q < 1$.

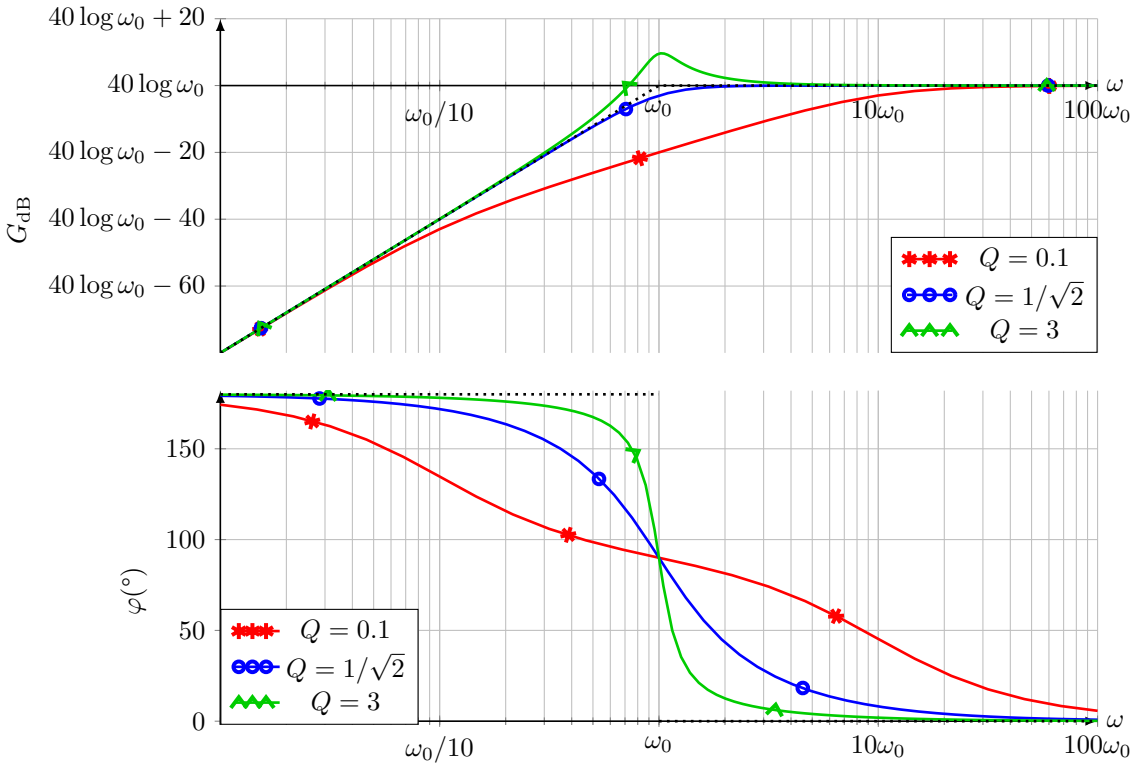
3. Le gain passe par un maximum si $|\underline{H}(\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(-\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2$ passe par un minimum. Pour chercher cette condition, on dérive :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(+\frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - \frac{2\omega_0^2}{Q^2\omega^3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\left(2-2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{\omega_0}{.\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}$$

Cette équation n'a donc de solution que si $1-\frac{1}{2Q^2} > 0$ donc $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est la condition de résonance.

4. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q) :

FIGURE M5.4 : Diagramme de Bode de la réponse d'un OH en accélération.



A.5. Résonance en puissance

Dans l'étude de l'infiniment petit, les mouvements sont trop petits pour pouvoir accéder à la résonance en position. C'est alors l'énergie absorbée par l'oscillateur qui nous permet d'observer la résonance. On supposera dans ce paragraphe que l'amplitude $\left|\underline{x_A}\right|$ avec laquelle on secoue A est constante.

Propriété : Puissance moyenne dissipée

Ce sont les frottements qui dissipent de l'énergie ; la puissance moyenne dissipée vaut

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle (\omega) = \frac{1}{2} \frac{\lambda \omega_0^2 \left| \underline{x}_A \right|^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{Q^2}} \tag{M5.2}$$

Démonstration

Les frottements dissipent une puissance $\mathcal{P}(t) = -\lambda \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = -\lambda v(t)^2$. D'après le calcul sur la vitesse, $\underline{v}(\omega) = \frac{\omega_0 \underline{x}_A}{j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{1}{Q}}$, donc

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle (\omega) = \left\langle \lambda v(t)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \lambda . \mathfrak{Re} \left[\underline{v}(\omega) . \underline{v}(\omega)^* \right] = \frac{\lambda}{2} \left| \underline{v}(\omega) \right|^2 = \frac{\lambda \omega_0^2 \left| \underline{x}_A \right|^2}{2 \left| j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Q} \right|^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda \omega_0^2 \left| \underline{x}_A \right|^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{Q^2}}$$

Propriété : Résonance de la puissance dissipée

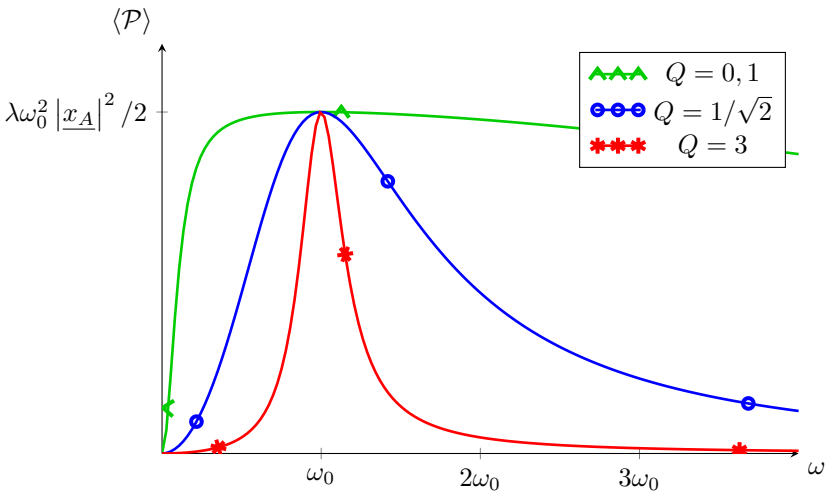
La puissance moyenne dissipée par les frottements a des limites nulles en BF et en HF, et a une résonance en ω_0.

Démonstration

Pour les limites, c'est évident. Pour les variations, on dérive : $\frac{\mathrm{d}\langle \mathcal{P} \rangle(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\lambda \omega_0^2 |\underline{x}_A|^2 . \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) . \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right)}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right)^2}$ donc $\frac{\mathrm{d}\langle \mathcal{P} \rangle(\omega)}{\mathrm{d}\omega} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ d'où le tableau de variations :

ω	0		ω_0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathrm{d}\omega}$		$+$	0	$-$	
$\langle \mathcal{P} \rangle$	0	↗	$\frac{\lambda \omega_0^2 \left| \underline{x}_A \right|^2}{2}$	↘	0

FIGURE M5.5 : Courbe de résonance en puissance.



Remarque : Pour la puissance, on ne parle pas de largeur de bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$, mais de largeur à mi-hauteur. En effet, si $|\underline{v}|$ est divisé par $\sqrt{2}$ alors la puissance est divisée par 2. On pourrait donc montrer facilement que la largeur à mi-hauteur de la résonance vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

A.6. Autres exemples de résonances

La résonance est un phénomène physique très répandu. En mécanique, par exemple, la résonance amplifie des phénomènes ; c'est le cas des marées, qui entrent en résonance avec certaines baies comme celle du mont Saint-Michel ou de Fundy, ou encore des instruments de musique, dans lesquels la résonance va provoquer l'amplification d'une fréquence déterminée par l'objet (par exemple la longueur d'un tuyau d'orgue, ou la tension et la masse d'une corde) et la vibration correspondante va se transmettre à l'air pour donner un son (figure M5.6).

FIGURE M5.6 : Exemples de résonances.



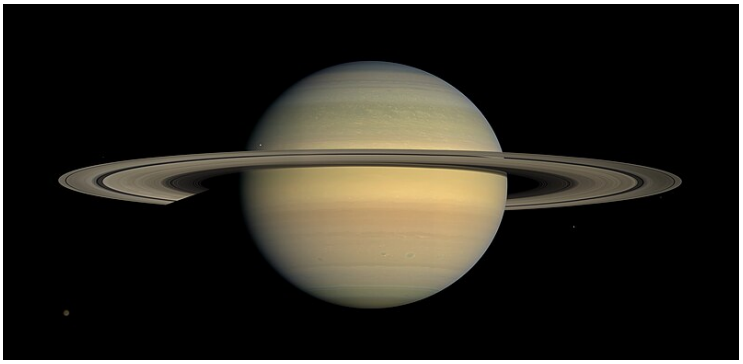
(a) Rochers d'Hopewell dans la baie de Fundy. Le point le plus étroit du pied des rochers montre le niveau moyen atteint par l'eau à marée haute.(Crédit : Wikipedia/J.Rover)



(b) Tuyaux d'orgue ; la fréquence de résonance dépend de la longueur du tuyau. (Crédit : Wikipedia/Tolanor)



(c) Effondrement du pont de Tacoma Narrows en 1940.(Crédit : Wikipedia/Botaurus)



(d) Anneaux de Saturne ; la bande noire, appelée *division de Cassini*, présente une résonance avec le satellite Mimas qui expulse les cailloux présents.(Crédit : Wikipedia/NASA)

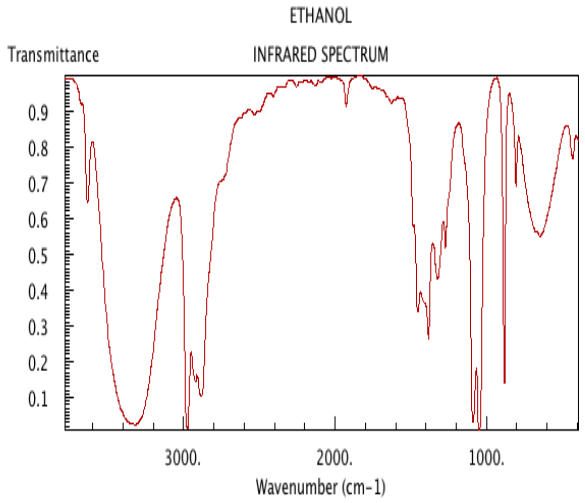
Dans le cas d'un instrument de musique, la résonance est recherchée pour produire un son audible ; au contraire, cette amplification peut être destructrice, comme lors de l'écroulement du pont de la Basse-Chaîne à Angers en 1850 suite au passage d'un régiment militaire marchant au pas, ou celui de Tacoma ; on en trouve même en astronomie, par exemple dans les anneaux de Saturne où la bande noire, appelée division de Cassini, est une zone de vide due à une résonance avec le satellite Mimas qui expulse tout cailloux se trouvant dans cette zone.

Mais il existe aussi des résonances qu'on ne peut pas observer : dans l'infiniment petit, les électrons vibrent autour des noyaux des atomes, et possèdent des résonances, mais invisibles ; par contre, on peut accéder à la puissance dissipée, et observer une résonance en puissance de laquelle on peut mesurer les deux grandeurs essentielles, à savoir ω_0 et Q. La figure M5.7 montre ainsi quelques exemples de courbes de résonances dans l'étude de la matière. Par exemple, les creux dans les spectres infrarouges des molécules sont des pics d'absorption dus à des résonances : quand on envoie de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique qui « secoue » les électrons et lorsque la fréquence de la lumière correspond à une résonance des électrons de la molécule, il y a un creux dans la transmission de l'échantillon. Ce même phénomène explique les molécules colorées : elles ont une résonance dans le visible, qui se traduit par l'absorption d'une couleur.

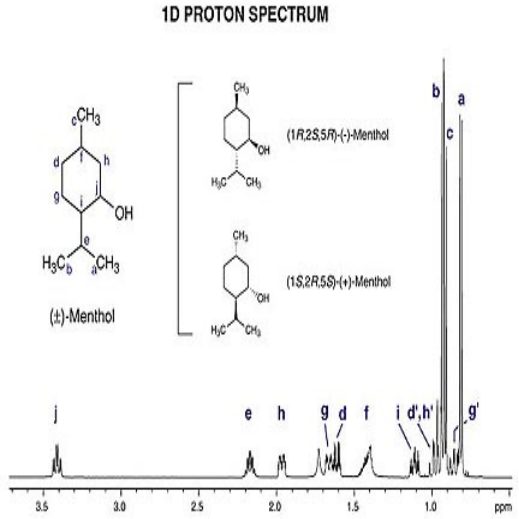
De même dans la Résonance Magnétique Nucléaire, ce sont cette fois les noyaux des atomes d'hydrogène qui résonnent sous l'action d'un champ magnétique, comme de petits aimants. On peut ainsi sonder la matière par une étude des résonances énergétiques.

De telles résonances se retrouvent dans tous les domaines de la physique ; ce qui faisait dire à Richard Feynman à ses élèves : « Dans chaque numéro de chaque revue de physique, il y a au moins une courbe de résonance. »

FIGURE M5.7 : Exemples de résonances dans l'infiniment petit.



(a) Spectre infrarouge en transmission de l'éthanol.(Crédit : Wikipedia/SAH002)



(b) Spectre de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) du menthol.(Crédit : Wikipedia)

Un dernier exemple intéressant présenté par Richard Feynman dans son cours est celui de l'atmosphère terrestre.

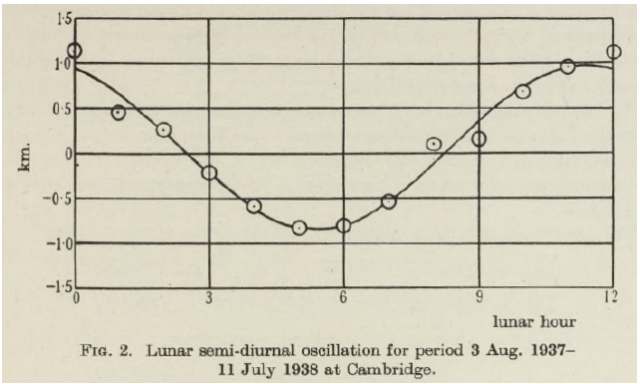
On sait que, quand on souffle dans une bouteille, elle produit un son : l'air contenu dans la bouteille se met à vibrer. L'atmosphère terrestre, c'est un peu comme l'air d'une bouteille géante : elle peut aussi osciller verticalement. Mais comment connaître sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q ?

La Lune nous prête un coup de main. Par le moyen des marées, elle secoue la mer, mais aussi l'atmosphère, avec une période de 12,42 h. L'oscillation qui en résulte se voit sur la courbe de variation de la pression atmosphérique (figure M5.8) : on constate une oscillation de 12 h environ superposée à une autre, de 24 h, correspondant à l'alternance diurne. En extrayant la partie oscillant à 12,42 h on a une première information, mais pas suffisamment pour déterminer ω_0, Q, et tracer la courbe.

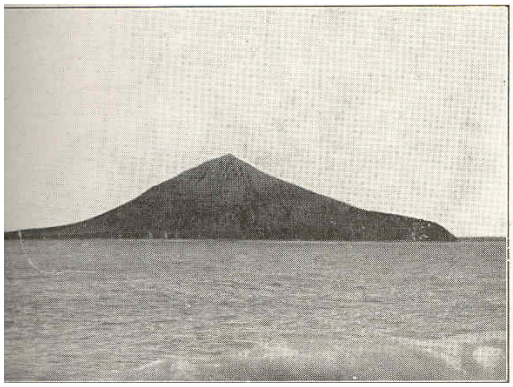
Comment en savoir plus ? On peut essayer de secouer l'atmosphère à une autre pulsation… Mais il existe aussi le régime libre : pour cela il suffit de mettre une grosse pichenette à l'atmosphère et de regarder comment elle oscille. Cette pichenette, c'est un volcan qui l'a mise : en 1883, l'île du Krakatoa en Indonésie s'est effondrée ; l'eau de mer s'est engouffrée dans la chambre de magma, provoquant la plus forte explosion de l'histoire (équivalente à 13000 bombes d'Hiroshima). L'explosion a été entendue en Australie à 5000 km de là, a provoqué un raz-de-marée de 46 m de haut qui a fait le tour du monde, et, surtout, a fait osciller l'atmosphère terrestre pendant 5 jours avec une période propre qui a été mesurée précisément : 10,3 h ; le facteur de qualité aussi a été mesuré, proche de 5.

Ainsi, en mettant ensemble une mesure en régime forcé, et une mesure en régime libre, on a pu déterminer complètement les caractéristiques d'une modélisation simpliste de l'atmosphère terrestre.

FIGURE M5.8 : Étude des oscillations de l'atmosphère.



(a) Part des oscillations de la pression atmosphérique correspondant à la réponse aux marées lunaires. (Crédit : E.Appleton et K.Weekes, Proceedings of the Royal Society A, 19 mai 1939)



(b) Le volcan Krakatoa avant son explosion du 27 août 1883. (Crédit : Wikipedia//G.Clerc-Rampal)

M5.B. Oscillations d'un système à 1 degré de liberté au voisinage de sa position d'équilibre

Nous avons déjà vu que, pour un système conservatif décrit par une seule variable, la connaissance de l'énergie potentielle suffit pour tout connaître du mouvement de ce système. On va s'intéresser plus en détail aux positions d'équilibre de ce système, et montrer que le modèle de l'oscillateur harmonique est un modèle général en mécanique.

Nous supposerons dans la suite que le point matériel étudié, de masse m, se déplace selon l'axe x, et est un système conservatif d'énergie potentielle $E_p(x)$ connue.

Propriété : Équation diff. du mouvement (rappel)

Un système conservatif à seul degré de liberté $x(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$m\ddot{x}(t) + \frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t) = 0 \qquad \text{(M5.3)}$$

Démonstration

Le système est conservatif et vérifie $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + E_p(x(t)) = \text{cst}$. On dérive : $\frac{1}{2}m2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(t) = 0$. Cette équation étant vraie quel que soit le mouvement, on peut simplifier par $\dot{x}(t)$ et obtenir l'équation (M5.3).

Propriété : Barrière d'énergie potentielle (rappel)

Un système conservatif ne peut jamais aller dans une zone où l'énergie potentielle est supérieure à son énergie mécanique : on appelle cela une *barrière d'énergie potentielle* ou *barrière de potentiel*.
Si les conditions initiales placent le système entre deux barrières de potentiel, son mouvement sera borné et périodique ; sinon, il sera non borné.

Démonstration

$\forall t, E_m = E_c(t) + E_p(t) \geq E_p(t)$ car $E_c(t) \geq 0$. Le système ne peut donc atteindre de zones où $E_m < E_p$.

Définition : Positions d'équilibre

On appelle *position d'équilibre* d'un système, une position telle que, si on place le système dans cette position sans vitesse initiale, il reste immobile.
On dit que la position d'équilibre est *stable* si, lorsqu'on place le système très proche de sa position d'équilibre, il reste au voisinage de celle-ci.
On dit que la position d'équilibre est *instable* si, lorsqu'on place le système très proche de sa position d'équilibre, il s'en éloigne.

Propriété : Positions d'équilibre

Les positions d'équilibre d'un système conservatif de degré de liberté x sont données par les solutions de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(M5.4)}$$

Démonstration

À partir de l'équation (M5.3), une position d'équilibre est atteinte lorsque $\ddot{x} = 0$ soit $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = 0$.

Propriété : Stabilité des positions d'équilibre

Si un système conservatif admet une position d'équilibre en x_0, alors sa stabilité dépend du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en ce point :

- si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$, la position est stable ; le système placé au voisinage de cette position oscille avec une pulsation $\sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0)}$
- si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$, la position est instable ;
- si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$, on ne peut rien dire, il faut pousser le développement limité plus loin.

Démonstration

Il faut commencer par établir l'équation différentielle des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre x_0. Il existe deux démonstrations possibles, en fonction des résultats qui ont été démontrés précédemment.

— Démonstration 1 : si on repart uniquement de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + E_p(x(t))$, on effectue un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre x_0 : $E_p(x) \approx E_p(x_0) + (x-x_0).\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2.\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ par la formule de Taylor. Or $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ puisque x_0 est une position d'équilibre. Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + E_p(x_0) + \frac{1}{2}(x(t)-x_0)^2.\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \text{cst}$. On dérive par rapport au temps : $\frac{1}{2}m2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + 0 + \frac{1}{2}2(x(t)-x_0)\dot{x}(t)\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$ ce qui donne après simplification par $\dot{x}$ l'équation $m\ddot{x}(t) + (x(t)-x_0)\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$

— Démonstration 2 : si on a déjà établi l'équation (M5.3), il suffit de faire un DL à l'ordre 1 du terme $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$ par la formule de Taylor : $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) + (x-x_0).\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = (x-x_0).\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ puisque $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ (position d'équilibre). On trouve alors l'équation $m\ddot{x}(t) + (x(t)-x_0)\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$

— Il existe une troisième méthode dans les exercices : si on connaît explicitement $E_p(x)$, on peut utiliser les formule de développement limités vues en maths pour effectuer un DL des termes non linéaires.

Dans tous les cas, on arrive à une équation différentielle qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0).x(t) = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0).x_0$$

On distingue alors 3 cas :

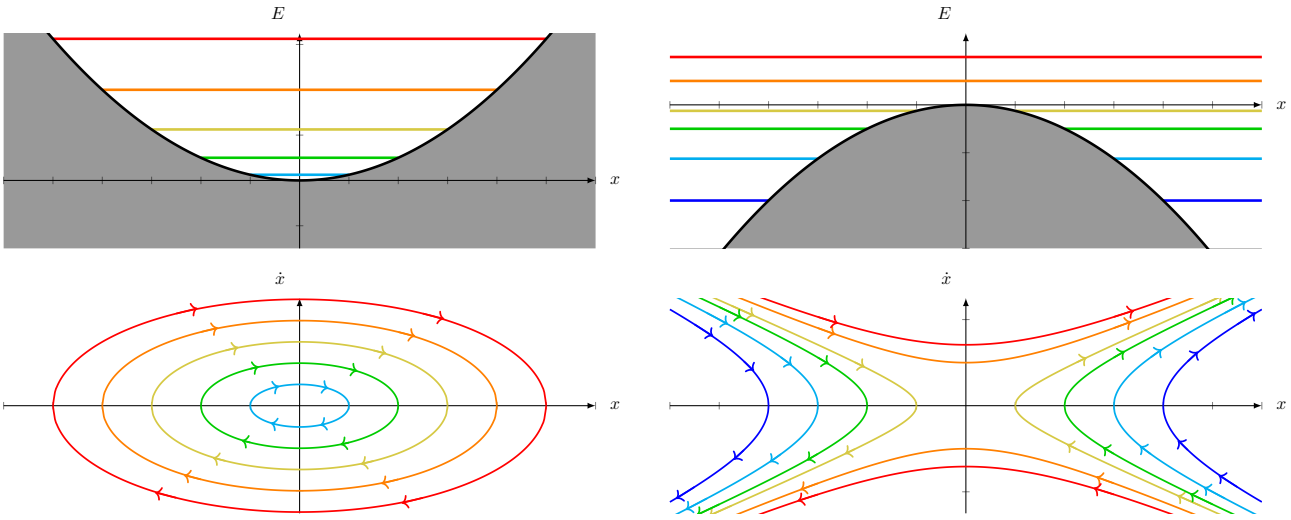
— si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$, on peut poser $\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$; alors l'équation $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_0$ a des solutions de la forme $x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ qui oscillent au voisinage de x_0 : la position d'équilibre est stable et les oscillations ont pour pulsation ω_0 ;

— si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$, on peut poser $\omega_0^2 = -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$; alors l'équation $\ddot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) = -\omega_0^2 x_0$ a des solutions de la forme $x(t) = x_0 + Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$ qui tendent vers l'infini : la position d'équilibre est instable ;

— si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure, car notre DL n'a pas été assez poussé ; il faut aller à des ordres plus élevés.

La figure M5.9 illustre les deux cas graphiquement : une position d'équilibre stable correspond à un creux d'énergie potentielle, et une position d'équilibre instable correspond à une bosse d'énergie potentielle.

FIGURE M5.9 : Positions d'équilibre.



(a) Position d'équilibre stable

(b) Position d'équilibre instable

Au voisinage d'une position d'équilibre stable, le système se comporte donc comme un oscillateur harmonique. Si on ajoute de la dissipation, on obtient un oscillateur harmonique amorti. Tous les résultats vus sur le masse-ressort se généralisent donc à tout système à 1 ddl au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Remarque : Très souvent, on imagine qu'une position d'équilibre instable n'a aucun intérêt et n'est pas une vraie position d'équilibre, puisque de toutes façons, au premier écart, le point s'éloigne de cette position pour ne jamais y revenir. En fait, c'est faux. Les deux positions ont tout leur intérêt :

— les positions d'équilibre stables correspondent au monde qui nous entoure : il est stable. Les objets autour de nous sont tous dans un état mécanique assez stable sur une durée pas trop longue. Par exemple, la chaise sur laquelle vous êtes assis est dans une position d'équilibre stable. Si on perturbe cet équilibre, par exemple en frappant sur un objet avec notre doigt, il produit un son ; ce son est la traduction des vibrations du système au voisinage de sa position d'équilibre. Si maintenant on frappe très fort, on peut déformer ou casser l'objet : on n'est plus dans le cadre des petites oscillations au voisinage de l'équilibre. Ainsi, tout objet au voisinage de sa position d'équilibre naturelle peut être représenté par un oscillateur harmonique. Par exemple, à l'échelle microscopique, les forces entre atomes peuvent en première approximation être représentées par des ressorts, c'est-à-dire par une modélisation harmonique des variations de l'énergie potentielle de liaison.

— les positions d'équilibre instables sont aussi présentes autour de nous, mais sous un aspect différent. Au voisinage de cette position, les forces tendent à écarter le système de sa position d'équilibre, mais ces forces sont assez faibles ; du coup, il est facile de les compenser par un contrôle actif. C'est ce que vous faites tous les jours quand vous vous tenez debout. La position debout est instable : posez un balai vertical, il tombe. Mais votre cerveau contrôle en permanence l'inclinaison de votre corps, et rétablit l'équilibre par de petites contractions de vos muscles. Cela n'est possible que parce que la position verticale est une position d'équilibre. Essayez de tenir immobile dans une position qui n'est pas position d'équilibre, par exemple à pieds joints et penché à 45° sur le côté : c'est impossible.

De même, un vélo qui roule est dans une position d'équilibre très instable, mais avec un peu d'entraînement on arrive à ne pas tomber.

Une position d'équilibre instable peut donc être rendue stable par un contrôle actif.

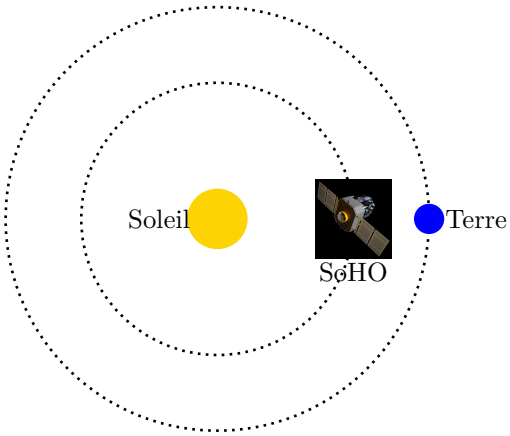
Les êtres vivants contrôlent de nombreuses positions instables. Les systèmes mécaniques asservis aussi. Les gyropodes (figure M5.10) sont un exemple de système qui stabilise une position d'équilibre instable par contrôle actif.

Un autre exemple intéressant est celui des satellites d'observation du Soleil. Pour observer le Soleil, un satellite en orbite autour de la Terre est mal placé : il tourne sans cesse, et passe la moitié de son temps à l'ombre. Il vaut donc mieux le mettre entre le Soleil et la Terre. Il existe un point, situé entre les deux astres, où les attractions des deux astres se compensent [1] : le point de Lagrange L_1. Mais ce point est une position d'équilibre instable : soit on s'approche un peu du Soleil, et on lui tombe dessus ; soit on s'approche un peu de la Terre, et on lui tombe dessus. C'est en ce point qu'on a placé le satellite d'observation SoHO en 1996 ; il y est toujours, encore en état de marche, contrôlant sa position de façon active en consommant très peu d'énergie. De même, le télescope spatial James Webb, lancé le 18 décembre 2021, est allé s'installer en un autre point d'équilibre instable situé, lui, de l'autre côté du Soleil par rapport à la Terre, pour être à l'ombre de la Terre.

FIGURE M5.10 : Exemples de systèmes exploitant des positions d'équilibre instables.



(a) Gyropode. (Crédit : Wikipedia/Soars Boards)



(b) Le satellite SoHO est situé sur une position d'équilibre instable dans le référentiel qui tourne avec la terre autour du Soleil.

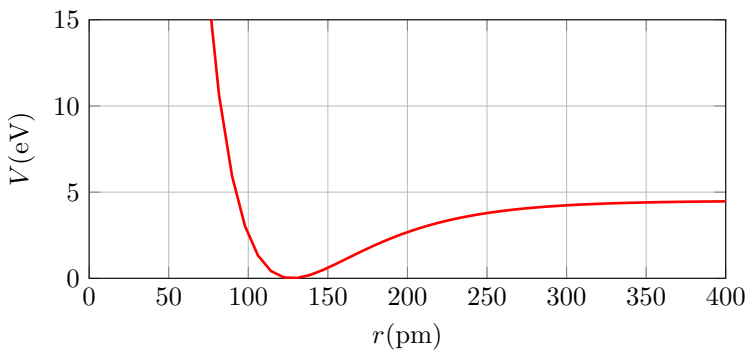
1. Presque ; il y a aussi une force d'inertie à ajouter, cf. le cours de deuxième année.

Exemple : Vibration d'une molécule de HCl

On considère une molécule de HCl dans laquelle l'atome de chlore est 36 fois plus lourd que l'atome d'hydrogène. Par conséquent, on prendra le modèle simplifié suivant :

- l'atome de chlore est immobile
- l'atome d'hydrogène ne se déplace que suivant une direction fixe $\vec{u}$ (pas de rotation)
- on note r la distance entre les deux atomes ; alors l'interaction entre les deux atomes se traduit par une force conservative d'énergie potentielle $V(r) = D\left(1 - e^{-a(r-r_e)}\right)^2$ appelée *potentiel de Morse*, où D, a et r_e sont trois paramètres constants.
- le poids est négligé

La courbe du potentiel $V(r)$ est donnée ci-dessous (on rappelle que $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$) :



1. À partir de l'expression de $V(r)$, montrez qu'il existe une position d'équilibre en $r = r_e$. Déduisez-en r_e par lecture graphique. Quel est son sens physique ?
2. Exprimez $V(r_e)$ puis $V(\infty)$. Mesurez la valeur de D, et donnez son sens physique.
3. Montrez que la position d'équilibre est stable, et que les petites oscillations à son voisinage se font avec une pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2Da^2}{m}}$ avec m la masse de l'atome d'hydrogène.
4. La vibration se traduit par une absorption de la lumière à $\lambda = 1{,}77\,\mu\text{m}$. Déduisez-en la valeur de ω_0, puis celle de a sachant que $m = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\text{kg}$.

Ici il y a une seule énergie potentielle : $E_p = V(r)$ et le système est conservatif.

1. On dérive : $\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = 2D\left(1 - e^{-a(r-r_e)}\right) ae^{-a(r-r_e)}$ qui s'annule lorsque $1 - e^{-a(r-r_e)} = 0$ soit $e^{-a(r-r_e)} = 1$ donc $r = r_e$.
   La position d'équilibre correspond au minimum de V, donc on mesure $r_e = 125\,\text{pm}$; cela représente la distance entre les deux atomes à l'équilibre.
2. $V(r_e) = 0$ et $V(\infty) = D$. On constate donc que :
   - si $E_m = 0$ l'atome est au repos à la position d'équilibre
   - si $0 < E_m < D$ l'atome oscille dans une cuvette de potentiel, donc la molécule vibre
   - si $E_m > D$ l'atome a un mouvement non borné, donc la molécule se dissocie

   D représente donc l'énergie minimale qu'il faut fournir à la molécule à l'équilibre pour la dissocier. Ici on mesure $D = 4{,}5\,\text{eV}$.
3. Pour la stabilité, il suffit de calculer $\frac{\mathrm{d}^2V(r)}{\mathrm{d}r^2} = 2Da^2e^{-2a(r-r_e)} - 2D\left(1 - e^{-a(r-r_e)}\right)a^2e^{-a(r-r_e)}$ et d'évaluer $\frac{\mathrm{d}^2V(r)}{\mathrm{d}r^2}(r_e) = 2Da^2 > 0$ donc la position d'équilibre est stable.
   Pour avoir la pulsation des petites oscillations, c'est plus compliqué. On part de $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + V(r(t)) = \text{cst}$ qu'on dérive par rapport au temps pour trouver l'équation du mouvement : $m\ddot{r}(t) + 2Da\left(1 - e^{-a(r(t)-r_e)}\right)e^{-a(r(t)-r_e)} = 0$ après simplification par $\dot{r}$.
   On pose $f(r) = \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = 2Da\left(1 - e^{-a(r-r_e)}\right)e^{-a(r-r_e)}$ et on écrit au voisinage de r_e : $f(r) = f(r_e) + (r - r_e)\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}(r_e) = \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}(r_e) + (r - r_e)\frac{\mathrm{d}^2V(r)}{\mathrm{d}r^2}(r_e) = 0 + (r - r_e)2Da^2$. Donc l'équation s'écrit $m\ddot{r}(t) + 2Da^2(r(t) - r_e) = 0$ soit $\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) = \omega_0^2 r_e$ avec $\omega_0^2 = \frac{2Da^2}{m}$.
4. $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 1{,}06 \times 10^{15}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ donc $a = 3{,}66 \times 10^{10}\,\text{m}^{-1}$

Au voisinage des positions d'équilibre stables, tout système vibre donc de façon harmonique. Mais que se passe-t-il si on augmente l'amplitude des oscillations ? Le DL à l'ordre 2 ne suffit plus, il faut aller plus loin. Regardons rapidement ce qui se passe en allant à l'ordre 3.

Il est facile de reprendre les calculs précédent et d'établir l'équation différentielle du mouvement :

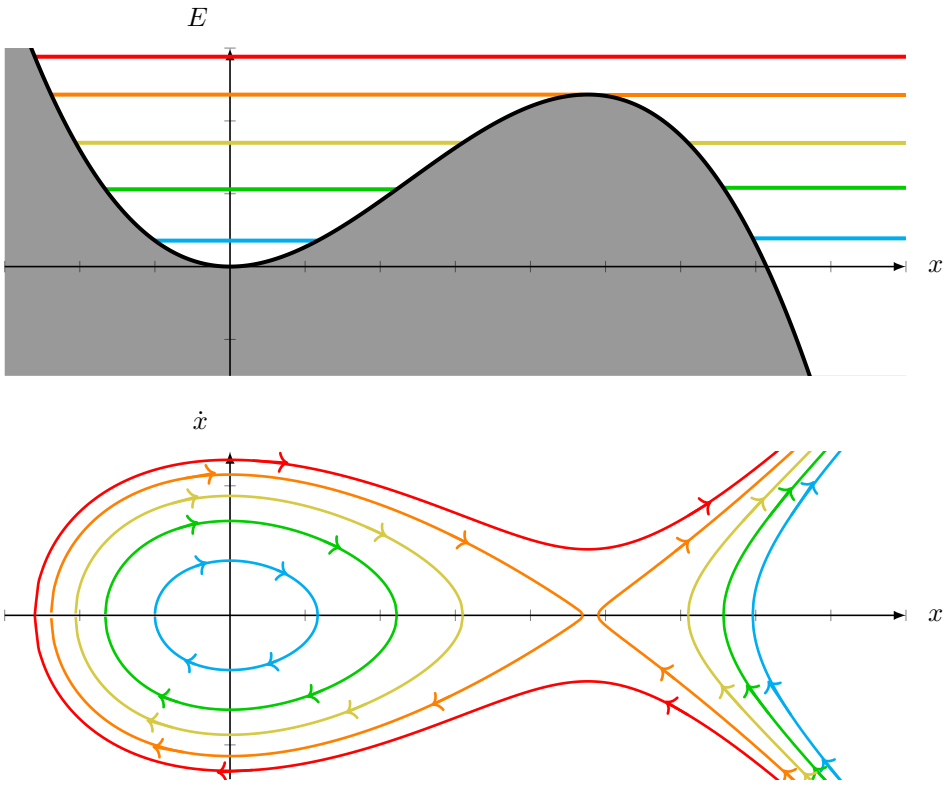
$$m\ddot{x}(t) + (x(t) - x_0)\frac{\mathrm{d}^2 E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(x_0) + \frac{1}{2}(x(t) - x_0)^2 \frac{\mathrm{d}^3 E_p(x)}{\mathrm{d}x^3}(x_0) = 0$$

La figure M5.11 illustre le profil d'énergie potentielle pour une position d'équilibre stable, et le portrait de phase associé. On y voit apparaître plusieurs effets :

— tout d'abord, les barrières de potentiel de part et d'autres de la position d'équilibre ne sont plus infinies. Si on fait osciller le système avec une trop grande amplitude, il s'éloigne de sa position d'équilibre. En pratique, si on secoue un système trop fort, il casse ou se déforme.

— d'autre part, le terme d'ordre 3 crée une dissymétrie de la cuvette d'énergie potentielle, qui déforme les orbites dans le portrait de phase : elles sont allongées d'un côté. Par conséquent, les oscillations ne seront plus sinusoïdales : des harmoniques vont apparaître dans le spectre de la vibration, c'est un effet qu'on connaît bien par exemple avec un piano. De plus, la position moyenne du système lorsqu'il vibre va être décalée et ne sera plus au niveau de la position d'équilibre. Un tel décalage explique par exemple la dilatation des solides lorsque la température s'élève.

FIGURE M5.11 : Oscillations anharmoniques au voisinage d'une position d'équilibre stable.



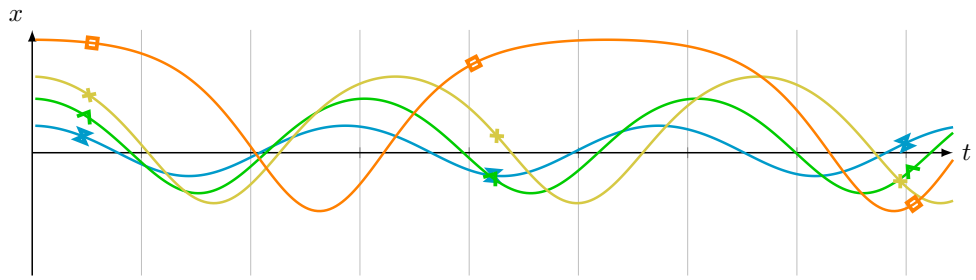
Il est possible de simuler, par une méthode numérique, le mouvement d'oscillation dans un tel potentiel pour différentes amplitudes. Quelques simulations sont présentés sur la figure M5.12. On observe ainsi plusieurs phénomènes :

— un allongement de la période avec l'accroissement de l'amplitude de vibration (figure M5.12(b)). On peut montrer que cette période diverge vers l'infini quand on approche de l'amplitude qui va faire dépasser la barrière de potentiel et rendre la position instable. Cette mesure du ralentissement des vibrations est ainsi une méthode pour prévenir une rupture prochaine de certains systèmes ;

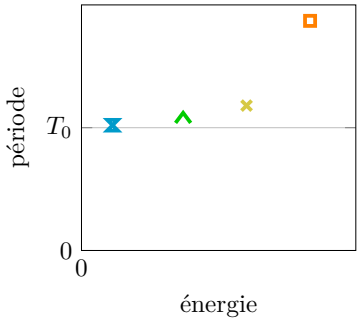
— une dissymétrie de l'oscillation qui entraîne l'apparition d'harmoniques (fréquences autres que ω_0 dans le spectre du signal — figure M5.12(c)) ;

— un décalage des oscillations vers un côté qui déplace le centre de vibration du système (figure M5.12(d)).

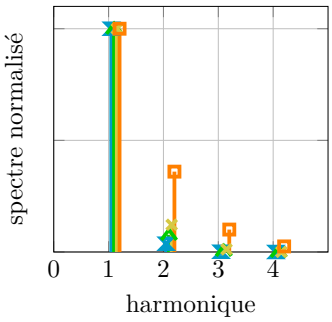
FIGURE M5.12 : Simulation des oscillations dans un potentiel anharmonique.



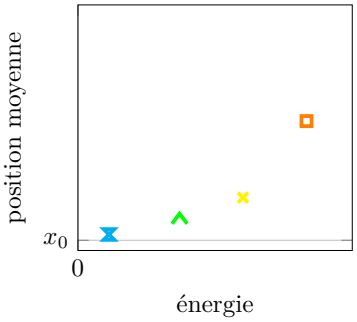
(a) Oscillations à différentes amplitudes



(b) Ralentissement à forte amplitude



(c) Anharmonicité à forte amplitude



(d) Décalage à forte amplitude

M5.C. Oscillateurs couplés (Hors programme)

Pour le moment, nous avons vu des oscillateurs qui possèdent une résonance. Quand on relie entre eux deux oscillateurs, de nouveaux comportements apparaissent.

C.1. Modèles mécanique et électrique

On va étudier d'abord 2 oscillateurs couplés. Pour cela, deux modèles sont possibles : le modèle mécanique et le modèle électrique.

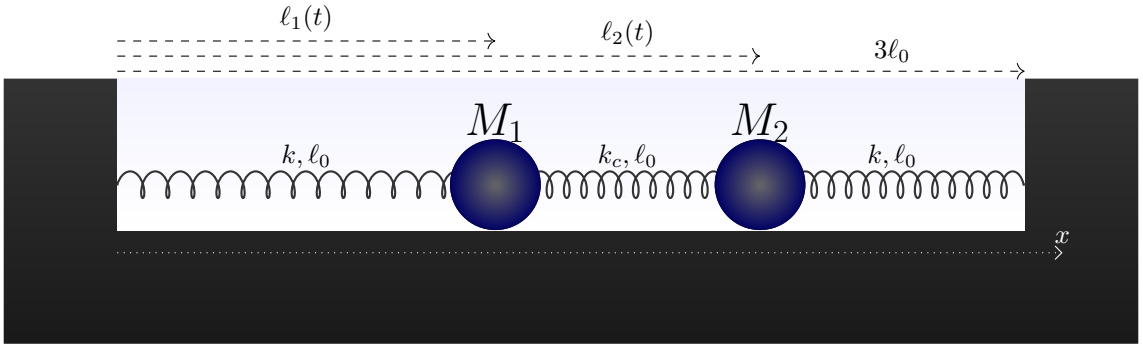
Dans le modèle mécanique, on prend deux oscillateurs harmoniques (masse-ressort horizontal) et on les relie par un troisième ressort, le *ressort de couplage* ; dans le modèle électrique, ce sont deux circuits LC qui sont reliés par un *condensateur de couplage* C_c. Pour cette première étude, on fera les simplifications suivantes :

— on ne tiendra pas compte des phénomènes dissipatifs (résistance, frottements)

— les deux oscillateurs initiaux seront pris symétriques

mais la méthode qu'on va voir se généralise à des cas moins particuliers, seulement les calculs sont plus compliqués.

FIGURE M5.13 : Oscillateurs harmoniques couplés.



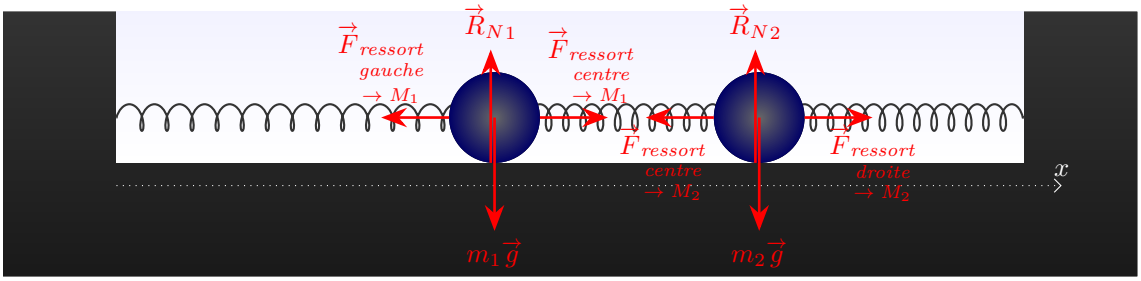
Calcul : Équations du modèle mécanique

On considère les notations de la figure M5.13. On suppose que M_1 et M_2 ont la même masse m.
Considérons M_1 dans le référentiel terrestre supposé galiléen : son accélération vaut $\ddot{\ell}_1(t)\vec{e}_x$, et il est soumis (outre son poids, vertical, ainsi que la réaction du support, verticale elle aussi) à :

— la force du ressort de gauche, $-k(\ell_1(t)-\ell_0)\vec{e}_x$

— la force du ressort du centre, $-k_c(\ell_2(t)-\ell_1(t)-\ell_0)(-\vec{e}_x)$

ce qui donne par projection du Principe Fondamental de la Dynamique sur $\vec{e}_x$ l'équation $m\ddot{\ell}_1(t) = -k(\ell_1(t)-\ell_0)+k_c(\ell_2(t)-\ell_1(t)-\ell_0)$.



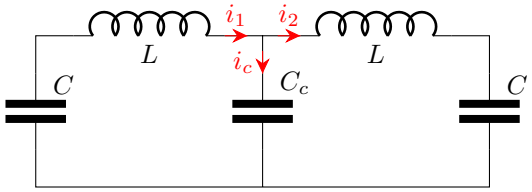
Le même raisonnement sur la masse M_2 donne l'équation $m\ddot{\ell}_2(t) = -k_c(\ell_2(t)-\ell_1(t)-\ell_0)+k(3\ell_0-\ell_2(t)-\ell_0)$.

On obtient deux équations. Pour pouvoir les traiter dans la suite, il faut se ramener à des variables qui représentent l'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. À l'équilibre, rien ne bouge, ce qui donne $\begin{cases} 0 &= -k(\ell_{1,eq}-\ell_0)+k_c(\ell_{2,eq}-\ell_{1,eq}-\ell_0) \\ 0 &= -k_c(\ell_{2,eq}-\ell_{1,eq}-\ell_0)+k(3\ell_0-\ell_{2,eq}-\ell_0) \end{cases}$ dont les solutions sont $\ell_{1,eq}=\ell_0$ et $\ell_{2,eq}=2\ell_0$ (solutions simples grâce aux simplifications de longueurs choisies).

On pose alors les nouvelles variables $\begin{cases} x_1(t) &= \ell_1(t)-\ell_{1,eq} \\ x_2(t) &= \ell_2(t)-\ell_{2,eq} \end{cases}$ et en réinjectant ces formules dans les équations initiales, on trouve le système différentiel couplé $\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) &= -kx_1(t)-k_cx_1(t)+k_cx_2(t) \\ m\ddot{x}_2(t) &= -kx_2(t)-k_cx_2(t)+k_cx_1(t) \end{cases}$; en divisant par m, on obtient :

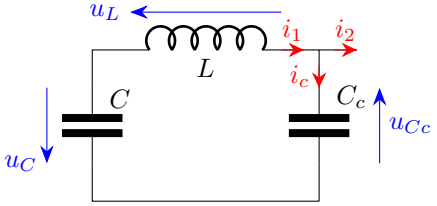
$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t)+\left(\omega_0^2+\omega_c^2\right)x_1(t) &= \omega_c^2x_2(t) \\ \ddot{x}_2(t)+\left(\omega_0^2+\omega_c^2\right)x_2(t) &= \omega_c^2x_1(t) \end{cases} \text{ avec } \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_c=\sqrt{\frac{k_c}{m}} \qquad \text{(M5.5)}$$

FIGURE M5.14 : Circuits LC couplés.



Calcul : Équations du modèle électrique

On considère le schéma de la figure M5.14. On applique la loi des mailles dans la maille de gauche en nommant les tensions :



et on obtient $u_C(t)+u_L(t)+u_{Cc}(t)=0$ soit $u_C(t)+L\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+u_{Cc}(t)=0$. On dérive : $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}u_{Cc}(t)}{\mathrm{d}t}=0$ et, par les lois des condensateurs, on obtient $\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}i_1(t)+\frac{1}{LC_c}i_c(t)=0$. Or la loi des nœuds indique que $i_c(t)=i_1(t)-i_2(t)$, d'où finalement $\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}i_1(t)+\frac{1}{LC_c}(i_1(t)-i_2(t))=0$.

La même chose dans la maille de droite donne $\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC} i_2(t) + \frac{1}{LC_c}(i_2(t) - i_1(t)) = 0$.
Ici, il n'y a pas de constantes, donc on trouve directement les équations recherchées :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 i_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\omega_0^2 + \omega_c^2\right) i_1(t) &= \omega_c^2 i_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\omega_0^2 + \omega_c^2\right) i_2(t) &= \omega_c^2 i_1(t) \end{cases} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ et } \omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC_c}} \qquad \text{(M5.6)}$$

On obtient donc, avec les deux modèles, des équations semblables ; ce sont des équations couplées. Dans la suite, on travaillera sur le modèle mécanique car les solutions sont plus visibles, mais les résultats s'appliquent tous au modèle électrique également.

C.2. Modes propres

La résolution de ces équations couplées passe par la recherche de modes propres.

Définition : Mode propre, fréquence propre

On appelle *mode propre* un mode de vibration du système dans lequel tous les degrés de liberté du système oscillent sinusoïdalement à la même fréquence (resp. pulsation) appelée *fréquence propre* (resp. *pulsation propre*).

Pour rechercher les modes propres, on passe les équations en complexes :

Calcul : Recherche des modes propres de deux oscillateurs harmonique couplés

On passe les équations (M5.5) en complexes et on les organise selon un système linéaire :

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2\right) \underline{x_1}(\omega) & -\omega_c^2 \underline{x_2}(\omega) &= 0 \\ -\omega_c^2 \underline{x_1}(\omega) & \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2\right) \underline{x_2}(\omega) &= 0 \end{cases} \qquad \text{(M5.7)}$$

qu'on peut encore écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \end{pmatrix} (\omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations a une solution évidente : $\underline{x_1}(\omega) = \underline{x_2}(\omega) = 0$.

Propriété : Équation des pulsations propres d'un système

Si un système est décrit en complexes par un système matriciel de la forme $M \cdot \underline{X} = 0$ où $\underline{X}$ est le vecteur des inconnues, alors les pulsations propres sont les solutions de l'équation $\det(M) = 0$.

Démonstration

La solution nulle est solution de l'équation ; mais elle n'a aucun intérêt physique. Si le déterminant de M est non nul, alors cette solution est l'unique solution.
Pour avoir des solutions non nulles, il est donc nécessaire que $\det(M) = 0$.

Calcul : Détermination des pulsations propres

$$\begin{aligned} \det(M) = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2\right)^2 - \left(-\omega_c^2\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega_c^2\right)\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 + \omega_c^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)\left(-\omega^2 + \omega_0^2 2\omega_c^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega = \omega_0 \text{ ou } \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \end{aligned}$$

On a donc trouvé deux pulsations propres, $\omega_1 = \omega_0$ et $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$. Pour savoir comment le système vibre à ces deux pulsations, on résout le système d'équations :

Calcul : Détermination des modes propres

Si on se place à $\omega = \omega_1 = \omega_0$, le système d'équations (M5.7) devient

$$\begin{cases} \omega_c^2 \underline{x_1}(\omega_1) - \omega_c^2 \underline{x_2}(\omega_1) = 0 \\ -\omega_c^2 \underline{x_1}(\omega_1) + \omega_c^2 \underline{x_2}(\omega_1) = 0 \end{cases}$$

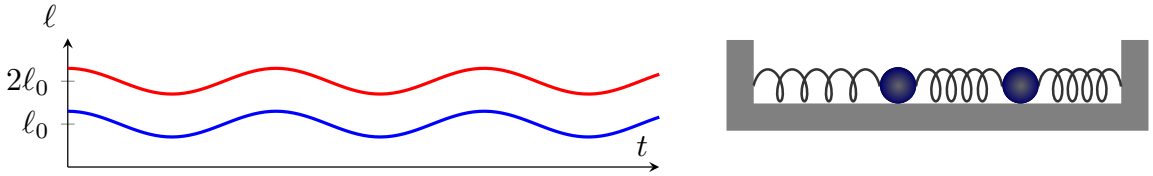
qui a pour solutions $\underline{x_1}(\omega_1) = \underline{x_2}(\omega_1)$: le mode propre 1 correspond à toutes les vibrations sinusoïdales possibles telles que les deux masses oscillent avec la même amplitude complexe.
Si on se place à $\omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$, le système d'équations (M5.7) devient

$$\begin{cases} -\omega_c^2 \underline{x_1}(\omega_2) - \omega_c^2 \underline{x_2}(\omega_2) = 0 \\ -\omega_c^2 \underline{x_1}(\omega_2) - \omega_c^2 \underline{x_2}(\omega_2) = 0 \end{cases}$$

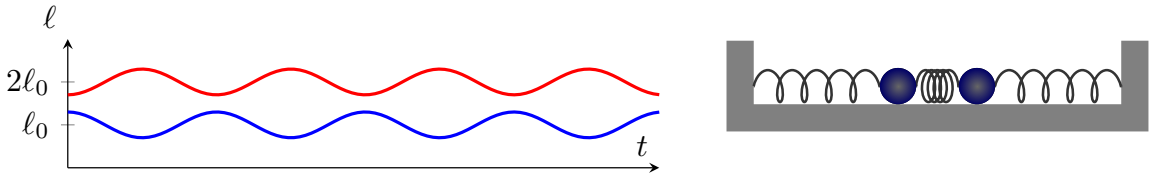
qui a pour solutions $\underline{x_1}(\omega_2) = -\underline{x_2}(\omega_2)$: le mode propre 2 correspond à toutes les vibrations sinusoïdales possibles telles que les deux masses oscillent avec des amplitudes complexes opposées.

La figure M5.15 illustre ces deux modes propres de vibration du système.

FIGURE M5.15 : Modes propres de deux oscillateurs harmoniques couplés.



(a) Mode associé à $\omega = \omega_0$



(b) Mode associé à $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$

En fait, la matrice M qu'on a écrite plus haut, et dont on a cherché à annuler le déterminant, est de la forme $M = A - \omega^2 \,\mathrm{Id}$. La résolution de l'équation $\det(A - \omega^2 \,\mathrm{Id}) = 0$ puis des vecteurs vérifiant $(A - \omega^2 \,\mathrm{Id}) \cdot \underline{X} = 0$ est un problème classique d'algèbre linéaire : c'est la recherche des valeurs et vecteurs propres de la matrice A. Ainsi, avec le vocabulaire de l'algèbre linéaire :

— les pulsations propres sont les racines carrées des valeurs propres de A

— les modes propres sont les vecteurs propres de A

Ce problème de recherche de valeurs/vecteurs propres est très classique et implémenté dans la plupart des librairies numériques d'algèbre linéaire. Par exemple, en Python, on utilise `numpy.linalg.eig`.

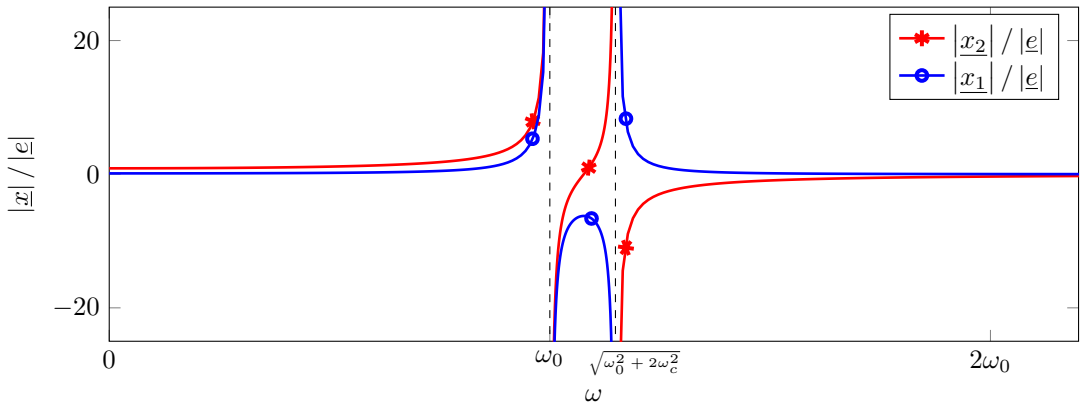
Si on prend un modèle plus général, en tenant compte en particulier de l'amortissement, les valeurs propres deviennent complexes, donc les pulsations obtenues ont une partie imaginaire non nulle ; cette partie imaginaire traduit l'amortissement du mode propre au cours du temps.

Enfin, on peut se demander ce qu'il advient de ce système en régime sinusoïdal forcé. Si on ajoute une source sinusoïdale au système, par exemple, sur le système mécanique, en secouant l'extrémité du ressort de droite, ou bien en ajoutant un générateur de tension sinusoïdale dans le RLC, qu'arrive-t-il ? Les calculs sont un peu lourds, mais on voit apparaître (figure M5.16) deux résonances pour les deux fréquences déjà vues :

— à $\omega = \omega_0$, les deux masses résonnent en phase

— à $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$, les deux masses résonnent en opposition de phase

FIGURE M5.16 : Résonance de deux oscillateurs harmoniques couplés ($\omega_c/\omega_0 = 0,4$) pour lequel l'extrémité du ressort tout à droite est secouée selon une loi $e(t) = E_0\cos(\omega t)$.



C.3. Solutions temporelles

La résolution des modes propres donne ensuite la méthode pour résoudre le mouvement du système pour des conditions initiales quelconques. À partir des considérations précédentes, on comprend que l'ensemble des modes propres constitue une base de l'espace des états ; en inversant la matrice de passage dans cette base, on peut déterminer les bonnes combinaisons linéaires des variables initiales à effectuer. Dans le cas simplifié qui nous occupe ici, les résultats sont simples, et on va les admettre.

Exemple : Détermination de l'évolution temporelle

On lance le système mécanique précédent avec les conditions initiales suivantes :

— $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = A \neq 0$

— $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

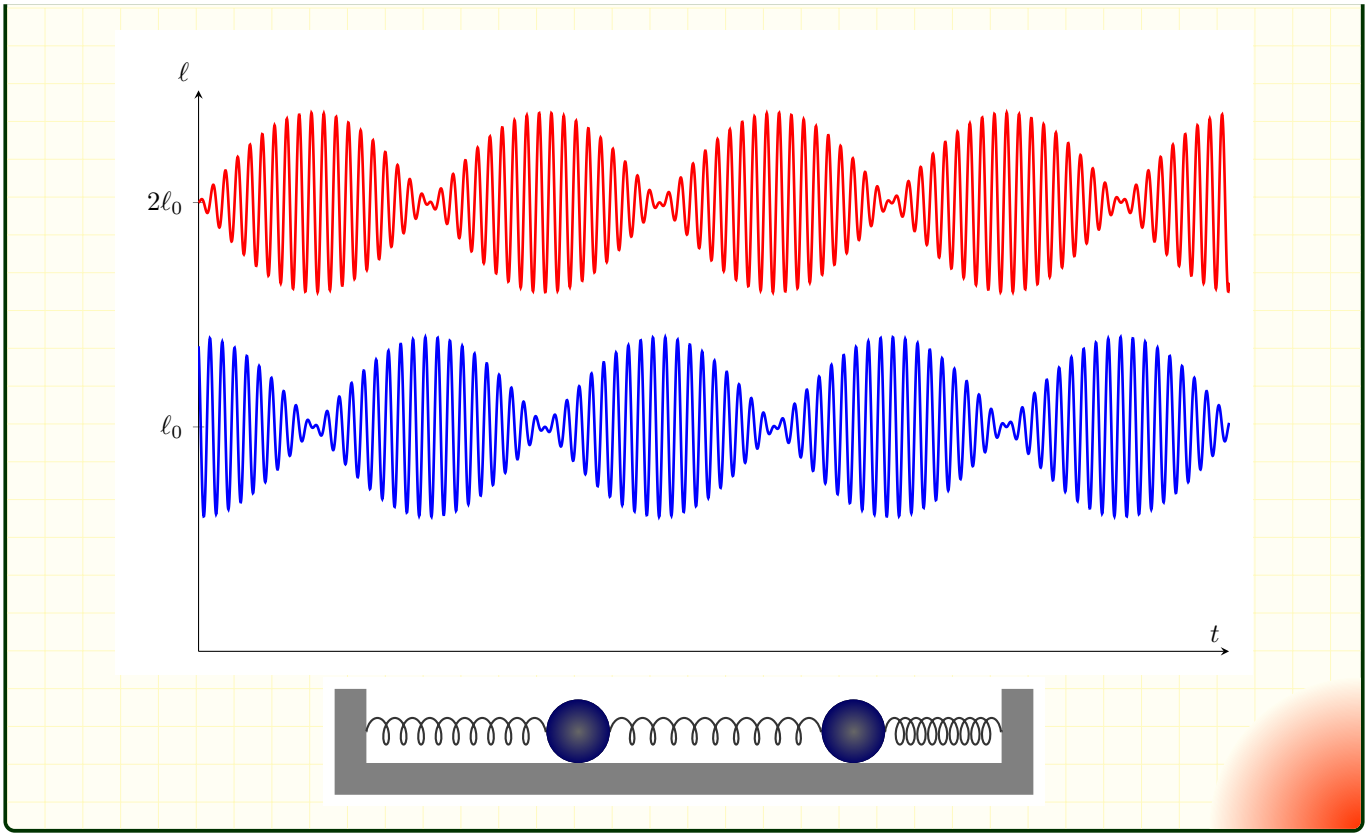
On pose $S = x_1 + x_2$ et $D = x_1 - x_2$.

1. En sommant et en soustrayant les équations de (M5.5), montrez que S et D vérifient deux équations différentielles découplées.
2. À partir des CI, déterminez $S(0)$, $D(0)$, $\dot{S}(0)$, $\dot{D}(0)$. Déduisez-en $S(t)$ et $D(t)$.
3. Déduisez-en $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et factorisez les expressions grâce aux relations :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Tracez l'allure des courbes dans le cas où $\omega_c \ll \omega_0$.

1. En sommant les deux équations de (M5.5), on obtient $(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_1(t) + x_2(t)) = \omega_c^2(x_1(t) + x_2(t))$ d'où on tire après simplification $\ddot{S}(t) + \omega_0^2 S(t) = 0$.
   De même, en soustrayant, on trouve $\ddot{D}(t) + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)D(t) = 0$: on revoit apparaître ω_2^2.
2. $S(0) = x_1(0) + x_2(0) = A$ et $\dot{S}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0$. Or les solutions de l'équation vérifiée par S sont de la forme $S(t) = B_1\cos(\omega_0 t) + B_2\sin(\omega_0 t)$ et avec les CI on trouve $B_1 = A$ et $B_2 = 0$, donc $S(t) = A\cos(\omega_0 t)$.
   De même, $D(t) = C_1\cos(\omega_2 t) + C_2\sin(\omega_2 t)$ et avec les CI : $D(0) = -A$ et $\dot{D}(0) = 0$ on trouve $D(t) = -A\cos(\omega_2 t)$
3. Pour retrouver $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il faut combiner $S(t)$ et $D(t)$. Ici, on devine assez facilement que :
$$\begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{S(t)+D(t)}{2} = \dfrac{A}{2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)\right) = A\sin\left(\dfrac{\omega_0+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_0-\omega_2}{2}t\right) \\ x_2(t) &= \dfrac{S(t)-D(t)}{2} = \dfrac{A}{2}\left(\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)\right) = A\cos\left(\dfrac{\omega_0+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_0-\omega_2}{2}t\right) \end{cases}$$
   Dans le cas où $\omega_c \ll \omega_0$, alors $\omega_2 \approx \omega_0$. On en déduit que $\left|\frac{\omega_0-\omega_2}{2}\right| \ll \frac{\omega_0+\omega_2}{2}$ donc chaque x_i est le produit d'un cosinus qui varie rapidement et d'un cosinus qui varie lentement (l'enveloppe). La courbe montre alors un phénomène de battements.



Définition : Battements

On appelle *battements* un phénomène physique dans lequel des oscillations quasi-sinusoïdales s'arrêtent périodiquement, puis reprennent.

C.4. Systèmes linéaires à N degrés de liberté

Les calculs qu'on vient de voir peuvent se généraliser à plus de 2 oscillateurs. Par exemple, la figure M5.17 montre le cas de 5 oscillateurs couplés par des ressorts tous identiques ; on constate les résultats suivants :

— il y a désormais 5 modes propres avec 5 valeurs propres

— un des modes propres fait apparaître un *nœud*, c'est-à-dire que dans ce mode propre, une des masses ne bouge pas

La connaissance de ces modes propres et de leurs fréquences est extrêmement importante :

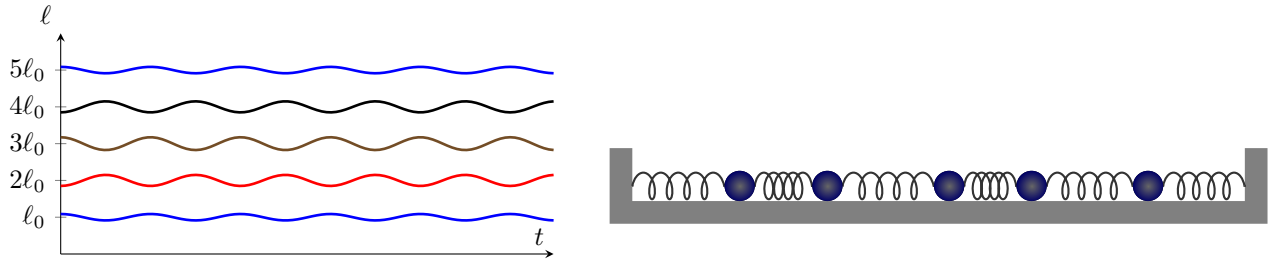
— pour prévoir d'éventuelle résonances du système

— pour savoir où agir pour atténuer cette résonance ; en effet, si on place une source d'atténuation là où le mode propre possède un nœud, l'atténuation est inefficace

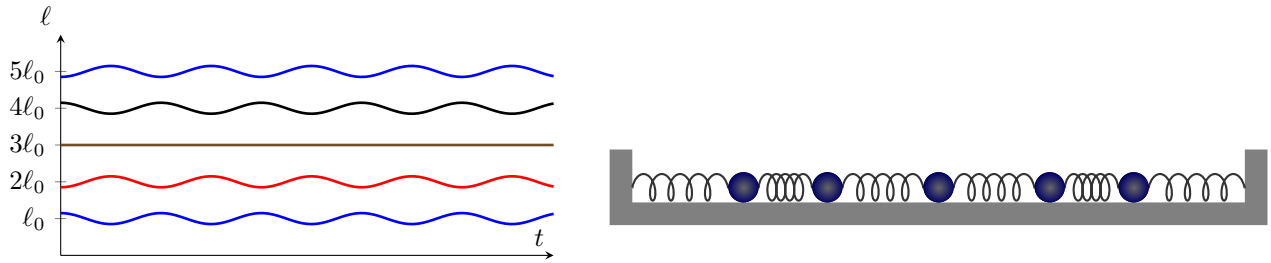
Ainsi, lorsqu'on construit par exemple un bâtiment, un pont,...on effectue une modélisation en 3D qui permet de calculer les modes et pulsations propres de la construction, d'étudier leur facteur de qualité, etc. et de déterminer le danger de mise en résonance par des éléments extérieurs (tremblement de terre, vent,...).

La figure M5.18 montre un exemple de pont modélisé très simplement : les cercle rouges sont des masses et les tiges entre les points rouges se comportent comme des ressorts (car tout solide, lorsqu'il se déforme un peu, se comporte comme un ressort selon la loi de Hooke). Le calcul, en 2D, est compliqué, mais comme on a 4 masses ayant chacune 2 degrés de liberté, on trouve 8 modes propres qui sont représentés sur la figure.

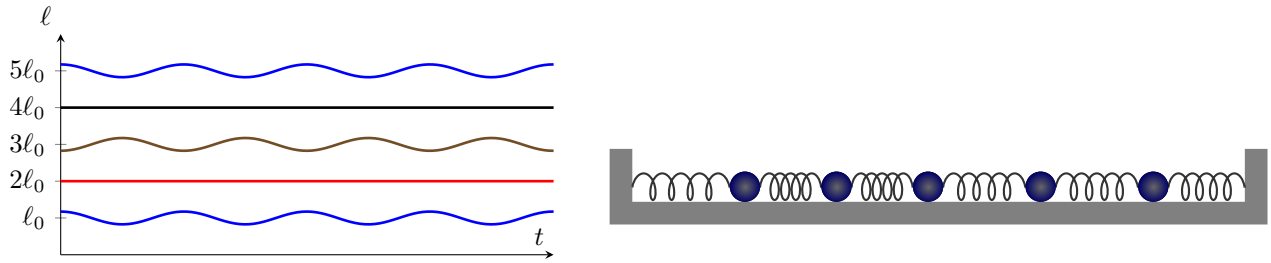
FIGURE M5.17 : Modes propres de 5 oscillateurs harmoniques couplés.



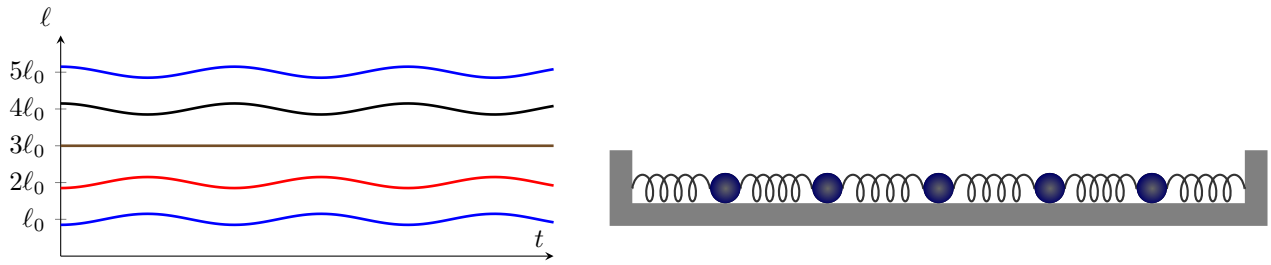
(a) Mode propre à la pulsation $\omega = 1,93\omega_0$



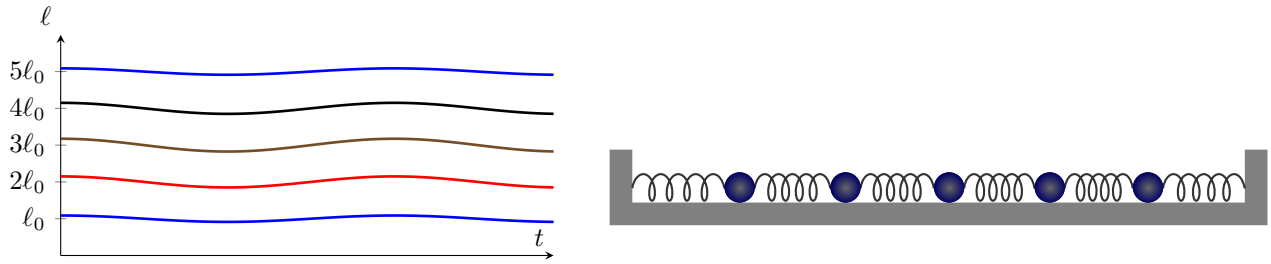
(b) Mode propre à la pulsation $\omega = 1,73\omega_0$



(c) Mode propre à la pulsation $\omega = 1,41\omega_0$

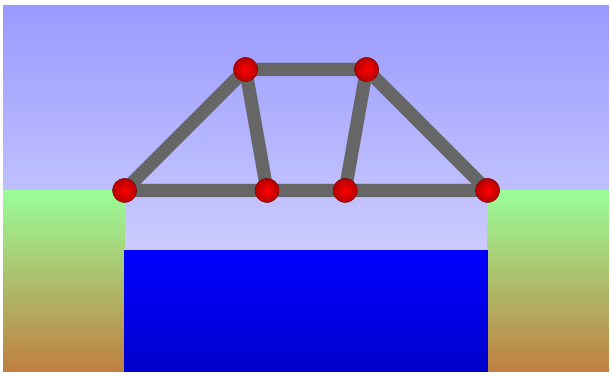


(d) Mode propre à la pulsation $\omega = \omega_0$

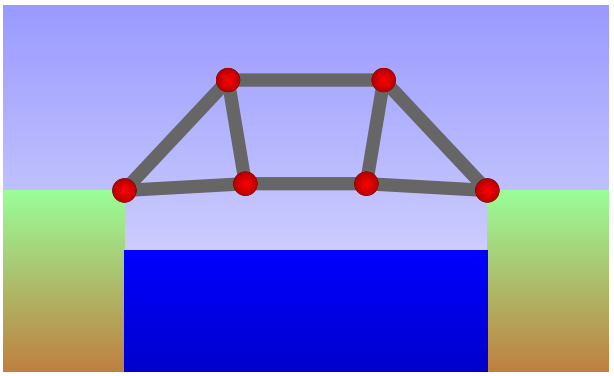


(e) Mode propre à la pulsation $\omega = 0,52\omega_0$

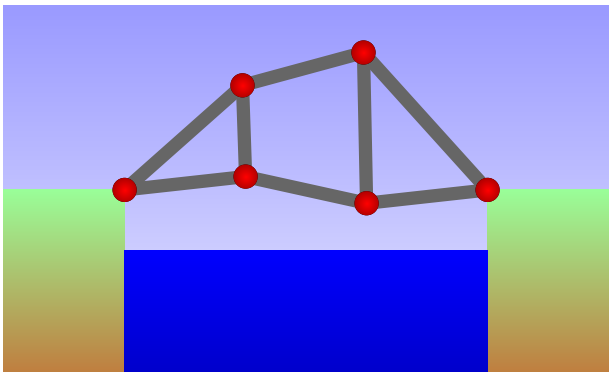
FIGURE M5.18 : Modes propres d'un pont simple.



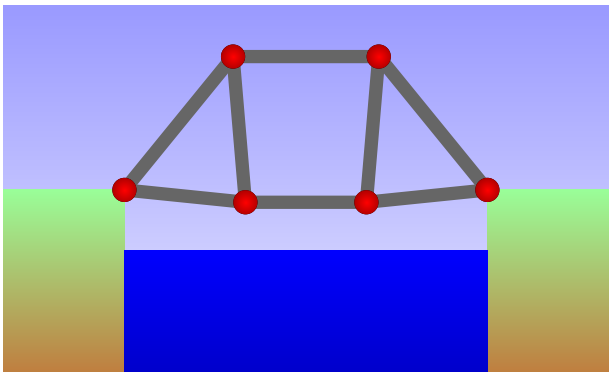
(a) Mode 1



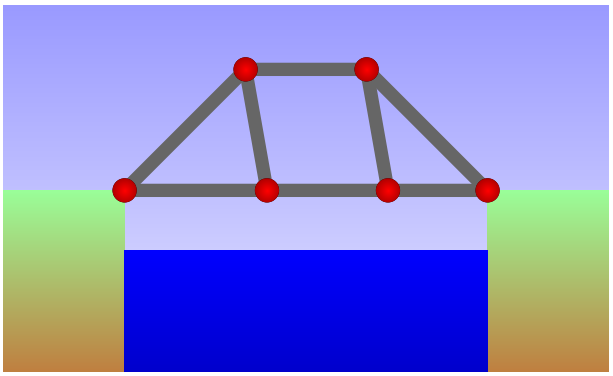
(b) Mode 2



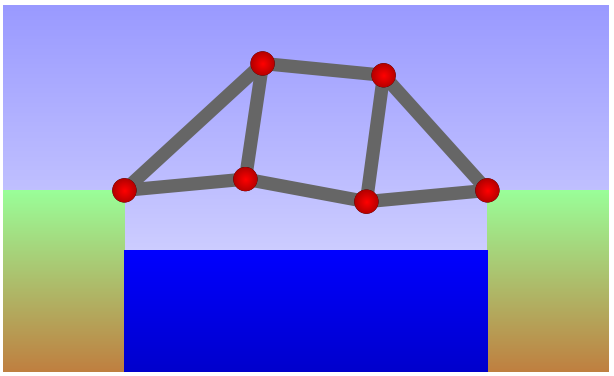
(c) Mode 3



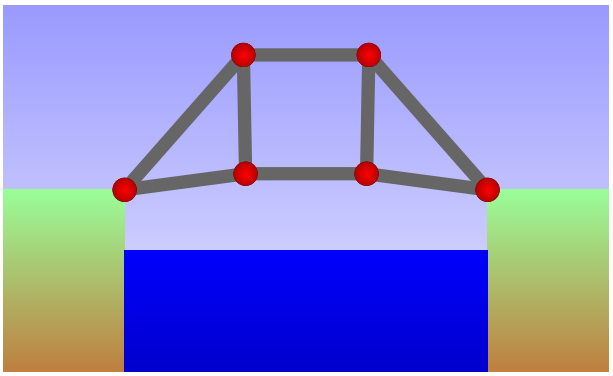
(d) Mode 4



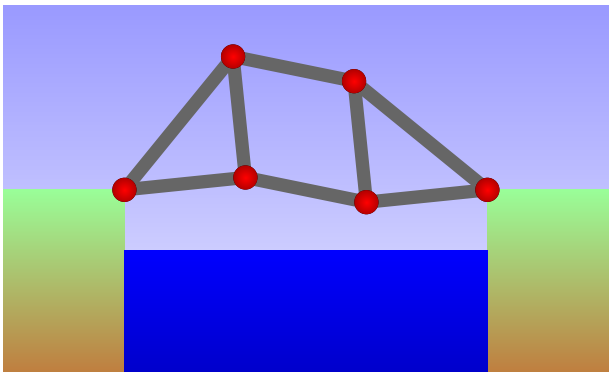
(e) Mode 5



(f) Mode 6



(g) Mode 7



(h) Mode 8

M5. Oscillateurs mécaniques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Résonance	
Oscillateurs électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
Énergie mécanique	
Mouvement conservatif à une dimension. Cas d'une situation modélisable par un système masse-ressort et d'un système soumis à un champ de force uniforme. Positions d'équilibre. Stabilité.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. **Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.**

M5. Oscillateurs mécaniques

Quelques conseils

- ✎ Si les deux côtés du ressort sont mobiles, la longueur du ressort est la différence de position des deux côtés.
- ✎ Pour avoir le bon signe dans la force d'un ressort, bien utiliser la formule : $\vec{F}_{ressort} = -k \times$ allongement $\times \vec{u}_{\text{ressort}\to\text{objet}}$.
- ✎ Pour la lecture d'une bande passante sur un graphe, il faut bien regarder l'échelle verticale : si elle est en décibels, on prend le maximum moins 3 dB ; si elle est en unité classique, on prend le maximum divisé par $\sqrt{2}$.
- ✎ Pour déterminer l'équation différentielle d'un système conservatif, on dérive **l'énergie mécanique** par rapport **au temps** et on **sait** que cela vaut 0 ; pour déterminer les positions d'équilibre d'un système conservatif, on dérive **l'énergie potentielle** par rapport **à la position** et on **cherche** quand cela vaut 0.
- ✎ Si l'énoncé demande la stabilité d'une position d'équilibre, il suffit de rechercher le signe de la dérivée seconde et d'affirmer le résultat du cours ; s'il demande en plus la pulsation des petites oscillations, il faut faire le développement limité, soit par la formule de Taylor, soit par les formules de DL.

M5. Oscillateurs mécaniques

QCMs

réponses page 766

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un signal sinusoïdal $s(t) = A.\cos(\omega t + \theta)$ a pour image complexe :

(a). $A.e^{j\omega t}$
(b). $A.e^{j(\omega t+\theta)}$
(c). $S_0.e^{j(\omega t+\phi)}$
(d). $A.e^{j\theta}$

Q2. Si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$ d'un signal, alors le signal réel vaut :

(a). $\underline{s}(t).\cos(\omega t)$
(b). $|\underline{s}(t)|$
(c). $\mathfrak{Re}\left[\underline{s}(t)\right]$
(d). $|\underline{s}(0)|\cos(\omega t + \arg \underline{s}(0))$

Q3. La résonance de la vitesse de l'OH existe :

(a). Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
(b). Si $Q > 1$
(c). Si $Q > \frac{1}{2}$
(d). Toujours

Q4. La résonance de la position de l'OH existe :

(a). Toujours
(b). Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
(c). Si $Q > 1$
(d). Si $Q > \frac{1}{2}$

Q5. La résonnance de la vitesse de l'OH a lieu pour

(a). $\omega > \omega_0$
(b). $\omega < \omega_0$
(c). $\omega = \omega_0$

Q6. La résonnance de la position de l'OH a lieu pour

(a). $\omega < \omega_0$
(b). $\omega = \omega_0$
(c). $\omega > \omega_0$

Q7. La largeur de la BP à $-3\,\text{dB}$ de la résonance de la vitesse de l'OH, ou de sa position lorsque $Q \gg 1$, vaut :

(a). $\frac{\omega_0}{2}$
(b). Q
(c). $\frac{Q}{\omega_0}$
(d). $\frac{\omega_0}{Q}$

Q8. Si on secoue un côté d'un oscillateur harmonique et qu'on considère comme signal la position de l'autre côté, on obtient un filtre :

(a). passe-bande
(b). passe-bas
(c). passe-partout
(d). passe-haut

Q9. Si on secoue un côté d'un oscillateur harmonique et qu'on considère comme signal la vitesse de l'autre côté, on obtient un filtre :

(a). passe-bande
(b). passe-partout
(c). passe-bas
(d). passe-haut

Q10. Un système est conservatif si et seulement si toutes les forces qui s'exercent sur lui sont conservatives :

(a). Vrai
(b). Faux

Q11. Une barrière de potentiel est une zone :

(a). inaccessible au système
(b). où $E_p = \infty$
(c). où $E_p > E_m$
(d). où $E_p < E_m$

Q12. Les positions d'équilibres d'un système repéré par x se trouvent en résolvant l'équation :

(a). $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$
(b). $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = 0$
(c). $E_p = 0$
(d). $E_m = 0$

Q13. Ensuite, pour savoir si une position d'équilibre x_0 est stable, on regarde :

(a). si $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$
(b). si $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) > 0$
(c). si $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$
(d). si $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) < 0$

Q14. Une position d'équilibre instable est une fausse position d'équilibre :

(a). Faux
(b). Vrai

Q15. Tout système à l'équilibre peut être modélisé, au voisinage de cette position d'équilibre, par un oscillateur harmonique :

(a). Vrai
(b). Faux

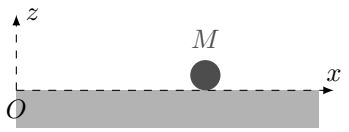
M5. Oscillateurs mécaniques

Exercices

réponses page 767

Exercice M5.1 : Objet soumis à une force sinusoïdale [*]

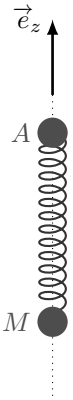
On considère une petite bille d'acier de masse m posée sur un sol horizontal sur lequel elle peut rouler sans frottements. Elle est soumise à son poids, à la réaction du support, à des frottements de l'air de la forme $-\lambda.\vec{v}$ et à une force exercée par un champ magnétique variant au cours du temps et s'exprimant ainsi : $\vec{F} = F_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$.



1. Écrivez le PFD appliqué à la bille et projetez-le sur $\vec{e}_x$. Déduisez-en que $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} = F_0\cos(\omega t)$.
2. Passez cette équation en complexes et déduisez-en $\underline{x}(t)$ en RSF.
3. AN : $m = 3\,\text{g}$, $\lambda = 0{,}03\,\text{USI}$, $F_0 = 10\,\text{mN}$ et la fréquence de la force magnétique vaut $f = 4{,}2\,\text{Hz}$. Déterminez numériquement $x(t)$.

Exercice M5.2 : Masse-ressort secoué [**]

Un objet M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité A est secouée selon la loi $z_A(t) = L.\cos(\omega t)$. On modélise les frottements de l'air par force $-f.\vec{v}(M)$ avec f une constante. On note z l'altitude du point M, et $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ le champ de pesanteur. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



1. Exprimez la longueur ℓ du ressort en fonction de z et z_A. Déduisez-en la force exercée par le ressort sur M.
2. Établissez l'ED vérifiée par z.
3. Le second membre contient deux termes : un constant, l'autre sinusoïdal. La solution particulière est la somme des solutions particulières correspondant à chaque terme. Déterminez la solution particulière correspondant au terme constant.
4. Déterminez la solution particulière correspondant au terme sinusoïdal ; mettez-la sous la forme $\underline{z} = \frac{L.e^{j\omega t}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$
5. Exprimez l'amplitude Z de $z(t)$ en régime sinusoïdal.
6. On prend : $L = 1\,\text{cm}$, $k = 30\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $m = 500\,\text{g}$ et $f = 2{,}5\,\text{USI}$. Calculez Z pour une fréquence d'excitation égale à $0{,}8\,\text{Hz}$.
7. On admet que $Z(\omega)$ admet un maximum pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ (vous pouvez vous entraîner à le redémontrer). Calculez la pulsation correspondante, ainsi que la valeur de Z_{max}.
8. Écrivez l'équation vérifiée par les deux pulsations ω qui limitent la bande passante à $-3\,\text{dB}$. Résolvez cette équation numériquement à l'aide de la calculatrice.
   Indication : le solveur de la calculatrice trouve une seule valeur à la fois. Il faut lui précisez, selon les modèles : une valeur initiale proche de la solution, ou bien un intervalle dans lequel chercher la solution, ou bien les deux. Ici, on cherche deux solutions : une comprise dans $]0;\omega_r[$ et l'autre dans $]\omega_r;\infty[$ (pour la deuxième, on prendra une borne supérieure très grande).
9. Tracez le diagramme de Bode en gain de $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{z}(\omega)}{\underline{z_A}(\omega)}$.

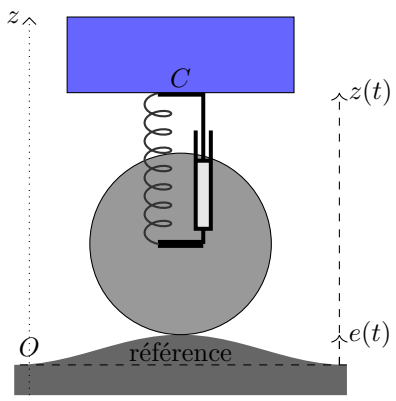
Exercice M5.3 : Modèle atomique de Thomson [**]

Un des tous premiers modèles de l'atome d'hydrogène est dû à Sir Joseph John Thomson (1856-1940) qui, après avoir découvert l'électron, a proposé en 1904 le « modèle de l'électron élastiquement lié » dans lequel l'électron

peut se déplacer *librement* tout en étant soumis à une force de rappel qui le ramène vers le centre de l'atome. Dans cet exercice, l'atome est immobile dans un référentiel galiléen, auquel on associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le repérage est donc cartésien. On appelle M la position de l'électron, dont la masse vaut $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On suppose que l'électron est soumis à une force $\vec{F} = -k\vec{r}$. Le poids de l'électron est négligé, ainsi que l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le reste de l'atome.
On admettra que, lorsqu'un électron est accéléré, il perd de l'énergie par rayonnement électromagnétique, ce qui est équivalent à l'apparition d'une force de frottements $-f\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

1. Par une estimation rapide d'ordres de grandeurs, justifiez pourquoi on peut négliger le poids et l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le reste de l'atome.
   Donnée : la masse d'un proton vaut $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg ; $G = 6{,}17 \times 10^{-11}$ USI ; le rayon a de l'atome est de l'ordre de l'Angström ($1\,\text{Å} = 1 \times 10^{-10}$ m).
2. Écrivez le PFD appliqué à l'électron et projetez-le sur les 3 axes pour obtenir 3 ED sur x, y et z.
3. **Régime libre (révisions)**
   On constate qu'un ensemble d'atomes excités (c'est-à-dire dont les électrons bougent) émet de l'énergie lumineuse ; des mesures expérimentales montrent alors que l'énergie totale de l'ensemble décroît comme une exponentielle, de constante de temps τ.
   (a) Écrivez la forme théoriques des solution : $x(t) = \ldots$ en supposant qu'on est en régime pseudo-périodique. On note τ le temps caractéristique de décroissance des oscillations ; reliez τ à f et m.
   (b) Pour un certain atome, on mesure $\tau = 8{,}4$ ns et la théorie indique que $k = 230$ USI. Déduisez-en f, puis la valeur du facteur de qualité Q ; commentez.
   (c) Justifiez que les oscillations de l'électron se font à une pulsation très proche de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$. Calculez numériquement ω_0 ; calculez la longueur d'onde dans le vide correspondante.
4. **Régime forcé**
   On éclaire l'atome avec de la lumière ; celle-ci est une onde électromagnétique, qui exerce sur l'électron une force supplémentaire $-eE\cos(\omega t)\vec{e}_z$ avec E le champ électrique.
   (a) Écrivez la nouvelle ED vérifiée par z.
   (b) Donnez les caractéristiques de $z(t)$ en régime permanent en fonction de ω, ω_0, τ, E, m_e et e.
   (c) Tracez l'allure de la courbe donnant l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation. On se contentera de calculer les limites en BF et HF, et le maximum dont on admettra qu'il a lieu en $\omega \approx \omega_0$. Le schéma ne sera bien sûr pas à l'échelle.
   On prendra $E = 1 \times 10^3\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ pour les calculs.

Exercice M5.4 : Suspension de voiture [***]



Les irrégularités du sol, transmises à une voiture via ses roues, sont filtrées par une suspension reliant la roue à la caisse de la voiture. Pour étudier une seule de ces suspensions, on va travailler sur un quart de la voiture.
Entre le quart de voiture (en haut, de masse $m = 300$ kg) et la roue en bas (de rayon $R = 20$ cm), on place un ressort (de raideur $k = 43\,\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 34$ cm) et un amortisseur (composant qui exerce une force proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de sa longueur et opposée au mouvement ; on notera λ le coefficient de proportionnalité).
On note $z(t)$ l'altitude du bas de caisse (point C) et $e(t)$ l'altitude de la route, prises par rapport à une altitude de référence. On tiendra compte du poids de la voiture. L'axe z est vertical, vers le haut. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

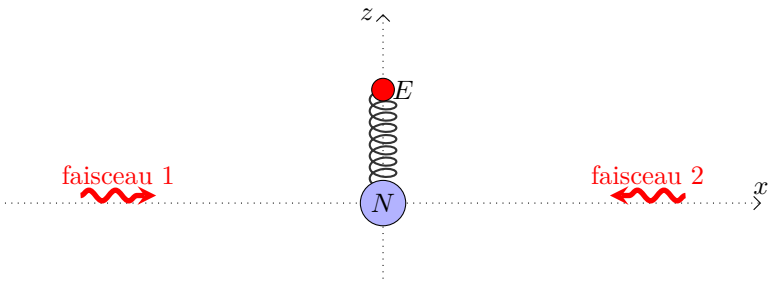
1. Grâce au PFD projeté selon $\vec{e}_z$, établissez l'ED vérifiée par z ; elle dépendra de e au second membre.
2. Exprimez la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{z}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$.
3. Faites une étude des asymtotes dans le diagramme de Bode. Déterminez la pulsation ω_i où les asymptotes se coupent.
4. Exprimez le module $H(\Omega)$ en fonction de $\Omega = \omega^2$. Prouvez qu'il y a toujours une résonance en $\omega =$

$\sqrt{\frac{2m^2k^2+\sqrt{4m^4k^4+8m^3k^3\lambda^2}}{2\lambda^2m^2}}$.

5. On choisit $\lambda = 9100\,\text{USI}$. Tracez le diagramme de Bode complet de cette suspension.
   Calculez la distance entre deux bosses de la route donnant une résonance si la voiture roule à $80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
6. L'amortisseur est usé ; on a désormais $\lambda = 4100\,\text{USI}$ avec k et m inchangés. Tracez le nouveau diagramme de Bode.

Exercice M5.5 : Refroidissement d'atomes par laser [****]

Dans un gaz, les différents atomes sont animés de vitesses différentes. Pour refroidir le gaz, il faut ralentir ces atomes. Pour cela, on les éclaire à l'aide de lasers.
Dans le modèle simple de l'atome appelé « modèle de l'électron élastiquement lié », un atome est modélisé par un noyau N (masse M) et un électron E beaucoup plus léger (masse m_e), les deux étant reliée par un ressort de raiseur k et de longueur à vide nulle ; de plus, l'électron est soumis à une force d'amortissement qui s'écrit $-\frac{m_e}{\tau}.\frac{d\overrightarrow{NE}}{dt}$ avec τ une constante. Pour simplifier, on supposera que le mouvement de l'électron se fait dans une seule direction z, et le mouvement de l'atome selon x. On notera ℓ la longueur du ressort. On néglige le poids.



On note $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. On suppose pour le moment que N est immobile dans $\mathcal{R}$ (dans la suite, il bougera mais sa vitesse restera négligeable devant celle de l'électron).
   L'électron est éclairé par de la lumière de fréquence ν. La lumière exerce sur l'électron une force qui s'écrit $f(t)\vec{e}_z = F_0\cos(2\pi\nu t)\,\vec{e}_x$ d'image complexe $\underline{f} = e^{j2\pi\nu t}$.
   En écrivant le PFD appliqué à l'électron dans $\mathcal{R}$, exprimer $\underline{v}$, image complexe de la vitesse $v = \dot{\ell}$ de l'électron, en régime permanent, en fonction de f, k, m_e, τ et F_0.
2. Exprimer la puissance $p(t)$ fournie par la force $f(t)\vec{e}_x$ à l'électron en fonction de $f(t)$ et $v(t)$. En déduire la puissance moyenne P correspondante en fonction de $\underline{f}$ et $\underline{v}$, puis montrer que $P = \dfrac{A}{1+\tau^2\left(2\pi\nu - \frac{k}{2\pi\nu m_e}\right)^2}$
   avec A constante à déterminer.
3. Étudier les limites de P lorsque ν tend vers 0, puis vers l'infini.
   Montrer que P passe par un maximum pour une fréquence ν_0 qu'on exprimera en fonction de k et m_e ; exprimer la valeur de ce maximum en fonction de A.
   Tracer alors l'allure de la courbe $P(\nu)$.
4. En réalité, deux faisceaux de lumière arrivent sur l'atome, le premier venant de la droite, le second de la gauche. Ces deux faisceaux ont la même fréquence ν très légèrement inférieure à ν_0.
   On tient compte maintenant du mouvement de l'atome qui se déplace à la vitesse $w_0\vec{e}_x$. En première approximation, on peut considérer que les équations écrites précédemment restent vraies, seulement, par effet Doppler, les fréquences des faisceaux lumineux sont modifiées :
   — le faisceau venant de la gauche est vu par l'atome comme ayant une fréquence $\nu_1 = \left(1 - \frac{w_0}{c}\right).\nu$
   — le faisceau venant de la droite est vu par l'atome comme ayant une fréquence $\nu_2 = \left(1 + \frac{w_0}{c}\right).\nu$
   Tracez sur un graphique l'allure de la puissance P_1 que l'atome absorbe de la part du faisceau 1, en fonction de sa vitesse w_0. On pourra commencer par rechercher la vitesse pour laquelle cette puissance est maximale. Tracez aussi P_2 sur le même graphique, pour l'autre faisceau.
5. En réalité, lorsque l'atome absorbe de la lumière, il absorbe des photons qui possèdent aussi une quantité de mouvement, et cela crée une force. On admet que, si un faisceau fournit à l'atome une puissance

moyenne P, alors il exerce sur lui une force $\frac{P}{c}\vec{u}$ avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction de propagation du faisceau.

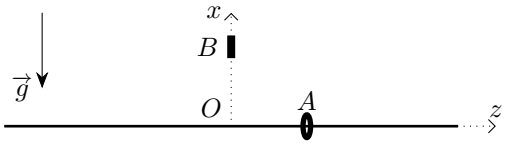
On note $F_{tot}\vec{e}_x$ la force moyenne totale subit par l'atome de la part des deux faisceaux. Exprimer F_{tot} en fonction de P_1, P_2 et c.

Tracer alors l'allure de F_{tot} en fonction de w_0.

6. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{w_0}{c}$ au voisinage de 0, montrer que, pour ces vitesses faibles, cette force s'écrit $F_{tot} = -\lambda w_0$ avec λ à exprimer.
   Faire l'AN de λ pour : $c = 3{,}0 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $F_0 = 5{,}5 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}$, $\tau = 1{,}6\,\mathrm{ns}$; $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $f_0 = 3{,}2 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$; et $f = 0{,}999 f_0$.
7. On considère maintenant l'atome complet soumis uniquement à cette force. Établir l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse w_0 et calculer le temps caractéristique correspondant si sa massse vaut $m = 1{,}5 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg}$.
8. En pratique, cette méthode permet de refroisir des gaz d'atomes jusqu'à des températures de l'ordre de $T = 100\,\mu\mathrm{K}$. Calculer la vitesse quadratique correspondante du gaz d'atomes. Pourquoi ne peut-on pas plus ralentir les atomes ?

Exercice M5.6 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**]

Un anneau aimanté A de masse m peut glisser sans frottements sur un fil rectiligne selon la direction $\vec{e}_z$ horizontale. Un autre aimant B se situe en $z = 0$, au-dessus du fil, à une distance d ; l'attraction entre les deux aimants se traduit par une énergie potentielle d'interaction de la forme



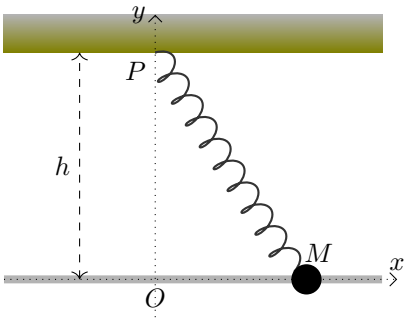
$$E_{pm}(z) = -C\frac{d}{(d^2+z^2)^{3/2}}$$

Pour les AN : $m = 12\,\mathrm{g}$, $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $d = 2\,\mathrm{cm}$ et $C = 1{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{J\cdot m^{-2}}$.

1. Montrez que ce système (point A) est conservatif, et exprimez son énergie potentielle E_p, puis son énergie mécanique.
2. Tracez la courbe de $E_p(z)$ en fonction de z ; en déduire la nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique de A.
3. Déduire du graphique précédent que l'aimant a une position d'équilibre ; est-elle stable ?
4. Déterminez par le calcul la position d'équilibre de A ; vérifiez la cohérence avec la question précédente.
   Montrez par le calcul que cette position est stable, et calculez la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Exercice M5.7 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**]

Un objet M de masse m peut se déplacer sans frottements sur une tige horizontale. On repère sa position par $x = \overline{OM}$. Un ressort est fixé entre M et le point P fixe de coordonnées $(0, h)$. Ce ressort a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0.



1. Montrez que le système M est conservatif, et exprimez son énergie potentielle.
2. Déterminez la ou les positions d'équilibres de la masse ; on prendra soin de préciser à quelle condition sur h elles existent.
3. Étudiez la stabilité de la position d'équilibre $x = 0$ en fonction de h.

Exercice M5.8 : Potentiel de Lennard-Jones [***] py EDO

On s'intéresse dans cet exercice (très calculatoire, mais utile quant à son principe) à la dynamique d'une

molécule diatomique où l'un des deux atomes est beaucoup plus lourd que l'autre. On supposera que cet atome lourd (1) est immobile, et que l'autre, (2), peut se déplacer suivant une seule direction *fixe* $\vec{e}_r$, sous l'action d'une force exercée par l'autre atome.
Quand la molécule est peu ionique, on peut considérer en bonne approximation que la force de (1) sur (2) est conservative et dérive d'un potentiel de type Lennard-Jones :

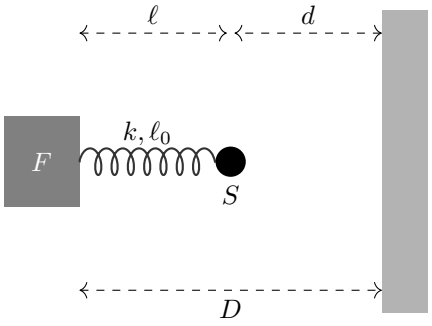
$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

avec r la distance entre les deux atomes, A et B des constantes positives. *On néglige toute autre force*, et on suppose que le référentiel d'étude est galiléen.

1. Que vaut la force associée ?
2. Étudiez la fonction U et tracez l'allure de sa courbe. Montrez en particulier l'existence d'un minimum.
   Que vaut la distance interatomique d lorsque la molécule est à l'équilibre (ie. quand les deux atomes ne bougent pas l'un par rapport à l'autre) ?
3. Étudiez les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre (exprimez leur pulsation) ; on notera m la masse de l'atome (2).
4. Pour une molécule particulière, on mesure $m = 1 \times 10^{-26}\,\text{kg}$, $d = 3 \times 10^{-10}\,\text{m}$, et une **fréquence** d'oscillations valant $f = 1 \times 10^{13}\,\text{Hz}$. Calculez A et B.
5. Simulez, à l'aide d'un schéma d'Euler, le mouvement avec comme CI : $r(0) = 2{,}85 \times 10^{-10}\,\text{m}$ et $\dot{r}(0) = 0$, sur quelques périodes.

Exercice M5.9 : Mesure de la force de Casimir [**]

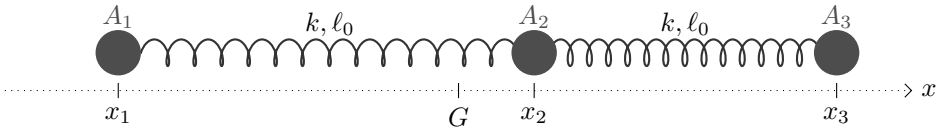
Entre deux objets métalliques s'exerce à courte distance une force appelée *force de Casimir*. Pour étudier cette force, les physiciens ont mis au point un dispositif expérimental très précis. Il s'agit d'une sphère métallisée de petit diamètre, qu'on assimilera à un point matériel S de masse m. Cette sphère est fixée au bout d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k ; l'autre extrémité du ressort est en un point F fixe.
On approche alors un objet plan métallisé de la sphère. La théorie prévoit que la force de Casimir du plan sur S est conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_{p_C} = -\dfrac{A.R}{d^2}$ avec A une constante positive, R le rayon de la sphère, et d la distance entre le plan et S.
Du fait de la masse très faible de la sphère, le poids est négligeable dans tout ce problème. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.
On note l la longueur du ressort et D la distance entre le plan et F.



1. Écrivez l'énergie potentielle de ce système en fonction de la seule variable ℓ et des constantes k, ℓ_0, D, R et A.
2. Établissez l'équation différentielle du mouvement ; cette équation portera sur la variable ℓ et ses dérivées temporelles.
3. On suppose qu'il existe une position d'équilibre de la sphère pour la longueur ℓ_e. Écrivez l'équation que vérifie ℓ_e en fonction des autres constantes.
   Résoudre numériquement l'allongement $x = \ell_e - \ell_0$ pour $A = 1{,}5 \times 10^{-27}$ USI, $k = 0{,}4\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $R = 20\,\mu\text{m}$, et $D - \ell_0 = 0{,}5\,\mu\text{m}$.
4. Montrez alors que cette position d'équilibre est stable dans le cas choisi.
5. On note ω la pulsation des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre ℓ_e. Calculez numériquement $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation d'oscillation en l'absence de la force de Casimir.
6. Reprendre ce calcul si on approche à $D - \ell_0 = 50\,\text{nm}$.
7. On peut montrer la formule approchée $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx \frac{3AR}{k(D-\ell_0)^4}$. Imaginez une méthode par laquelle on peut mesurer le coefficient A.

Exercice M5.10 : Molécule triatomique [***]

Cet exercice nécessite de savoir calculer le déterminant d'une matrice 3×3.
On s'intéresse au problème d'une molécule triatomique symétrique composée de trois points A_1 (masse m_1), A_2 (masse m_2) et A_3 (masse m_1) – par exemple une molécule de CO_2.



Les points A_1 et A_2 sont reliées par une force qu'on pourra modéliser, au voisinage de l'équilibre, par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ; de même entre A_2 et A_3, le ressort étant identique puisque la molécule est symétrique.
On étudie le cas d'un mouvement unidimentionnel suivant l'axe x. On travaille dans le référentiel barycentrique supposé galiléen. On note x_1, x_2 et x_3 les abscisses des trois atomes (la référence étant le centre de masse G fixe).

1. Par application du PFD à A_1, à A_2 puis à A_3, établir trois équations différentielles couplées vérifiées par x_1, x_2 et x_3.
2. On pose $x_1 = -\ell_0 + y_1$, $x_2 = y_2$ et $x_3 = \ell_0 + y_3$. Reécrivez les équations précédentes avec y_1, y_2 et y_3.
3. On cherche des modes propres de vibration, c'est-à-dire des solutions de la forme $y_i(t) = y_i^0 \cos(\omega t + \phi_i)$ pour $i = 1..3$. On pose $\underline{y_1}$, $\underline{y_2}$ et $\underline{y_3}$ les images complexes associées. Établir le système d'équations linéaires vérifiées par cet 3 variables.
4. Montrer qu'un mode propre ne peut exister que si la pulsation ω vérifie une certaine équation. Montrer qu'il existe 3 pulsations propres : 0, ω_a et $\omega_b > \omega_a$ à préciser.
5. Déterminez le mode propre associé à chaque pulsation propre, et décrire le mouvement correspondant.

M5. Oscillateurs mécaniques

TDs numériques

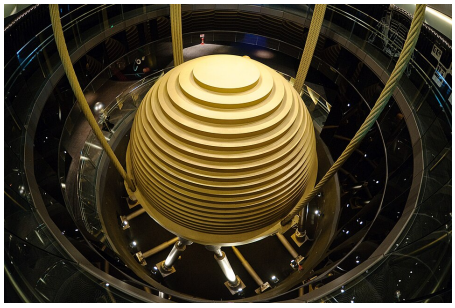
réponses page 776

TD numérique : Amortisseur dynamique accordé

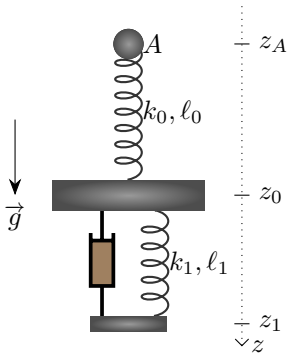
x + i.y

A.X=B

L'amortisseur dynamique accordé (Tuned Mass Damper) est une technique permettant d'amortir les mouvement d'un oscillateur en transférant une partie de son énergie à la résonance vers un autre oscillateur amorti. Le plus célèbre est celui de 600 t situé au sommet du gratte-ciel Taipei 101 afin d'amortir les vibrations de la tour dues au vent ou surtout aux tremblements de terre.



TMD de la tour Taipei 101.



Modèle.

On prendra dans la suite le modèle de la figure ci-dessus :

- une masse m_0 (d'altitude $z_0(t)$) est reliée par un ressort de raideur k_0 et de longueur à vide ℓ_0 à un point A qui est secoué selon une loi $z_A(t)$
- une masse $m_1 \ll m_2$ (d'altitude $z_1(t)$) est reliée à la masse m_0 par un ressort de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_1, et aussi par un amortisseur de coefficient de frottements linéaires λ_1

1. En appliquant le PFD à la masse m_0 puis à la masse m_1, établir deux équations différentielles.
2. Soient $z_{0,eq}$ et $z_{1,eq}$ les positions d'équilibres lorsque $x_A = 0$; on pose $u_0(t) = z_0(t) - z_{0,eq}$ et $u_1(t) = z_1(t) - z_{1,eq}$. Établir le système d'équations vérifié par $u_0(t)$ et $u_1(t)$.
   Exprimez les pulsations propres ω_0 et ω_1 apparaissant dans ces deux équations.
3. On suppose pour le moment qu'il n'y a que le premier oscillateur : m_1, k_1 et λ_1 sont nuls.
   Exprimez $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_0}(\omega)}{\underline{z_A}(\omega)}$ et tracez avec Python son diagramme de Bode en gain pour $m_0 = 1{,}2\,\text{t}$, $k_0 = 43\,\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$, pour des fréquences allant de 0,1 Hz à 10 Hz.
4. On ajoute la masse $m_1 = 10\,\text{kg}$. Calculez la valeur à donner à k_1 pour que les pulsations propres ω_0 et ω_1 soient égales.
5. On règle $\lambda_1 = 0,1\sqrt{k_1 m_1}$. Pour des fréquences comprises entre 0,1 Hz et 10 Hz, calculez le rapport des amplitudes de u_0 et z_A. Pour cela :
   - passez le système d'équations en complexes
   - écrivez le système obtenu sous forme d'un système linéaire écrit sous forme matricielle, d'inconnues $\underline{u_0}(\omega)$ et $\underline{u_1}(\omega)$
   - résolvez le système avec `numpy.linalg.solve` en prenant $\underline{v_A} = 1$, et récupérez la valeur de $|\underline{u_0}|$

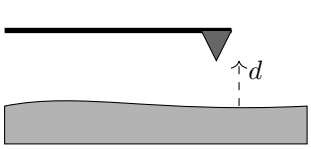
   Tracez alors le diagramme de Bode en gain correspondant.
6. Vous pouvez tester l'influence des réglages :
   - soit en modifiant la masse m_1 tout en gardant l'oscillateur accordé
   - soit en modifiant légèrement l'amortissement λ_1 entre $0,05\sqrt{k_1 m_1}$ et $0,5\sqrt{k_1 m_1}$
   - soit en désaccordant légèrement le second oscillateur avec par exemple $\omega_1 = 0,95\omega_0$ ou $\omega_1 = 1,05\omega_0$

TD numérique : Résonance d'un bras de microscope à force atomique

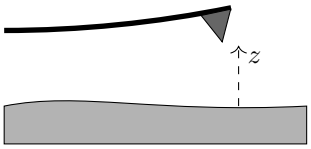
Ad. $f(x)=0$ Ad. EDO

Ce TD montrant des effets non linéaires est assez difficile numériquement : on obtient facilement des courbes, mais il faut travailler pour qu'elles soient belles. L'idée est d'étudier les courbes de résonance d'un oscillateur non linéaire en simulant d'abord un accroissement de la pulsation du signal excitateur, puis une diminution. Dans le second cas, il va se passer un phénomène particulier : comme l'amplitude augmente à la résonance, la période des oscillations propres croît, donc la pulsation propre décroît ; ainsi, plus la pulsation diminue, plus l'amplitude augmente, plus la pulsation de résonance diminue, et ainsi de suite jusqu'à une limite ou ce phénomène cesse. On observe alors deux courbes différentes en augmentant ou en diminuant la pulsation : on appelle cela un *phénomène d'hystérésis*.

Un microscope à force atomique (AFM) est un palpeur de force ultra sensible qu'on déplace au-dessus d'un échantillon pour déterminer sa structure. Il est constitué d'un bras au bout duquel se trouve une pointe qu'on approche de la surface à étudier.



Bras au repos



Bras en flexion

Le bras exerce sur la pointe deux forces, une qui compense le poids, l'autre qui agit comme un ressort de constante de rappel $k = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. La masse de la pointe vaut $m = 5\times10^{-11}\,\mathrm{kg}$. On ne considère que les mouvements verticaux de la pointe.
Lorsque le bras est au repos, la pointe se trouve à une distance d de la surface ; s'il se plie, on note $z(t)$ la distance. On admet que la surface exerce sur la pointe une force de Van der Waals, qui est attractive et de norme $\frac{A}{z^2}$ avec $A = 5\times10^{-24}\,\mathrm{N\cdot m^{-2}}$. La pointe est aussi soumise à une force de frottements linéaires de coefficient $\lambda = 4\times10^{-7}$ USI.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. Initialement on place le bras à une distance $d_0 = 15\,\mathrm{nm}$. À l'aide de `scipy.optimize.bisect`, déterminez la position d'équilibre z_{ez}.
   Remarque : il y a deux positions d'équilibre, la stable est celle juste inférieure à d_0.
3. Par un DL au voisinage de z_{eq}, déterminez la pulsation ω_0 des petites oscillations autour de cette position.
4. Simulez le système avec les conditions suivantes :
   - durée de simulation $t_{max} = \frac{100000}{\omega_0}$; nombre de points de simulation : 500000
   - $z(0) = z_{eq}$ et $\dot{z}(0) = 0$
   - $d(t)$ varie selon la loi $d(t) = d_0 + \epsilon\cos\left(\frac{t_{max}}{\ln(10)}10^{\left(5+\frac{t}{t_{max}}\right)}\right)$ correspondant au fait de faire vibrer le bras avec une amplitude $\epsilon = 10\,\mathrm{pm}$ et une pulsation variant au cours du temps selon la loi $\omega(t) = 10^{\left(5+\frac{t}{t_{max}}\right)}$, c'est-à-dire que la pulsation varie continûment de $1\times10^5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ à $1\times10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.
   - à partir du tableau des temps, créez le tableau donnant la pulsation à chaque instant
   - créez aussi un tableau donnant à chaque instant l'amplitude. On peut procéder ainsi : à chaque case `i`, on calcule la période à l'instant correspondant, puis le nombre de points que cela représente dans le tableau des temps, qu'on notera `fenetre` ; on extrait alors les positions z à l'aide de la tranche `[i-fenetre:i+1]` et on calcule $\frac{\max-\min}{2}$.

   Tracez alors la courbe de résonance en faisant croître les pulsations.
5. Tracez maintenant en superposition la courbe de résonance en faisant décroître les pulsations ; on aura cette fois $\omega(t) = 10^{\left(6-\frac{t}{t_{max}}\right)}$. Y a-t-il hystérésis ?
6. Reprendre la même courbe avec $\epsilon = 70\,\mathrm{pm}$.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

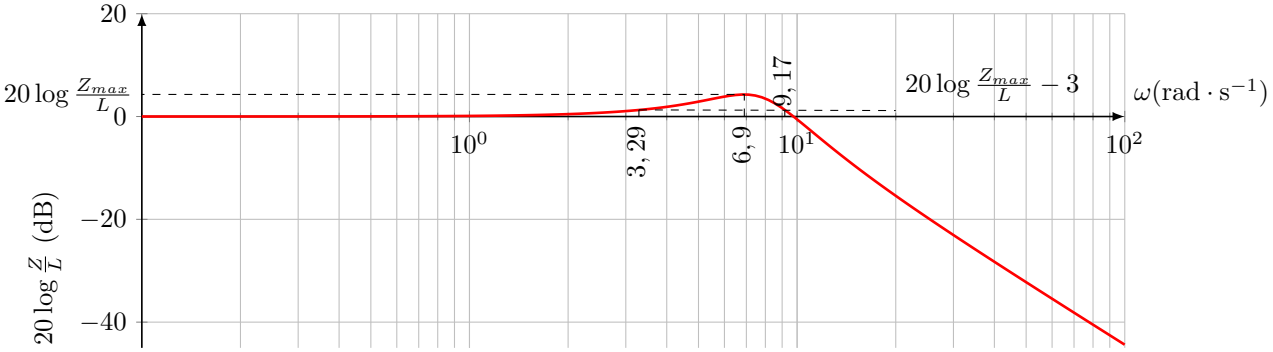
Q1.(b)
Q2.(c) ET (d)
Q3.(d)
Q4.(b)
Q5.(c)
Q6.(a)
En $\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$ mais lorsque Q devient grand alors cette résonance est quasiment à ω_0.
Q7.(d)
Q8.(b)
Q9.(a)
Q10.(b)
Il peut aussi y avoir des forces qui ne travaillent pas.
Q11.(a) ET (c)
Q12.(a)
Q13.(c)
Q14.(a)
Q15.(a)
Presque… sauf dans le cas où la dérivée seconde de l'énergie potentielle est nulle.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M5.1 : Objet soumis à une force sinusoïdale [*]

1. On étudie le système formé de la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$. La bille est soumise à son poids $-mg\vec{e}_z$, à la réaction du sol $N(t)\vec{e}_z$, aux frottements $-\lambda.\dot{x}(t)\vec{e}_x$ et à la force extérieure $F_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$. Donc d'après le PFD : $m\ddot{x}(t)\vec{e}_x = -mg\vec{e}_z + N(t)\vec{e}_z - \lambda.\dot{x}(t)\vec{e}_x + F_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$ ce qui donne après projection sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) = F_0\cos(\omega t)$
2. On passe en complexes : $-\omega^2\underline{x}(t) + \lambda j\omega\underline{x}(t) = F_0 e^{j\omega t}$ donc $\underline{x}(t) = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{\lambda j\omega - m\omega^2}$
3. $\omega = 8,4\pi$ donc $\underline{x}(t) = 4{,}5\times10^{-3}e^{-2,8j}e^{j\omega t}$ donc $x(t) = 4,5\cos(8,4\pi t - 2,8)$mm.

Corrigé de l'exercice M5.2 : Masse-ressort secoué [**]

1. La longueur vaut $\ell(t) = z_A(t) - z(t)$ donc la force vaut $-k(z_A(t) - z(t) - \ell_0).(-\vec{e}_z) = k(z_A(t) - z(t) - \ell_0)\vec{e}_z$.
2. Facile en ajoutant le poids : le PFD projeté sur $\vec{e}_z$ donne $m\ddot{z}(t) + f\dot{z}(t) + kz(t) = -k\ell_0 + kL\cos(\omega t) - mg$
3. La solution particulière de l'équation $m\ddot{z}(t) + f\dot{z}(t) + kz(t) = -k\ell_0 - mg$ est $z = -\ell_0 - \frac{mg}{k}$
4. La solution particulière de l'équation $m\ddot{z}(t) + f\dot{z}(t) + kz(t) = kL\cos(\omega t)$ se trouve en passant en complexes : $\left(-m\omega^2 + fj\omega + k\right)\underline{z}(\omega,t) = kLe^{j\omega t}$ donc $\underline{z}(\omega,t) = \frac{L.e^{j\omega t}}{1 - \frac{m\omega^2}{k} + \frac{jf\omega}{k}}$. En identifiant on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ puis $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$
5. $Z(\omega) = |\underline{z}(\omega)| = \frac{L}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$
6. $Z(2\pi\times0{,}8) = 1{,}4\,\text{cm}$
7. $\omega_r = 6{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $Z_{max} = 1{,}64\,\text{cm}$
8. On résout $Z(\omega) = \frac{Z_{max}}{\sqrt{2}}$ et on trouve comme BP : $[3{,}29\,;9{,}17]\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
9. 

Corrigé de l'exercice M5.3 : Modèle atomique de Thomson [**]

1. La force électrique est de l'ordre de $\frac{9\times10^9.(1{,}6\times10^{-19})^2}{(1\times10^{-10})^2} = 2\times10^{-8}\,\text{N}$
   La force gravitationnelle est de l'ordre de $\frac{6{,}7\times10^{-11}.9\times10^{-31}.1{,}7\times10^{-27}}{(1\times10^{-10})^2} = 1\times10^{-47}\,\text{N}$
   Le poids est de l'ordre de $10.9\times10^{-31} = 9\times10^{-30}\,\text{N}$
2. On fait l'étude cinématique avec $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$, etc. Le PFD $m_e\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM}(t) - f\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$ donne, après projection, $m_e\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ et la même chose sur y et z.
3. **Régime libre**
   (a) $x(t) = e^{-\frac{f}{2m_e}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$ avec $\omega = \frac{\sqrt{f^2-4km_e}}{2m_e}$
   Donc $\tau = \frac{2m_e}{f}$
   (b) $f = \frac{m_e}{\tau} = 2\times10^{-22}$ USI.
   Sous forme canonique on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} =$ et $Q = \frac{\sqrt{km_e}}{f} = 7{,}2\times10^7$: c'est très très grand.

(c) Pour une telle valeur de Q, on sait que $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} = 1{,}6 \times 10^{16}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où on tire $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 118\,\text{nm}$: c'est dans l'UV lointain.

4. **Régime forcé**

(a) $m_e\ddot{z}(t) + f\dot{z}(t) + kz(t) = -eE\cos(\omega t)$ soit $\ddot{z}(t) + \frac{2}{\tau}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = -\frac{eE}{m_e}\cos(\omega t)$

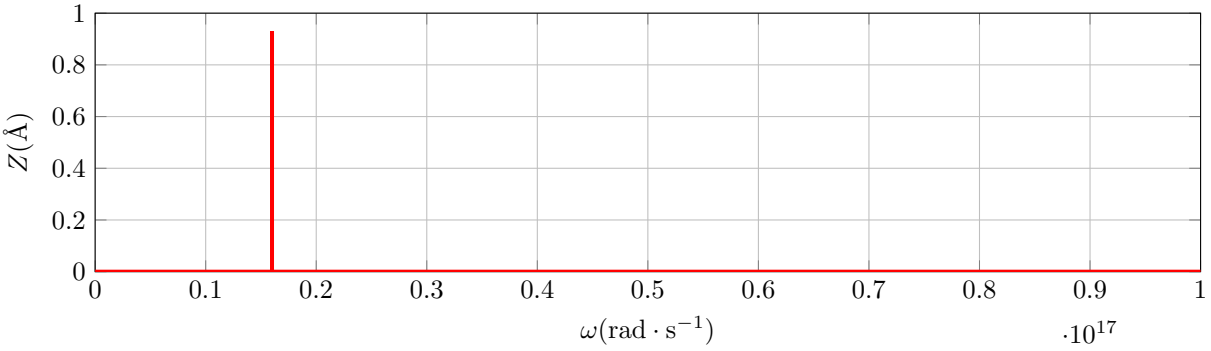
(b) $\underline{z}(\omega,t) = \frac{\frac{eE}{m_e}}{\omega^2-\omega_0^2-\frac{2}{\tau}j\omega}e^{j\omega t}$ donc $z(t)$ a pour amplitude $Z(\omega) = \frac{\frac{eE}{m_e}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\frac{2\omega}{\tau})^2}}$ et pour phase $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\omega}{\tau(\omega_0^2-\omega^2)}\right)$

(c) En BF, $Z(\omega)$ tend vers $\frac{eE}{m\omega_0^2} = \frac{eE}{k} = 7\times10^{-19}\,\text{m}$

En HF, $Z(\omega)$ tend vers 0.

En $\omega=\omega_0$, $Z(\omega_0) = \frac{eE\tau}{m_e 2\omega_0} = 9{,}3\times10^{-11}\,\text{m}$ soit approximativement la taille de l'atome.

Si on veut tracer la courbe à l'échelle, on ne voit qu'un pic gigantesque et très très étroit :



Corrigé de l'exercice M5.4 : Suspension de voiture [***]

1. On étudie la caisse de la voiture, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$.
Les forces s'appliquant à la caisse sont son poids $-mg\vec{e}_z$, la tension du ressort $-k(z(t)-R-e(t)-\ell_0)\vec{e}_z$ et la force de l'amortisseur $-\lambda.\frac{\mathrm{d}(z(t)-R-e(t))}{\mathrm{d}t} = -\lambda.(\dot{z}(t)-\dot{e}(t))\,\vec{e}_z$.
Le PFD projeté selon $\vec{e}_z$ donne donc l'équation $m\ddot{z}(t) + \lambda\dot{z}(t) + kz(t) = ke(t) + \lambda\dot{e}(t) + kR + k\ell_0 - mg$

2. L'étude complexe correspond au régime sinusoïdal forcé, on ne tient donc pas compte des termes constants au second membre. On a alors $\left(-m\omega^2 + j\lambda\omega + k\right)\underline{z}(\omega) = (j\lambda\omega + k)\,\underline{e}(\omega)$ d'où on tire $\underline{H}(\omega) = \frac{k+j\lambda\omega}{k+j\lambda\omega-m\omega^2}$

3. En BF : $\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{k}{k} = 1$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{0}{\to} 20\log 1 = 0\,\text{dB}$ (asymptote horizontale) et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg(1) = 0°$.

En HF : $\underline{H}(\omega) \underset{\infty}{\sim} \frac{j\lambda\omega}{-m\omega^2} = -j\frac{\lambda}{m\omega}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\infty}{\sim} 20\log\frac{\lambda}{m\omega} = 20\log\frac{\lambda}{m} - 20\log\omega$ (asymptote de pente $-20\,\text{dB/déc}$) et $\varphi(\omega) \underset{0}{\to} \arg\left(-j\frac{\lambda}{m\omega}\right) = -90°$.

Les asymptotes se coupent lorsque $20\log 1 = 20\log\frac{\lambda}{m\omega}$ donc en $\omega_i = \frac{\lambda}{m}$.

4. On prend le module : $H(\omega) = \sqrt{\frac{k^2+\lambda^2\Omega}{(k-m\Omega)^2+\lambda^2\Omega}}$.
Pour chercher une résonance, on dérive ce qui est sous la racine :

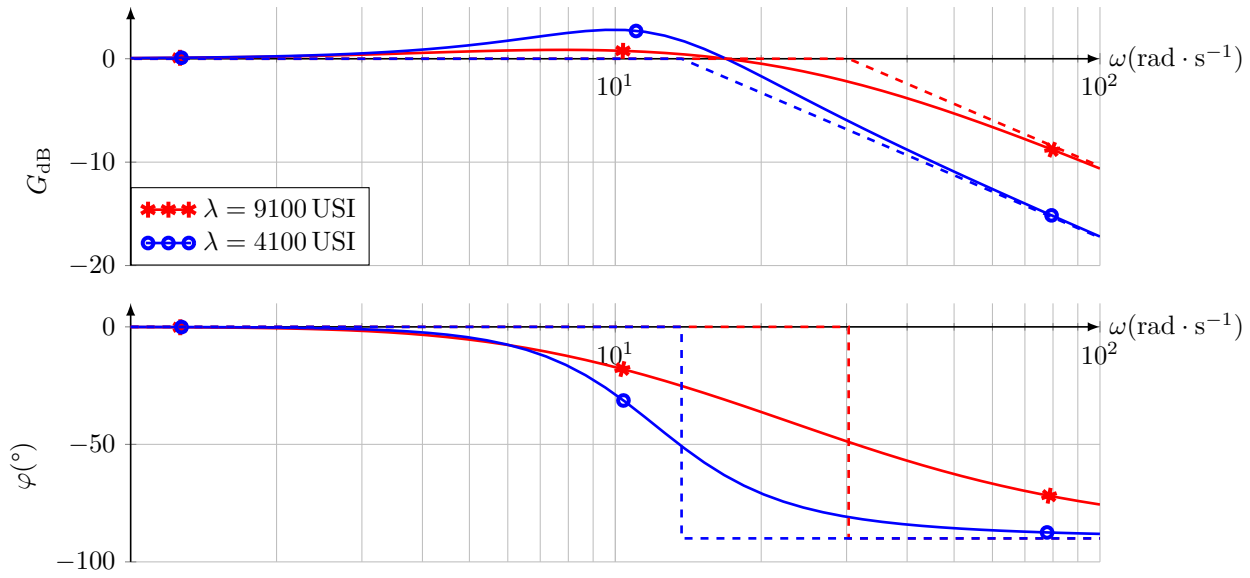
$$\frac{\mathrm{d}H(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2.\left((k-m\Omega)^2+\lambda^2\Omega\right) - \left(k^2+\lambda^2\Omega\right).\left(-2m(k-m\Omega)+\lambda^2\right)}{\left((k-m\Omega)^2+\lambda^2\Omega\right)^2} = 0$$

$$= \lambda^2k^2 + \lambda^2m^2\Omega^2 - 2\lambda^2km\Omega + \lambda^4\Omega + 2mk^3 - 2m^2k^2\Omega - k^2\lambda^2 + 2\lambda^2mk\Omega - 2\lambda^2m^2\Omega^2 - \lambda^4\Omega = 0$$

$$= -\lambda^2m^2\Omega^2 - 2m^2k^2\Omega + 2mk^3 = 0$$

$\Delta = 4m^4k^4 + 8m^3k^3\lambda^2 > 0$ et on trouve une racine positive $\Omega = \frac{-2m^2k^2+\sqrt{4m^4k^4+8m^3k^3\lambda^2}}{2\lambda^2m^2}$ donc il y a une résonance en $\omega_r = \sqrt{\frac{-2m^2k^2+\sqrt{4m^4k^4+8m^3k^3\lambda^2}}{2\lambda^2m^2}}$

5. Avec la valeur proposée, on peut calculer
— $\omega_i = 30{,}3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ puis $G_{\text{dB}}(\omega_i) = -2{,}2\,\text{dB}$ et $\varphi(\omega_i) = -49°$
— $\omega_r = 7{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ puis $G_{\text{dB}}(\omega_r) = 0{,}9\,\text{dB}$ et $\varphi(\omega_r) = -12°$



La distance entre deux bosses à la résonance vaut $\frac{v}{f_r} = \frac{2\pi\times 80}{10{,}3\times 3{,}6} = 17{,}9\,\text{m}$.

6. On a désormais
   - $\omega_i = 13{,}7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ puis $G_{\text{dB}}(\omega_i) = 1{,}8\,\text{dB}$ et $\varphi(\omega_i) = -51°$
   - $\omega_r = 9{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ puis $G_{\text{dB}}(\omega_r) = 2{,}8\,\text{dB}$ et $\varphi(\omega_r) = -28°$

   Cf. courbe à la question précédente. Les HF sont mieux amorties, mais il y a une résonance qui peut être dangereuse pour la tenue de route.

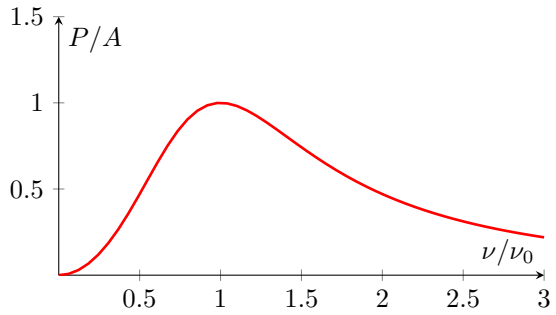
Corrigé de l'exercice M5.5 : Refroidissement d'atomes par laser [****]

1. Système E ; référentiel du laboratoire galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{NE} = \ell(t)\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{\ell}(t).\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{\ell}(t)\vec{e}_x$.
   Forces : force du ressort $-k\ell(t)\vec{e}_x$; frottements $-\frac{m_e}{\tau}\dot{\ell}(t)\vec{e}_x$; force de la lumière $F_0\cos(2\pi\nu t)\,\vec{e}_x$; on néglige le poids.
   Le PFD projeté selon $\vec{e}_x$ fournit donc $m_e\ddot{\ell}(t) = -k\ell(t) - \frac{m_e}{\tau}\dot{\ell}(t) + F_0\cos(2\pi\nu t)$.
   En complexes : $\left(k + j2\pi\nu\frac{m_e}{\tau} - m_e(2\pi\nu)^2\right)\underline{\ell}(\nu) = F_0 e^{j2\pi\nu t}$ et comme $v(t) = \dot{\ell}(t)$ on a $\underline{v}(\nu) = j\omega\underline{\ell}(\nu) = \frac{j2\pi\nu F_0 e^{j2\pi\nu t}}{k+j2\pi\nu\frac{m_e}{\tau} - m_e(2\pi\nu)^2}$

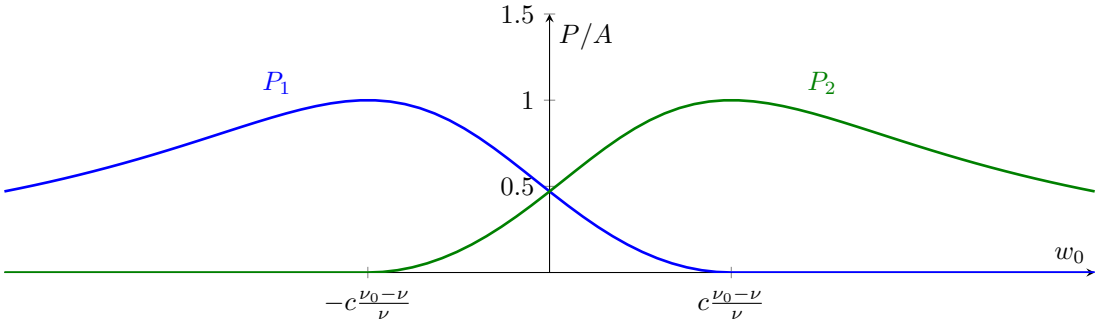
2. $p(t) = \vec{f}(t).\vec{v}(t)$ donc $P(\nu) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\underline{\vec{v}}(\nu).\underline{\vec{f}}(\nu)\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\frac{j2\pi\nu F_0^2}{k+j2\pi\nu\frac{m_e}{\tau} - m_e(2\pi\nu)^2}\right)$ ce qui donne après multiplication par la quantité conjuguée : $P(\nu) = \frac{\frac{m_e}{2\tau}F_0^2(2\pi\nu)^2}{(k-m_e(2\pi\nu)^2)^2 + \left(\frac{m_e}{\tau}2\pi\nu\right)^2}$
   Pour obtenir la forme demandée, on divise en haut et en bas par $\left(\frac{m_e}{\tau}2\pi\nu\right)^2$ et on obtient

$$P(\nu) = \frac{\frac{\tau}{2m_e}F_0^2}{1 + \tau^2\left(2\pi\nu - \frac{k}{m_e 2\pi\nu}\right)^2} \text{ donc } A = \frac{\tau}{2m_e}F_0^2$$

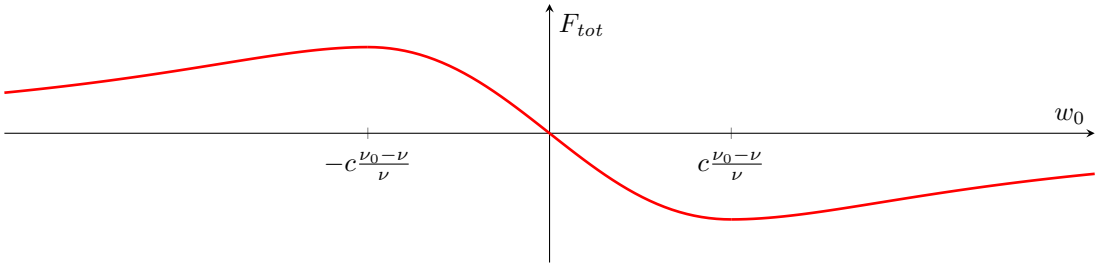
3. Il est facile de voir que $P(0) = 0$ et $P(\infty) = 0$.
   Pour trouver un maximum de $P(\nu)$, il faut chercher un minimum du dénominateur ; pour cela on peut dériver, ou bien voir que ce minimum correspond au minimum de $\left(2\pi\nu - \frac{k}{m_e 2\pi\nu}\right)^2$ qui est un carré, et qui est minimum lorsqu'il s'annule, donc lorsque $2\pi\nu = \frac{k}{m_e 2\pi\nu}$ soit $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_e}}$; pour cette valeur, $P = A$.
   On obtient alors l'allure suivante :



4. $P_1(w_0) = P\left(\left(1-\frac{w_0}{c}\right).\nu\right)$ qui passe par un maximum lorsque $\left(1-\frac{w_0}{c}\right).\nu = \nu_0$ soit $w_0 = c\frac{\nu-\nu_0}{\nu} < 0$. De même $P_2(w_0)$ est maximum pour $w_0 = c\frac{\nu_0-\nu}{\nu}$.



5. Il est facile de voir que $F_{tot}(w_0) = \frac{P_1(w_0)-P_2(w_0)}{c}$:

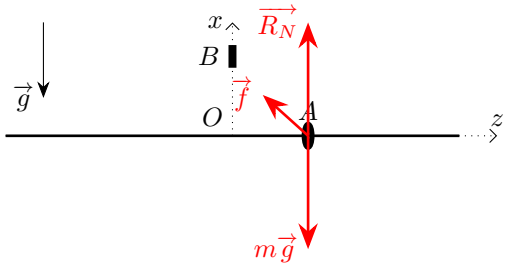


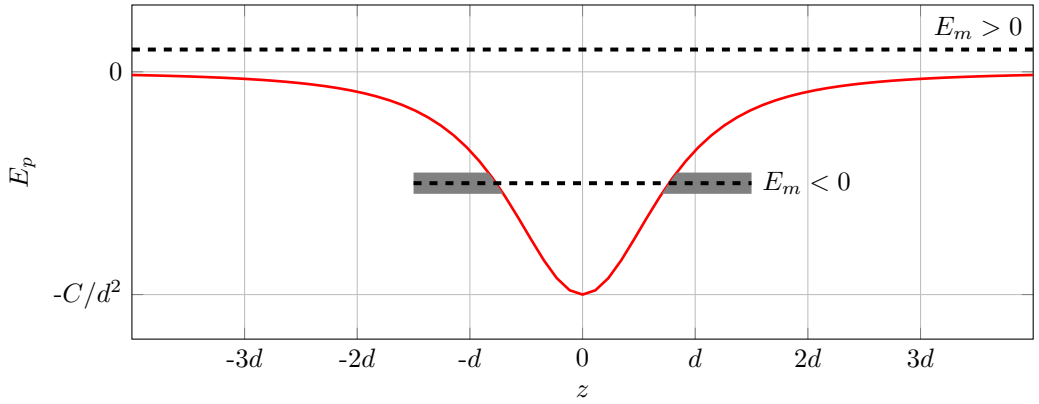
6. $$F_{tot}(w_0) = \frac{P_1(w_0)-P_2(w_0)}{c} = \frac{A}{c}\left(\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\left(1-\frac{w_0}{c}\right)\nu-\frac{\nu_0^2}{(1-\frac{w_0}{c})\nu}\right)^2}-\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\left(1+\frac{w_0}{c}\right)\nu-\frac{\nu_0^2}{(1+\frac{w_0}{c})\nu}\right)^2}\right)$$
$$= \frac{A}{c}\left(\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\left(1-\frac{w_0}{c}\right)\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\left(1+\frac{w_0}{c}\right)\right)^2}-\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\left(1+\frac{w_0}{c}\right)\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\left(1-\frac{w_0}{c}\right)\right)^2}\right)$$
$$= \frac{A}{c}\left(\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\left(1-\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}\right)^2}-\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\left(1+\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}\right)^2}\right)$$
$$= \frac{A}{c}\left(\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\left(1-2\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}\right)}-\frac{1}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\left(1+2\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}\right)}\right)$$
$$= \frac{A}{c\left(1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\right)}\left(1+\frac{4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2}2\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}-1+\frac{4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2}{1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2}2\frac{\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}}{\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}}\frac{w_0}{c}\right)$$
$$= \frac{16A\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)\left(\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)}{c\left(1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\right)^2}\frac{w_0}{c}$$

ce qui est bien de la forme $-\lambda.w_0$ (car $\nu - \frac{\nu_0^2}{\nu} < 0$) avec $\lambda = \frac{16A\pi^2\tau^2\left(\frac{\nu_0^2}{\nu}-\nu\right)\left(\nu+\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)}{c^2\left(1+4\pi^2\tau^2\left(\nu-\frac{\nu_0^2}{\nu}\right)^2\right)^2}$. Avec les valeurs données : $A = 2{,}7\,\text{W}$ et $\lambda = 2{,}9\times10^{-23}$ USI.

7. On trouve facilement $\tau'\frac{\mathrm{d}w_0(t)}{\mathrm{d}t} + w_0(t) = 0$ avec $\tau' = \frac{m}{\lambda} = 5{,}2\,\text{ms}$: l'atome est arrêté très vite.
8. $v^* = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 0{,}17\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; on ne peut pas descendre plus bas car on a fait un modèle continu, mais en fait l'absorption de la lumière des laser se fait par paquets d'énergie, les photons. À chaque fois qu'un atome absorbe un photon, il ralentit, puis le reémet dans n'importe quelle direction, ce qui modifie sa vitesse par effet de recul. Cela aboutit à une agitation aléatoire de l'atome au-dessous de laquelle on ne peut pas descendre par cette technique.

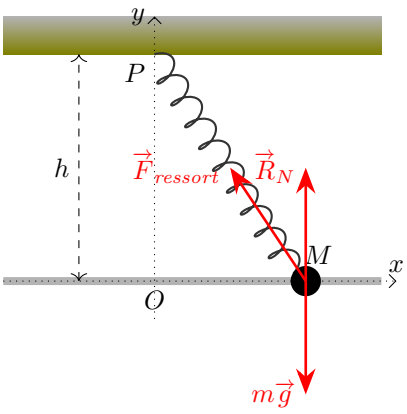
Corrigé de l'exercice M5.6 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**]



1. L'aimant est soumis à la force magnétique ($E_{pm} = -C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$), au poids ($E_{pp} = 0$ car le mouvement est horizontal) et à la réaction du fil qui ne travaille pas (absence de frottements). Donc le système est conservatif et $E_p = -C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$.
   Sa vitesse vaut $\dot{z}(t)\vec{e}_z$ donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 - C\frac{d}{(d^2+z(t)^2)^{3/2}}$
2. 

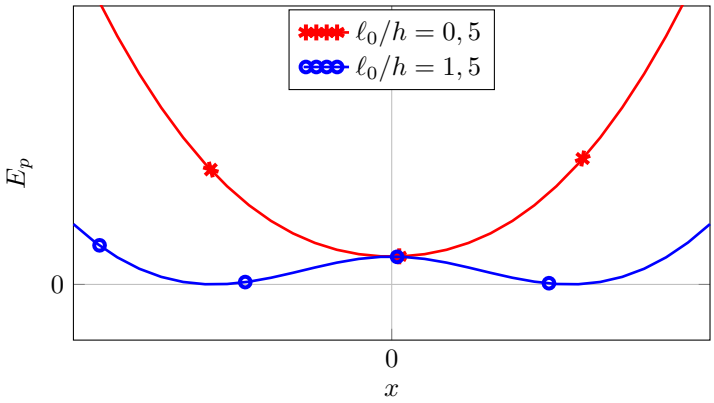
   On voit que :
   — si $E_m < 0$, le mouvement est borné
   — si $E_m > 0$, le mouvement est non borné
3. On voit graphiquement qu'il y a une position d'équilibre stable en $z = 0$.
4. Par le calcul : $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \frac{3Czd}{(d^2+z^2)^{5/2}}$ qui s'annule bien en $z = 0$.
   On dérive à nouveau : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2} = 3Cd\frac{(d^2+z^2)^{5/2}-5z^2(d^2+z^2)^{3/2}}{(d^2+z^2)^5}$; donc $\frac{\mathrm{d}^2E_p(t)}{\mathrm{d}z^2}(0) = \frac{3C}{d^4} > 0$: c'est stable.
   Pour avoir l'équation des petites oscillations, le plus simple et de passer par un DL à l'ordre 2 de E_p (si vous ne le connaissez pas encore, soit vous l'apprenez, soit vous passez par l'ED du mouvement puis par un DL à l'ordre 1 du terme non linéaire). Ici donc, l'énergie potentielle au voisinage de $z = 0$ s'écrit d'après la formule de Taylor $E_p(z) = -\frac{C}{d^2} + \frac{3C}{2d^4}z^2$; on a alors $\frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 - \frac{C}{d^2} + \frac{3C}{2d^4}z(t)^2 = \text{cst}$ donc, en dérivant et en simplifiant par $\dot{z}$, on trouve l'ED du mouvement linéarisée : $\ddot{z}(t) + \frac{3C}{md^4}z(t) = 0$ donc on obtient des oscillations de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3C}{md^4}} = 42\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (période $T_0 = 0{,}13\,\text{s}$).

Corrigé de l'exercice M5.7 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**]



1. La masse est soumise aux actions suivantes :
   - son poids, conservatif, d'énergie potentielle $m.g.y(t) = 0$ si on prend l'altitude nulle en O
   - la force du ressort, qui a pour longueur $\sqrt{h^2 + x(t)^2}$, conservatif avec $E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x(t)^2} - \ell_0\right)^2$
   - la réaction de la tige, qui ne travaille pas (pas de frottements)

   on en déduit que le système est conservatif, et $E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0\right)^2$
2. $$\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2}2\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}\left(\sqrt{h^2+x^2} - \ell_0\right) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{h^2+x^2} - \ell_0 = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2} \text{ quand c'est possible, c'est-à-dire lorsque } h < \ell_0$$
3. On peut reécrire $\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = kx - \frac{k\ell_0 x}{\sqrt{x^2+h^2}}$ donc $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2} = k - k\ell_0\frac{\sqrt{x^2+h^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+h^2}}}{h^2+x^2}$ donc $\frac{\mathrm{d}^2E_p(x)}{\mathrm{d}x^2}(0) = k\left(1 - \frac{\ell_0}{h}\right)$: si $h < \ell_0$, la position est instable, sinon elle est stable.
   La figure ci-dessous illustre le profil de l'énergie potentielle dans les deux cas :

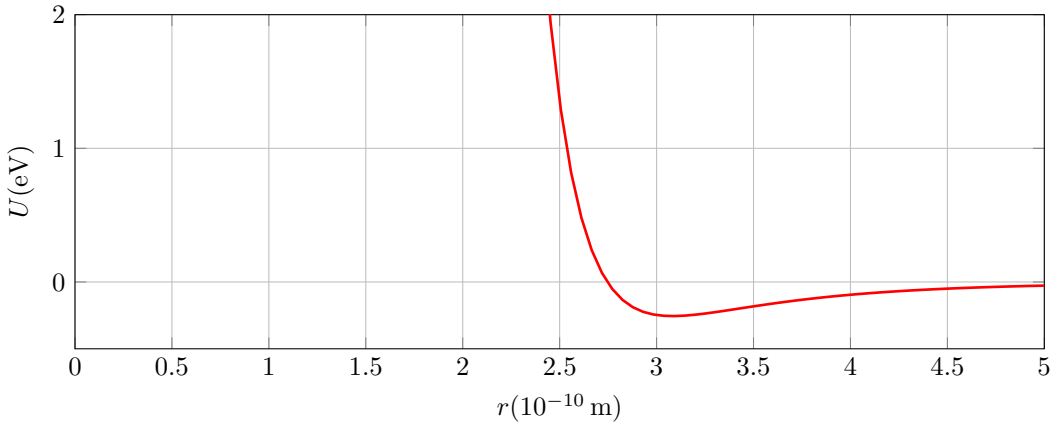


Corrigé de l'exercice M5.8 : Potentiel de Lennard-Jones [***]

1. $$\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U = -\left[\frac{6B}{r^7} - \frac{12A}{r^{13}}\right]\vec{e}_r$$
2. Je passe rapidement, vous faites ça en maths :

r	0		$\sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$		$-$	0	$+$	
U	$+\infty$	↘	$-\frac{B^2}{4A}$	↗	0

   Voici le tracé avec les valeurs trouvées à la fin :

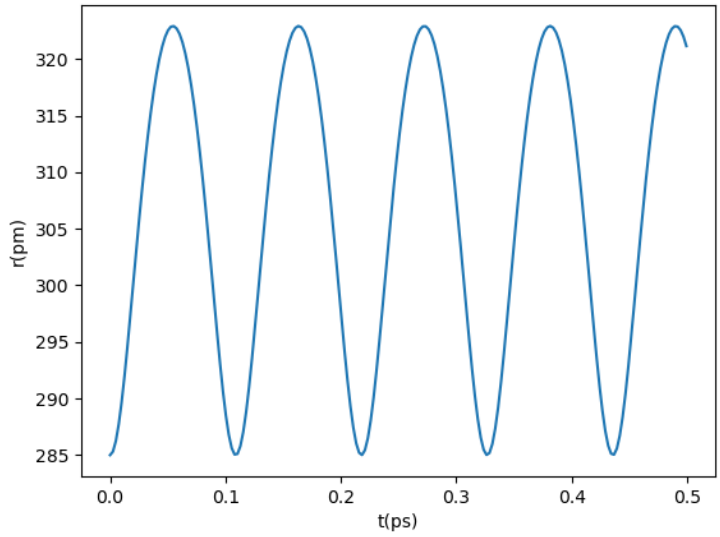


À l'équilibre, on est au minimum d'énergie potentielle (c'est un équilibre stable), donc $d = \sqrt[6]{\dfrac{2A}{B}}$

3. $\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{156A}{r^{14}} - \frac{42B}{r^8}$ donc $\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d) = 156A\left(\frac{2A}{B}\right)^{-14/6} - 42B\left(\frac{2A}{B}\right)^{-8/6} = 72A^{-8/6}B^{14/6}2^{-14/6}$
Comme le système est conservatif, $\frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + U(r(t)) = \text{cst}$ donc en dérivant par rapport au temps : $m\dot{r}(t)\ddot{r}(t) + \frac{\mathrm{d}U(r}{\mathrm{d}r}(t)\dot{r}(t) = 0$ soit finalement, après simplification par $\dot{r}$: $m\ddot{r}(t) + \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}(t) = 0$. Or au voisinage de d, on a $\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}(d) + \frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d).(r-d) = \frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d).(r-d)$ d'où $m\ddot{r}(t) + \frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d).r(t) = \frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d).d$
On a donc des petites oscillations qui se font à la pulsation $\sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2U(r)}{\mathrm{d}r^2}(d)} = \sqrt{\frac{1}{m}72A^{-8/6}B^{14/6}2^{-14/6}}$

4. On peut par exemple écrire $B = \frac{2A}{d^6}$, d'où $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{m}}\sqrt{72.A.d^{-14}}$ ce qui donne $A = \dfrac{4\pi^2 f^2 m d^{14}}{72} = 2{,}62 \times 10^{-134}$ USI et $B = 7{,}2 \times 10^{-77}$ USI.

5.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
A=2.62e-134
B=7.2e-77
m=1e-26
def force(r):
    return -6*B/r**7+12*A/r**13
def acceleration(r,v,t):
    return force(r)/m
w0=np.sqrt(72*A**(-8/6)*(B/2)**(14/6)/m) # pulsation des petites oscillations
T0=2*np.pi/w0 # période des petites oscillations
pas,tmax=T0/10000,5*T0
N=int(tmax/pas)
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_r=np.zeros(N+1)
tab_v=np.zeros(N+1)
tab_t[0],tab_r[0],tab_v[0]=0,2.85e-10,0
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    tab_r[n+1]=tab_r[n]+pas*tab_v[n]
    tab_v[n+1]=tab_v[n]+pas*acceleration(tab_r[n],tab_v[n],tab_t[n])
plt.figure()
plt.plot(tab_t*1e12,tab_r*1e12)
plt.xlabel("t(ps)")
plt.ylabel("r(pm)")
plt.show()
```



On observe des oscillations non sinusoïdales, non centrées sur la position d'équilibre (300 pm) ; cela est dû au fait que le potentiel n'est pas harmonique.

Corrigé de l'exercice M5.9 : Mesure de la force de Casimir [**]

1. $E_p = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 - \frac{AR}{(D-\ell)^2}$
2. On dérive par rapport au temps et on simplifie par $\dot{\ell}$; on obtient $m\ddot{\ell} + k(\ell-\ell_0) - \frac{2AR}{(D-\ell)^3} = 0$
3. $\ddot{\ell} = 0 \Rightarrow k(\ell_e - \ell_0) = \frac{2AR}{(D-\ell_e)^3}$
   Numériquement on trouve $x = 1{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$
4. $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\ell)}{\mathrm{d}\ell^2}(\ell_0) = k - \frac{6AR}{(D-\ell_e)^4} = 0{,}399\,997\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} > 0$ donc c'est stable.
5. Par la formule de Taylor, le DL au voisinage de la position d'équilibre donne l'équation $m\ddot{\ell} + k(\ell-\ell_0) + \frac{\mathrm{d}^2E_p(\ell)}{\mathrm{d}\ell^2}(\ell_0).(\ell-\ell_0) = 0$ qui donne des oscillations à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p(\ell)}{\mathrm{d}\ell^2}(\ell_0)} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{6AR}{m(D-\ell_e)^4}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{6AR}{k(D-\ell_e)^4}}$. On calcule alors $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0} = 3{,}6 \times 10^{-6}$
6. Cette fois $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0} = 4{,}1 \times 10^{-2}$, c'est beaucoup plus important.
7. En mesurant ce décalage de pulsation pour différentes valeurs de D, on fait une régression linéaire de $\ln\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}$ en fonction de $\ln(D-\ell_0)$; on doit trouver une pente de -4 et l'ordonnée à l'origine permet de calculer A.

Corrigé de l'exercice M5.10 : Molécule triatomique [***]

1. Je ne rédige que A_2. On étudie ce point dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; son accélération vaut $\vec{a}_{A_2} = \ddot{x}_2(t)\vec{e}_x$. Il est soumis aux deux forces des deux ressorts (on néglige le poids ici) : à gauche $-k(x_2(t)-x_1(t)-\ell_0)\vec{e}_x$ et à droite $-k(x_3(t)-x_2(t)-\ell_0).(-\vec{e}_x)$. Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne alors $m_2\ddot{x}_2(t) = k(x_1(t)+x_3(t)-2x_2(t))$. En faisant pareil avec A_1 et A_3, on trouve

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = k(x_2(t)-x_1(t)-\ell_0) \\ m_2\ddot{x}_2(t) = k(x_1(t)+x_3(t)-2x_2(t)) \\ m_1\ddot{x}_3(t) = k(x_2(t)-x_3(t)+\ell_0) \end{cases}$$

2. Cela enlève les constantes :

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1(t) = k(y_2(t)-y_1(t)) \\ m_2\ddot{y}_2(t) = k(y_1(t)+y_3(t)-2y_2(t)) \\ m_1\ddot{y}_3(t) = k(y_2(t)-y_3(t)) \end{cases}$$

3. On obtient le système matriciel :

$$\begin{pmatrix} k-m_1\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m_2\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m_1\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \underline{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Si le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} k-m_1\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m_2\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m_1\omega^2 \end{pmatrix}$ est nul, alors la seule solution est $(0,0,0)$. Si on veut du mouvement, il faut que le déterminant de M soit non nul :

$$\begin{aligned} \det(M) = 0 &\Leftrightarrow (k-m_1\omega^2).\det\begin{pmatrix} 2k-m_2\omega^2 & -k \\ -k & k-m_1\omega^2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -k & 0 \\ -k & k-m_1\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-m_1\omega^2).\left((2k-m_2\omega^2).(k-m_1\omega^2) - k^2\right) + k\left(-k.(k-m_1\omega^2)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-m_1\omega^2).\left(2k^2 - 2km_1\omega^2 - km_2\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - k^2 - k^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-m_1\omega^2).\omega^2.\left(-2km_1 - km_2 + m_1m_2\omega^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega & = 0 \\ \text{ou } \omega & = \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \\ \text{ou } \omega & = \omega_b = \sqrt{\frac{k(2m_1+m_2)}{m_1m_2}} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Si $\omega = 0$ alors le système devient $\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \underline{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui a des solutions de la forme $(\underline{y_1}, \underline{y_2}, \underline{y_3}) = \lambda.(1,1,1)$: dans ce mode la molécule bouge en bloc, c'est un mouvement de translation libre, qui n'oscille pas.

Si $\omega = \omega_a$ alors le système devient $\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 2k-k\frac{m_2}{m_1} & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \underline{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui a des solutions de la forme $(\underline{y_1}, \underline{y_2}, \underline{y_3}) = \lambda.(1,0,-1)$: dans ce mode l'atome central est immobile et les deux atomes latéraux oscillent en opposition de phase.

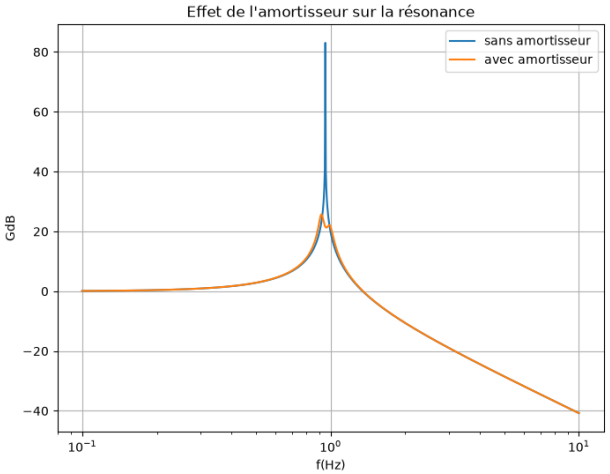
Si $\omega = \omega_b$ alors le système devient $\begin{pmatrix} -2k\frac{m_1}{m_2} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{m_2}{m_1} & -k \\ 0 & -k & -2k\frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \underline{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui a des solutions de la forme $(\underline{y_1}, \underline{y_2}, \underline{y_3}) = \lambda.(1,-\frac{2m_1}{m_2},1)$: dans ce mode les deux atomes latéraux oscillent en phase, et celui du centre en opposition de phase, d'autant plus qu'il est léger.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Amortisseur dynamique accordé

On obtient les équations $\begin{cases} m_0\ddot{u}_0 &= -k_0(u_0 - z_A) - k_1(u_0 - u_1) - \lambda_1(\dot{u}_0 - \dot{u}_1) \\ m_1\ddot{u}_1 &= -k_1(u_1 - u_0) - \lambda_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) \end{cases}$

d'où le système $\begin{pmatrix} k_0 + k_1 + j\lambda_1\omega - m_0\omega^2 & k_1 + j\lambda_1\omega \\ k_1 + j\lambda_1\omega & k_1 + j\lambda_1\omega - m_1\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u_0} \\ \underline{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z_A} \\ 0 \end{pmatrix}$

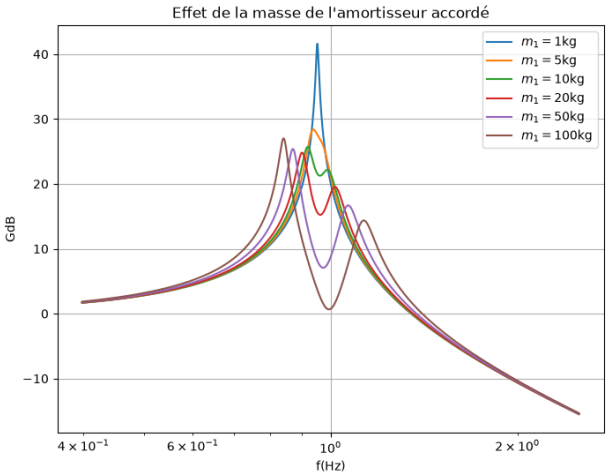


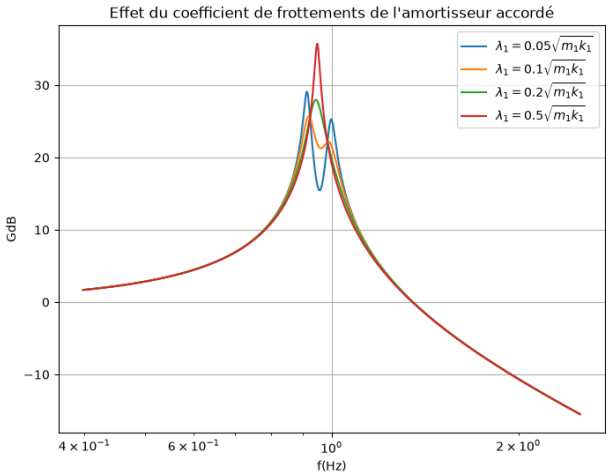
En variant les paramètres, on observe que :

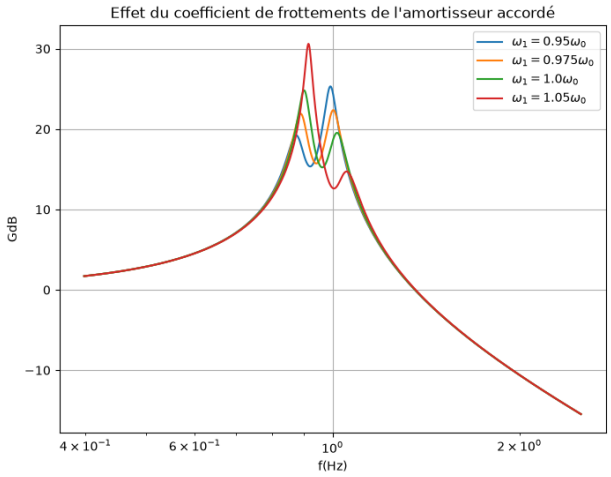
— la limite d'efficacité semble être pour une masse de 0,5 % de la masse de l'objet à amortir ; au-delà, l'amplitude maximale ne diminue quasiment plus

— le facteur d'amortissement doit être bien réglé, ni trop grand, ni trop faible

— l'amortissement idéal semble être pour une valeur légèrement désaccordée, avec $\omega_1 = 0,975\omega_0$



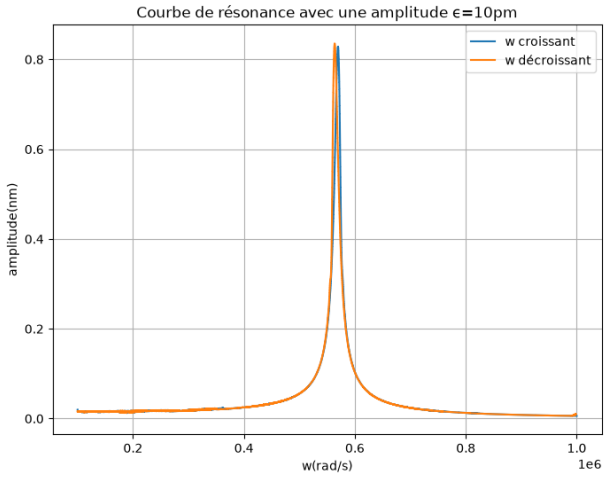


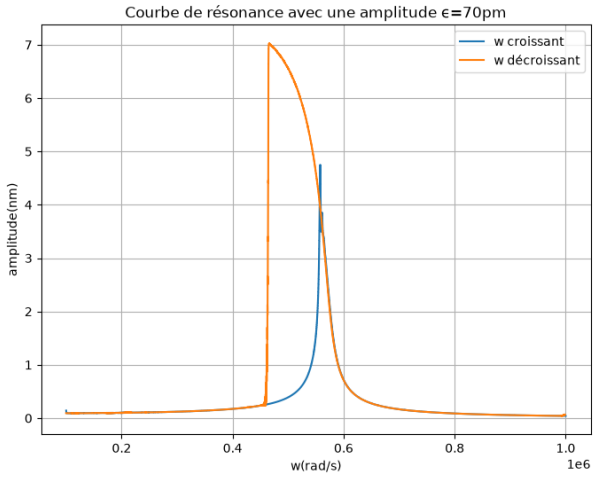


Réponses au TD d'info : Résonance d'un bras de microscope à force atomique

La pointe obéit à l'équation $m\ddot{z}(t) = -k(z(t)-d) - \frac{A}{z(t)^2} - \lambda\dot{z}(t)$; l'équilibre a lieu pour $z_{eq} = 13{,}7\,\text{nm}$.

Au voisinage de z_{eq}, on trouve l'équation $m\ddot{z}(t) + \lambda\dot{z}(t) + \left(k + \frac{2A}{z_{eq}^3}\right).(z(t) - z_{eq}) = 0$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2A}{mz_{eq}^3}} = 567\,\text{kHz}$.





À faible amplitude, l'hystérésis est inexistant (l'écart entre les deux pics est un artefact numérique) ; à plus grande amplitude, on voit une forte modification de la courbe lorsqu'on diminue la pulsation ; à de plus forte amplitudes, la pointe touche l'échantillon et la simulation numérique plante.

Chapitre 05 Ondes stationnaires

Programme p.794

Conseils p.795

Cours p.780

O5.A. Ondes stationnaires sur un système continu homogène

O5.B. Annexe : Régime libre et régime forcé

QCMs p.796

Exercices p.797

TDs numériques p.800

O5. Ondes stationnaires

Cours

Le chapitre sur les OSCILLATEURS MÉCANIQUES a étudié, dans une partie hors programme, comment, en couplant des oscillateurs mécaniques ou électriques, on fait apparaître plusieurs modes propres, donc plusieurs résonances ; si vous n'avez pas lu cette partie, ce n'est pas grave, on rappellera ici les résultats principaux. On peut continuer en ajoutant de plus en plus d'oscillateurs ; le système devient alors de plus en plus grand ; à moins qu'on ne travaille à taille totale constante, avec des oscillateurs de plus en plus petit. Ainsi, en mettant N oscillateurs mécaniques de longueur à vide $\frac{L}{N}$, on obtient, lorsque $N \to \infty$, un modèle qui décrit des vibrations longitudinales d'objets très très petits qui se repoussent. A-t-on modélisé des atomes dans un cristal ? Cela y ressemble. On ne voit plus les oscillateurs, mais on peut encore voir des modes propres, mouvements d'ensembles caractérisés par une résonance.

Dans ce chapitre, nous allons donc étudier des systèmes continus, c'est-à-dire des systèmes où les objets qui oscillent sont tellement petits et proches les uns des autres qu'on ne les voit plus. Nous n'allons pas les mettre en équation — vous le ferez l'année prochaine — mais nous allons admettre que les propriétés vues sur les oscillateurs couplés se généralisent à de tels systèmes, et faire un lien avec les ondes progressives harmoniques déjà étudiées auparavant.

O5.A. Ondes stationnaires sur un système continu homogène

A.1. Rappel : chaîne d'oscillateurs couplés

La résolution des systèmes d'oscillateurs couplés a mis en évidence les propriétés suivantes :

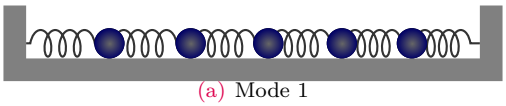
Propriété : Modes propres de N oscillateurs couplés

Un ensemble de N oscillateurs couplés non amortis possède N *modes propres*, qui sont des mouvements dans lesquels :

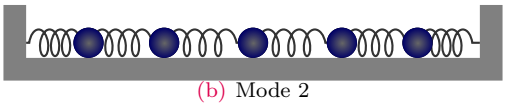
- tous les oscillateurs oscillent sinusoïdalement en phase à la même pulsation appelée *pulsation propre*
- chaque mode correspond à une amplitude différente de l'oscillation de chaque oscillateur.

Remarque : Il peut même y avoir des modes où certains oscillateurs ne bougent pas. Par exemple, sur la figure O5.1, on voit apparaître cela dans les modes 2, 3 et 4.

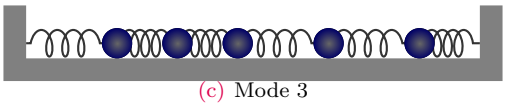
FIGURE O5.1 : Modes propres pour $n = 5$.



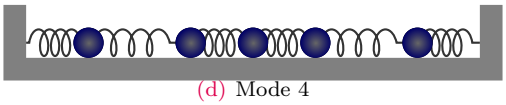
(a) Mode 1



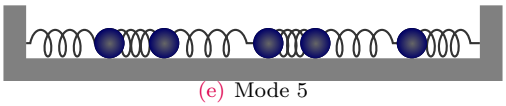
(b) Mode 2



(c) Mode 3



(d) Mode 4



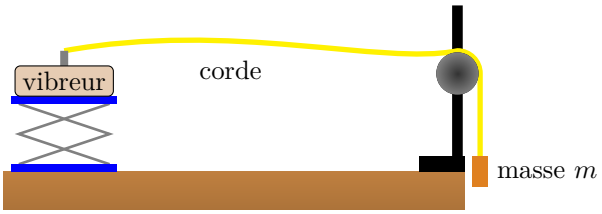
(e) Mode 5

A.2. Observation des ondes stationnaires sur une corde

Si on multiplie le nombre d'oscillateurs en gardant la longueur totale constante, on ne voit plus rien du tout ou presque [1]. On va donc étudier expérimentalement un autre système : une corde tendue qu'on fait vibrer orthogonalement à sa direction.

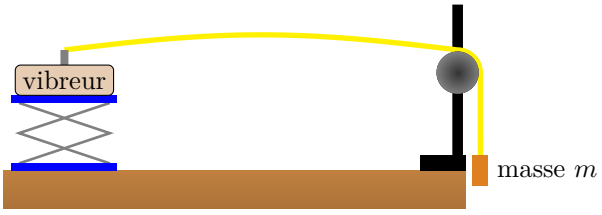
L'expérience réalisée par Franz Melde [2] est représentée sur la figure O5.2. Pour tendre une corde, on la fixe à un bout et de l'autre côté, on la fait passer sur une poulie et on accroche une masse m, qui tire dessus avec son poids ; la corde sera ainsi tendue avec une tension $T = mg$. Pour pouvoir étudier ses modes propres, on va chercher les résonances de cette corde ; il faut donc la secouer. On remplace donc le point fixe par une tige attachée à un vibreur (un haut-parleur) qui secoue ce bout à une fréquence variable avec une très faible amplitude.

FIGURE O5.2 : Expérience de Melde.

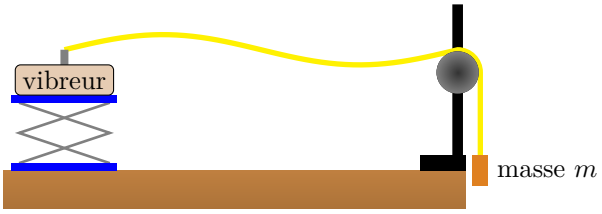


Dans cette expérience, on cherche à observer des résonances, c'est-à-dire des maxima d'amplitude à certaines fréquences non nulles. On fait donc varier la fréquence du vibreur. En partant d'une fréquence très basse et en augmentant, on fait les observations suivantes :

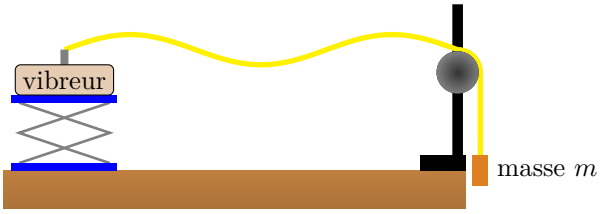
— on observe une première résonance à une fréquence f_1 pour laquelle la corde vibre d'un bout à l'autre :



— à une fréquence double de f_1, on observe une nouvelle résonance, dans laquelle la corde semble vibrer en deux morceaux, avec un point au centre qui reste immobile :



— à une fréquence triple de f_1, on observe une nouvelle résonance, dans laquelle la corde semble vibrer en trois morceaux :



— on continue ainsi et on observe des résonances à tous les multiples entiers de f_1.

1. On peut faire en TP l'expérience des ondes stationnaire sur un ressort ; même en étant très proches du ressort, ça reste peu visible.
2. L'expérience de Melde est devenue au cours du temps l'*expérience de la corde de Melde* ; puis à force on a fait porter le groupe « de Melde » non plus sur l'expérience, mais sur la corde ; on parle ainsi souvent d'une *corde de Melde*, alors que ça n'a aucun sens, c'est une corde comme une autre.

Définition : Onde stationnaire

On appelle *onde stationnaire* ou *mode propre* d'un système linéaire continu, un mouvement du système dans lequel toutes les parties du système oscillent comme des fonctions sinusoïdales du temps, de même pulsation et de même phase. On appelle *pulsation propre* la pulsation correspondante (de même *fréquence propre* la fréquence). Une telle onde stationnaire fait apparaître une résonance en régime sinusoïdal forcé.

Remarque : Un système linéaire est un système qui est régi par une équation différentielle linéaire. Ici, on n'a pas mis en équation cette corde, donc on ne sait pas si elle est linéaire. Pour cette année, on l'admettra.

Définition : Nœud, ventre

- On appelle *nœud* d'une onde stationnaire un point où l'amplitude d'oscillation est nulle.
- On appelle *ventre* d'une onde stationnaire un point où l'amplitude d'oscillation est maximale.
- On appelle *fuseau* d'une onde stationnaire une portion du système entre deux nœuds consécutifs.

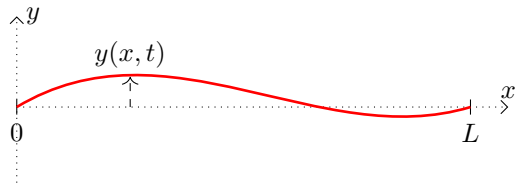
Remarque : Pour un ventre, l'amplitude est maximale *par rapport à la position* : en chaque point, le système oscille avec une certaine amplitude, et il y a des points ou cette amplitude est plus grande qu'ailleurs.

Propriété : Ondes stationnaires d'une corde tendue

Une corde tendue homogène qu'on fait vibrer transversalement (perpendiculairement à sa direction) possède une infinité d'ondes stationnaires. Celles-ci sont caractérisées par un nombre croissant de nœuds et de ventres : lorsqu'on passe du mode n au mode $n+1$, on ajoute un nœud et un ventre, et donc un fuseau.

Démonstration

Pour démontrer cette propriété, on commence par repérer le système en posant des axes : on va noter x la direction de la corde, et y la direction dans laquelle elle vibre. La vibration de la corde sera donc caractérisée par une fonction $y(x,t)$ à deux variables. On pose $x=0$ le point de la corde fixé au vibreur, et $x=L$ le point où elle touche la poulie ; la partie de la corde après la poulie ne joue aucun rôle ; L est la longueur de la corde qui peut vibrer.



On va chercher des ondes stationnaires, c'est-à-dire des fonctions $y(x,t)$ où chaque point oscille sinusoïdalement ; autrement dit, en chaque point, $y(x,t)$ est une fonction de la forme $\cos(\omega t)$; mais chaque point a une amplitude d'oscillation différente, de sorte qu'on peut définir une fonction $g(x)$ appelée *enveloppe* qui indique l'amplitude d'oscillation du point d'abscisse x. Ainsi, **pour un système linéaire, on recherchera des ondes stationnaires sous la forme d'une enveloppe multipliée par une fonction sinusoïdale du temps :** $y(x,t) = g(x).\cos(\omega t)$.
Pour trouver $g(x)$, nous avons peu d'informations. Nous allons admettre que **si le système est homogène, on peut chercher l'enveloppe sous une forme sinusoïdale de la position** : ici on suppose la corde homogène, donc on posera

$$g(x) = A.\cos(kx) + B\sin(kx) = D\cos(kx+\varphi)$$

où A et B sont des constantes réelles et k une constante appelée *pulsation spatiale* ; elle est reliée à la longueur d'onde par la relation $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
Pour déterminer les inconnues, on va appliquer les conditions aux limites. En $x=L$, le poulie empêche la corde de vibrer ; en $x=0$, le vibreur fait vibrer la corde mais de façon très faible, on fera donc en première approximation comme si la corde ne vibrait pas non plus. On va donc supposer qu'on a deux nœuds imposés à la corde, un en $x=0$, l'autre en $x=L$. Mathématiquement,

$$\begin{cases} \forall t, y(0,t) = 0 \\ \forall t, y(L,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \\ A\cos(kL) + B\sin(kL) = 0 \end{cases}$$

car on a posé $g(x) = A.\cos(kx) + B\sin(kx)$. De la première équation, on tire $A=0$. La seconde devient alors $B\sin(k.L) = 0$. Cette équation a deux solutions :

— soit $B = 0$, auquel cas $g(x) = 0$: l'enveloppe est nulle, rien ne vibre, donc… il n'y a pas d'onde stationnaire, il n'y a aucun mouvement

— soit $\sin(kL) = 0$ ce qui arrive lorsque $kL = 0[\pi]$ ou encore $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (car on se contente toujours des $k > 0$, les pulsations négatives étant les mêmes que les positives) : c'est dans ces cas-là qu'on a une onde stationnaire.

L'onde stationnaire numéro n est donc celle qui a une pulsation spatiale

$$k_n = n\frac{\pi}{L}$$

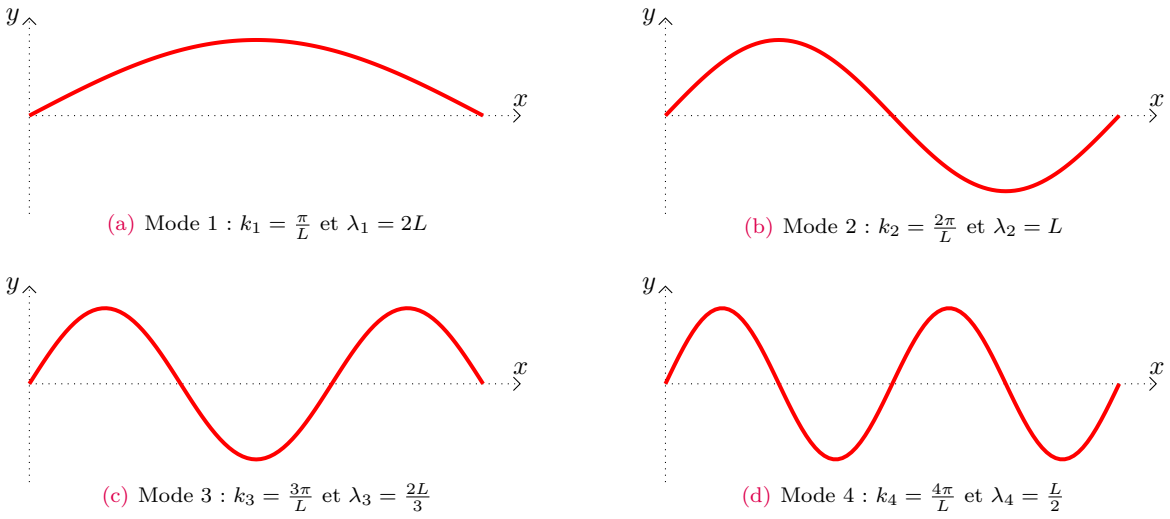
et elle est de la forme

$$y_n(x,t) = B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).\cos(\omega_n t)$$

où ω_n est la pulsation du mode n, qu'on n'a pas déterminée pour le moment.

On peut donc tracer l'enveloppe des premiers modes. Pour cela, on peut remarquer que la longueur d'onde du mode n vaut $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$. Pour le premier mode, $\lambda = 2L$, autrement dit une corde correspond à une demi longueur d'onde. On retrouve bien l'allure de la figure O5.3 en haut à gauche, avec un fuseau. Ensuite, c'est simple : pour passer d'un mode à un autre, on ajoute un fuseau.

FIGURE O5.3 : Modes propres de la corde de Melde.



(a) Mode 1 : $k_1 = \frac{\pi}{L}$ et $\lambda_1 = 2L$

(b) Mode 2 : $k_2 = \frac{2\pi}{L}$ et $\lambda_2 = L$

(c) Mode 3 : $k_3 = \frac{3\pi}{L}$ et $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

(d) Mode 4 : $k_4 = \frac{4\pi}{L}$ et $\lambda_4 = \frac{L}{2}$

Il nous reste encore à déterminer la pulsation temporelle (ou la fréquence) du mode n. Commençons par rappeler quelques définitions :

Définition : Pulsations temporelle et spatiale (rappel)

Une onde stationnaire harmonique (ou sinusoïdale) fait apparaître le produit de deux fonctions sinusoïdales, une dépendant du temps, l'autre de la position. Elle possède donc deux pulsations :

— la pulsation temporelle ω (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) est reliée à la période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$

— la pulsation spatiale k (en $\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$) est reliée à la période spatiale ou *longueur d'onde* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Définition : Vitesse d'une onde (rappel)

On appelle vitesse (de phase), ou célérité des ondes, le rapport

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(O5.1)}$$

Si v (parfois notée c) est constante, on dit que le système est *non dispersif*. Si au contraire v dépend de la pulsation (ou de la fréquence, c'est pareil) on dit que le système est *dispersif*.
D'une manière générale, on appelle *équation de dispersion* l'équation qui relie ω et k.

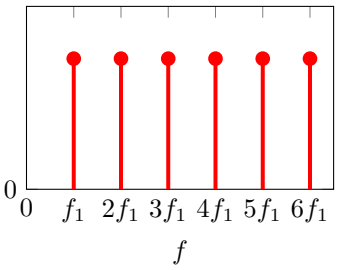
Propriété : Fréquences propres de la corde tendue

On admet qu'une corde tendue de longueur L est un système non dispersif de vitesse de phase $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \text{cst}$ où T est la tension de la corde et μ la masse linéique de la corde (masse par unité de longueur).

La corde tendue possède des ondes stationnaires de fréquences propres

$$f_n = n.f_1 \text{ avec } f_1 = \frac{c}{2L} \qquad \text{(O5.2)}$$

Son spectre (représenté ci-contre) est un *peigne de fréquences*.



Démonstration

On a déjà trouvé plus haut que le mode n a pour pulsation spatiale $k_n = n\frac{\pi}{L}$. Or le système est non-dispersif donc $\omega_n = c.k_n$ d'après l'équation (O5.1). On en déduit que $\omega_n = n\frac{c\pi}{L}$ et $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{c}{2L}$. Le premier mode (le fondamental) a pour fréquence $f_1 = \frac{c}{2L}$ et les autres $f_n = n.f_1$.
On peut aussi écrire le mode n sous sa forme complète maintenant :

$$y_n(x,t) = B \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$$

Ces ondes qui se forment sur une corde tendue sont à l'origine du son produit par tous les instruments à corde (figure O5.4), qu'ils soient à corde frappée, frottée ou pincée. La façon dont on attaque la corde modifie les modes propres qui sont excités et donc leur amplitude dans le spectre du son émis ; mais ce spectre comprendra toujours une fréquence fondamentale, et des harmoniques de fréquence égale à un multiple entier du fondamental. En effet, un théorème lié à la notion de série de Fourier montre que toutes les vibrations possibles de la corde se décomposent comme une somme de modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x,t)$$

où les coefficients a_n sont représentés sur le spectre du signal.

On a vu que la fréquence du fondamental s'écrit $f_1 = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2L}$ avec T la tension de la corde, L sa longueur et μ sa masse linéique. On en déduit facilement que :

— une corde jouant un son grave sera plutôt peu tendue, grosse et longue
— une corde jouant un son aigu sera plutôt très tendue, fine et courte

Dans le cas du piano, on joue directement sur ces trois facteurs pour créer des cordes jouant la note voulue. Dans le cas du violon ou de la guitare, on joue sur la tension et la masse linéique pour sélectionner la hauteur de la corde à vide, et ensuite on pose les doigts pour raccourcir la corde et changer la note en une note plus aigüe.

FIGURE O5.4 : Instruments à cordes. (Crédit : Wikipedia)



Mais au fait, y a-t-il un rapport entre les ondes stationnaires que nous venons de voir, et les ondes progressives ?

Calcul : Décomposition d'une onde stationnaire harmonique en 2 ondes progressives harmoniques

Considérons une onde stationnaire harmonique, ou mode propre, de la corde :

$$y_n(x,t) = B\sin(k_n x)\cos(\omega_n t) \text{ avec } k_n = n\frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_n = c.k_n = n\frac{c\pi}{L}$$

Un calcul sur les formules de trigonométrie montre que

$$\begin{cases}\sin(a+b) &= \sin a.\cos b + \sin b.\cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a.\cos b - \sin b.\cos a\end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} 2\sin a.\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$$

donc ici avec $a = k_n x$ et $b = \omega_n t$ on trouve

$$y_n(x,t) = \frac{B}{2}\left(\sin(k_n x+\omega_n t)+\sin(k_n x-\omega_n t)\right) = \frac{B}{2}\left(\sin(\omega_n t+k_n x)-\sin(\omega_n t-k_n x)\right)$$

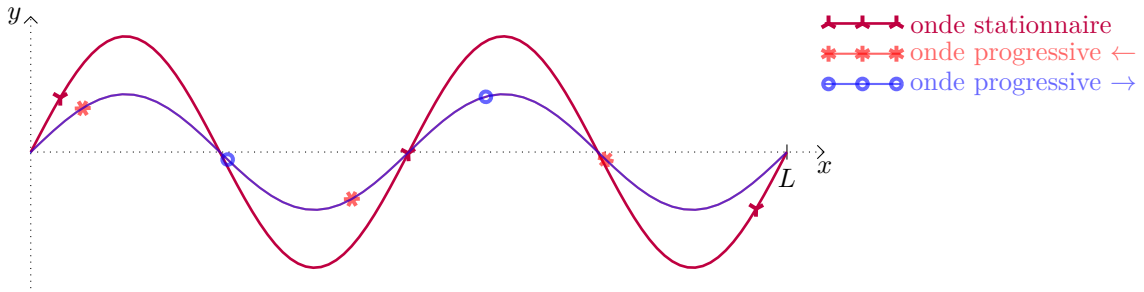
où on reconnaît la somme de deux ondes progressives harmoniques se propageant en sens opposé.

Propriété : Décomposition d'une onde stationnaire

Une onde stationnaire harmonique apparaît lorsqu'une onde progressive harmonique se réfléchit aux deux bouts du système : elle est alors équivalente à la somme d'une onde se propageant dans un sens, et de l'onde réfléchie se propageant dans l'autre sens.

Remarque : Le − dans la décomposition ci-dessus montre qu'un nœud en bout d'un système linéaire donne un signe − (c'est-à-dire un déphasage de π) à l'onde qui se réfléchit à cette extrémité.

FIGURE O5.5 : Décomposition du mode 4 en deux ondes sinusoïdales progressives en sens opposés.



A.3. Autres conditions aux limites : ondes stationnaires dans un tuyau d'orgue

Dans le cas de la corde tendue, la quantification de la pulsation spatiale était due aux conditions aux limites qui imposaient un nœud à chaque bout de la corde. Dans d'autres systèmes, on a d'autres conditions aux limites : des nœuds, mais aussi des ventres (du point de vue de la décomposition en ondes progressives, des conditions aux limites différentes imposent des conditions de réflexions différentes).

Nous allons considérer le son dans un tube − modèle simplifié de tous les instruments à vent (figure O5.6). Le son correspond à une vibration des atomes d'un fluide ou d'un solide. Cette vibration est due à une différence de pression entre les divers points qui met en mouvement les atomes. Ainsi, dans une onde sonore, on a deux grandeurs qui vibrent :

— la vitesse des atomes, dans la même direction que l'onde

— la surpression

Les ondes sonores dans un tube ont été étudiées par August Kundt [3], avec différentes conditions aux limites. En effet, dans un tube, des ondes se propagent ; aux extrémités du tube, deux types de conditions aux limites peuvent arriver :

— si on bouche le tube, alors on a un nœud de vitesse, puisqu'on empêche les atomes de bouger ; en contrepartie, on admettra qu'on a un ventre de surpression

3. Là encore, l'*expérience du tube de Kundt* a conduit par abus de langage à appeler *tube de Kundt* un simple tuyau.

FIGURE O5.6 : Instruments à vent. (Crédit : Wikipedia)





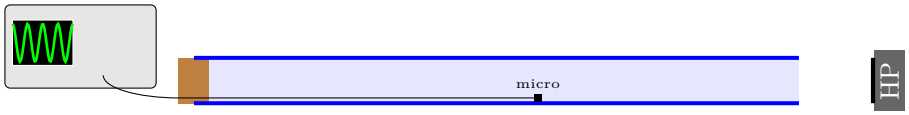
— si on laisse le tube ouvert, alors la pression en ce bout est égale à la pression atmosphérique, donc on a un nœud de surpression ; en contrepartie, on admettra qu'on a un ventre de vitesse

Remarque : On appelle ondes sonores ces ondes lorsqu'elles sont dans le domaine audible par l'oreille humaine, à savoir entre 20 Hz et 20 kHz ; au-dessus, on a les ultrasons ; en-dessous, les infra-sons.

Pour étudier les résonances du son dans un tube, on peut effectuer l'expérience suivante : on prend un tube fermé à un bout et ouvert à l'autre, et on place un haut-parleur qui émet un son de fréquence variable. Comme les ondes sonores ne sont pas visibles, on a deux méthodes pour observer ce qui se passe :

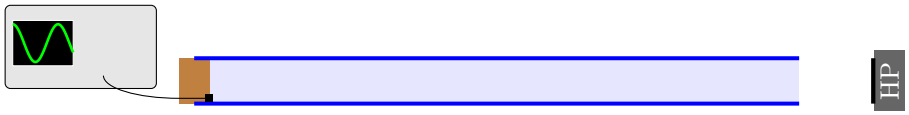
— soit on place un petit microphone dans le tube, qu'on déplace en différents endroits

— soit on saupoudre dans le tube des petits objets légers (des spores de champignons, des billes de polystyrène,...) qui vont s'accumuler aux nœuds de vitesse

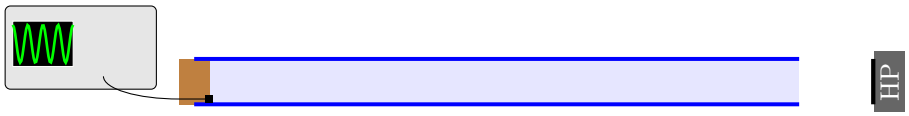


Le petit micro qu'on insère est, le plus souvent, un micro à électret, sensible à la pression. En faisant varier la fréquence du haut-parleur, on observe des résonances :

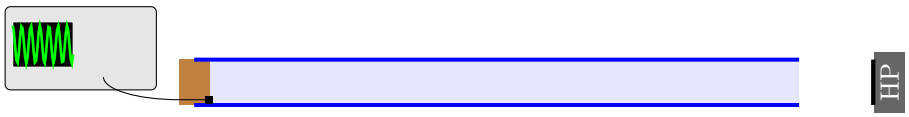
— à une fréquence f_1, on observe une résonance avec un maximum de vibration près du bouchon, et un minimum près de l'ouverture :



— à une fréquence triple de f_1, on observe une résonance avec un maximum de vibration près du bouchon, puis un minimum, puis un maximum, et enfin un minimum près de l'ouverture :



— à une fréquence quintuple de f_1, on observe une résonance avec un maximum de vibration près du bouchon, puis un minimum, un maximum, un minimum, un maximum, et enfin un minimum près de l'ouverture :



— on trouve d'autres résonances à des fréquences $7f_1$, $9f_1$,...avec à chaque fois un ventre et un nœud supplémentaires.

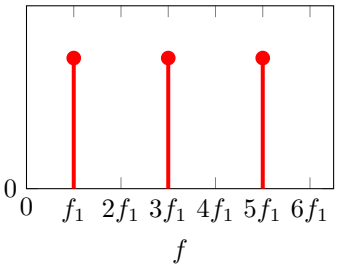
Propriété : Ondes stationnaires dans un tube fermé à un seul bout

Un tube fermé à un bout et ouvert à l'autre possède une infinité d'ondes stationnaires ; chaque onde fait apparaître un nœud et un ventre de plus que la précédente, que ce soit pour la pression ou la vitesse.

L'onde numéro $n \in \mathbb{N}^*$ possède comme fréquence propre

$$f_n = (2n-1).f_1 \text{ avec } f_1 = \frac{c}{2L} \qquad \text{(O5.3)}$$

où c est la célérité des ondes sonores et L la longueur du tube.
Le spectre du système (représenté ci-contre) est un peigne de fréquences dont les harmoniques paires sont absentes.



Démonstration

On peut étudier les ondes sonores soit du point de vue de la pression, soit du point de vue de la vitesse. Le résultat final sera le même, hormis le fait que les ventres de pression sont des nœuds de vitesse, et vice-versa.
On suppose que l'air contenu dans le tube est un système linéaire et qu'il possède des ondes stationnaires de surpression de la forme $p(x,t) = g(x).\cos(\omega t)$ où x est l'axe du tube et $g(x)$ l'enveloppe. On suppose aussi que le tube est homogène, donc l'enveloppe est sinusoïdale. On suppose enfin que les ondes dans le tubes sont une vitesse de phase constante notée c.
On pose donc

$$g(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

où A, B et k sont des constantes réelles.
On admet les conditions aux limites : on a un ventre de surpression du côté du bouchon (en $x = 0$), et un nœud du côté ouvert (en $x = L$). On a déjà vu comment traiter un nœud : l'enveloppe est nulle en ce point ; pour un ventre, il s'agit d'un maximum de l'amplitude, donc de l'enveloppe, ce qui se traduit par **l'annulation de la dérivée de l'enveloppe en ce point** (ou, si on préfère, l'annulation de la dérivée partielle de l'onde par rapport à la position : $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0$). Ainsi on a :

$$\begin{cases} \text{ventre en } 0 \\ \text{nœud en } L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}(0) = 0 \\ g(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A.k\sin(0) + B.k\cos(0) = 0 \\ A\cos(kL) + B\sin(kL) = 0 \end{cases}$$

car $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -kA\sin(kx) + kB\cos(kx)$.
De la première équation, on tire $B = 0$. La seconde devient alors $A\cos(kL) = 0$. Cette équation a deux solutions :

- soit $A = 0$, auquel cas $g(x) = 0$: l'enveloppe est nulle, il n'y a pas d'onde stationnaire
- soit $\cos(kL) = 0$ ce qui arrive lorsque $kL = \pm\frac{\pi}{2}[\pi]$ ou encore $kL = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (ou $2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$, mais je préfère commencer la numérotation à 1) : c'est dans ces cas-là qu'on a une onde stationnaire.

L'onde stationnaire numéro n est donc celle qui a une pulsation spatiale

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}$$

et une pulsation

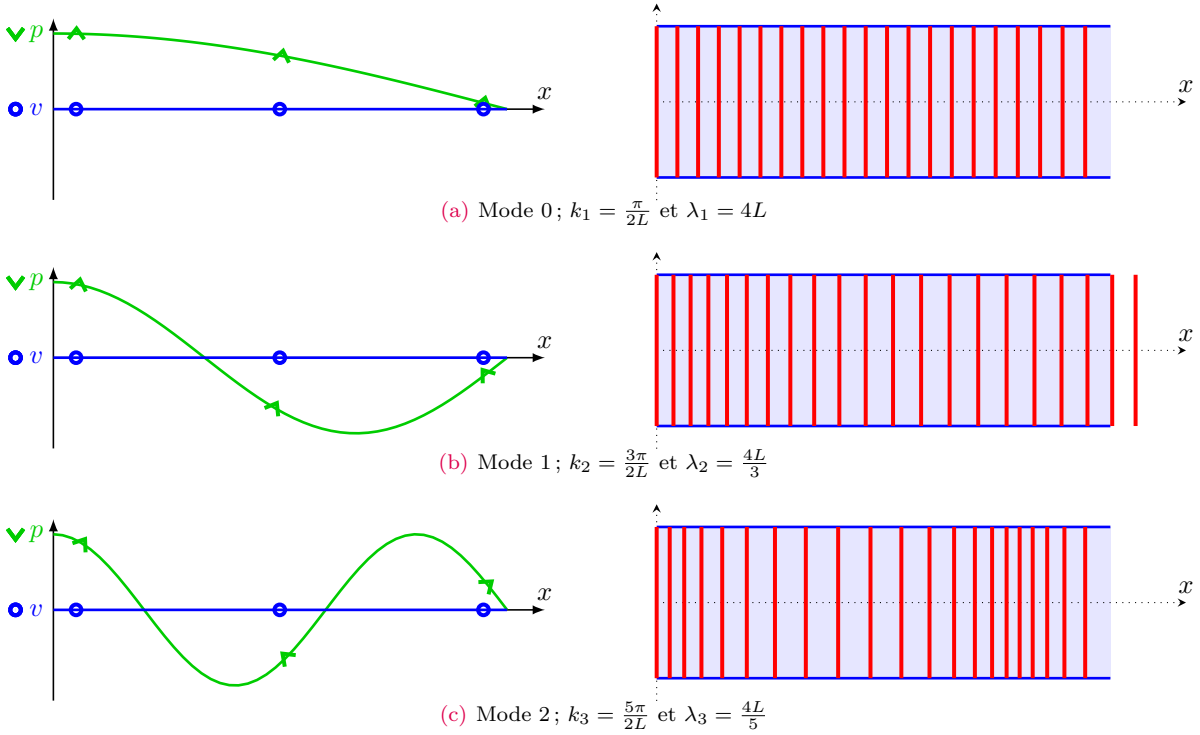
$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi c}{2L} \text{ soit } f_n = (2n+1)\frac{c}{4L}$$

et elle est de la forme

$$p_n(x,t) = A\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2L}x\right).\cos\left((2n-1)\frac{\pi c}{2L}t\right)$$

La forme des ondes est représentée sur la figure O5.7, avec une animation qui essaye de montrer comment bouge l'air dans le tuyau (les traits verticaux représentent des tranches d'air qui bougent ; là où elles sont resserrées, il y a une surpression, là où elles sont écartées, il y a une dépression).

FIGURE O5.7 : Ondes stationnaires dans un tube sonore bouché à gauche.



(a) Mode 0 ; $k_1 = \frac{\pi}{2L}$ et $\lambda_1 = 4L$

(b) Mode 1 ; $k_2 = \frac{3\pi}{2L}$ et $\lambda_2 = \frac{4L}{3}$

(c) Mode 2 ; $k_3 = \frac{5\pi}{2L}$ et $\lambda_3 = \frac{4L}{5}$

A.4. Autres ondes stationnaires

On a étudié deux types d'ondes : les ondes d'oscillation d'une corde tendue, et les ondes sonores. Il en existe bien d'autres types, on va les passer en revue rapidement. Rien n'est à connaître les concernant.

Définition : Onde transverse ou longitudinale (rappel)

On dit qu'une onde est transverse (ou transversale) si l'oscillation est orthogonale à l'onde. On dit qu'une onde est longitudinale si l'oscillation est parallèle à l'onde.

Par exemple, l'onde sur la corde tendue est transverse, tandis que l'onde sonore est longitudinale.

Peut-on avoir des ondes longitudinales sur une corde ? Non si elle est inextensible, mais oui si elle est élastique. Ce sont les ondes sur un ressort, qu'on peut observer à l'aide d'un vibreur faisant vibrer le ressort. Ces ondes correspondent à des ondes sonores.

Les ondes sonores sont longitudinales, et se propagent dans les fluides ou les solides ; ce sont des ondes de compression : chaque morceau est alternativement comprimé puis détendu. Dans les solides, il existe aussi des ondes de cisaillement, où les atomes vibrent de façon transverses. Ce sont ces ondes qu'on retrouve par exemple sur un verre en cristal que l'on fait chanter, dans des percussions (xylophone, célesta,… où on a des ondes stationnaires avec conditions aux limites identiques aux deux bouts) ou sur les lames des instruments à anche libre (harmonica, accordéon,… où on a des ondes stationnaires avec des conditions aux limites différentes aux deux bouts).

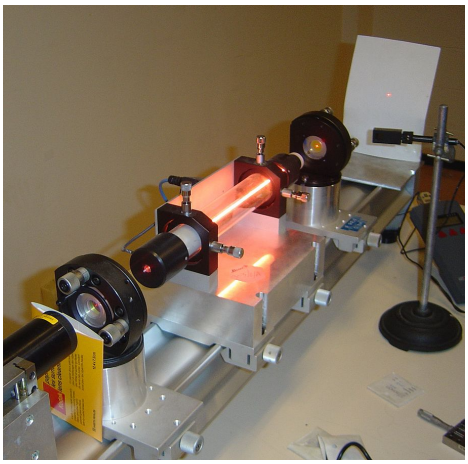
Les ondes sismiques sont des ondes transverses et longitudinales dans les solides, mais de très basses fréquences. Elles peuvent également, dans des configurations particulières, former des ondes stationnaires qui amplifient les secousses.

En quittant le domaine de la mécanique, on arrive aux ondes électromagnétiques (la lumière), ondes transverses dans lesquelles deux vecteurs, le champ électrique et le champ magnétique, oscillent. Elles peuvent former des ondes stationnaires, par exemple dans les fours à micro-ondes, mais aussi dans de nombreux dispositifs d'optique formés de deux miroirs l'un en face de l'autre ; l'exemple le plus connu de cela est la cavité laser (figure O5.8).

Ces ondes électromagnétiques sont aussi celles qui transmettent les signaux électriques dans les circuits électriques. Il peut alors se former des ondes stationnaires, en particulier dans les antennes (émission/réception de la radio, du téléphone portable,…) lorsqu'on n'est plus en ARQS.

Toutes ces ondes sus-citées sont peu dispersives. Un exemple d'ondes très dispersives, ce sont les ondes à la surface de l'eau. Leur relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh(hk)$ avec h la profondeur d'eau, g la pesanteur, et ρ la masse volumique de l'eau ; cette équation est clairement non linéaire. Des ondes stationnaires peuvent se former

FIGURE O5.8 : Cavité laser. (Crédit : Wikipedia/LKB)



dans des lacs (les *seiches*), ou dans les baies comme la baie de Fundy (figure O5.9) au Canada, dans laquelle le mode fondamental entre en résonance avec les marées, conduisant à des marnages de plus de 16 m.

FIGURE O5.9 : La baie de Fundy : Hopewell Rocks à marée basse et haute. (Crédit : Wikipedia)





Enfin, vous verrez plus tard que, en mécanique quantique, on associe à chaque particule une onde, et que ces ondes peuvent être stationnaires dans de nombreux systèmes : puits quantiques, atome,...

O5.B. Annexe : Régime libre et régime forcé

Pour trouver les modes propres, nous avons supposé des conditions aux limites parfaites : un nœud ou un ventre. Or en réalité, pour les expériences, nous avons mis à un bout du système une source qui « secoue » le système ; la vraie condition aux limites est donc un peu différente. Dans cette partie, nous allons étudier comment ces ondes stationnaires apparaissent dans la pratique.

B.1. Résonances des ondes stationnaires

On peut reprendre le calcul des ondes stationnaires sur une corde tendue en tenant compte du vibreur :

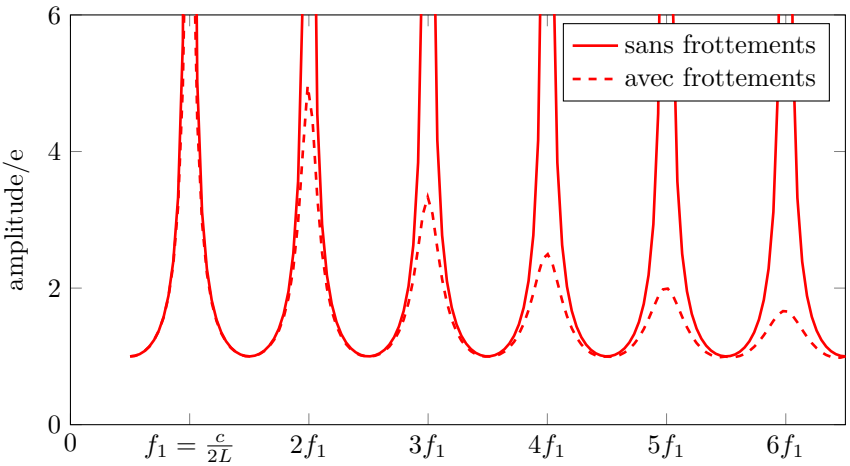
Exemple : Résonances d'une corde tendue

On considère une corde homogène tendue, de longueur L, non dispersive (de célérité c) ; on note $y(x,t)$ sa vibration. On impose un nœud en $x=0$, tandis qu'un vibreur impose en $x=L$ sa vibration : $y(L,t)=e.\cos(\omega t)$ où e est la très petite amplitude du vibreur.
Déterminer l'amplitude de l'onde stationnaire qui se forme sur la corde ; tracez cette amplitude en fonction de la fréquence.

La corde est un système linéaire donc on cherche des ondes stationnaires de la forme $y(x,t)=g(x).\cos(\omega t)$.
Comme elle est homogène, on cherche une enveloppe sinusoïdale : $g(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$.
Le nœud en $x=0$ implique que $g(0)=0$ soit $A=0$. Donc $g(x)=B\sin(kx)$.
On en déduit que $y(L,t)=B.\sin(kL).\cos(\omega t)$; or $y(L,t)=e.\cos(\omega t)$ à cause du vibreur. Donc $B.\sin(kL)=e$ soit $B=\frac{e}{\sin(k.L)}$.
Finalement on a l'onde

$$y(x,t)=\frac{e}{\sin(kL)}\sin(kx)\cos(\omega t) \text{ avec } k=\frac{\omega}{c}$$

L'amplitude de l'onde vaut donc $\left|\frac{e}{\sin(kL)}\right|$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\sin(kL)=0$ soit $k=n\frac{\pi}{L}$ avec n un entier : on retrouve bien des résonances pour les modes propres, ce qui correspond à des fréquences $f=n.\frac{c}{2L}$. On peut tracer la courbe [a], on obtient :



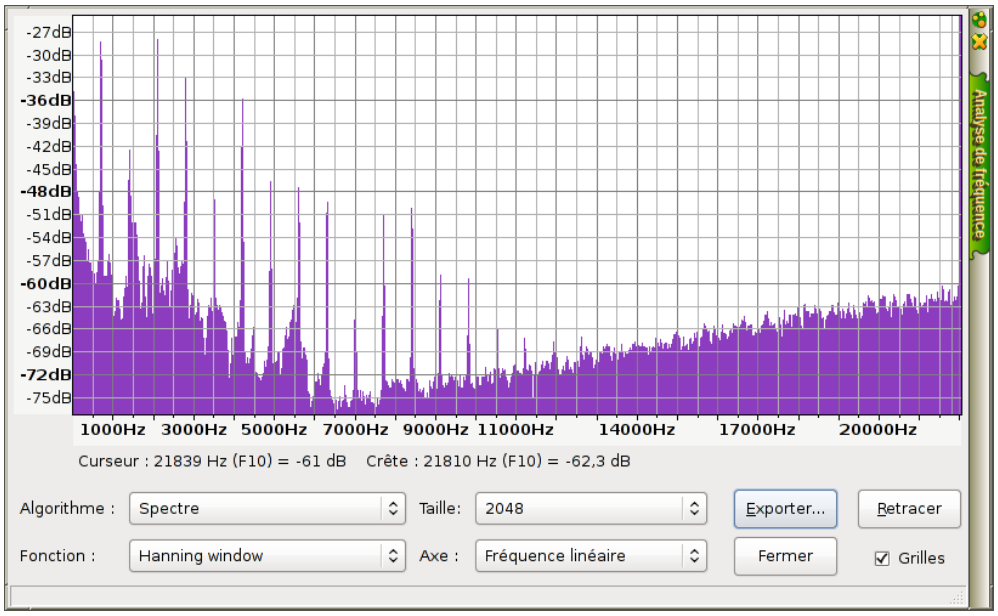
Sur cette courbe, on voit des résonances infinies, de facteur de qualité infini, car on a négligé tout frottements dans la corde. Si on ajoute des frottements au modèle, on peut montrer (cf. l'an prochain) que les résonances sont finies, et que leurs facteurs de qualité décroissent avec le numéro du mode (courbe en pointillés).

a. On commence à $\frac{f_1}{2}$; en effet, en-dessous, l'enveloppe ne trace même plus un quart de sinusoïde, ce qui fait qu'elle n'atteint jamais la valeur $\frac{e}{\sin(kL)}$, des calculs plus poussés montrent que le maximum de l'enveloppe reste égal à e en-dessous de $\frac{f_1}{2}$.

Ces résonances permettent donc d'exciter une onde stationnaire au choix. Dans les instruments à vent, le principe est d'exciter tous ces modes à la fois en envoyant un son contenant toutes les fréquences possibles ; les ondes stationnaires résonnent alors, et les fréquences correspondantes sont amplifiées. Ainsi, dans un instrument à anche libre comme l'harmonica ou l'accordéon, le souffle fait résonner directement les lames qui vibrent. Dans un instrument de la famille des bois, le souffle fait vibrer l'anche qui fait résonner la colonne d'air ; l'anche, qui au départ vibrait sans fréquence particulière, peut alors par couplage se mettre à vibrer aux fréquences propres de la colonne d'air. On a la même chose dans le son très complexe du violon : l'archet qui glisse sur la corde la fait vibrer selon un mécanisme appelé « collé-glissé » qui fait vibrer la corde à un peu toutes les fréquences ; la résonance de la corde « sélectionne » ses fréquences propres, et en retour le « collé-glissé » de l'archet se met à vibrer lui aussi à ces fréquences, engendrant un son très riches en harmonique.

On peut vérifier la présence des modes dans le son en l'enregistrant et en faisant son spectre (par une méthode appelée « analyse de Fourier »). La figure O5.10 montre le spectre (tracé avec le logiciel Audacity) d'un harmonica jouant une note ; on reconnaît bien le peigne de fréquences par-dessus le bruit de fond.

FIGURE O5.10 : Spectre d'une note jouée par un harmonica.



B.2. Ondes stationnaires en régime libre

Dans d'autres instruments comme le piano ou la guitare, on excite la corde une seule fois, à l'instant initial, et ensuite on la laisse vibrer et produire un son ; c'est aussi le cas des percussions. Ce phénomène repose sur des propriétés d'algèbre linéaire. On peut montrer que les enveloppes des ondes stationnaires forment une base de l'ensemble des enveloppe possibles, c'est-à-dire que toute fonction $y(x)$ respectant les conditions aux limites peut être décomposée comme une combinaison linéaires des enveloppes des modes propres. Autrement dit, si on considère une corde tendue, par exemple, avec des ondes stationnaires d'enveloppe $g_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$, alors toute fonction $y(x)$ vérifiant les conditions aux limites peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

où a_n représente l'amplitude de l'onde n (qui est aussi la n-ième harmonique, dans l'espace temporel).

Ainsi, lorsqu'on pince, frappe ou gratte une corde, on impose une condition initiale $y(x,0)$ à la corde qui va exciter les modes avec des amplitudes différentes ; ensuite, ces modes oscillent librement, chacun à sa propre fréquence, ce qui produit le son.

Comment calculer les amplitudes a_n pour savoir quelles ondes vont être excitées ? Il y a deux points de vue, l'un qualitatif, l'autre calculatoire :

— qualitativement, quand on pince ou qu'on frappe une corde en un point, on va faire vibrer la corde en ce point. Les modes qui ont un ventre en ce point vont être mis en mouvement, au contraire des modes qui ont un nœud en ce point et qui ne seront pas excités ;

— par le calcul, les coefficients a_n sont proportionnels (à un facteur près de normalisation) à l'intégrale du produit de la condition initiale avec l'enveloppe du mode :

$$a_n \propto \int_0^L y(x,0).g_n(x)\mathrm{d}x$$

On peut tester cela avec une corde pincée. Prenons comme conditions initiales celles de la figure O5.11(a) : on écarte en $x = a$ la corde d'une amplitude e, et elle prend la forme d'un triangle ; on la lâche alors. La formule ci-dessus permet de calculer les amplitudes des modes. La figure O5.11 montre le résultat pour deux positions initiales :

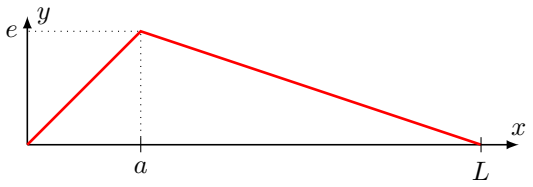
— pour $a = \frac{L}{2}$, tous les modes impairs sont visibles, les modes pairs ne le sont pas. En effet, les modes pairs ont un nœud au point où on a pincé la corde ;

— pour $a = \frac{L}{5}$, les modes 5, 10, ...sont invisibles ; les autres modes sont présents, mais avec des amplitudes variables.

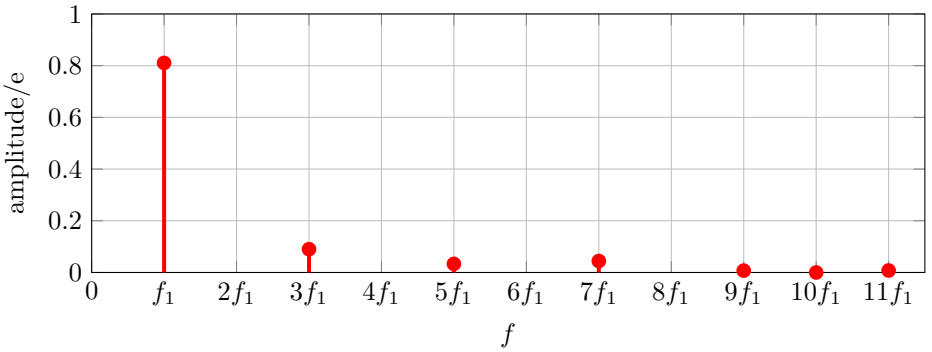
Dans tous les cas, on constate que les amplitudes décroissent vite : le pincement d'une corde donne un son assez pauvre en harmoniques.

Cette excitation sélective des ondes stationnaires est utilisée en musique pour éliminer la 7e harmonique dissonante. En effet, lorsque notre cerveau entend deux notes, il trouve l'accord agréable lorsque les fréquences de ces notes sont

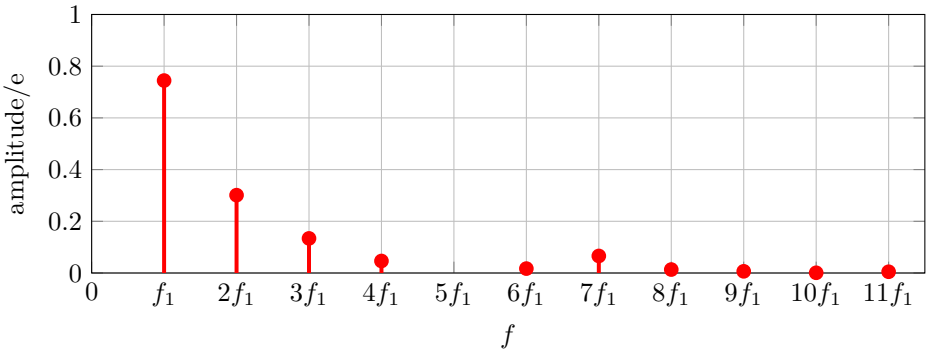
FIGURE O5.11 : Pincement d'une corde.



(a) (a) Conditions initiales



(b) (b) Pincement en $a = L/2$



(c) (c) Pincement en $a = L/5$

dans des rapports 2, $\frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{4}$, correspondant à des intervalles musicaux nommées *octave*, *quinte* et *tierce*. Lorsqu'un excite le fondamental et les harmoniques d'une corde, on obtient :

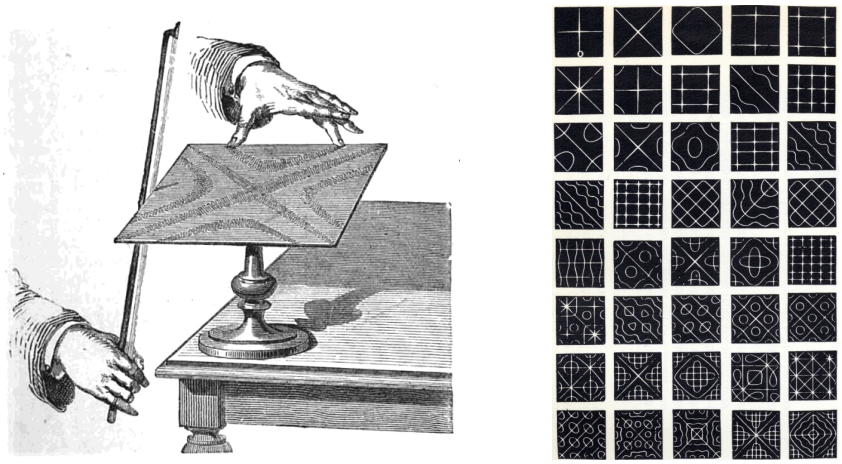
- le fondamental de fréquence f_1
- la deuxième harmonique de fréquence $2f_1$, donc une octave au-dessus
- la troisième harmonique de fréquence $3f_1 = 2 \times \frac{3}{2} f_1$, donc une octave et une quinte au-dessus
- la quatrième harmonique de fréquence $4f_1 = 2 \times 2f_1$, donc deux octaves au-dessus
- la cinquième harmonique de fréquence $5f_1 = 2 \times 2 \times \frac{5}{4} f_1$, donc deux octaves et une tierce au-dessus
- la sixième harmonique de fréquence $6f_1 = 2 \times 2 \times \frac{3}{2} f_1$, donc deux octaves et une quinte au-dessus
- la septième harmonique de fréquence $7f_1$, dissonante
- …

Ainsi, pour avoir un son plus agréable, il faut que la septième harmonique soit faible ; c'est pour cela que le point d'attaque de la corde dans la guitare, le violon ou le piano est environ au septième de la longueur de la corde.

On peut encore combiner les effets de résonance et de nœuds/ventres imposés. Par exemple, en jouant une note sur une guitare ou un violon, et en effleurant la corde en son milieu, on impose un nœud au milieu de la corde. Toutes les harmoniques impaires disparaissent alors, et la première harmonique non nulle est celle de fréquence f_2 : on obtient donc un son de hauteur double, et à la sonorité particulière.

C'est ce phénomène qu'utilisait Ernst Chladni pour étudier les ondes stationnaires en deux dimensions. Il disposait de plaques en cuivre de formes diverses sur lesquelles était saupoudré du sable. En frottant le bord de la plaque avec un archet (figure O5.12), il voyait apparaître des motifs : une onde stationnaire se formait sur la plaque, et les ventres chassaient le sable vers les nœuds. En posant ses doigts en certains endroits de la plaque, il forçait des nœuds et faisait ainsi apparaître une étrange famille d'ondes stationnaires.

FIGURE O5.12 : Figures de Chladni sur une plaque.(Crédit : Wikipedia)



On retrouve ces ondes stationnaires bidimensionnelles à la surface d'un verre d'eau lorsqu'on tapote contre son bord.

O5. Ondes stationnaires

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modes propres.	Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres. Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde. Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres. Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique.

O5. Ondes stationnaires

Quelques conseils

✎ Pour cette année, admettez que, pour un système linéaire homogène, l'enveloppe des ondes stationnaires est sinusoïdale ; l'an prochain, vous le démontrerez à partir d'équations aux dérivées partielles.

✎ Les conditions aux limites (nœuds ou ventres) seront indiquées dans l'énoncé ; à vous de savoir les traduire mathématiquement.

O5. Ondes stationnaires

QCMs

réponses page 801

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Les ondes stationnaires ont toujours une enveloppe sinusoïdale :

(a). Vrai
(b). Faux

Q2. La pulsation spatiale vérifie les relations :

(a). $k = \frac{\omega}{c}$
(b). $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
(c). $k = \frac{\lambda}{2\pi}$
(d). $k = \frac{c}{\omega}$

Q3. En un ventre, l'enveloppe $g(x)$ d'une onde stationnaire vérifie :

(a). $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 0$
(b). aucune propriété particulière
(c). $g(x) = 1$
(d). $g(x) = 0$

Q4. Le spectre des fréquences propres d'une corde tendue s'appelle :

(a). un peigne de fréquences
(b). un spectre en bâtons
(c). un spectre continu
(d). une forêt de fréquences

Q5. Les fréquences propres d'un système linéaire homogène avec des nœuds à chaque bout sont de la forme :

(a). $(2n-1).f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(b). $n.f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(c). $2n.f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(d). $n^2.f_1, n \in \mathbb{N}^*$

Q6. Les fréquences propres d'un système linéaire homogène avec un nœud à un bout et un ventre à l'autre bout sont de la forme :

(a). $n^2.f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(b). $n.f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(c). $(2n-1).f_1, n \in \mathbb{N}^*$
(d). $2n.f_1, n \in \mathbb{N}^*$

O5. Ondes stationnaires

Exercices

réponses page 802

Exercice O5.1 : Cavité électromagnétique [*]

Une onde électromagnétique (dont la lumière visible) est une onde où deux grandeurs se propagent : le champ électrique E et le champ magnétique B. À la surface d'un métal, le champ électrique est nul.

1. La lumière visible a des longueurs d'ondes entre 400 nm et 750 nm. Calculer la plage de fréquences correspondante (on donne $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).
2. Supposons que vous entrez dans une pièce avec des murs métalliques sur deux côtés. Cela impose la quantification des modes propres des ondes électromagnétiques dans la pièce, comme sur une corde fixée à ses deux bouts.

   Disons que la pièce a pour longueur 2 m. Que vaut la fréquence fondamentale f_1 des modes propres ?
3. Puisque tous les modes ont des fréquences espacées de f_1, calculez le nombre de modes possibles dans le visible. Pensez-vous que la quantification des modes propres va être sensible ?
4. Calculez la longueur que devrait avoir la pièce pour que la fréquence f_1 soit égale à la largeur fréquentielle du spectre visible (dans une telle pièce, la vie serait monochrome !).

Exercice O5.2 : Ondes sonores dans un tube ouvert à ses deux extrémités [*]

On prend un tube de section circulaire constante dans lequel on fait se propager des ondes sonores (tube de Kundt) à la vitesse $c = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ constante. Le tube est ouvert à ses deux extrémités ($x = 0$ m et $x = L = 1$ m). Cela impose en $x = 0$ et $x = L$ des nœuds de vitesse et des ventres de pression.

1. En travaillant sur l'onde de vitesse, trouvez la forme des modes propres et le spectre de fréquences associés.
2. Procédez de même avec l'onde de pression ; vous devez trouver le même spectre, mais des modes de forme mathématique différente.

Exercice O5.3 : Four à micro-ondes [**]

Dans un four à micro-ondes, on génère des ondes électromagnétiques de fréquence $f = 2{,}45$ GHz ; leur vitesse de phase vaut $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Le four a pour longueur a. Il s'y forme un système d'ondes stationnaires avec des nœuds sur les parois. On suppose le four unidimensionnel pour simplifier, les ondes se déplacent dans la direction x, et le signal transporté par l'onde est un champ électrique $E(x,t)$.

1. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes ?
2. Les parois métalliques imposent au champ E d'être nul sur les bords : $E(0,t) = E(a,t) = 0$ à chaque instant. Déduisez-en la forme des modes propres, et leur fréquence.
3. On suppose que $a = 33$ cm ; la fréquence émise correspond-elle à un mode propre de la cavité ?
4. On prend un modèle plus réaliste : on a bien $E(0) = 0$ (bord métallique) mais en a se trouve le magnétron qui émet l'onde, d'amplitude m ; on a donc $E(a,t) = m\cos(2\pi f t)$.

   Déterminez la forme de $E(x,t)$ dans la cavité. Montrer qu'il y a résonance si a vaut certaines valeurs.

Exercice O5.4 : Ondes dans une baignoire [**]

Une baignoire de longueur $\ell = 190$ cm est remplie d'eau. Des ondes stationnaires peuvent s'y former. On admet que, si on la remplit bien, la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = g.k$ avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$; le système est linéaire. On admet que les ondes stationnaires qui s'y forment admettent un **ventre** à chaque bout (en $x = 0$ et $x = \ell$).

1. Établir la forme de l'enveloppe des ondes stationnaires. Dessiner l'enveloppe des 4 premiers modes.
2. Établir la pulsation ω_n du mode n.

3. Calculez numériquement les 4 premières fréquences d'oscillation.

Exercice O5.5 : Corde avec raideur [**]

On considère une corde de masse linéique $\mu = 1{,}8\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ tendue avec une force T. Cette corde est fixée sur un violon ; à ses deux extrémités. Sa longueur vaut $L = 36\,\mathrm{cm}$.

1. Retrouver rapidement la forme des modes propres de cette corde.
2. On suppose pour le moment que la corde est non dispersive, les ondes y ont une célérité $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.
   Que vaut la fréquence fondamentale de cette corde ?
   Quelle tension doit-on appliquer pour jouer un La à 440 Hz ?
3. En réalité, la raideur de la corde impose une relation de dispersion légèrement modifiée : $\omega = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\left(k + \frac{\alpha^2}{8T^2k}\right)$ où α est une constante réelle.
   On mesure pour la corde de La les fréquences des premiers modes propres : 440 Hz ; 879,7 Hz ; 1319,5 Hz ; 1759,3 Hz ; 2199,1 Hz.
   À l'aide d'une régression linéaire de $i \times f_i$ en fonction de i^2 (où i est le numéro du mode), vérifiez la loi et déterminez T et α pour cette corde.

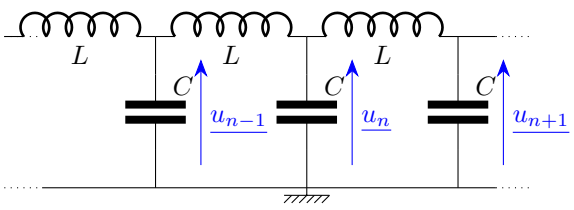
Exercice O5.6 : Anharmonicité d'une flûte à bec [**]

Une flûte à bec est un tube cylindrique de rayon intérieur $r = 2\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 31\,\mathrm{cm}$. Le côté de la bouche est quasiment fermé, on y prendra la vitesse nulle. L'autre côté est ouvert sur l'espace extérieur (on suppose que tous les trous sont fermés), ce qui correspond à un ventre de vitesse.
Les ondes sonores s'y propagent. Dans l'air elles ont pour vitesse de phase $c = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Mais dans le tuyau la vitesse est modifiée, elle vaut $v = \frac{c}{1+\frac{\alpha}{r\sqrt{\omega}}}$ avec $\alpha = 4{,}0\times10^{-3}$ USI, r le rayon en mètres et ω en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

1. À quelle fréquence la vitesse est-elle diminuée de 10 % dans la flûte par rapport à l'air libre ? Commentez.
2. Établissez la forme des ondes stationnaires $v(x,t)$ dans la flûte. On notera k_i la pulsation spatiale du mode i (qu'on exprimera) et ω_i sa pulsation temporelle.
3. Calculez les 4 premières fréquences dans le cas où on néglige la dispersion : $v = c = \mathrm{cst}$.
4. On tient compte maintenant de la modification de v avec ω. À partir de la définition de v et de son expression, montrez que, si k est connu, ω vérifie une équation du type $a\omega + b\sqrt{\omega} + d = 0$. Comment résout-on cette équation ?
   À partir des valeurs k_1 et k_2 de la pulsation spatiale des deux premiers modes, calculez ω_1 et ω_2. Déduisez-en le rapport f_2/f_1.
5. Dans le cas non dispersif, ce rapport vaut 3. On appelle anharmonicité de la flûte à l'harmonique 2 la différence (en pourcents) entre le rapport f_2/f_1 et la valeur idéale 3. Calculez cette anharmonicité.
6. En réalité, la valeur de c dépend de divers paramètres, entre autres la température. On admet que c est proportionnelle à la racine carrée de la température en Kelvins.
   La valeur $c = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ donnée plus haut est à 20 °C. En soufflant dans la flûte, le joueur chauffe l'intérieur. Calculez la nouvelle fréquence fondamentale si la température vaut désormais 30 °C.
   La note à 261 Hz est un Do_3 ; sachant que le Do dièse se situe $\sqrt[12]{2}$ au-dessus en fréquence, commentez le résultat précédent.

Exercice O5.7 : Chaîne de « LC » fermée [***]

Exercice d'électricité, pas forcément très utile.
On considère une chaîne de n cellules de type « CL »



Toutes les inductances valent L, tous les condensateurs valent C.

1. Établissez une relation entre $\underline{u_{n-1}}$, $\underline{u_n}$ et $\underline{u_{n+1}}$.
2. On propose une solution de la forme $\underline{u_m}(\omega,t) = \underline{A}.\sin(qm).e^{j\omega t}$. Montrez que q doit vérifier une relation de la forme $\cos q = f(\omega)$.
3. On suppose que le système est fermé à ses deux extrémités par un fil : $\underline{u_0}(\omega,t) = \underline{u_n}(\omega,t) = 0$. Déduisez-en la valeur de q dans le mode i.
4. On réalise ce circuit avec $C = 220\,\text{nF}$ et $L = 2\,\text{mH}$, pour $n = 7$. Calculez les fréquences des n premiers modes propres (les suivants sont identiques).

Exercice O5.8 : Superposition de plusieurs modes propres [***] .py plot

Cet exercice de programmation peut aider à faire le lien avec les ondes progressives.

1. On suppose qu'on excite à $t = 0$ les deux premiers modes d'une corde de Melde de longueur ℓ, de telle sorte que $y(x,0) = \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{\ell}\right)$
   Exprimer la forme de $y(x,t)$ sachant que chaque mode évolue à sa propre fréquence.
2. Soit T_0 le période du mode fondamental. À l'aide d'un programme en Python, tracez $y(x,t)$ aux instants 0, $T_0/4$, $T_0/2$, $3T_0/4$ et T_0. Commentez (en fait, pour mieux voir, il vaut mieux tracer la valeur absolue de y, on interprète mieux ce qui se passe sans l'effet de signe ; pensez aussi à décaler les courbes verticalement).
3. Étudiez de même l'évolution de $y(x,0) = \frac{2}{3}\sin\left(\pi\frac{x}{\ell}\right) + \sin\left(2\pi\frac{x}{\ell}\right) + \frac{2}{3}\sin\left(3\pi\frac{x}{\ell}\right) + \frac{1}{6}\sin\left(4\pi\frac{x}{\ell}\right)$

O5. Ondes stationnaires

TDs numériques

réponses page 805

TD numérique : Vibration d'une corde de guitare

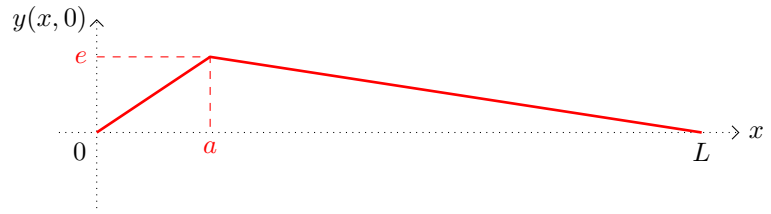
Ad $\int f(x).\mathrm{d}x$

On considère une corde de guitare de longueur $L = 58\,\mathrm{cm}$ sur laquelle se propagent des ondes de célérité $c = 720\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On rappelle que, sur cette corde, des ondes stationnaires peuvent se former, de la forme

$$y_n(x,t) = \sin(k_n x).\cos(\omega_n t) \text{ avec } k_n = n\frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_n = n\frac{\pi c}{L} \tag{1}$$

à une constante multiplicative près.

1. Calculez la fréquence du fondamental.
2. À l'instant $t = 0$, on pince la corde, c'est-à-dire qu'on lui donne le profil suivant :



Pour les valeurs numériques on prendra $e = 1\,\mathrm{cm}$ et $a = \frac{L}{7}$.
Définissez une fonction qui renvoie $y(x,0)$, et tracez-la sur l'intervalle $[0; L]$ pour vérifier qu'elle fonctionne bien.
Attention, une fonction contenant des tests ne peut pas être vectorisée (on ne peut pas lui donner un tableau de valeurs comme argument).

3. On admet que la forme initiale de la corde peut se décomposer sur la base des modes propres selon la formule

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x,0) \text{ avec } a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0).y_n(x,0)\mathrm{d}x \tag{2}$$

Pour calculer l'intégrale, on va utiliser la fonction `scipy.integrate.quad(f,a,b)` qui calcule l'intégrale de la fonction à une seule variable f entre a et b, et renvoie **un tuple** contenant la valeur de l'intégrale et l'incertitude sur la valeur.
Écrivez un programme qui calcule la liste des coefficients a_n pour n allant de 0 à $N = 100$ (pour $n = 0$ on prendra $a_0 = 0$).

4. Écrivez alors une fonction qui renvoie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.y_n(x,0)$, tracez-la et vérifiez qu'on retrouve bien $y(x,0)$.
5. Chaque mode propre va alors évoluer selon sa propre loi ; on aura donc

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x,t) \tag{3}$$

Écrivez une fonction qui renvoie $y(x,t)$ calculé avec N termes ; tracez-la pour $t = 0$, $t = \frac{T}{8}$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{3T}{8}$, $t = \frac{T}{2}$ et $t = \frac{3T}{4}$ où T est la période du fondamental. Commentez l'onde obtenue.
Indication : pour mieux voir ce qui se passe, décalez chaque courbe verticalement de $2e$ par rapport à la précédente.

6. En réalité, les modes propres s'amortissent selon une loi quasi-exponentielle de temps caractéristique τ_n. On admet que $\tau_n \approx \frac{\tau_1}{n^2}$ et on prendra $\tau_1 = 50T$.
Modifiez la fonction renvoyant $y(x,t)$ et tracez-la à $t = 0$, $t = 10T$, ..., $t = 50T$. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Ce n'est vrai que si le système est homogène.
Q2.(a) ET (b)
Q3.(a)
Q4.(a)
Q5.(b)
Q6.(c)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice O5.1 : Cavité électromagnétique [*]

1. $f = \frac{c}{\lambda}$ donc ça va de 4×10^{14} Hz à $7{,}5 \times 10^{14}$ Hz
2. $f_1 = \frac{c}{2L} = 7{,}5 \times 10^7$ Hz
3. $\frac{(7{,}5-4).10^{14}}{7{,}5.10^7} = 4,7.10^6$ modes. On ne s'en rend pas compte, mais on peut remarquer que c'est approximativement le nombre de couleurs des écrans d'ordinateur en mode 24bits.
4. On trouve 430 nm

Corrigé de l'exercice O5.2 : Ondes sonores dans un tube ouvert à ses deux extrémités [*]

1. Le tube est homogène, on propose donc un mode propre de la forme $v(x,t) = \cos(\omega t).(A.\cos(kx) + B.\sin(kx))$
   Les conditions aux limites entraînent alors $A = 0$ et $\sin(k_i L) = 0$ donc $k_i.L = i\pi$ soit $k_i = i\frac{\pi}{L}$; et $\omega_i = i\frac{\pi c}{L}$ soit $f_i = i\frac{c}{2L}$. On retrouve donc un peigne de fréquences de fondamental $f_1 = 200$ Hz.
   Les modes propres sont finalement de la forme $v(x,t) = B\sin\left(i\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(i\frac{\pi c}{L}t\right)$
2. Le tube est homogène, on propose donc un mode propre de la forme $p(x,t) = \cos(\omega t).(A.\cos(kx) + B.\sin(kx))$ soit $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \cos(\omega t).(-k.A.\sin(kx) + k.B.\cos(kx))$.
   Les conditions aux limites entraînent alors $B = 0$ et $\sin(k_i L) = 0$ donc $k_i.L = i\pi$ soit $k_i = i\frac{\pi}{L}$; et $\omega_i = i\frac{\pi c}{L}$ soit $f_i = i\frac{c}{2L}$. On retrouve donc le même spectre, mais les modes propres sont de la forme $p(x,t) = B\cos\left(i\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(i\frac{\pi c}{L}t\right)$

Corrigé de l'exercice O5.3 : Four à micro-ondes [**]

1. $\lambda = \frac{c}{f} = 12{,}2$ cm
2. À rédiger : on trouve $E(x,t) = A\sin\left(i\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(2\pi i\frac{c}{2a}t\right)$ de fréquence $f_i = i\frac{c}{2a}$
3. $f_1 = 0{,}45$ GHz ; on trouve alors $f_5 = 2{,}27$ GHz et $f_6 = 2{,}72$ GHz donc 2,45 GHz ne correspond pas à un mode.
4. On trouve cette fois $E(x,t) = \frac{m}{\sin\left(\frac{2\pi f a}{c}\right)}\sin\left(\frac{2\pi f}{c}x\right)\sin(2\pi f t)$
   L'amplitude de l'onde vaut $\frac{m}{\sin\left(\frac{2\pi f a}{c}\right)}$, elle présente donc une résonance si $\frac{2\pi f a}{c} = i\pi$ soit $a = i\frac{c}{2f} = i\frac{\lambda}{2}$

Corrigé de l'exercice O5.4 : Ondes dans une baignoire [**]

1. Le système étant linéaire et homogène, on cherche des ondes de la forme $y(x,t) = (A\cos(kx) + B\sin(kx))\cos(\omega t)$. On a un ventre à chaque bout, donc à chaque bout la dérivée $-A.k\sin(kx) + B.k\cos(kx)$ de l'enveloppe est nulle. On en déduit que $\begin{cases} B.k & = 0 \\ -A.k\sin(k\ell) & = 0 \end{cases}$ d'où on tire $A = 0$ et $\sin(k\ell) = 0$ pour avoir une onde non nulle, ce qui implique la quantification de la pulsation spatiale : $k_n = n\frac{\pi}{\ell}$. L'enveloppe des modes est alors de la forme $z_n(x) = B\cos(k_n x)$.
2. $\omega_n = \sqrt{\frac{ng\pi}{\ell}}$
3. 0,65 Hz ; 0,90 Hz ; 1,11 Hz ; 1,28 Hz

Corrigé de l'exercice O5.5 : Corde avec raideur [**]

1. Vu en cours : si x est la direction de la corde et y le déplacement, alors $y(x,t) = A\sin(k_i x)\cos(\omega_i t)$ avec $k_i = i\frac{\pi}{L}$ et $\omega_i = i\frac{\pi c}{L}$ soit $f_i = i\frac{c}{2L}$.
2. $f_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{L}$ donc $T = 4\mu L^2 f_1^1 = 180$ N
3. On a donc $2\pi f_i = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\left(i\frac{\pi}{L} + \frac{L\alpha^2}{8\pi T^2 i}\right)$ soit $i.f_i = \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{\mu}L}i^2 + \frac{L\alpha^2}{16\pi^2 T^{3/2}\sqrt{\mu}}$.
   On effectue la régression linéaire de $i.f_i$ en fonction de i^2 ; on trouve $r = 0,99999$ donc la loi est validée. La pente vaut $439,1$ donc $T = 180$ N ; l'ordonnée à l'origine vaut $0,3353$ donc on en tire $\alpha = 120\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

Corrigé de l'exercice O5.6 : Anharmonicité d'une flûte à bec [**]

1. $v = 0,9c \Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha}{r\sqrt{\omega}} = \frac{1}{0,9} \Leftrightarrow \omega = \left(\frac{\alpha}{r\left(\frac{1}{0,9}-1\right)}\right) = 324\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{s}$ soit $f = 51\,\text{Hz}$ ce qui n'est pas très loin des notes graves. Donc pour des notes trop grave le système sera dispersif.
2. Vu en cours : $v(x,t) = V_0 \sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2L}x\right)\cos(\omega_i t)$ donc $k_i = (2i-1)\frac{\pi}{2L}$
3. $f_i = (2n-1)\frac{c}{4L}$ donc $f_1 = 274\,\text{Hz}$; $f_2 = 822\,\text{Hz}$; $f_3 = 1370\,\text{Hz}$; $f_4 = 1919\,\text{Hz}$
4. $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{1+\frac{\alpha}{r\sqrt{\omega}}}$ donc $\frac{\omega}{k}\left(1+\frac{\alpha}{r\sqrt{\omega}}\right) = c$ soit $\omega + \frac{\alpha}{r}\sqrt{\omega} - ck = 0$. On pose $X = \sqrt{\omega}$, on résout comme un polynome d'ordre 2, puis on en déduit $\omega = \left(-\frac{\alpha}{2r} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{r^2}+4kc}\right)^2$
   Avec $k_1 = 5,067$ on trouve $f_1 = 261\,\text{Hz}$; avec $k_1 = 15,201$ on trouve $f_2 = 800\,\text{Hz}$; donc $f_2/f_1 = 3,062$
5. $\frac{3,062-3}{2} = 2\,\%$
6. $c(30\,^\circ\text{C}) = c(20\,^\circ\text{C})\frac{\sqrt{273+30}}{\sqrt{273+20}} = 345,75\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
   Sans anharmonicité on trouve $f_1 = 279\,\text{Hz}$; avec anharmonicité on trouve $f_1 = 266\,\text{Hz}$. Or le Do# est à $261 \times \sqrt[12]{2} = 276,5\,\text{Hz}$. On a donc un décalage d'environ un tiers de demi-ton.

Corrigé de l'exercice O5.7 : Chaîne de « LC » fermée [***]

1. Par le théorème de Millman (les potentielss des nœuds étant égaux aux tensions par rapport à la masse) : $\underline{u_n}(\omega,t) = \frac{\frac{\underline{u}_{n-1}(\omega,t)}{jL\omega} + \frac{\underline{u}_{n+1}(\omega,t)}{jL\omega}}{jC\omega + \frac{2}{jL\omega}}$ d'où on tire $\underline{u_{n+1}}(\omega,t) + \underline{u_{n-1}}(\omega,t) + \left(-2 + LC\omega^2\right)\underline{u_n}(\omega,t) = 0$
2. $\underline{u_{n+1}}(\omega,t) + \underline{u_{n-1}}(\omega,t) = 2\underline{A}\sin(q.m)\cos q e^{j\omega t}$ donc l'équation se simplifie et devient $\cos q = 1 - \frac{LC\omega^2}{2}$
3. Calcul classique : $q_i = i\frac{\pi}{n}$
4.

i	q_i	$\omega_i(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	$f_i(\text{Hz})$
1	$\frac{\pi}{7}$	21200	3380
2	$\frac{2\pi}{7}$	41400	6580
3	$\frac{3\pi}{7}$	59400	9460
4	$\frac{4\pi}{7}$	74500	11860
5	$\frac{5\pi}{7}$	85900	13670
6	$\frac{6\pi}{7}$	93000	14790
7	π	95300	15170

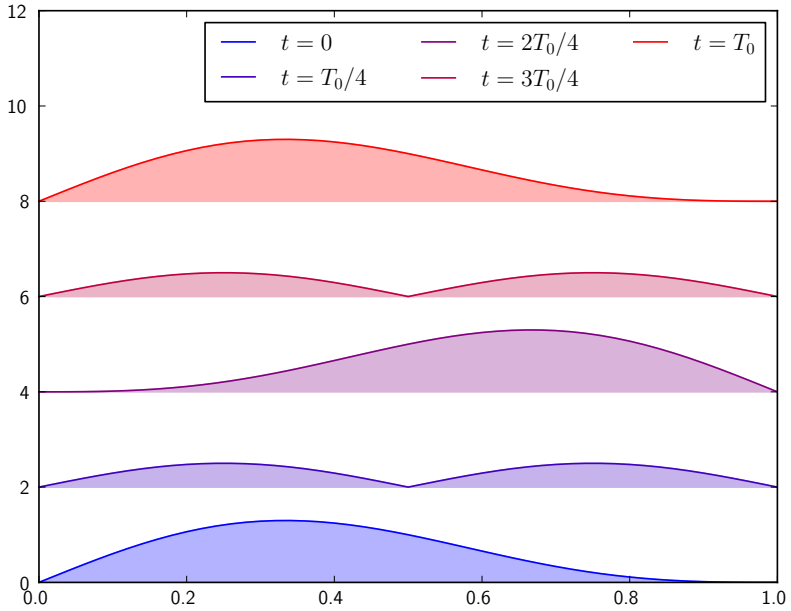
Corrigé de l'exercice O5.8 : Superposition de plusieurs modes propres [***]

1. $y(x,t) = \sin\left(\pi\frac{x}{\ell}\right)\cos\left(\pi\frac{c}{\ell}t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{\ell}\right)\cos\left(2\pi\frac{c}{\ell}t\right)$
2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

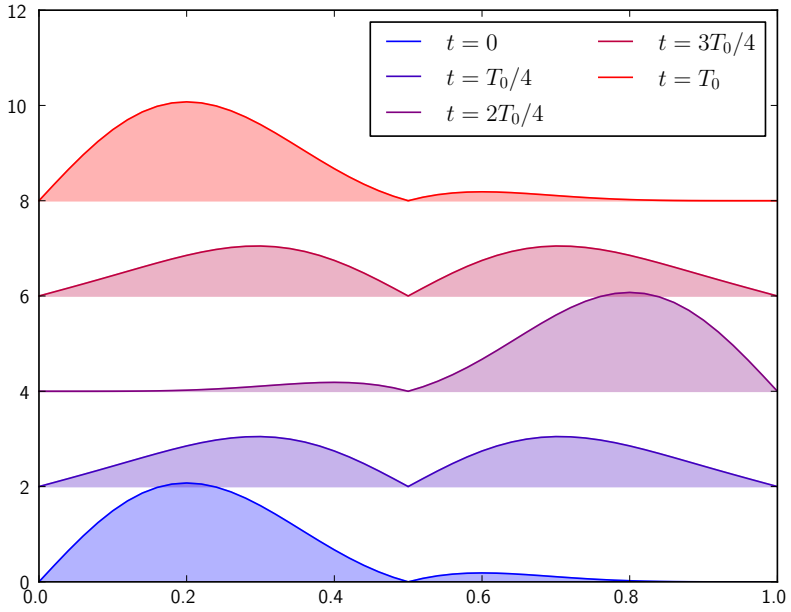
# on normalise tout en prenant l=1 et c=1 donc T0=pi
T0=2
N=50 # nombre de points
x=[i/N for i in range(N+1)] # liste des abscisses
#######
# superposition des modes 1 et 2
plt.figure()
def y1(t,offset=0):
    """ renvoie la liste des valeurs de y à t donné + un offset """
    return [offset+np.abs(np.sin(np.pi*xx)*np.cos(np.pi*t)
           +np.sin(2*np.pi*xx)*np.cos(2*np.pi*t)/2) for xx in x]
plt.plot(x,y1(0,offset=0.0),label="$t=0$",color=(0,0,1))
plt.plot(x,y1(T0/4,offset=2.0),label="$t=T_0/4$",color=(0.25,0,0.75))
plt.plot(x,y1(2*T0/4,offset=4.0),label="$t=2 T_0/4$",color=(0.5,0,0.5))
plt.plot(x,y1(3*T0/4,offset=6.0),label="$t=3 T_0/4$",color=(0.75,0,0.25))
plt.plot(x,y1(T0,offset=8.0),label="$t=T_0$",color=(1,0,0))
```

```
plt.fill_between(x,0,y1(0,offset=0.0),color=(0,0,1),alpha=0.3)
plt.fill_between(x,2,y1(T0/4,offset=2.0),color=(0.25,0,0.75),alpha=0.3)
plt.fill_between(x,4,y1(2*T0/4,offset=4.0),color=(0.5,0,0.5),alpha=0.3)
plt.fill_between(x,6,y1(3*T0/4,offset=6.0),color=(0.75,0,0.25),alpha=0.3)
plt.fill_between(x,8,y1(T0,offset=8.0),color=(1,0,0),alpha=0.3)
plt.legend(ncol=3);plt.ylim([0,12])
plt.show()
```



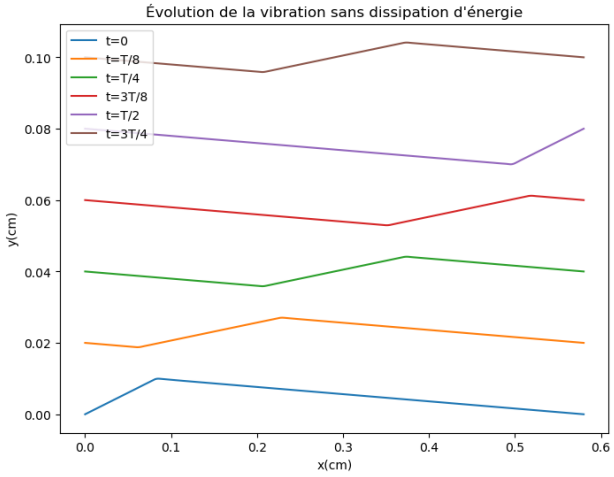
On observe une bosse qui fait un aller retour entre la gauche et la droite, un peu comme une onde propagative qui rebondit sur les bords.

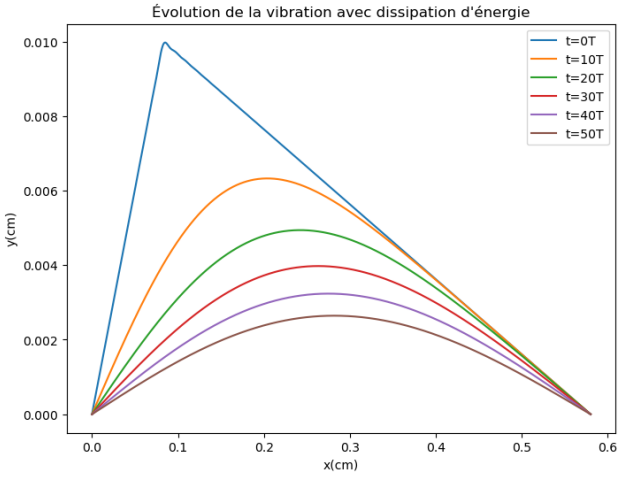
3. L'effet est encore plus marqué



Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Vibration d'une corde de guitare





L'observation sur un temps cours montre une onde de forme triangulaire qui fait des aller-retour sur la corde.

L'observation sur un temps long montre que les harmoniques élevées s'amortissent rapidement, et il ne reste plus que le monde fondamental.

Chapitre M6 Coordonnées cylindriques

Programme p.818

Conseils p.819

Cours p.808
- M6.A. Coordonnées polaires
- M6.B. Le pendule simple
- M6.C. Coordonnées cylindriques

QCMs p.820

Exercices p.822

TDs numériques p.828

M6. Coordonnées cylindriques

Cours

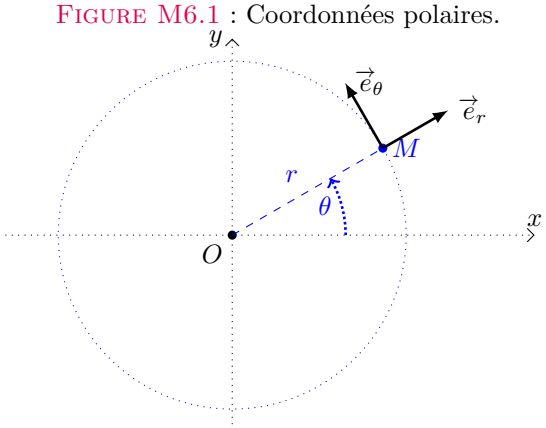
Le seul système de coordonnées que nous avons vu jusqu'à présent est le système cartésien. Il nous a permis d'étudier un certain nombre de situations, mais n'est pas adapté pour les mouvements circulaires. Nous allons donc introduire dans ce chapitre un nouveau système de coordonnées adapté aux cercles.

M6.A. Coordonnées polaires

Commençons en 2D, pour repérer un point dans le plan. Vous avez déjà vu en maths qu'un point du plan peut être associé à un nombre complexe, et que ce nombre complexe peut s'écrire soit sous forme cartésienne (partie réelle, partie imaginaire) soit sous forme polaire (module, argument). C'est le même principe que nous allons utiliser ici.

Considérons un point M dans le plan (figure M6.1). Il peut être repéré de manière univoque par la donnée de l'angle θ et de la distance r.

FIGURE M6.1 : Coordonnées polaires.



Définition : coordonnées polaires

Un point M est repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\theta = (\widehat{\vec{e}_x, \overrightarrow{OM}})$.

Le rayon r varie dans $\mathbb{R}^+$ tandis que l'argument θ varie entre 0 et 2π ; on peut remarquer que, si M est à l'origine, l'angle θ peut prendre toutes les valeurs.

Propriété : Coordonnées cartésiennes

Un point de coordonnées polaires (r, θ) a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{M6.1}$$

Démonstration

Il suffit de projeter le point M sur les axes Ox et Oy puis d'appliquer les définitions de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Les coordonnées permettent de repérer un point ; mais pour écrire le PFD, il nous faut aussi une base sur laquelle on va pouvoir projeter ; orthonormée, si possible. Cette base est définie en regardant les directions dans lesquelles se déplace le point M lorsque r ou θ varient.

Définition : Base polaire

On définit la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (figure M6.1) avec

— $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ le *vecteur radial*, unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{OM}$

— $\vec{e}_\theta$ le *vecteur orthoradial*, unitaire, tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $\vec{e}_r$

Ces deux vecteurs dépendant de la position de M, et donc du temps.

! En coordonnées cylindriques, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du temps ; dans le cours, j'écrirai donc $\vec{e}_r(t)$ et $\vec{e}_\theta(t)$; dans les exercices, on peut s'en passer, car l'écriture devient vite lourde, mais il faut toujours se souvenir que ces deux vecteurs polaires ne sont pas constants.

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) \qquad \text{(M6.2)}$$

Démonstration

Pour aller de O à M, on se déplace uniquement selon la direction de $\vec{e}_r$, sur une longueur r.

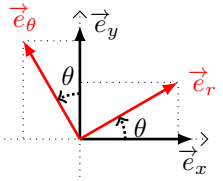
Une fois le vecteur position connu, on veut en déduire la vitesse ; pour cela on le dérive. Mais une difficulté arrive alors : le vecteur $\vec{e}_r$ n'étant pas constant, il faut le dériver. Pour s'en sortir, il faut repasser par les vecteurs fixes.

Propriété : Dérivées des vecteurs de base

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t) \end{cases} \qquad \text{(M6.3)}$$

Démonstration

On commence par décomposer les vecteurs de base sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Avec un bon schéma, on trouve : $\begin{cases} \vec{e}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y \end{cases}$



Si

on dérive : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta(t)\vec{e}_x)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta(t)\vec{e}_y)}{\mathrm{d}t}$

$= \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}\sin\theta(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y$ puisque $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont fixes

$= -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_x + \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\vec{e}_y = \dot{\theta}(t).(-\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$

De même, on trouve que $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\vec{e}_x - \dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_y = -\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)$.

Cette propriété nous permet d'exprimer la vitesse et l'accélération de M sur la base polaire :

Propriété : Vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) \qquad \text{(M6.4)}$$

Démonstration

$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r(t)\vec{e}_r(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r(t) + r(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$

Remarque : $\dot{\theta}$ s'appelle la *vitesse angulaire*.

Propriété : Accélération

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r(t) + \left(r(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta(t) \qquad \text{(M6.5)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{r}(t)\vec{e}_r(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t))}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r(t) + \dot{r}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + r(t)\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t}\\ &= \ddot{r}(t)\vec{e}_r(t) + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t).(-\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t))\\ &= \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r(t) + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta(t)\end{aligned}$$

Propriété : Accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse v, la *vitesse angulaire* $\dot{\theta}$ est constante, et l'accélération est *radiale* (selon $\vec{e}_r$), *centripète* (vers le centre), et de norme $\frac{v^2}{R}$.

Démonstration

On suppose $r = \text{cst}$; on en déduit que $\vec{v}(t) = r\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$. Si on suppose que $\|\vec{v}(t)\| = v = \text{cst}$ (mouvement uniforme), alors $r\dot{\theta}(t) = \text{cst}$ donc $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$: la vitesse angulaire du mouvement est constante. L'accélération ne contient alors plus qu'un seul terme : $\vec{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r(t) = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$, une accélération dirigée vers le centre.

On peut aussi considérer le petit déplacement, c'est à dire le déplacement de M si r et θ varient un peu :

Propriété : Petit déplacement

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r.\vec{e}_r + r.\mathrm{d}\theta.\vec{e}_\theta \qquad \text{(M6.6)}$$

Démonstration

Se reporter à la figure M6.1. Si r varie de $\mathrm{d}r$ tandis que θ reste constant, alors le point M se déplace selon la direction $\vec{e}_r$ d'une distance $\mathrm{d}r$, donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r$.
Si θ varie de $\mathrm{d}\theta$ tandis que r reste constant, alors le point M tourne d'un angle $\mathrm{d}\theta$ sur le cercle de rayon r. Il décrit donc un arc de cercle de longueur $r.\mathrm{d}\theta$ dans la direction tangente au cercle, qui est $\vec{e}_\theta$; donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$.
Si les deux varient, on a donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$.

M6.B. Le pendule simple

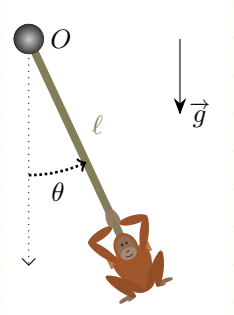
Le pendule simple est un exemple fondamental à bien connaître.

B.1. Étude par les forces

Exemple : Le pendule simple — À connaître

Une masse m est suspendue à une tige (ou un fil) de longueur ℓ fixe, libre de tourner autour d'un axe O.

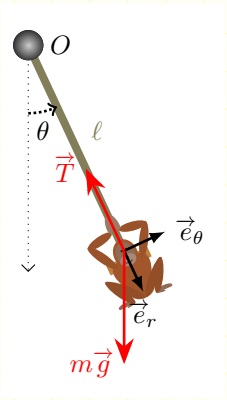
1. Par application du PFD, déterminez l'équation différentielle du mouvement (c'est-à-dire l'ED vérifiée par θ). Est-elle linéaire ?
2. Linéarisez-la pour de petites oscillations, et déterminez la période des petites oscillations.



1. On étudie la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r(t)$ avec $\ell = \text{cst}$ donc $\vec{v} = \ell\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - \ell\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$.
   La masse est soumise à deux actions : son poids $m\vec{g} = mg\cos\theta(t)\vec{e}_r(t) - mg\sin\theta(t)\vec{e}_\theta(t)$ et la tension de la tige $-T\vec{e}_r(t)$.
   Le PFD projeté sur les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ donne alors les équations

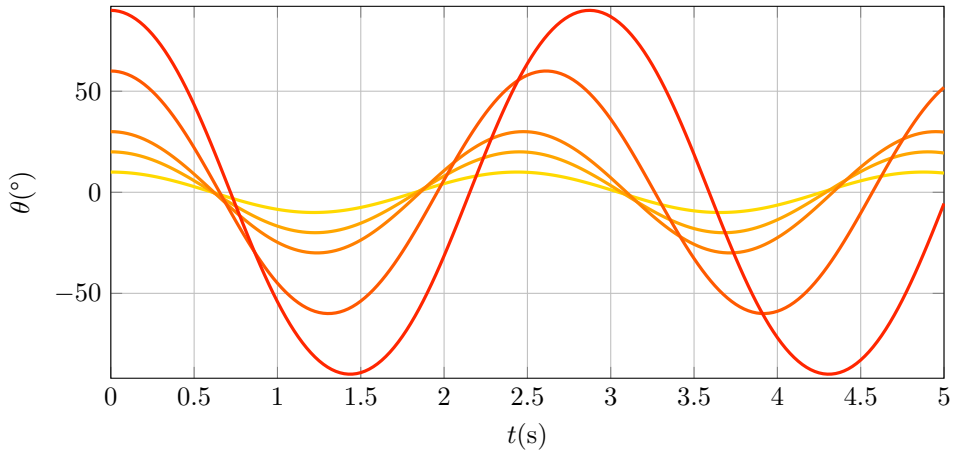
$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}(t)^2 = -T + mg\cos\theta(t) \\ m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg\sin\theta(t) \end{cases}$$

   L'équation du mouvement est donc $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0$. Elle n'est pas linéaire, donc on ne sait pas la résoudre analytiquement.
2. Pour de petits angles, l'équation devient $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Si les angles deviennent supérieurs à 20°, l'approximation des petits angles ne fonctionne plus. On doit passer par un schéma numérique pour résoudre cette équation. La figure M6.2 montre les simulations pour différents angles initiaux ; on constate que, plus l'amplitude augmente, plus les oscillations du pendule ralentissent.

FIGURE M6.2 : Simulations numériques des oscillations d'un pendule de longueur $\ell = 1{,}5\,\text{m}$: on voit un ralentissement lorsque l'amplitude augmente.



B.2. Étude par l'énergie

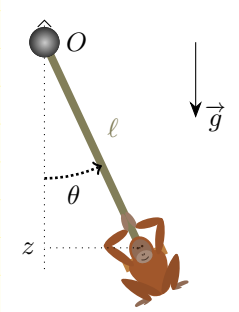
Le pendule simple est un système conservatif à un seul degré de liberté. On peut donc l'étudier selon la méthode vue dans les chapitres ÉNERGIE MÉCANIQUE et OSCILLATEURS MÉCANIQUES.

Exemple : Étude du pendule simple par l'énergie — À connaître

On reprend le modèle d'un pendule simple de masse m et de longueur ℓ.

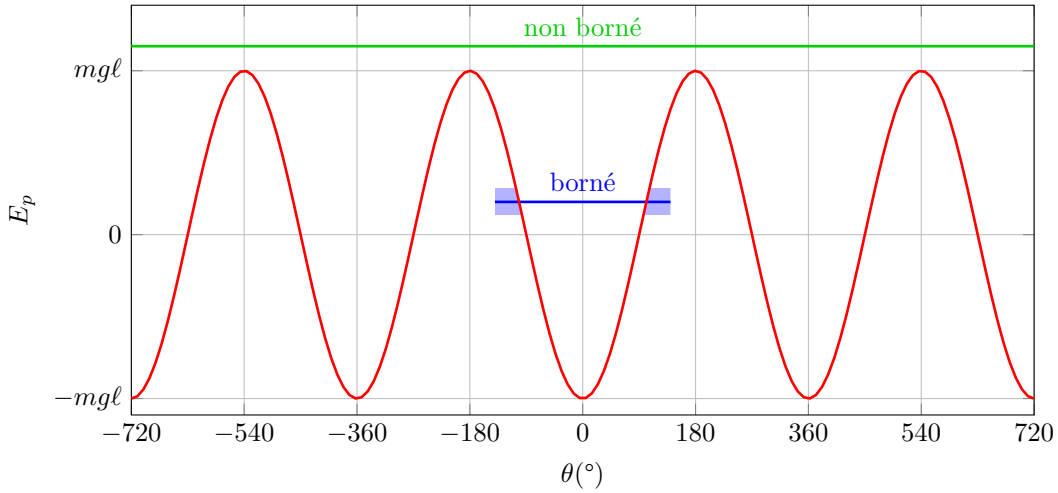
1. Justifiez que ce système est conservatif, et exprimez ses énergies cinétique et potentielles en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes.
2. Tracez le profil de $E_p(\theta)$ et déduisez-en si le mouvement est borné ou pas.
3. Déterminez les positions d'équilibre. Sont-elles stables ?
4. Déterminez l'équation différentielle du mouvement.

1. L'étude cinématique en coordonnées polaires est simple : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r(t)$ donc $\vec{v} = \ell\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ d'où on tire l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2$. La masse M est soumise à deux actions : la tension du fil est selon $\vec{e}_r$ donc orthogonale au mouvement, elle ne travaille donc pas. L'autre force est le poids, d'énergie potentielle $mgz(t)$ avec $z(t)$ l'altitude. Sur le schéma ci-contre, on a indiqué cette altitude z en prenant O comme référence des altitudes. On voit facilement avec un peu de trigonométrie que $|z(t)| = \ell\cos\theta(t)$, et comme M est en-dessous de O on a $z(t) = -\ell\cos\theta(t)$. Donc $E_p = -mg\ell\cos\theta(t)$



   On en conclut que le système est conservatif, d'énergie mécanique $E_c + E_p = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t)$.

2. À chaque instant, $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t) = E_m$ donc $-mg\ell\cos\theta(t) \leq E_m$ (car $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 \geq 0$, c'est un carré). On trace donc la courbe d'énergie potentielle $E_p = -mg\ell\cos\theta(t)$:



   Il y a alors 2 possibilités :
   - si $E_m < mg\ell = E_p(180°)$, alors le mouvement est borné ; l'équation $-mg\ell\cos\theta < E_m$ implique $|\theta| < \arccos\left(\frac{-E_m}{mg\ell}\right)$ donc θ est bornée entre deux angles limites, et le système oscille entre eux ;
   - si $E_m > mg\ell = E_p(180°)$, alors le mouvement n'est pas borné ; de plus, on a $mg\ell\cos\theta > -E_m$ à chaque instant, ce qui signifie que $\dot{\theta}$ ne s'annule jamais : le système tourne donc toujours dans le même sens sans jamais revenir en arrière.

3. Pour chercher les positions d'équilibre, on cherche les angles θ tels que $\frac{\mathrm{d}E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$ soit $\sin\theta = 0$ qui a pour solutions $\theta = 0[\pi]$.

   Pour avoir la stabilité, il faut étudier le signe de la dérivée seconde en ces positions. Or $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = mg\ell\cos\theta$. On a donc deux possibilités :
   - les positions telles que $\theta = 0\,[2\pi]$ sont stables car la dérivée seconde en ces points vaut $mg\ell > 0$.
   - les positions telles que $\theta = \pi\,[2\pi]$ sont instables car la dérivée seconde en ces points vaut $-mg\ell < 0$.

   Remarque : cela correspond au bon sens : la position vers le bas est stable, celle vers le haut est instable.

4. $E_m = \text{cst}$ donc $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$. On exprime : $\frac{\mathrm{d}E_m(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = m\ell\dot{\theta}\left(\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta\right)$. Cette dérivée est nulle ; comme $\dot{\theta}$ n'est pas toujours nul lorsqu'il y a mouvement, c'est la parenthèse qui est nulle : $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.

L'animation de la figure M6.3 montre à quoi ressemble le mouvement dans le cas d'un mouvement borné puis non borné. Dans le cas non borné, il existe deux possibilités de sens de rotation.

La figure M6.4 illustre sur un même schéma le profil d'énergie potentielle en haut, et la trajectoire dans le plan de phase en bas ; on y voit les trajectoires bornées ou non bornées.

En réalité, évidemment, il y a toujours des frottements. Néanmoins, cette étude du cas idéal sans frottements sert pour comprendre ce qui se passe s'il y a des frottements : les barrières de potentiel existent toujours, seulement,

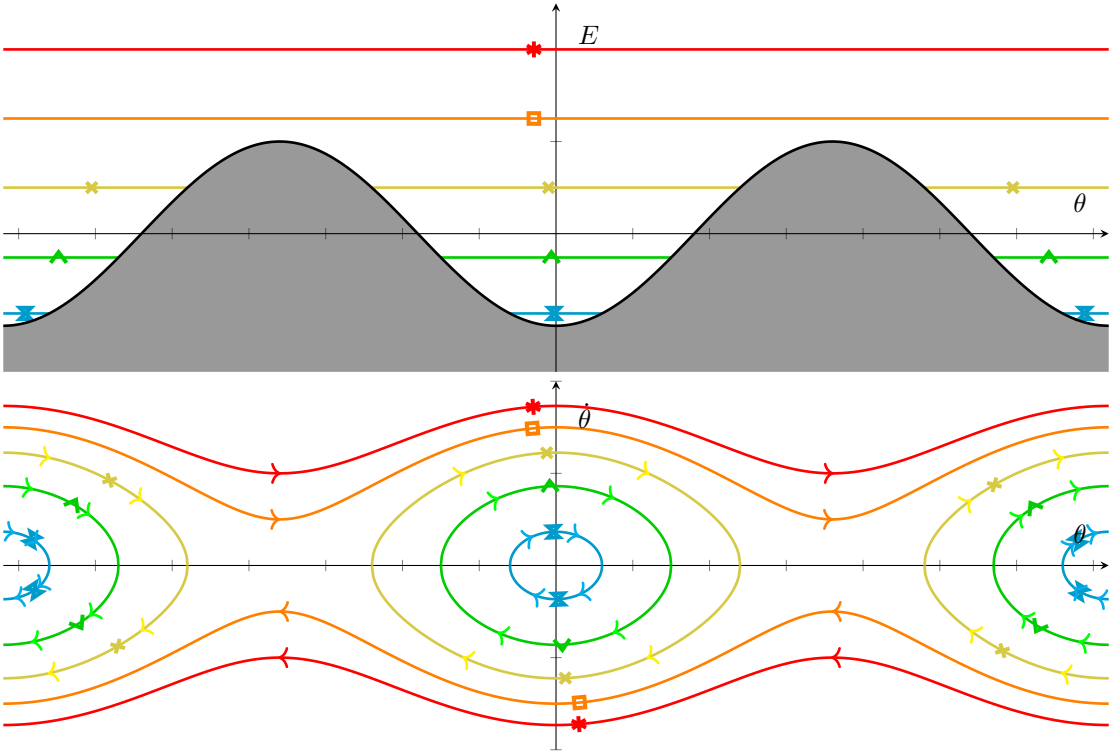
FIGURE M6.3 : Mouvements possibles du pendule simple.



(a) Mouvement à faible énergie

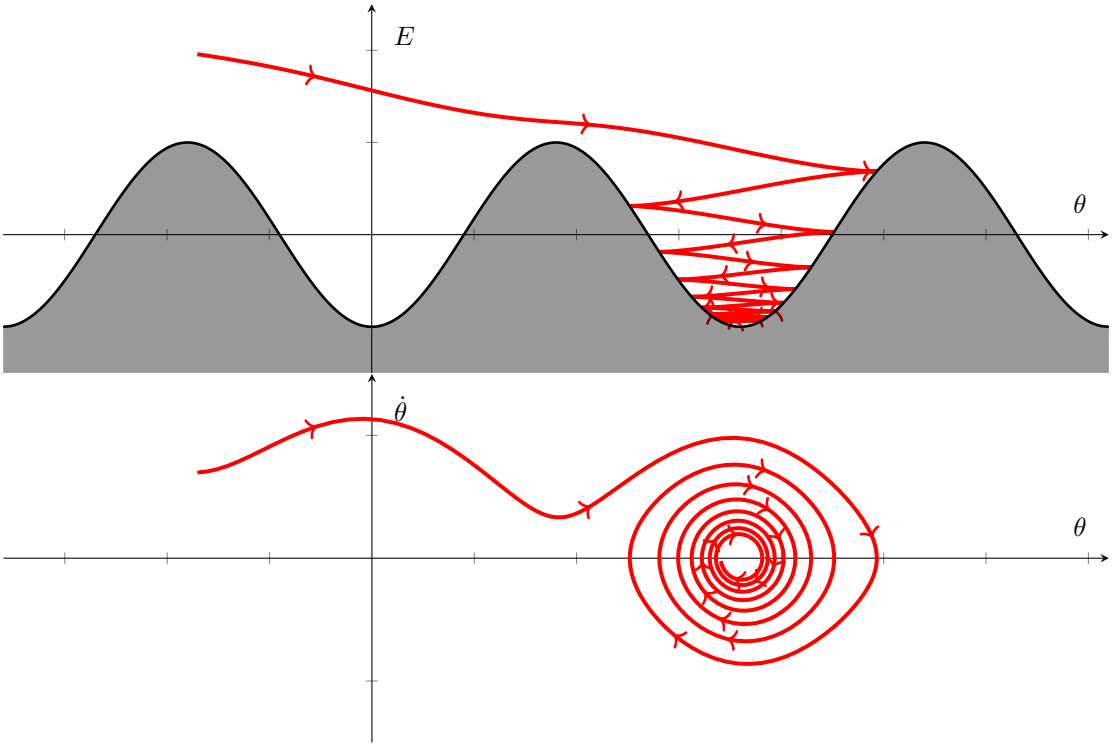
(b) Mouvement à grande énergie

FIGURE M6.4 : Énergie potentielle et portrait de phase du pendule simple.



l'énergie mécanique diminue lentement. La figure M6.5 montre l'exemple d'un pendule simple amorti lancé avec une énergie supérieure à $E_p(180°)$: initialement, son mouvement est non-périodique, le pendule tourne mais ralentit ; puis son énergie mécanique devient inférieure à $E_p(180°)$, et le système se trouve bloqué dans un puits de potentiel : il se met donc à osciller, et comme son énergie mécanique continue de diminuer, l'amplitude de l'oscillation diminue toujours plus, jusqu'à atteindre le fond de la cuvette de potentiel, c'est-à-dire la position d'équilibre stable du pendule.

FIGURE M6.5 : Pendule simple amorti.



Propriété : Calcul de la période exacte d'oscillation (Hors programme)

La période du pendule dépend de l'angle maximal atteint θ_0 selon la loi

$$T = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \sqrt{\frac{2\ell}{g(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta \tag{M6.7}$$

Démonstration

Le système étant conservatif, on sait qu'à chaque instant, $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t)$. En appliquant cette relation au moment où le pendule atteint son angle maximal θ_0, on a aussi $E_m = -mg\ell\cos\theta_0$ puisqu'à ce moment-là, $\dot{\theta} = 0$.
On en déduit que $\forall t$, $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t) = -mg\ell\cos\theta_0$. On peut en isoler

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{\ell}}$$

Sur un aller-retour, le pendule va de $-\theta_0$ à $+\theta_0$ (alors $\dot{\theta} > 0$) puis revient de $+\theta_0$ à $-\theta_0$ (alors $\dot{\theta} < 0$). Si on se limite à la première moitié de l'oscillation, on peut prendre le signe + dans l'égalité précédente. Or $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. En séparant les variables on obtient donc

$$\mathrm{d}\theta\sqrt{\frac{\ell}{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \mathrm{d}t$$

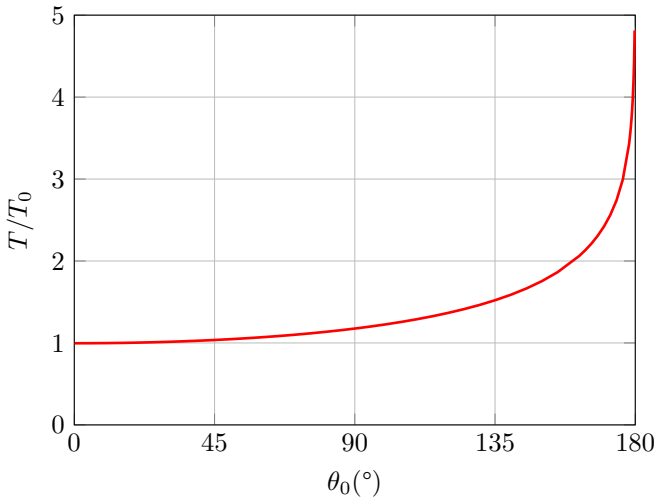
On va intégrer à gauche entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$; cela correspond à une demi-période, donc

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\mathrm{d}\theta\sqrt{\frac{\ell}{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \int_0^{T/2}\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$$

ce qui donne bien la relation affirmée.

Cette intégrale est une intégrale elliptique, compliquée à calculer pour nous, mais pas pour un ordinateur qui en donne la courbe M6.6.

FIGURE M6.6 : Période du pendule simple ($T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est la période des petites oscillations).



La dépendance de la période du pendule avec son amplitude d'oscillation est connue depuis longtemps. Au XVIIIe siècle, le chevalier de Borda établit, par des mesures, une formule approchée de la période du pendule simple :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

où $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est la période des petites oscillations et θ_0 est en radians. Cette formule est un développement limité de la formule exacte (M6.7) :

Calcul : Formule de Borda (Hors programme)

On part de la formule (M6.7) et on effectue un développement limité à l'ordre 4 des cosinus :

$$T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - 1 + \frac{\theta_0^2}{2} - \frac{\theta_0^4}{24}}} = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{-\frac{\theta^2-\theta_0^2}{2} + \frac{\theta^4-\theta_0^4}{24}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2)\left(1 - \frac{\theta^2+\theta_0^2}{12}\right)}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}\sqrt{1 - \frac{\theta^2+\theta_0^2}{12}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1 + \frac{\theta^2+\theta_0^2}{24}}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} \mathrm{d}\theta \text{ par DL de } \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\pi}^{0} \frac{1 + \theta_0^2 \frac{1+\cos^2 u}{24}}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta_0^2 \cos^2 u}} \theta_0 \sin u \mathrm{d}u \text{ par changement de variable } \theta = \theta_0 \cos u$$

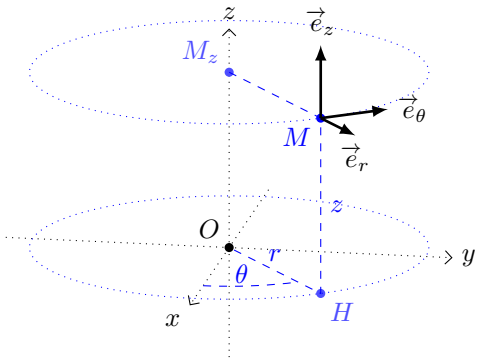
$$= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{0}^{\pi} \left(1 + \theta_0^2 \frac{3 + \cos(2u)}{48}\right) \mathrm{d}u \text{ puisque } 1 - \cos^2 u = \sin^2 u \text{ et } \cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2} \text{ et } \sin u \geq 0$$

$$= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[u + \theta_0^2 \frac{3u + \frac{1}{2}\sin(2u)}{48}\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\pi + \frac{3\pi\theta_0^2}{48} + 0\right) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

M6.C. Coordonnées cylindriques

Si on passe dans l'espace tridimensionnel, il faut ajouter une troisième coordonnée : l'altitude z.

FIGURE M6.7 : Coordonnées cylindriques.



Définition : Coordonnées cylindriques

Soit un point M de l'espace (figure M6.7). On note M_z son projeté orthogonal sur l'axe Oz, et H son projeté orthogonal sur le plan xOy. Alors on repère M par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où :

— r et θ sont les coordonnées polaires de H dans le plan xOy

— $z = \overline{OM_z}$

Ce système est celui utilisé par les grutiers dans les chantiers (figure M6.8) : pour amener son chargement à destination, le grutier :

— tourne sa grue pour être en face de la destination (réglage de θ)

— déplace le chariot sur la grue pour être au-dessus de la destination (réglage de r)

— descend son chargement (réglage de z)

FIGURE M6.8 : Grue de chantier. (Crédit : Wikipedia/Zeartul)



On définit alors la base orthonormée $(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_z)$ en complétant la base polaire avec le vecteur fixe $\vec{e}_z$. On a donc $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$; $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)$; et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.

Propriété : Étude cinématique en coordonnées cylindriques

Le vecteur position vaut

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z \tag{M6.8}$$

Le vecteur vitesse vaut

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + \dot{z}(t)\vec{e}_z \tag{M6.9}$$

Le vecteur accélération vaut

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r(t) + \left(r(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta(t) + \ddot{z}(t)\vec{e}_z \tag{M6.10}$$

Démonstration

Pour le vecteur position, il suffit d'utiliser Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$. Ensuite, on dérive en utilisant les relations des dérivées des vecteurs de base.

Comme précédemment, on a aussi le petit déplacement qui peut servir pour les calculs de travaux de forces :

Propriété : Petit déplacement

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \qquad \text{(M6.11)}$$

Remarque : La base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est mobile, mais cela ne change rien aux méthodes de calcul déjà connues. Ainsi, si on a deux vecteurs $\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_z\vec{e}_z$,

- le produit scalaire s'écrit $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_r.B_r + A_\theta.B_\theta + A_z.B_z$
- la norme d'un vecteur s'écrit $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_z^2}$

M6. Coordonnées cylindriques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système de coordonnées cylindriques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cylindriques. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

M6. Coordonnées cylindriques

Quelques conseils

✎ Souvenez-vous bien que, dans la base polaire ou cylindrique, les vecteurs dépendent du temps, il faut donc les dériver.

✎ Le plus souvent, la base cylindrique sera utilisée pour les mouvements circulaires pour lesquels $r = \text{cst}$; dans ce cas-là, ne dérivez pas r.

✎ Ne confondez pas la *vitesse angulaire* $\dot{\theta}$, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (équivalente à une pulsation ω), et la vitesse v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

M6. Coordonnées cylindriques

QCMs

réponses page 830

✓ QCM : compréhension du cours ✗

Q1. En coordonnées polaires, on repère un point par

(a). deux distances
(b). une distance et un angle
(c). deux angles

Q2. La base polaire est une base

(a). immobile
(b). mobile

Q3. $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} =$

(a). $-\dot{\theta}\vec{e}_r$
(b). $\dot{\theta}\vec{e}_r$
(c). $-\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
(d). $\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Q4. $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} =$

(a). $-\dot{\theta}\vec{e}_r$
(b). $\dot{\theta}\vec{e}_r$
(c). $-\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
(d). $\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Q5. Si un point a un mouvement circulaire à vitesse constante, son accélération est nulle.

(a). Vrai
(b). Faux

✓ QCM : Vitesse dans un mouvement circulaire ✗

Rappel : la vitesse d'un point en mouvement circulaire de rayon R s'écrit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On appelle *vitesse angulaire* la variable $\dot{\theta}$.
Si le mouvement est uniforme, alors la période T du mouvement est reliée à la vitesse angulaire par $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$.

Q6. Une nacelle de grande roue décrit un cercle de 20 m de rayon en 1 min. Sa vitesse angulaire vaut

(a). $0{,}33\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(b). $0{,}1\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(c). $20\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(d). $6{,}3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Q7. et sa vitesse vaut

(a). $6{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(b). $20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(c). $2{,}09\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(d). $0{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Q8. Un train aborde une courbe de rayon 700 m à $220\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Il décrit cette courbe avec une vitesse angulaire :

(a). $11\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(b). $3{,}2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(c). $0{,}087\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
(d). $0{,}31\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Q9. Un disque tourne à $33\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Sa vitesse angulaire vaut :

(a). $0{,}03\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (b). $207\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
(c). $3{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (d). $0{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Q10. Un point de ce disque situé à 12 cm du centre a pour vitesse :

(a). $4{,}1\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ (b). $42\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$
(c). $0{,}4\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ (d). $408\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

✓ QCM : Accélération dans un mouvement circulaire uniforme ✗

Rappel : dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération va vers l'intérieur (centripète) et sa norme vaut $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$ avec R le rayon du cercle.

Q11. Une voiture aborde à $80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ un virage de rayon 130 m. L'accélération centripète vaut :

(a). $63{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (b). $2{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
(c). $3{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (d). $49{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Q12. Une nacelle de grande roue décrit un cercle de 20 m de rayon en 1 min. Son accélération vaut :

(a). $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (b). $0{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
(c). $0{,}08\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (d). $2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Q13. Un train aborde à une vitesse $280\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ un virage de rayon R. Les passagers subiront une accélération inférieure à $2{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ si :

(a). $R > 3800\,\text{m}$ (b). $R > 1400\,\text{m}$
(c). $R > 2900\,\text{m}$ (d). $R > 900\,\text{m}$

Q14. À quelle vitesse maxi un pilote d'avion peut-il réaliser un virage de rayon 300 m s'il ne veut pas ressentir une accélération supérieure à $3,5$ fois l'accélération de la pesanteur (risque de voile noir) ?

(a). $100\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (b). $160\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
(c). $220\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (d). $360\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

M6. Coordonnées cylindriques

Exercices

réponses page 831

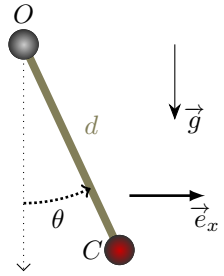
Exercice M6.1 : Pendule simple amorti [*]

Le pendule du professeur Tournesol est constitué d'un fil de longueur $\ell = 19\,\text{cm}$ terminé par une masse $m = 50\,\text{g}$. Lors de son mouvement, la masse est soumise à une force de frottements de la forme $-f.\vec{v}$ avec $f = 3{,}5 \times 10^{-3}$ USI et $\vec{v}$ la vitesse.

1. On repère la position du pendule par son angle α avec la verticale. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par α.
2. Simplifiez cette équation pour de petites oscillations.
   Calculez la période propre T_0.
3. On lâche le pendule sans vitesse initiale depuis un angle $\alpha = 15°$. Déterminez $\alpha(t)$.

Exercice M6.2 : Pendule dans le vent [**]

Un crochet de grue C de masse $m = 48\,\text{kg}$ est suspendu au bout d'un câble inextensible de longueur $d = 42\,\text{m}$ accroché en un point fixe O. On note $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ le champ de pesanteur. On néglige les frottements.
Le vent se met à souffler et exerce sur la masse une force horizontale $\vec{F} = F.\vec{e}_x$ avec $F = 60\,\text{N}$.



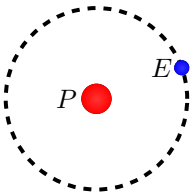
1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ entre le câble et la verticale.
2. Calculer la valeur de l'angle correspondant à une position d'équilibre.
3. Initialement, le câble est vertical vers le bas et immobile. Le vent se met à souffler ; déterminez $\theta(t)$ en supposant que les angles restent petits, donc que l'ED peut être linéarisée.

Exercice M6.3 : Atome d'hydrogène [*]

Un électron E de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ tourne autour d'un proton P immobile, attiré par la force de Coulomb

$$\vec{f} = -\frac{Ke^2}{EP^2}\vec{u}_{PE}$$

où $K = 9 \times 10^9$ USI, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$, EP est la distance entre l'électron et le proton, et $\vec{u}_{PE}$ le vecteur unitaire du proton vers l'électron.
On suppose pour simplifier que l'orbite de l'électron est circulaire, de rayon r.



1. Placez la base polaire sur la figure ; exprimer $\vec{f}$ à l'aide des coordonnées polaires.
2. Exprimez l'accélération de l'électron en coordonnées polaires.
3. En appliquant le PFD à l'électron, montrez que $\dot{\theta}$ est constant, et exprimez sa valeur en fonction de r et des constantes.
4. En déduire la vitesse v de l'électron. AN pour $r = 52\,\text{pm}$.

Exercice M6.4 : Mouvement circulaire uniforme d'une planète [**]

On suppose que la Terre effectue autour du Soleil un mouvement circulaire de rayon R_0 et de période T_0.

1. Exprimez la position puis la vitesse de la Terre (T) sur la base cylindrique, et enfin son accélération.
2. Appliquez le PFD à la Terre (masse M_T), qui est soumise uniquement à la force d'attraction du Soleil (masse M_S), dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.
   En projetant sur $\vec{e}_\theta$, déduisez-en que la vitesse angulaire et la vitesse sont constantes (mouvement uniforme).
   En projetant sur $\vec{e}_r$, exprimez la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction des constantes de l'énoncé et de la constante d'attraction universelle G.
3. En exprimant le temps T_0 mis par la Terre à faire un tour (donc à parcourir la longueur de son orbite), reliez T_0 à $\dot{\theta}$. Déduisez-en une relation de la forme $\frac{T_0^2}{R_0^3} = \text{cst}$; comment s'appelle cette relation ?
4. *A.N.* : $R_0 = 1{,}5 \times 10^{11}\,\text{m}$; T_0 à connaître ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{USI}$; calculez M_S.

Exercice M6.5 : Décollage d'une voiture [*]

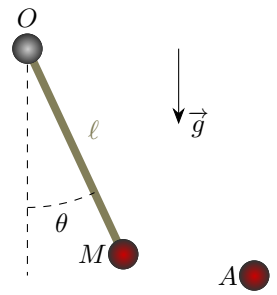
Un concurent du Paris-Dakar aborde une dune avec sa voiture (V) de mase m. Sa trajectoire a alors la forme d'un arc de cercle de rayon R et de centre O ; on notera θ l'angle entre $\vec{e}_r$ et la verticale.
On suppose qu'il parcourt cette trajectoire avec une vitesse constante v.
Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.



1. Exprimez la vitesse de la voiture dans la base polaire ; déduisez-en $\dot{\theta}$ en fonction de v et R.
2. Exprimez l'accélération de la voiture en fonction de v, R et $\vec{e}_r$.
3. Déduisez du PFD projeté sur $\vec{e}_r$, la valeur de la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$.
4. À quelle condition sur v la voiture reste-t-elle en contact avec le sol ?
   AN : $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $R = 100\,\text{m}$, θ variant entre $-45°$ et $45°$.

Exercice M6.6 : Pendule électrisé [*]

On considère un pendule simple formé d'une sphère de polystyrène aluminisée, de masse $m = 1{,}4\,\text{g}$, suspendue au bout d'un fil inextensible de longueur $\ell = 28\,\text{cm}$ et de masse négligeable.
On approche en A un objet chargé électriquement ; il apparaît alors une force d'attraction entre la charge et la sphère aluminisée ; on admet que l'énergie potentielle d'interaction peut s'écrire approximativement comme



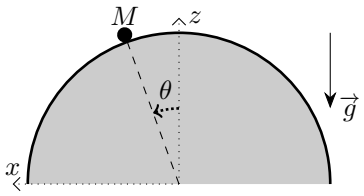
$$U(\theta) = -\frac{C}{\left(p - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$$

avec C une constante et $p = 1{,}1$. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Quelle est la dimension de C ?
2. Montrer que le pendule est conservatif, et exprimez son énergie potentielle en fonction de θ et des données.
3. Déterminez l'équation vérifiée par θ à l'équilibre.
4. On mesure à l'équilibre $\theta_{eq} = 21°$; calculez numériquement C.

Exercice M6.7 : Glissement sur un dôme enneigé [**]

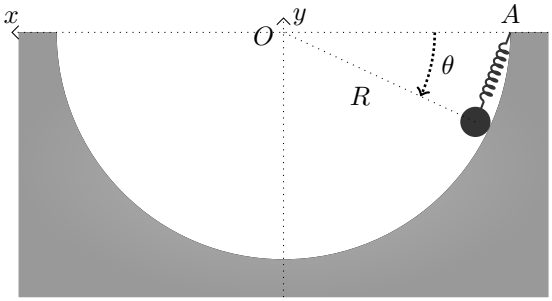
Cet exercice un peu tiré par les cheveux est un grand classique, à connaître.
Une montagne imaginaire a la forme d'une demi-sphère de rayon R. Elle est recouverte de neige. On pose un objet de masse m au sommet de la montagne, avec une vitesse initiale très faible (quasi nulle) ; il se met alors à glisser sans frottements sur la montagne. On repère sa position par son angle θ supposé positif sur la figure.



1. Placez la base polaire sur le schéma, ainsi que les forces qui s'exercent sur M.
2. Exprimez la position puis la vitesse et l'accélération du point M en coordonnées polaires.
3. Appliquez le PFD au point M projeté sur le vecteur $\vec{e}_r$; déduisez-en la réaction $R_N\vec{e}_r$ du sol sur le point M, en fonction de θ et $\dot{\theta}^2$.
4. Justifiez que le système est conservatif, et exprimez son énergie mécanique en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes.
   Déduisez-en une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes.
5. En combinant les deux questions précédentes, exprimez R_N en fonction de θ et des constantes.
6. Montrez que l'objet décolle pour un angle dont on fera l'AN.

Exercice M6.8 : Objet sur une glissière circulaire retenu par un ressort [**]

Un objet M de masse m peut coulisser sans frottements sur une glissière de centre O et de rayon R. Sa position est repérée par l'angle θ compris entre 0 et π. Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est attaché à M à un bout et au point fixe A à l'autre bout.

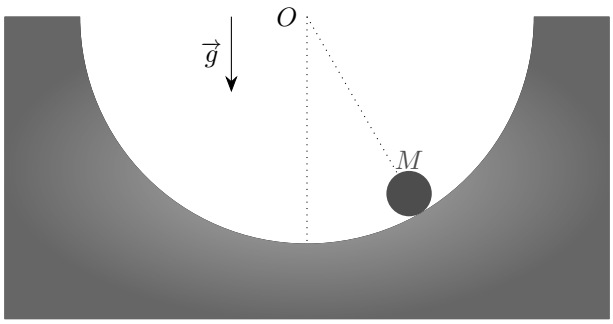


1. Exprimez la longueur AM en fonction de R et de $\theta/2$.
   Indication : divisez en deux le triangle OMA qui est isocèle.
2. Montrez que le système M est conservatif, et exprimez ses énergies cinétique et potentielle.
3. Établissez l'équation différentielle du mouvement.
4. Trouvez l'équation à résoudre pour trouver les positions d'équilibre.
   Résolvez cette équation dans le cas où $\ell_0 = 0$.
5. Calculez dans ce cas la pulsation des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Exercice M6.9 : Mouvement avec frottements dans une glissière circulaire [***]

py EDO

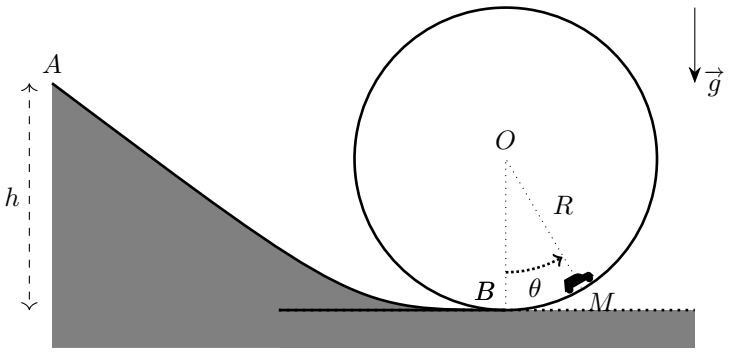
Un objet M de masse m peut glisser avec un coefficient de frottements solides $f = 0{,}2$ à l'intérieur d'une glissière ayant la forme d'un cercle de rayon $R = 50\,\text{cm}$. On repère sa position par l'angle θ par rapport à la verticale.



1. Établir les deux équations différentielles fournies par le PFD dans le cas où la masse M glisse vers la gauche ($\dot{\theta} < 0$).
2. En éliminant la réaction entre les deux équations, établir l'ED du mouvement.
3. Résolvez cette équation numériquement avec Python et tracez $\theta(t)$; déterminez l'angle θ minimum atteint.
4. Une fois cet angle minimal atteint, l'équation précédente n'est plus valable car le mouvement change. Vérifiez, avec les valeurs numériques trouvées, que la masse reste immobile à cette position.

Exercice M6.10 : Looping [***]

Une petite voiture (considérée comme très petite : point M), de masse m, est lâchée d'une hauteur h (point A) ; elle descend jusqu'au point B puis entre dans un looping de rayon R et de centre O. On va chercher à déterminer si elle réussira à passer la boucle. On considère que les frottements (de l'air et de la piste) sont négligeables. La position de la voiture une fois qu'elle est sur la boucle est repérée par l'angle θ.
On note g la norme de l'accélération de la pesanteur, et on se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.



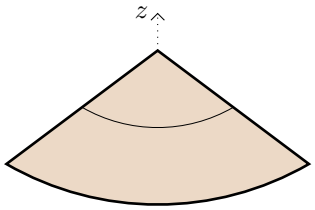
1. En utilisant l'énergie, trouvez la vitesse v_0 de la voiture lorsqu'elle atteint le point B en bas de la boucle.
   Remarque : ici, une étude cinématique poussée n'est pas nécessaire, car seuls les points de départ et d'arrivée sont utiles.
2. Établissez l'expression de l'énergie mécanique de la voiture une fois qu'elle est dans la boucle, en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes.
   Que vaut cette énergie mécanique en fonction de v_0 et des données ? puis de h et des données ?
3. Montrez que la voiture ne pourra jamais dépasser un certain angle θ_m ; cet angle limite existe-t-il toujours ?
4. En fait, la voiture n'arrivera pas forcément à cet angle : elle risque de tomber avant, car la liaison avec la piste est unilatérale.
   (a) À l'aide du PFD projeté sur $\vec{e}_r$, exprimez la valeur de la réaction du support en fonction de m, R, $\dot{\theta}$, θ et g tant que la voiture reste en contact avec la piste.
   (b) En reprenant l'expression de l'énergie mécanique trouvée précédemment, exprimez la vitesse $R\dot{\theta}$ lorsque la voiture a atteint un angle θ donné (on supposera pour l'instant que la voiture reste en contact avec la piste) en fonction de θ et des constantes.
   (c) À l'aide des résultats précédents, déterminez la réaction du support uniquement en fonction de θ et des constantes.
   (d) Montrer que la voiture décroche de la piste pour un angle θ_d à exprimer. Cet angle existe-t-il toujours ?

Exercice M6.11 : La promenade d'un dahu [***]

Un dahu se promène sur une montagne en forme de cône, dont la surface est donnée en coordonnées cylindriques par la relation

$$r(z) = \frac{h - z}{p}$$

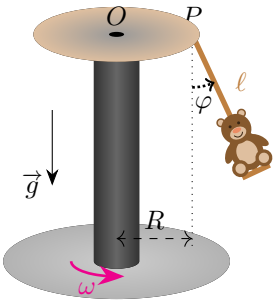
où h est l'altitude de la montagne et $p = 0,4$ sa pente.



1. Le dahu veut faire le tour de la montagne selon une trajectoire circulaire à l'altitude z
   (a) Le dahu considéré dans cet exercice fait partie de la sous-espèce qui a les jambes de droite plus courtes que les jambes de gauche. Dans quel sens tourne-t-il autour de la montagne (vu de dessus) ? En déduire le signe de $\dot{\theta}$.
   (b) On note v_0 la norme de la vitesse du dahu, qu'on suppose constante. Exprimer sa vitesse puis son accélération dans la base cylindrique, en fonction de h, p, z et v.
2. Le dahu décide maintenant de grimper la montagne en formant une hélice ; à chaque tour de la montagne, il monte ainsi d'une hauteur b.
   À l'instant initial, $z(0) = z_0$, $r(0) = r(z_0) = r_0$, $\|\vec{v}(0)\| = v_0$ et $\theta(0) = 0$.
   (a) Reliez z à θ par une loi affine.
   (b) Le dahu s'essouffle en montant, et ralentit, de sorte que $\dot{\theta}$ reste égal à sa valeur initiale $-\frac{v_0}{r_0}$.
   Exprimez la vitesse du dahu dans la base cylindrique en fonction des conditions initiales, de t et des constantes.
   (c) Exprimez alors l'accélération du dahu.
3. Le dahu étudié a les pattes séparées latéralement de 30 cm.
   (a) Calculez la différence de longueur entre ses pattes de droite et de gauche en supposant qu'il est horizontal à flanc de cette montagne.
   (b) Calculez la longueur supplémentaire parcourue par ses pattes de gauche à chaque tour de la montagne.
4. Cet exercice vous sera-t-il utile pour chasser le dahu ?

Exercice M6.12 : Position d'équilibre d'une nacelle de manège [****]

On modélise une nacelle de manège et son passager par un point matériel M, de masse m, suspendu au bout d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable. L'autre extrémité de cette tige reliée par une liaison pivot à un axe horizontal, solidaire de l'axe vertical du manège. La liaison pivot P se trouve à une distance R de l'axe central. L'ensemble tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe du manège.
On repère le mouvement de M par l'angle φ entre la tige et la verticale. On admet (il faudrait le cours sur la mécanique des solides pour le montrer) qu'on peut considérer que la tige peut exercer sur M une force qui ne contient qu'une composante parallèle à PM et une composante perpendiculaire au plan de la figure ; autrement dit, la projection de la force exercée par la tige sur M, sur la direction perpendiculaire à la tige dans le plan de la figure, est nulle.



1. On se place dans un système de coordonnées cylindriques, avec l'axe Oz confondu avec l'axe vertical du manège. Placez la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sur la figure (Attention : c'est une question délicate).
2. Écrire les équations du mouvement est ici une tâche fort compliquée. On va se contenter de chercher les positions d'équilibre. On suppose donc qu'on est à une position d'équilibre, c'est-à-dire que φ est constant (faites attention, ce n'est pas une vraie position d'équilibre, puisque le système tourne encore autour de l'axe du manège). Quel est alors la trajectoire de M ? Déduisez-en sa vitesse et son accélération en fonction de R, ℓ, φ et ω.
3. Faites le bilan des forces s'exerçant sur M, et projetez-le sur la base locale cylindrique (on appellera R_r et R_p les composantes de la force exercée par la tige sur M, respectivement selon PM et perpendiculairement à la figure).

4. Écrivez alors le PFD projeté sur la base cylindrique. En éliminant R_r, montrez que l'angle φ doit vérifier l'équation $\tan\varphi = \dfrac{\omega^2}{g}(R + \ell\sin\varphi)$.
5. Tracez sur un même graphique, en fonction de φ, $\tan\varphi$, puis l'allure de $\dfrac{\omega^2}{g}(R + \ell\sin\varphi)$ dans le cas particulier où $R = \ell$ (pour simplifier le dessin) et pour diférentes valeurs de $\dfrac{\omega^2}{g}$. En déduire le nombre de solutions et l'intervalle dans lequel chacune d'elles se trouve. Quelle est la position d'équilibre la plus confortable pour les occupants de la nacelle ?

M6. Coordonnées cylindriques

TDs numériques

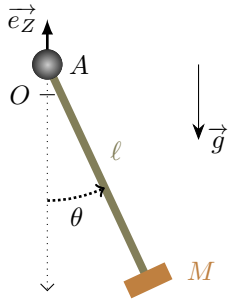
réponses page 838

TD numérique : Le pendule simple

np EDO np $\int f(x).\mathrm{d}x$

On va étudier numériquement un pendule simple de longueur ℓ ; pour les AN on prendra $\ell = 180\,\text{cm}$, $m = 500\,\text{g}$ et $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. **Pendule non amorti**
   (a) Reétablir l'équation vérifiée par l'angle θ du pendule :
   $$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{1}$$
   (b) Résoudre cette équation à l'aide de `odeint` pour $\theta(0) = 40°$ et $\dot{\theta}(0) = 0\,°/\text{s}$, sur une durée de $10T_0$.
   Indication : pour la résolution numérique, les angles doivent être en radians.
   Tracez $\theta(t)$, ainsi que le portrait de phase.
   (c) Calculez les tableaux donnant les énergies E_c, E_p (on prendra une énergie nulle en bas) et E_m. Tracez ces énergies en fonction du temps.
   (d) Tracez sur le même graphique les courbes $\theta(t)$ pour des angles $\theta(0)$ valant 10°, 20°, ..., 120°. Commentez.
   (e) Tracez $\theta(t)$ pour les CI : $\theta(0) = -60°$ et $\dot{\theta}(0) = +240\,°/\text{s}$. Commentez.
2. **Pendule amorti**
   (a) On ajoute désormais des frottements fluides de la forme $-f.\|\vec{v}\|.\vec{v}$ avec $f = 0{,}1\,\text{USI}$.
   Établissez la nouvelle ED vérifiée par θ.
   (b) Résolvez-la avec comme CI : $\theta(0) = 40°$ et $\dot{\theta}(0) = 0\,°/\text{s}$, sur $10T_0$. Tracez $\theta(t)$ ainsi que le portrait de phase.
   (c) Idem pour $\theta(0) = 0°$ et $\dot{\theta}(0) = 400\,°/\text{s}$.
3. **Période exacte du pendule non amorti**
   On oublie, dans cette partie, les frottements.
   Pour un mouvement périodique, la période du pendule est donnée en fonction de l'angle θ_{max} maximal par la formule
   $$T = \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \sqrt{\frac{2\ell}{g\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}}\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$
   Calculez cette période pour des angles θ_{max} allant de 10° à 170° à l'aide d'une méthode des rectangles. Tracez la courbe $T(\theta_{max})$ et vérifiez la compatibilité avec les simulations de la question 1d.
   On peut aussi essayer de mesurer la période directement sur les simulations. Écrivez une fonction `T_simul(thetamax)` qui simule par `odeint` la courbe de $\theta(t)$, puis mesure la période. Tracez cette période entre 10° et 170° et comparez avec la valeur donnée par l'intégrale.
4. **Pendule secoué**
   On tient compte à nouveau des frottements. On secoue maintenant ce pendule ; plus exactement le point de fixation est mobile, on le note A et il bouge verticalement selon la loi $Z(t) = Z_0\cos(\omega t)$ avec $Z_0 = 5\,\text{cm}$.
   On a donc $\overrightarrow{OA} = Z(t).\overrightarrow{e_Z}$.



(a) Projetez $\overrightarrow{e_Z}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Déduisez-en l'accélération $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ de la masse.

(b) On admet que la force de frottements vaut toujours $-f.\ell^2.\left|\dot{\theta}\right|.\dot{\theta}$. Montrez que θ obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{f.\ell}{m}\left|\dot{\theta}\right|\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{Z_0\omega^2}{\ell}\cos(\omega t)\sin\theta = 0 \tag{3}$$

(c) Résolvez cette équation pour $\theta(0) = 1°$ et $\dot{\theta}(0) = 0\,°/\text{s}$, sur $50T_0$, avec $\omega = \omega_0$.

(d) Même question avec $\omega = 2\omega_0$, puis $\omega = 3\omega_0$. Commentez.

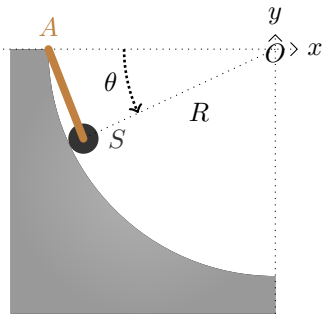
(e) Tracez la courbe de résonance (non linéaire).

5. Vous pouvez reprendre le même genre d'étude si on secoue maintenant horizontalement le point A.

TD numérique : Descente en rappel d'une spéléologue contre une paroi circulaire

ap. EDO

Une spéléologue S de masse $m = 68\,\text{kg}$, assimilée à un point matériel, se laisse glisser sur une paroi ayant la forme d'un cercle de centre O et de rayon $R = 55\,\text{m}$. Sa position est repérée par l'angle θ compris entre 0 et π. Un câble élastique, équivalent à un ressort de raideur $k = 1300\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 variable lorsqu'il est tendu (si sa longueur est inférieure à ℓ_0, alors il n'exerce aucune force), est attaché à S à un bout et au point fixe A à l'autre bout. Le contact entre S et la paroi se fait avec un coefficient de frottements $f = 0,9$. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour les applications numériques.



1. Placez la base polaire. Décomposez le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur cette base.
2. Montrez que le PFD projeté sur la base polaire donne les équations suivantes lorsque le câble est tendu :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 &= mg\sin\theta - R_N - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{\sqrt{2-2\cos\theta}}(1-\cos\theta) \\ mR\ddot{\theta} &= mg\cos\theta + R_T - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{\sqrt{2-2\cos\theta}}\sin\theta \end{cases}$$

avec $-R_N\,\vec{e}_r + R_T\,\vec{e}_\theta$ la force de frottements.

3. On suppose pour le moment que la spéléologue est immobile. Simplifiez les équations précédentes ; en appliquant les lois de Coulomb des frottements solides, établir les équations vérifiées par les angles θ_1 et θ_2 correspondant aux angles extrêmes pour lesquels il peut y avoir équilibre.
   Résolvez ces deux équations par un programme Python et la méthode de dichotomie, pour $\ell_0 = 31\,\text{m}$.
4. Au départ, la spéléologue ne peut pas être à l'équilibre sur la paroi verticale en $\theta = 0°$. On procède donc ainsi pour le descendre : à partir de la position de départ $(\theta(0) = 0{,}02°, \dot{\theta}(0) = 2\,°/\text{s}, \ell(0) = 0)$, on déroule la corde selon la loi $\ell_0(t) = \alpha.t$ avec $\alpha = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
   Simulez $\theta(t)$ avec une méthode d'Euler jusqu'au moment où la spéléologue s'arrête. Mesurez l'angle à ce moment-là, ainsi que ℓ_0.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(b)
Q3.(d)
Q4.(a)
Q5.(b)
La vitesse a une norme constante, mais sa direction change, donc l'accélération est non nulle.

Réponses au QCM : Vitesse dans un mouvement circulaire

Q6.(b)
Q7.(c)
Q8.(c)
Q9.(c)
Q10.(b)

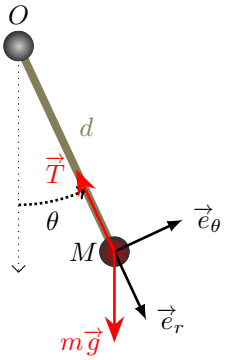
Réponses au QCM : Accélération dans un mouvement circulaire uniforme

Q11.(c)
Q12.(b)
Q13.(c)
Q14.(a)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M6.1 : Pendule simple amorti [*]

1. Pensez à faire un schéma clair comme on a fait en cours, avec les notations placées dessus.
   On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r(t)$ en coordonnées polaires avec O le point de fixation du fil et M la masse. Comme $\ell = \text{cst}$ on trouve $\vec{v} = \ell\dot{\alpha}(t)\vec{e_\alpha}(t)$ et $\vec{a} = \ell\ddot{\alpha}(t)\vec{e_\alpha}(t) - \ell\dot{\alpha}(t)^2\vec{e}_r(t)$.
   Les actions sont : la tension du fil $-T(t)\vec{e}_r(t)$, le poids $mg\cos\alpha(t)\vec{e}_r(t) - mg\sin\alpha(t)\vec{e_\alpha}(t)$ et la force de frottements $-f.\ell\dot{\alpha}(t)\vec{e_\alpha}(t)$.
   Le PFD projeté sur $\vec{e_\alpha}$ donne donc $m\ell\ddot{\alpha}(t) + f\ell\dot{\alpha}(t) + mg\sin\alpha(t) = 0$

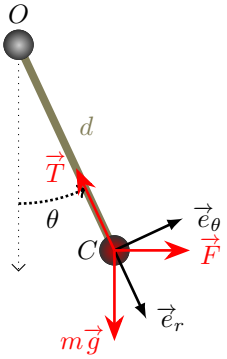


2. Pour de petites oscillations : $\ddot{\alpha}(t) + \frac{f}{m}\dot{\alpha}(t) + \frac{g}{\ell}\alpha(t) = 0$; on a donc $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Donc $\omega_0 = 7{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}87\,\text{s}$
3. L'équation caractéristique a un discriminant négatif et des racines complexes : $-0,035 \pm 7,2i$ donc les solutions sont de la forme $\alpha(t) = e^{-0,035t}\left[A\cos(7,2t) + B\sin(7,2t)\right]$. La première condition initiale indique que $A = 15°$; la seconde est $\dot{\alpha}(t) = -0,035e^{-0,035t}\left[A\cos(7,2t) + B\sin(7,2t)\right] + 7,2e^{-0,035t}\left[-A\sin(7,2t) + B\cos(7,2t)\right]$ d'où on tire $-0,035A + 7,2B = 0$ soit $B = 0{,}073°$. Donc finalement $\alpha(t) = e^{-0,035t}\left[15\cos(7,2t) + 0,073\sin(7,2t)\right]°$

Corrigé de l'exercice M6.2 : Pendule dans le vent [**]

1. Je donne les grandes étapes :
   - accélération : $\vec{a} = -d.\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + d.\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$
   - poids : $mg\left(\cos\theta(t)\vec{e}_r(t) - \sin\theta(t)\vec{e}_\theta(t)\right)$
   - tension du fil : $-T(t)\vec{e}_r(t)$
   - force du vent : $F\left(\sin\theta(t)\vec{e}_r(t) + \cos\theta(t)\vec{e}_\theta(t)\right)$

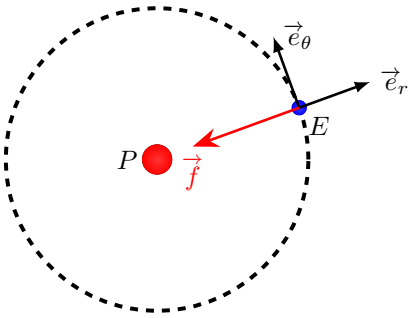
   Le PFD projeté sur $\vec{e}_\theta$ donne l'équation $md.\ddot{\theta}(t) + mg\sin\theta(t) - F\cos\theta(t) = 0$



2. À l'équilibre : $\ddot{\theta} = 0$ donc on obtient $\theta_{eq} = \arctan\frac{F}{mg} = 0{,}13\,\text{rad} = 7{,}3°$. Cet angle est petit. On constate qu'il augmente avec F, ce qui est logique.
3. En linéarisant : $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$ donc $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{d}\theta(t) = \frac{F}{md}$.
   La solution particulière constante est donnée par $\frac{g}{d}\theta(t) = \frac{F}{md}$ soit $\theta(t) = \frac{F}{mg}$.
   Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}}$.
   Donc $\theta(t) = \frac{F}{mg} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Les CI sont $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ ce qui donne après quelques calculs $A = -\frac{F}{mg}$ et $B = 0$. Donc $\theta(t) = \frac{F}{mg}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)$

Corrigé de l'exercice M6.3 : Atome d'hydrogène [*]

1. $\vec{f} = -\frac{Ke^2}{r^2}\vec{e}_r$



2. Rapidement : $\vec{a} = -r\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + r\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$
3. Par le PFD : $-mr\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + mr\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) = -\frac{Ke^2}{r^2}\vec{e}_r(t)$. La projection sur $\vec{e}_\theta$ indique que $\ddot{\theta}(t) = 0$ donc $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$. La projection sur $\vec{e}_r$ indique que $mr\dot{\theta}^2 = \frac{Ke^2}{r^2}$ donc $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Ke^2}{mr^3}}$
4. $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Ke^2}{mr}} = 2{,}2 \times 10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

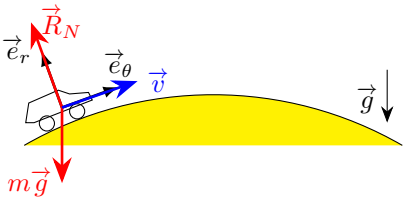
Corrigé de l'exercice M6.4 : Mouvement circulaire uniforme d'une planète [**]

1. On étudie le mouvement en coordonnées cylindriques centrées sur le Soleil. On a $r = R_0$ d'où la vitesse et l'accélération de la Terre dans le référentiel héliocentrique galiléen : $\overrightarrow{ST} = R_0\vec{e}_r$ puis $\vec{v} = R_0\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = -R_0\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + R_0\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$.
2. Or le PFD appliqué à la Terre de masse M_T dans le référentiel héliocentrique galiléen, soumise à l'attraction du Soleil $\vec{f} = -G\frac{M_TM_S}{R_0^2}\vec{e}_r(t)$, donne : $M_T\vec{a}(t) = -G\frac{M_TM_S}{R_0^2}\vec{e}_r(t)$.

   On en déduit deux équations par projection : sur $\vec{e}_\theta$: $M_TR_0\ddot{\theta}(t) = 0$ donc $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$: le mouvement est uniforme ; sur $\vec{e}_r$: $-M_TR_0\dot{\theta}^2 = -G\frac{M_TM_S}{R_0^2}$ donc $\dot{\theta}^2 = \frac{GM_S}{R_0^3}$.
3. La Terre avance sur son orbite à la vitesse $R_0\dot{\theta}$ et doit parcourir un cercle de rayon R_0, elle met donc un temps $T_0 = \frac{2\pi R_0}{R_0\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$.

   Donc $T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{4\pi^2R_0^3}{GM_S}$. On en déduit que $\frac{T_0^2}{R_0^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$: c'est la troisième loi de Képler.
4. *A.N.* : $M_S = \frac{R_0^34\pi^2}{GT_0^2} = \frac{(1{,}5\times10^{11})^3\times4\times\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times(60\times60\times24\times365{,}25)^2} = 2{,}0\times10^{30}\,\text{kg}$

Corrigé de l'exercice M6.5 : Décollage d'une voiture [*]



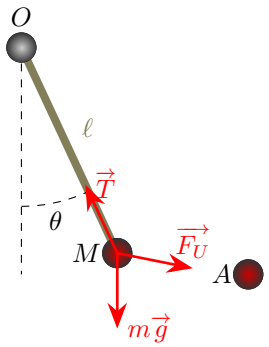
1. $\vec{v} = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc $v = R\dot{\theta}(t)$ donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R} = \text{cst}$
2. $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r(t) = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r(t)$
3. On étudie le système {voiture} dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction normale du support $R_N(t)\vec{e}_r(t)$ (et peut-être à la réaction tangentielle $R_T(t)\vec{e}_\theta(t)$, mais l'énoncé n'en parle pas, donc on n'en met pas) car la tangente à un cercle est orthogonale au rayon ; donc ici, la composante normale est suivant $\vec{e}_r$).

   Le PFD appliqué à la voiture dans le référentiel terrestre, galiléen, projeté sur $\vec{e}_r$, donne alors $-m\frac{v^2}{R} = R_N(t) - mg\cos\theta(t)$ Donc $R_N(t) = m\left(g\cos\theta(t) - \frac{v^2}{R}\right)$
4. La voiture reste au sol si, à tout instant, $R_N > 0$, donc si $gR\cos\theta(t) > v^2$. On voit que la condition dépend de l'angle.

   Si θ varie entre $-45°$ et $45°$, $\cos\theta$ varie entre $1/\sqrt{2}$ et 1 ; la condition sera réalisée pour tout θ si $v^2 < \frac{gR}{\sqrt{2}}$ soit $v < 26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 95\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

Corrigé de l'exercice M6.6 : Pendule électrisé [*]

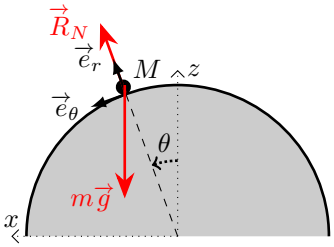
1. U est une énergie, donc C est une énergie car p et $\cos\theta$ n'ont pas de dimension.
2. Le point M est soumis à son poids, qui est conservatif, d'énergie potentielle $E_{pp} = -mg\ell\cos\theta(t)$, à la force électrique d'énergie potentielle $U(\theta(t))$, et à la tension du fil, qui est perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas. Ce système est donc conservatif, et $E_p(\theta) = -mg\ell\cos\theta - \frac{C}{(p-\cos(\theta-\frac{\pi}{4}))^2}$



3. $\frac{\mathrm{d}E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = mg\ell\sin\theta + \frac{2C\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}{(p-\cos(\theta-\frac{\pi}{4}))^3}$ donc, à l'équilibre,
$$mg\ell\sin\theta_{eq}\left(p-\cos\left(\theta_{eq}-\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 + 2C\sin\left(\theta_{eq}-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$
4. Il faut bien passer tous les angles dans la même unité ; on trouve $C = -\frac{mg\ell\sin\theta_{eq}(p-\cos(\theta_{eq}-\frac{\pi}{4}))^3}{2\sin(\theta_{eq}-\frac{\pi}{4})} = 1{,}1\times10^{-5}$ J

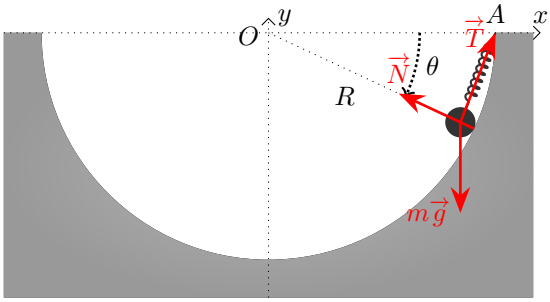
Corrigé de l'exercice M6.7 : Glissement sur un dôme enneigé [**]

1.



2. $\vec{v} = R\dot\theta(t)\vec{e}_\theta(t)$ (car $R = \text{cst}$) et $\vec{a} = -R\dot\theta(t)^2\vec{e}_r(t) + R\ddot\theta(t)\vec{e}_\theta(t)$.
3. Les forces sont le poids $m\vec{g} = -mg\cos\theta(t)\vec{e}_r(t) + mg\sin\theta(t)\vec{e}_\theta(t)$ et la réaction normale $R_N(t)\vec{e}_r(t)$. Donc le PFD projeté sur l'axe $\vec{e}_r$ donnc l'équation $-mR\dot\theta(t)^2 = -mg\cos\theta(t) + R_N(t)$ soit $R_N(t) = mg\cos\theta(t) - mR\dot\theta(t)^2$.
4. Le système est soumis à son poids, conservatif, d'énergie potentielle $mgR\cos\theta(t)$, et à la réaction du sol, qui ne travaille pas (pas de frottements). Il est donc conservatif, et $E_M = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgR\cos\theta(t) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 + mgR\cos\theta(t)$.
   Cette énergie mécanique est constante ; au départ, elle vaut $E_M = 0 + mgR$; donc à chaque instant, $\frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 + mgR\cos\theta(t) = mgR$ donc $\dot\theta(t)^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta(t))$
5. En remplaçant $\dot\theta^2$ par $\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$, on obtient $R_N(t) = mg\,(3\cos\theta(t) - 2)$.
6. L'objet décolle lorsque R_N devient négatif (sinon, il faudrait que la neige attire l'objet, ce qui n'est pas réaliste) donc pour $3\cos\theta - 2 < 0$ soit $\theta > \arccos\frac{2}{3} = 48°$

Corrigé de l'exercice M6.8 : Objet sur une glissière circulaire retenu par un ressort [**]



1. $AM(t) = 2R\sin\frac{\theta(t)}{2}$
2. L'objet M a pour vitesse $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dot\theta(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc pour énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2$.
   Bilan des actions : le poids est conservatif d'énergie potentielle $-mgR\sin\theta(t)$; la tension du ressort est conservative d'énergie potentielle $\frac{1}{2}k(AM(t)-\ell_0)^2$; la réaction du support ne travaille pas.

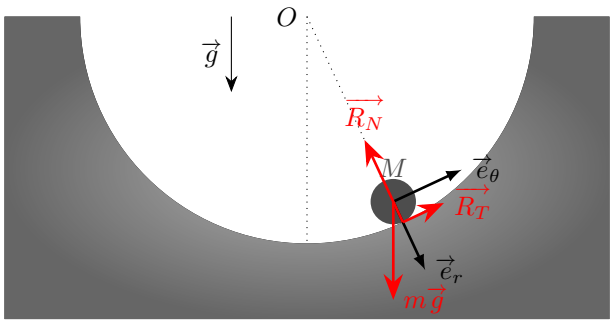
Donc le système est conservatif, et $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}(t)^2 - mgR\sin\theta(t) + \frac{1}{2}k\left(2R\sin\frac{\theta(t)}{2} - \ell_0\right)^2 = \text{cst}$

3. Pour obtenir l'équation différentielle, on dérive E_m par rapport au temps et on simplifie par $\dot{\theta}$; on obtient $mR^2\ddot{\theta}(t) - mgR\cos\theta(t) + kR\cos\frac{\theta(t)}{2}\left(2R\sin\frac{\theta(t)}{2} - \ell_0\right) = 0$

4. $\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow -mgR\cos\theta + kR\cos\frac{\theta}{2}\left(2R\sin\frac{\theta}{2} - \ell_0\right) = 0$
Si $\ell_0 = 0$ on obtient $-mgR\cos\theta + 2kR^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$; or $2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta$ donc l'équation devient $mgR\cos\theta = kR^2\sin\theta$ soit $\tan\theta = \frac{mg}{kR}$

5. $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR\sin\theta + kR^2\cos\theta$ donc $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\arctan\frac{mg}{kR}\right) = kR^2\sqrt{1+\left(\frac{mg}{kR}\right)^2}$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\sqrt{1+\left(\frac{mg}{kR}\right)^2}}$

Corrigé de l'exercice M6.9 : Mouvement avec frottements dans une glissière circulaire [***]



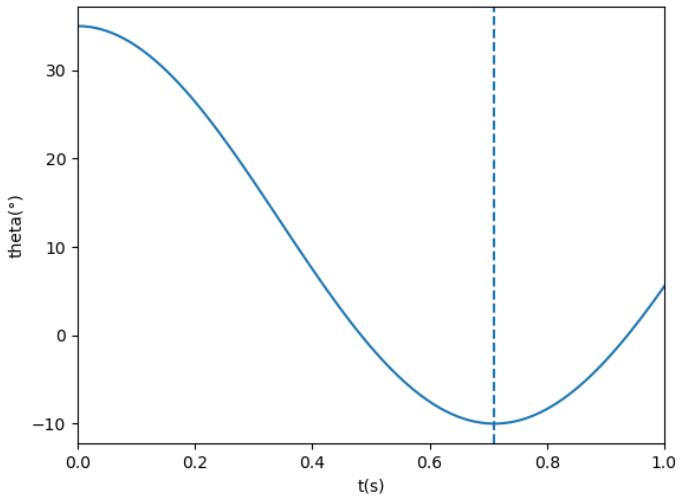
1. On étudie le point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On place la base cylindrique. L'objet M a pour position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r(t)$, pour vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et pour accélération $\vec{a} = -R\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + R\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$. Il est soumis à son poids $mg(\cos\theta(t)\vec{e}_r(t) - \sin\theta(t)\vec{e}_\theta(t))$, à la réaction normale du support $-R_N(t)\vec{e}_r(t)$ avec $R_N > 0$, et à la force de frottements $R_T(t)\vec{e}_\theta(t)$ avec $R_T = f.R_N$ d'après les lois de Coulomb.
Le PFD projeté sur les deux axes donne alors les équations $\begin{cases} -mR\dot{\theta}(t)^2 = -R_N(t) + mg\cos\theta(t) \\ mR\ddot{\theta}(t) = f.R_N(t) - mg\sin\theta(t) \end{cases}$

2. On trouve facilement $R\ddot{\theta}(t) = fR\dot{\theta}(t)^2 + fg\cos\theta(t) - g\sin\theta(t)$

3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
R,f,g=0.5,0.2,9.8
def derivee(inconnues,t):
    theta=inconnues[0]
    dtheta=inconnues[1]
    ddtheta=(f*R*dtheta**2+f*g*np.cos(theta)-g*np.sin(theta))/R
    return [dtheta,ddtheta]
ci=[35*np.pi/180,0]
tab_t=np.linspace(0,1,100)
sol=odeint(derivee,ci,tab_t)
tab_theta=sol[:,0]
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_theta*180/np.pi)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("theta(°)")
plt.show()
```

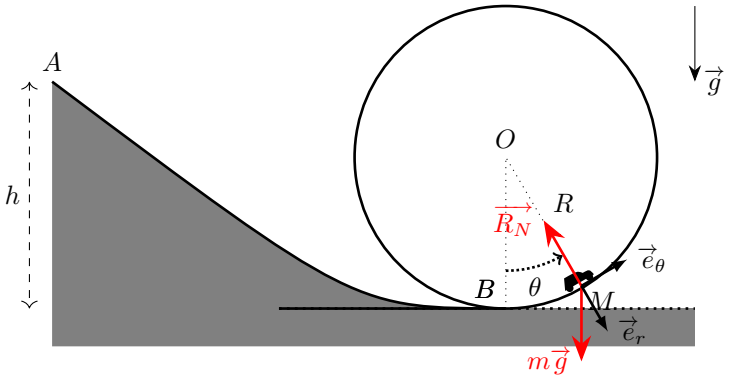
On obtient :



On voit qu'à 0,71 s, l'objet fait demi-tour pour un angle minimal de $-10°$; à partir de là, la courbe n'est plus juste.

4. Supposons que l'objet reste immobile ; alors à partir des équations du départ avec $\dot\theta = \ddot\theta = 0$, on trouve $R_N = mg\cos\theta$ et $R_T = mg\sin\theta$ soit $\left|\frac{R_T}{R_N}\right| = \tan\theta = 0{,}176 < f$ donc l'objet reste bien immobile.

Corrigé de l'exercice M6.10 : Looping [***]

1. La seule force qui travaille étant le poids qui est conservatif, le système est conservatif et $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(t) = \text{cst}$ avec z l'altitude. On en déduit que $E_m(A) = E_m(B)$ soit $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ d'où $v_0 = \sqrt{2gh}$.
2. L'étude cinématique indique que $\vec v = R\dot\theta(t)\vec e_\theta(t)$ donc l'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2$; et l'énergie potentielle vaut $-mgR\cos\theta(t)$ en prenant l'origine au centre. Donc $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 - mgR\cos\theta(t)$
   Au départ : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = mg(h-R)$
3. Donc $mg(h-R) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 - mgR\cos\theta(t)$ or $\frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 > 0$ donc $mg(h-R) > -mgR\cos\theta(t)$ soit $\cos\theta(t) > 1 - \frac{h}{R}$. Donc θ ne peut pas dépasser l'angle limite $\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)$.
   Cet angle limite n'existe plus si $1 - \frac{h}{R} < -1$ donc si $h > 2R$ c'est-à-dire si le point de départ est au-dessus du haut de la boucle : dans ce cas, la voiture a assez d'énergie pour monter en haut de la boucle ; mais cela ne veut pas dire qu'elle y arrivera sans se détacher de la piste.
4. 

   (a) Sans détailler : dans le looping, l'accélération vaut $\vec a = -R\dot\theta(t)^2\vec e_r(t) + R\ddot\theta(t)\vec e_\theta(t)$ et les deux forces sont le poids $mg(\cos\theta(t)\vec e_r(t) - \sin\theta(t)\vec e_\theta(t))$ et la réaction $-R_N(t)\vec e_r(t)$; on trouve par projection sur $\vec e_r$ que $R_N(t) = mg\cos\theta(t) + mR\dot\theta(t)^2$
   (b) De $mg(h-R) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta(t)^2 - mgR\cos\theta(t)$ on tire $R\dot\theta(t) = \sqrt{2g\left(h - R(1-\cos\theta(t))\right)}$
   (c) En éliminant $\dot\theta$ dans les deux équations précédentes, on obtient $R_N(t) = mg\left(3\cos\theta(t) - 2 + 2\frac{h}{R}\right)$
   (d) La voiture ne peut plus rester accrochée à la piste si R_N s'annule, donc si $\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{2h}{3R}$.

Cet angle existe si $\frac{2}{3} - \frac{2h}{3R} > -1$ soit $h < \frac{5}{2}R$. Si h est supérieur, la voiture a la vitesse nécessaire nécessaire pour passer le looping en restant collée à la piste.

Corrigé de l'exercice M6.11 : La promenade d'un dahu [***]

1.
   (a) Vu de dessus, le dahu tourne dans le sens horaire, donc $\dot\theta < 0$
   (b) Ici $z = \text{cst}$ et donc $r = \text{cst}$, d'où $\vec v = r(z).\dot\theta(t)\vec e_\theta(t) = v_0\vec e_\theta(t)$ donc $\dot\theta = \frac{v_0}{r(z)} = \frac{pv_0}{h-z} = \text{cst}$

   En dérivant : $\vec a = -v_0\dot\theta\vec e_r(t) = -\frac{pv_0^2}{h-z}\vec e_r(t)$

2.
   (a) On prend une fonction affine telle que z augmente de b lorsque θ augmente de -2π ($-$ car le dahu tourne en sens horaire) : $z(t) = z_0 - b\frac{\theta(t)}{2\pi}$.
   (b) $\vec v = \frac{\mathrm{d}r(z(t))}{\mathrm{d}t}\vec e_r(t) + r(z(t))\dot\theta(t)\vec e_\theta(t) + \dot z(t)\vec e_z(t)$ avec $\dot\theta(t) = -\frac{v_0}{r_0}$ donc $\theta(t) = -\frac{v_0}{r_0}t$, et $\dot z(t) = -b\frac{\dot\theta(t)}{2\pi} = \frac{bv_0}{2\pi r_0}$; enfin $\frac{\mathrm{d}r(z(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r(z)}{\mathrm{d}z}\dot z(t) = -\frac{\dot z(t)}{p}$. En remplaçant tout cela, on trouve : $\vec v = -\frac{bv_0}{2\pi pr_0}\vec e_r(t) - \frac{h-z_0-b\frac{v_0t}{2\pi r_0}}{pr_0}v_0\vec e_\theta(t) + \frac{bv_0}{2\pi r_0}\vec e_z$.
   (c) En dérivant et en simplifiant, il reste $\vec a = -\frac{h-z_0-b\frac{v_0t}{2\pi r_0}}{pr_0^2}v_0^2\vec e_r(t) + \frac{bv_0^2}{\pi pr_0^2}\vec e_\theta(t)$

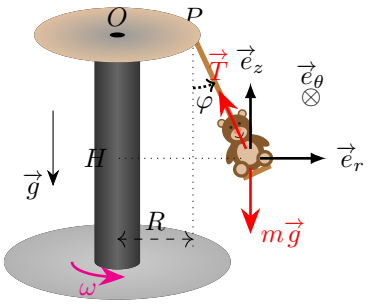
3.
   (a) $z = h - p.r$ donc la différence de hauteur des pattes vaut $z(r) - z(r + 30\,\text{cm}) = p \times 30\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$
   (b) À chaque tour, la patte de droite parcourt $2\pi r$ et celle de gauche $2\pi(r + 30\,\text{cm})$ d'où une différence de $2\pi \times 30\,\text{cm} = 1{,}88\,\text{m}$

4. Non, car le dahu est un animal protégé.

Corrigé de l'exercice M6.12 : Position d'équilibre d'une nacelle de manège [****]

1. $\vec e_r$ est horizontal sur la figure, vers l'extérieur ; $\vec e_\theta$ est perpendiculaire à la figure, rentrant ; $\vec e_z$ est dans le plan de la figure, vertical, vers le haut.
2. M tourne autour de l'axe du manège, avec le manège, lequel tourne à une vitesse angulaire constante ω. M a donc un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω, le centre de ce cercle pouvant être trouvé sur la figure en projetant orthogonalement M sur l'axe du manège (point H ; pour mieux voir, faites une vue de dessus).

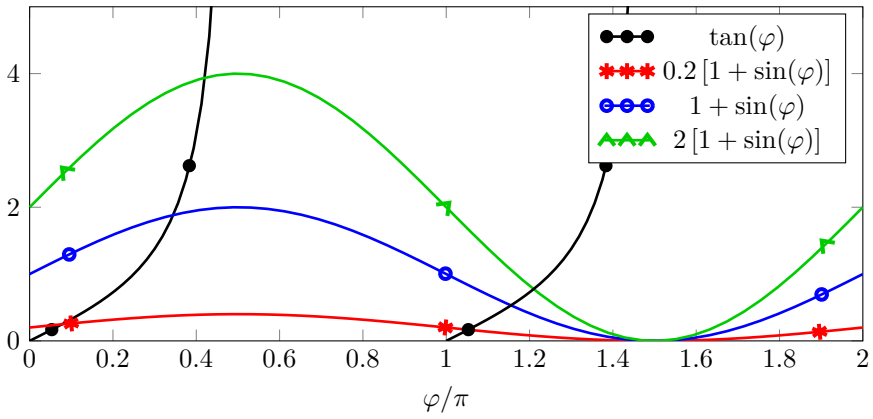
   On en déduit facilement que le rayon du cercle décrit par M est égal à la distance séparant M de cet axe, soit $r = HM = R + \ell\sin\varphi$. Donc la vitesse vaut $\vec v = (R + \ell\sin\varphi)\omega\vec e_\theta(t)$, et l'accélération vaut $\vec a = -(R + \ell\sin\varphi)\omega^2\vec e_r(t)$.



3. Deux actions s'exercent sur M. D'abord, son poids, qui vaut $-mg\vec e_z$. Ensuite, la force de la tige, notée $\vec T$. Celle-ci a une composante perpendiculaire à la figure, $T_p\vec e_\theta$, et une dans le plan de la figure, $T_r\vec u$ avec $\vec u$ le vecteur unitaire dans la direction $\overrightarrow{PM}$. Reste à projeter $\vec u$ dans la base cylindrique. On trouve $\vec u = \sin\varphi\vec e_r - \cos\varphi\vec e_z$; donc $\vec T = T_r\sin\varphi\vec e_r + T_p\vec e_\theta - R_r\cos\varphi\vec e_z$.
4. Le PFD appliqué à M dans le référentiel terrestre galiléen donne alors trois équations :

$$\begin{cases} -m(R + \ell\sin\varphi)\omega^2 = T_r\sin\varphi \\ 0 = T_p \\ 0 = -T_r\cos\varphi - mg \end{cases}$$

   On en déduit donc que $T_r = -\dfrac{mg}{\cos\varphi}$, et donc $-m(R + \ell\sin\varphi)\omega^2 = -mg\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, d'où finalement $\tan\varphi = \dfrac{\omega^2}{g}(R + \ell\sin\varphi)$
5.



Sur la figure est tracée la courbe de $\tan\varphi$ et celle de $\dfrac{\omega^2}{g}R.(1+\sin\varphi)$, pour différentes valeurs de $\dfrac{\omega^2}{g}$. Les solutions de l'équation précédente sont données par l'intersection des courbes. On constate facilement qu'il y a toujours deux solutions :

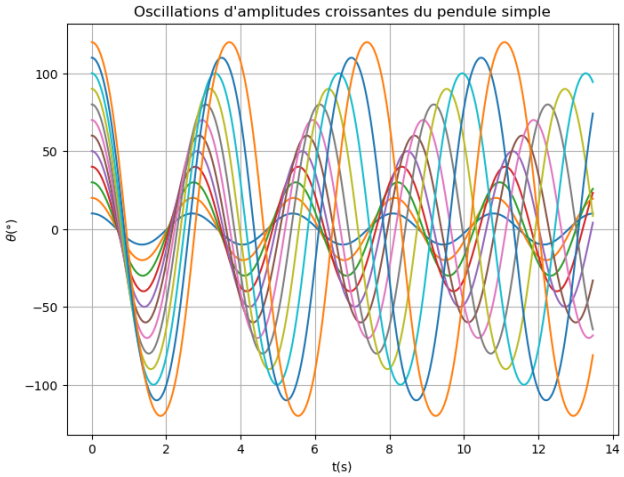
— Une solution qui sera forcément comprise entre 0 et $\pi/2$. Quand ω est faible, cette solution est proche de 0 ; si ω augmente, elle tend vers $\pi/2$. C'est une solution qu'on comprend facilement en imaginant la situation physique.

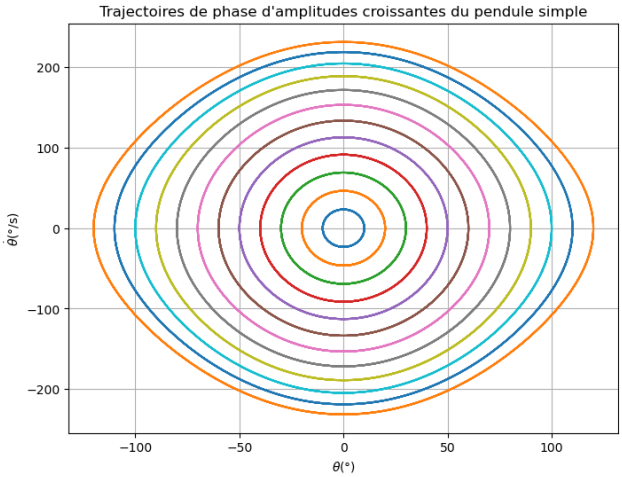
— Une solution qui sera forcément entre π et $3\pi/2$. Cette solution est peu confortable ; on peut montrer (chapitre sur les référentiels non galiléens) que cette position est instable.

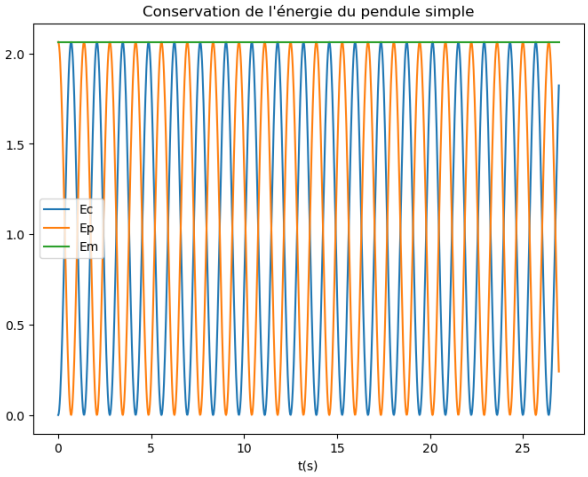
Réponses aux TDs numériques

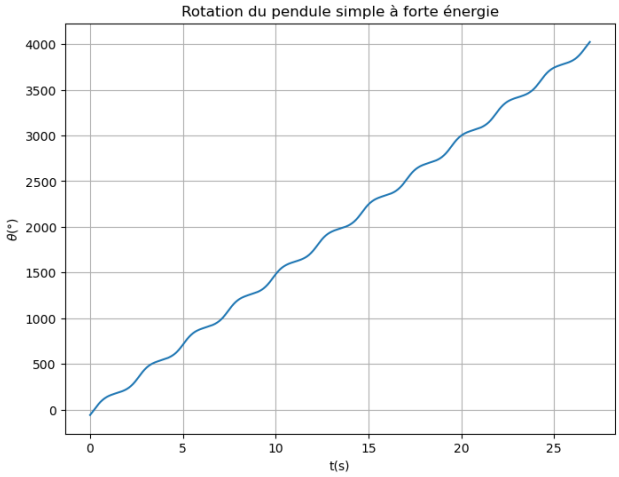
Réponses au TD d'info : Le pendule simple

Pour le pendule simple non amorti, avec des conditions initiales de peu d'énergie, on observe des oscillations quasi-sinusoïdales et une trajectoire de phase elliptique ; pour de fortes amplitudes, la période s'allonge et les trajectoires de phase se déforment. Enfin, pour une énergie trop importante, le système tourne sans osciller.

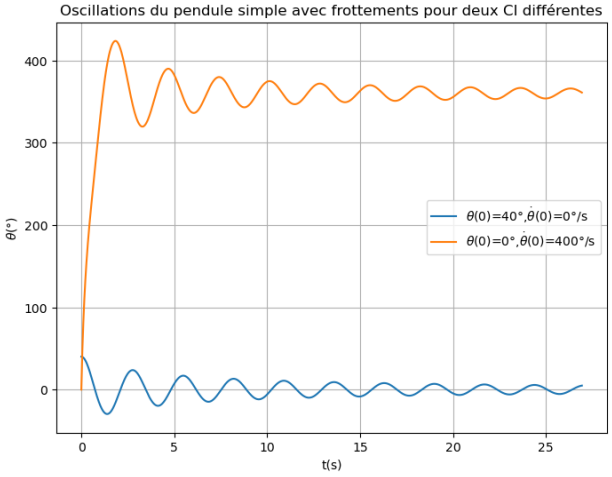


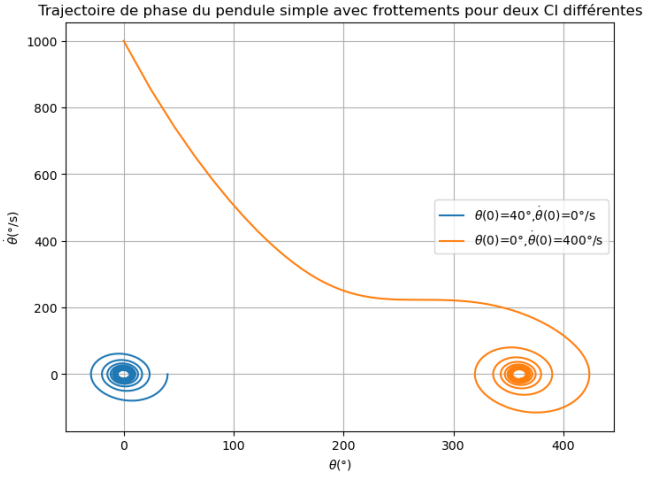




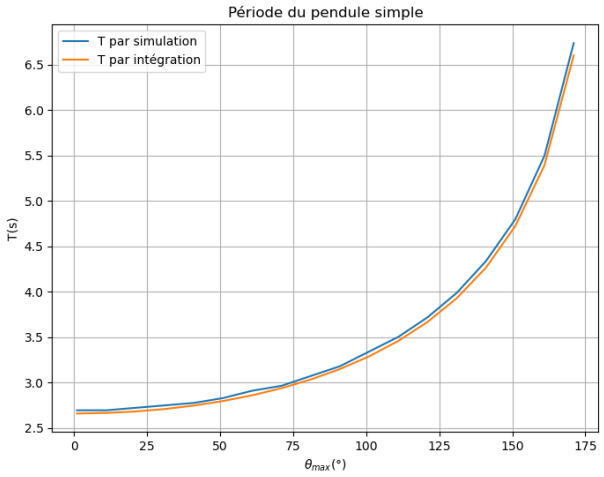


Si on ajoute des frottements, le système s'amortit ; son équation différentielle devient $\ddot{\theta} = -\frac{f.\ell}{m}\left|\dot{\theta}\right|\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta$. Même si on le lance très fort, il ne va effectuer que quelques tours, puis être piégé dans une cuvette de potentiel.



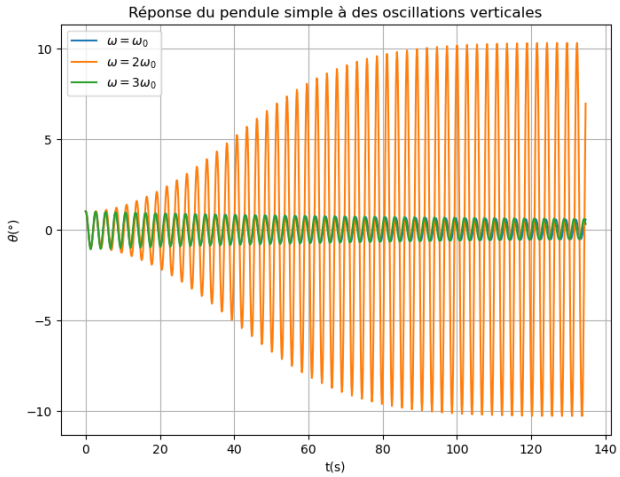


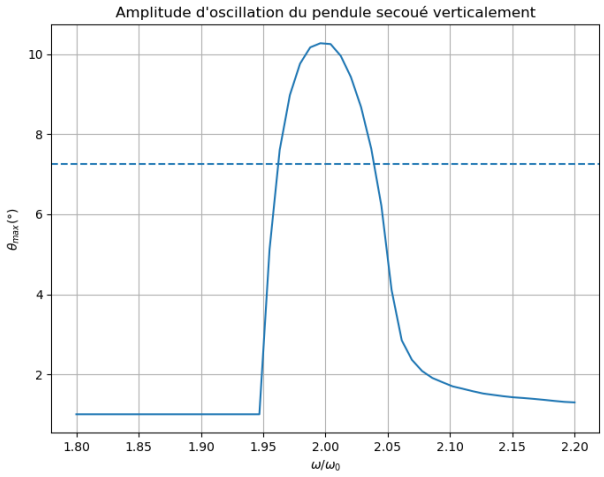
Le calcul de la période montre un ralentissement de la période qui tend vers l'infini lorsque l'angle maximal tend vers 180°.



Pour le pendule secoué verticalement, on écrit que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = Z(t)\overrightarrow{e_Z} + \ell\overrightarrow{e_r}(t)$ et on en déduit que l'accélération vaut $\vec{a} = \ddot{Z}\overrightarrow{e_Z} - \ell\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{e_r}(t) + \ell\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta}(t)$ avec $\overrightarrow{e_Z} = -\cos\theta(t)\overrightarrow{e_r}(t) + \sin\theta(t)\overrightarrow{e_\theta}(t)$. Le PFD donne alors l'équation proposée.

Pour tracer la courbe de résonance, il faut simuler le système pour plein de pulsations ω, et mesurer l'amplitude maximale. Le pendule secoué verticalement présente une résonance lorsque $\omega = 2\omega_0$. La courbe de résonance montre une largeur à $-3\,\text{dB}$ égale à $0,077\omega_0$ ce qui donne $Q = 26$.





Si on secoue le pendule horizontalement, on trouve une résonance à $\omega = \omega_0$.

Réponses au TD d'info : Descente en rappel d'une spéléologue contre une paroi circulaire

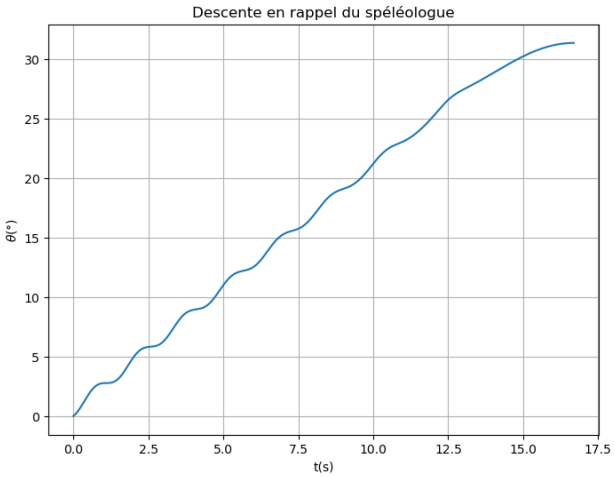
$\overrightarrow{AM} = R(\cos\theta(t) - 1)\overrightarrow{e_r}(t) - R\sin\theta(t)\overrightarrow{e_\theta}(t)$ (avec $\overrightarrow{e_\theta}$ vers en bas à droite) de norme $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = R\sqrt{2 - 2\cos\theta(t)}$ d'où on tire la force de l'élastique : $-k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta(t)}-\ell_0}{R\sqrt{2-2\cos\theta(t)}}\left[R(1-\cos\theta(t))\overrightarrow{e_r}(t) + R\sin\theta(t)\overrightarrow{e_\theta}(t)\right]$. Le PFD donne alors facilement les équations demandées.

À l'équilibre, l'angle θ vérifie

$$mg\cos\theta + R_T - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{R\sqrt{2-2\cos\theta}}\sin\theta = 0 \text{ avec } |R_T| \leq f.\left[mg\sin\theta - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{\sqrt{2-2\cos\theta}}(1-\cos\theta)\right]$$

La résolution par dichotomie avec les valeurs extrêmes de R_T donnent $\theta \in [33{,}0°; 33{,}3°]$.

Lors de la descente, il y a mouvement, donc cette fois $R_T = -f.R_N$:



La spéléologue se stabilise à $\theta = 31{,}4°$ pour une longueur de câble $\ell_0 = 33{,}4\,\text{m}$.

M7 Chapitre Dynamique des systèmes matériels

Programme p.852

Conseils p.853

Cours p.842

M7.A. Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction

M7.B. Théorème de la quantité de mouvement et variations

M7.C. TEC pour un système matériel

M7.D. Utilisation des lois de conservation

QCMs p.854

Exercices p.855

M7. Dynamique des systèmes matériels

Cours

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des points matériels. Pour pouvoir passer à des objets plus concrets, nous allons les considérer comme des ensemble de points matériels (les atomes). Dans ce chapitre, nous allons établir les propriétés générales de la dynamique des ensembles de points matériels ; dans le chapitre suivant, nous étudierons un cas particulier, les solides.

! Dans tout ce chapitre, $\mathcal{S}$ désigne un système formé de N points matériels M_i de masse m_i ; autrement dit, $\mathcal{S} = \{M_i, i = 1, \dots, N\}$.

M7.A. Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction

Nous avons déjà introduit la première loi de Newton (ou Principe d'inertie) et la seconde (ou Principe fondamental de la dynamique). Nous allons compléter ici avec la troisième (ou Principe de l'action et de la réaction).

Troisième loi de Newton

Si un point matériel M_1 exerce une force sur un point matériel M_2, alors le point M_2 exerce sur M_1 une force opposée $\vec{f}_{M_2 \to M_1} = -\vec{f}_{M_1 \to M_2}$; de plus, ces deux forces sont parallèles à la droite (M_1M_2).

Remarque : L'hypothèse qu'il s'agit de deux *points matériels* est importante. Si ce n'est pas le cas, la première partie de la loi est encore vraie, mais pas la seconde. Par exemple, deux molécules d'eau exercent l'une sur l'autre des forces opposées, mais qui ne sont pas dirigées selon la droite qui les relie.

M7.B. Théorème de la quantité de mouvement et variations

La première conséquence de cette loi va être de nous permettre de décrire de façon globale le mouvement d'un système matériel.

Définition : Quantité de mouvement d'un système matériel

On définit la quantité de mouvement de $\mathcal{S}$ comme la somme des quantités de mouvements des points qui le constituent :

$$\vec{P}_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i \vec{v}_{M_i} \tag{M7.1}$$

Cette quantité de mouvement vérifie alors une loi qui ressemble à un PFD, mais avec des différences :

Théorème de la quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système matériel est égal à la somme des forces **extérieures** qui s'exercent sur ce système :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k \to M_i} \right) \tag{M7.2}$$

Démonstration

Exprimons cette dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \vec{v}_{M_i}\right) = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{k\to M_i} \right)$$ en appliquant le PFD à chaque point M_i

Pour chaque point M_i, on sépare les forces provenant d'autres points de $\mathcal{S}$, et les autres forces, dites *extérieures* :

$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k\to M_i} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{M_j\to M_i} \right)$$

Pour chaque force de M_j sur M_i, il existe aussi une force de M_i sur M_j ; on les regroupe donc par paires :

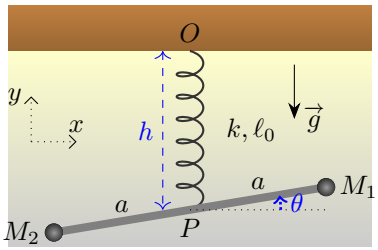
$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k\to M_i} \right) + \sum_{\text{paires } (i,j)} \left(\vec{f}_{M_j\to M_i} + \vec{f}_{M_i\to M_j} \right)$$

Or d'après la troisième loi de Newton, $\vec{f}_{M_j\to M_i} + \vec{f}_{M_i\to M_j} = \vec{0}$:

$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k\to M_i} \right)$$

Exemple : Oscillations d'une barre au bout d'un ressort

Cet exemple n'a aucun intérêt physique, il n'est là que pour illustrer l'application du principe précédent.
Une barre de masse négligeable et de longueur $2a$ est suspendue en son milieu P à un plafond par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Aux deux extrémités de cette barre sont fixées deux masses m_1 et m_2.



Les deux variables servant à décrire ce système sont la longueur h du ressort et l'angle θ entre l'horizontale et la barre.

1. Exprimez la vitesse des masses m_1 et m_2.
2. On note $\mathcal{S} = \{m_1 + m_2 + \text{barre}\}$.
   (a) Exprimez la quantité de mouvement totale de $\mathcal{S}$ (la barre, n'ayant pas de masse, n'a pas de quantité de mouvement).
   (b) Effectuez un bilan des forces extérieures appliquées sur le système.

1. On utilise la relation de Chasles, par exemple $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_1} = -h(t)\vec{e}_y + a\cos\theta(t)\vec{e}_x + a\sin\theta(t)\vec{e}_y$
   puis on dérive ; on trouve $\begin{cases} \vec{v}_1 = -a\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_x + \left(-\dot{h}(t) + a\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\vec{e}_y \\ \vec{v}_2 = a\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_x + \left(-\dot{h}(t) - a\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\vec{e}_y \end{cases}$
2. (a) $\vec{P}_{\mathcal{S}} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = -(m_1+m_2)\dot{h}(t)\vec{e}_y + (m_1-m_2)a\dot{\theta}(t)\left[\cos\theta(t)\vec{e}_y - \sin\theta(t)\vec{e}_x\right]$
   (b) On a les forces suivantes : $\begin{cases} -m_1 g\vec{e}_y \text{ en } M_1 \\ -m_2 g\vec{e}_y \text{ en } M_2 \\ k\left(h(t)-\ell_0\right)\vec{e}_y \text{ en } P \end{cases}$

Le théorème précédent est souvent assez compliqué à mettre en œuvre. Pour le simplifier, on va définir un point particulier ; sa définition va faire intervenir la notion de *barycentre*.

On connaît tous le milieu d'un segment $[AB]$: c'est le point qui est à égale distance de A et de B. On peut presque voir cela comme une « moyenne » des deux points ; d'ailleurs, c'est une moyenne dans le sens des vecteurs, car si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point O, $\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

Mais parfois, dans une moyenne, un terme a plus d'importance qu'un autre : il a un coefficient plus important. C'est pareil avec les points : si le point A a plus d'importance que le point B, alors la « moyenne » des deux points sera plus proche de A que de B. On généralise alors cette notion à plus de 2 points à l'aide des barycentres :

Un peu de maths : Barycentre d'un ensemble de points pondérés

Soient N points A_k pondérés par des valeurs α_k telles que $\sum_k \alpha_k \neq 0$; alors on définit le barycentre de ces points comme l'unique point B vérifiant $\overrightarrow{OB} = \frac{\sum_k \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_k \alpha_k}$. On peut montrer mathématiquement que ce point ne dépend pas du point O choisi comme origine.

Puisque tout point O convient, on peut l'appliquer par rapport à B, et en déduire que $\sum_k \alpha_k \overrightarrow{BA_k} = \vec{0}$.

Définition : Centre de masse de $\mathcal{S}$

Le centre de masse d'un système $\mathcal{S}$ de points matériels, noté G, est le barycentre de ces points pondérés par leurs masses respective. Il vérifie donc les propriétés :

$$\forall O, \left(\sum_i m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \tag{M7.3a}$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \tag{M7.3b}$$

Propriété : Expression de la quantité de mouvement à l'aide du centre de masse

La quantité de mouvement d'un système matériel fermé est égale au produit de sa masse totale par la vitesse de son centre de masse :

$$\vec{P}_{\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}} \vec{v}_G \text{ avec } m_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i \tag{M7.4}$$

Démonstration

$$\vec{P}_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i \vec{v}_{M_i} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OG}\right) = m_{\mathcal{S}}\vec{v}_G \text{ d'après (M7.3a).}$$

Théorème du Centre de Masse

Dans un référentiel galiléen, le produit de la masse totale d'un système matériel fermé par l'accélération de son centre de masse est égal à la somme des forces **extérieures** qui s'exercent sur ce système :

$$m_{\mathcal{S}}\vec{a}_G = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k\to M_i} \right) \tag{M7.5}$$

Démonstration

D'après (M7.2), $\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k\to M_i} \right)$. Or $\vec{P}_{\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}}\vec{v}_G$ d'après (M7.4), donc $\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{dt}(m_{\mathcal{S}}\vec{v}_G)$; si le système est fermé, sa masse est constante donc $\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = m_{\mathcal{S}}\vec{a}_G$.

Cette loi nous dit donc qu'il existe un point particulier du système, son centre de masse, dont le mouvement peut être étudié comme un point matériel de masse $m_{\mathcal{S}}$ soumis à toutes forces extérieures s'appliquant sur le système. Cela justifie ce qu'on a fait depuis le début de la mécanique : on a étudié certains solides comme si c'étaient des points matériels ; en fait, sans le dire, on étudiait le mouvement de leur centre de masse.

Pour appliquer ce théorème, encore faut-il savoir où se trouve le centre de masse. Dans le cas d'un système indéformable, c'est facile, il est fixe par rapport au système ; c'est dans ce cas-là qu'on utilisera principalement le Théorème du Centre de Masse (cf. chapitre suivant).

M7.C. TEC pour un système matériel

Regardons maintenant ce qu'il en est de l'aspect énergétique d'un système matériel.

Définition : Énergie cinétique d'un système

L'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques de tous les points qui le composent :

$$E_{c,\mathcal{S}} = \sum_i E_{c,M_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2_{M_i} \tag{M7.6}$$

Théorème de l'Énergie Cinétique pour un système

Le Théorème de l'Énergie Cinétique en référentiel galiléen se généralise à un système, à condition de prendre toutes les forces, extérieures comme intérieures :

$$\frac{\mathrm{d}E_{c,\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{forces\ extérieures\ k} \mathcal{P}_{\vec{f}_k} + \sum_{forces\ intérieures\ k'} \mathcal{P}_{\vec{f}_{k'}} \tag{M7.7a}$$

$$\Delta E_{c,\mathcal{S}} = \sum_{forces\ extérieures\ k} W_{\vec{f}_k} + \sum_{forces\ intérieures\ k'} W_{\vec{f}_{k'}} \tag{M7.7b}$$

Il en est de même pour le Théorème de l'Énergie Mécanique, en ne prenant que les forces non conservatives à droite.

Démonstration

Il n'y a rien à démontrer…Il suffit de faire la somme des Théorèmes de l'Énergie Cinétique appliqués à chaque point M_i du système.

Dans le cas des forces, celles-ci s'annulaient 2 à 2 ; dans le cas des puissances (ou des travaux), elles ne s'annulent pas, mais il y a quand même des propriétés importantes à connaître.

Propriété : Puissance des forces intérieures d'une paire de points

Les forces intérieures s'exerçant entre deux points M_i et M_j ont pour puissance

$$\mathcal{P}_{int(i,j)} = \vec{f}_{M_i \to M_j} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} \tag{M7.8a}$$

et pour travail infinitésimal

$$\delta W_{int(i,j)} = \vec{f}_{M_i \to M_j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j} \tag{M7.8b}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{int(i,j)} &= \mathcal{P}_{\vec{f}_{M_i\to M_j}} + \mathcal{P}_{\vec{f}_{M_j\to M_i}}\\ &= \vec{f}_{M_i\to M_j}\cdot\vec{v}_{M_j} + \vec{f}_{M_j\to M_i}\cdot\vec{v}_{M_i} \text{ en faisant attention au point d'application de chaque force}\\ &= \vec{f}_{M_i\to M_j}\cdot\left(\vec{v}_{M_j}-\vec{v}_{M_i}\right) \text{ par la troisième loi de Newton}\\ &= \vec{f}_{M_i\to M_j}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_j}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{f}_{M_i\to M_j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Cette propriété n'est pas à retenir ; ce sont deux de ses conséquences qu'il faut connaître :

Propriété : Puissance intérieure entre deux points à distance constante

Si deux points de $\mathcal{S}$ sont séparés d'une distance qui reste constante au cours du mouvement, la puissance des forces intérieures entre ces deux points est nulle :

$$\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| = \text{cst} \Rightarrow \mathcal{P}_{int(i,j)} = 0$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| = \text{cst} &\Rightarrow \left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2 = \text{cst} \Rightarrow \overrightarrow{M_iM_j}^2 = \text{cst}\\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}^2}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow 2\overrightarrow{M_iM_j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} = 0\\ &\Rightarrow \overrightarrow{M_iM_j} \perp \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t}\\ &\Rightarrow \vec{f}_{M_i\to M_j} \perp \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} \text{ puisque } \vec{f}_{M_i\to M_j} /\!\!/ \overrightarrow{M_iM_j} \text{ par la troisième loi de Newton}\\ &\Rightarrow \vec{f}_{M_i\to M_j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_{int(i,j)} = 0\end{aligned}$$

On en tire une conséquence immédiate pour le chapitre suivant :

Propriété : Puissance intérieure dans un système indéformable

Pour un système indéformable, la puissance totale des forces intérieures est nulle.

Dans le cas où le système se déforme, il y a un cas intéressant, c'est celui des forces conservatives. Pour cela, au lieu de faire une démonstration générale et abstraite, on va simplement étudier un cas particulier et généraliser le résultat trouvé :

Calcul : Travail d'un ressort fixé à deux points mobiles

Considérons un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0, attaché à deux points M_i et M_j. Alors $\vec{f}_{M_i\to M_j} = -k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|}$ donc

$$\begin{aligned}W_{int(i,j)}^{t_1\to t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} -k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}\\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}^2}{2\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|} \text{ car } \mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}^2 = 2\overrightarrow{M_iM_j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}\\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)\frac{\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2}{2\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|} \text{ car } \overrightarrow{M_iM_j}^2 = \left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2\\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| \text{ car } \mathrm{d}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^2 = 2\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|\cdot\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|\\ &= -\left[\tfrac{1}{2}k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)^2\right]_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$



On voit donc que le travail total des forces entre M_i et M_j (2 forces) s'écrit somme l'opposé de la variation de la quantité $\frac{1}{2}k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)^2$ qui ne dépend que des positions des points : cette *paire de forces* est donc conservative, et son énergie potentielle vaut $\frac{1}{2}k\left(\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\| - \ell_0\right)^2$.

Propriété : Énergie potentielle d'une paire de forces intérieures

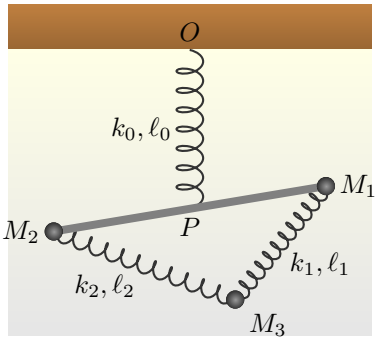
Si les forces intérieures entre deux points M_i et M_j sont conservatives, on ne compte qu'une seule fois l'énergie potentielle intérieure pour la paire de points.

Ainsi, dans les bilans des forces, il faut bien distinguer :

— les forces intérieures, qui sont comptées par paires de forces

— les forces extérieures, qui sont comptées une par une

Considérons par exemple le schéma ci-contre, où M_1 et M_2 sont reliés par une barre inextensible de masse négligeable. On prend comme système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2, M_3\}$ avec les barres/ressorts qui les relient. Pour écrire l'énergie mécanique totale de ce système, il faut compter :



— l'énergie cinétique de chaque point : $E_c = E_{c,M_1} + E_{c,M_2} + E_{c,M_3} = \frac{1}{2}m_1v_{M_1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{M_2}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{M_3}^2$ avec des notations évidentes

— l'énergie potentielle intérieure de chaque **paire** de points du système : $E_{p,int} = E_{p,int,(M_1,M_2)} + E_{p,int,(M_1,M_3)} + E_{p,int,(M_2,M_3)} = 0 + \frac{1}{2}k_1\left(M_1M_3 - \ell_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(M_2M_3 - \ell_2\right)^2$

— l'énergie potentielle extérieure de chaque point ou chaque force extérieure : $E_{p,ext} = E_{p,ext,M_1} + E_{p,ext,M_2} + E_{p,ext,M_3} + E_{p,ext,P} = m_1gz_{M_1} + m_2gz_{M_2} + m_3gz_{M_3} + \frac{1}{2}k_0\left(OP - \ell_0\right)^2$

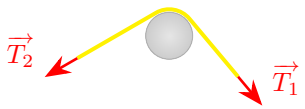
Il reste un cas particulier à connaître : les fils. Si un fil inextensible relie deux points du système, alors la distance entre ces deux points est constante, donc le travail de la tension du fil est nul. On va admettre que c'est aussi le cas si le fil passe sur une poulie :

Propriété : Fil sur une poulie parfaite

Une poulie est un dispositif qui permet de modifier la direction d'un fil, et donc de sa tension. Dans le cas d'un fil passant sur une poulie parfaite (c'est-à-dire de masse négligeable et ne subissant pas de frottements) :

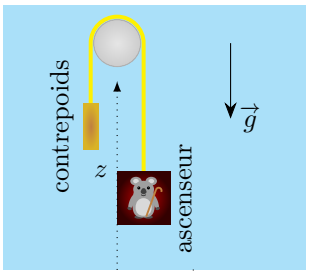
— la tension du fil a la même norme aux deux bouts, mais pas la même direction

— cette paire des deux forces de tensions ne travaille pas



Exemple : Ascenseur

Un ascenseur de masse $M = 320\,\text{kg}$ à vide est attaché à un câble inextensible qui passe sur une poulie parfaite ; de l'autre côté est attaché un contrepoids de masse $m = 380\,\text{kg}$. Un moteur (fixé sur la poulie) entraîne le mouvement de l'ensemble.
On note z l'altitude de l'ascenseur. Le référentiel terrestre est galiléen. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$



1. Soit z_c l'altitude du contrepoids, et $z_c(0)$ son altitude lorsque $z = 0$ (ascenseur au sol).
   Le câble est inextensible : que vaut z_c en fonction de $z_c(0)$ et de z à un instant quelconque ?
2. On note $\mathcal{S} = \{\text{ascenseur} + \text{contrepoids} + \text{fil}\}$.
   Exprimez son énergie mécanique.
3. Trois personnes de 60 kg montent dans l'ascenseur. Calculez la puissance $\mathcal{P}$ que doit fournir le moteur

pour faire monter l'ascenseur et ses passagers à la vitesse $\dot{z} = 2{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

4. Lors d'un test, l'ascenseur est vide, et on débraye le moteur (sa puissance est alors nulle). Calculez alors l'accélération $\ddot{z}$ de l'ascenseur.

1. Quand l'ascenseur monte de z, le contrepoids descend de z, donc $z_c(t) = z_c(0) - z(t)$
2. L'ascenseur a pour vitesse $\dot{z}(t)\vec{e}_z$, et le contrepoids $-\dot{z}(t)\vec{e}_z$. L'énergie cinétique du système vaut donc $\frac{1}{2}M\dot{z}(t)^2 + \frac{1}{2}m_c\dot{z}(t)^2$.
   L'énergie potentielle extérieure du système est due au poids : $E_{p,ext} = Mgz(t) + m_c g(z_c(0) - z(t))$.
   L'énergie potentielle intérieure est nulle car le fil est inextensible et la poulie parfaite.
   Donc $E_m = \frac{1}{2}(M + m_c)\dot{z}(t)^2 + Mgz(t) + m_c g(z_c(0) - z(t))$
3. Il y a aussi la force du moteur qui n'est pas conservative. Par le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$ donc $(M + m_c)\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + (M - m_c)g\dot{z}(t) = \mathcal{P}$.
   Si $\dot{z}(t) = 2,1 = \text{cst}$ alors $\ddot{z}(t) = 0$ donc $\mathcal{P} = (M - m_c)g\dot{z}(t) = 2{,}47\,\mathrm{kW}$ en prenant $M = 500\,\mathrm{kg}$.
4. Cette fois l'ED devient $(M + m_c)\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + (M - m_c)g\dot{z}(t)$ d'où on tire $\ddot{z}(t) = \frac{(m_c - M)g}{M + m_c} = 0{,}84\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

M7.D. Utilisation des lois de conservation

Les lois vues précédemment permettent d'établir des équations différentielles décrivant le mouvement, qui sont plus ou moins difficiles à résoudre. Parfois, la conservation de certaines quantités (c'est-à-dire, l'existence de quantités qui restent constantes au cours du temps) permet de simplifier l'étude. Ce paragraphe n'est cependant pas essentiel, car peu utile dans l'esprit général du programme actuel.

D.1. Conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique a déjà été vue, on la généralise simplement à un système matériel :

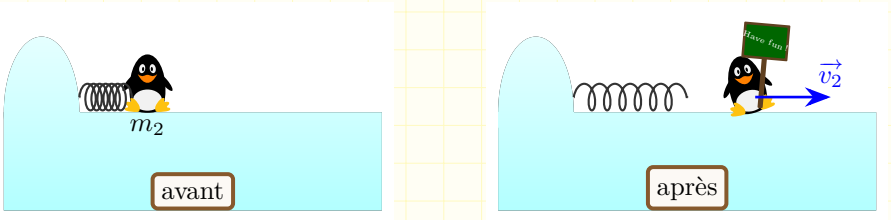
Propriété : Conservation de E_m dans un système conservatif

Si un système n'est soumis à aucune force non conservative (force intérieure ou extérieure), alors il est conservatif : son énergie mécanique est constante.

Cette conservation de l'énergie permet de trouver l'état final de systèmes ayant **un seul degré de liberté**.

Exemple : Propulsion d'un pingouin par un ressort

Un pingouin de masse m_2 est posé sur le sol. On place entre le pingouin et un bloc de glace immobile un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, comprimé initialement à la longueur $\ell_0/2$. Initialement, tout est immobile.



On lâche alors le pingouin. Le ressort se détend, et le pingouin part avec une vitesse v_2.
Exprimez v_2 si on néglige les frottements.

Il est facile de justifier que le système {pingouin} est conservatif, d'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m_2v^2(\text{pingouin}) + \frac{1}{2}k(\text{allongement du ressort})^2$ (on remarquera que l'énergie potentielle du poids est constante, le mouvement étant horizontal).

À l'instant initial, la vitesse est nulle et l'allongement vaut $\frac{\ell_0}{2}$.
À l'instant final, la vitesse vaut v_2 et l'allongement est nul.
Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$ donc $v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}\frac{\ell_0}{2}$

D.2. Conservation de la quantité de mouvement selon un axe fixe

Les pingouins, après avoir bien joué au jeu de l'exercice précédent, ont commencé à se disputer : ça allait trop lentement, et chacun voulait doubler l'autre. Pour aller plus vite, l'un d'entre eux a eu une idée : au lieu de placer le ressort entre un pingouin et un bloc de glace, on allait le placer entre deux pingouin et les propulser en même temps ; ainsi le débit serait doublé.

Mais du point de vue de la physique, on a maintenant 2 degrés de liberté : chaque pingouin a sa propre vitesse. Une seule équation de conservation ne suffit donc plus ; il faut en trouver une deuxième. Pour cela, on va revenir à la notion de *système isolé*.

Définition : Système isolé

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune forces, et pseudo-isolé s'il est soumis à des forces dont la somme est nulle.

Propriété : Quantité de mouvement d'un système isolé

La quantité de mouvement d'un système (pseudo-)isolé est constante.

Évidemment, ce cas est assez rare, à part dans le vide intersidéral. Mais il y a un cas plus courant :

Définition : Système isolé suivant une direction fixe

Un système est isolé suivant une direction $\vec{u}$ FIXE si toutes les forces qui s'exercent sur ce système sont perpendiculaires à cette direction.

Par exemple, un objet qui se déplace sur un sol horizontal sans frottements est isolé suivant la direction horizontale.

Propriété : Quantité de mouvement d'un système isolé suivant une direction fixe

Si un système $\mathcal{S}$ est isolé suivant une direction FIXE $\vec{u}$, alors la composante suivant $\vec{u}$ de la quantité de mouvement de ce système est constante : $\vec{P}_{\mathcal{S}} \cdot \vec{u} = \text{cst}$.

Démonstration

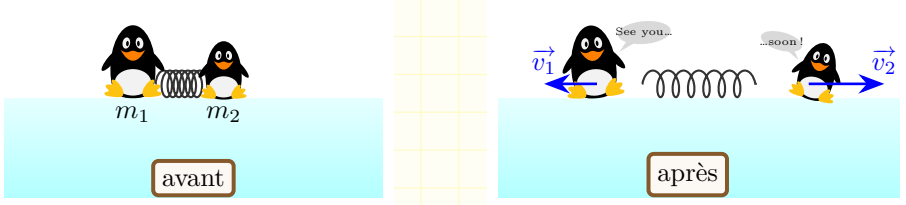
Soit $\mathcal{S}$ un système soumis à des forces extérieures $\vec{F}_{ext,k}$ qui sont toutes perpendiculaires à une direction $\vec{u}$. Alors $\forall k, \vec{F}_{ext,k}.\vec{u} = 0$.

Par le théorème de la quantité de mouvement : $\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \vec{F}_{ext,k}$. On multiplie par $\vec{u}$: $\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} = \sum_k \vec{F}_{ext,k}.\vec{u} = 0$. Or $\vec{u}$ est constant, donc on peut le faire rentrer dans la dérivée : $\frac{\mathrm{d}\left(\vec{P}_{\mathcal{S}}\cdot\vec{u}\right)}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $\vec{P}_{\mathcal{S}} \cdot \vec{u} = \text{cst}$.

Armés de cette seconde loi de conservation, nous pouvons résoudre le problème des deux pingouins :

Exemple : Propulsion de deux pingouins par un ressort

Deux pingouins de masses m_1 et m_2 sont posés sur la banquise. On place entre eux un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, comprimé initialement à la longueur $\ell_0/2$. Initialement, tout est immobile.



On lâche alors les pingouins. Le ressort se détend, et les pingouins partent avec des vitesses v_1 et v_2.
Exprimez v_1 et v_2 si on néglige les frottements.

Soit $\mathcal{S}$={pingouin 1 + pingouin 2 + ressort}.
La conservation de l'énergie mécanique se justifie comme précédemment, mais avec 2 termes désormais dans l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$.
Faisons un bilan des forces extérieures appliquées à $\mathcal{S}$: les deux poids, et les deux réactions du sol sur les pingouins. Si on note $\vec{e}_x$ l'axe horizontal orienté vers la droite, alors ces quatre forces sont perpendiculaires à $\vec{e}_x$: c'est évident pour les poids, et pour les réactions cela est dû à l'absence de frottements. Donc le système est isolé suivant $\vec{e}_x$.
Au départ, les pingouins sont immobiles, donc $\vec{P}_{\mathcal{S}} = \vec{0}$ donc $\vec{P}\cdot\vec{e}_x = 0$.
À la fin, $\vec{P}_{\mathcal{S}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. En notant $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_x$, on a donc $\vec{P}\cdot\vec{e}_x = m_1v_1 + m_2v_2$.
Par conservation de la quantité de mouvement horizontale : $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$
En combinant les deux équations, on obtient $v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v_1$ soit $\frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$. On simplifie : $m_1\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)v_1^2 = \frac{1}{4}k\ell_0^2$ d'où après quelques calculs :

$$\begin{cases} v_1 &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1}\frac{k}{m_1+m_2}}\frac{\ell_0}{2} \\ v_2 &= -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}\frac{k}{m_1+m_2}}\frac{\ell_0}{2} \end{cases}$$

Remarque : pour les signes, on les choisit en fonction du dessin, puisque quand on prend la racine, les deux signes sont possibles.
Autre remarque : il existe des forces horizontales, mais ce sont des forces intérieures, donc elles ne comptent pas.

D.3. Étude générale des chocs (Hors programme)

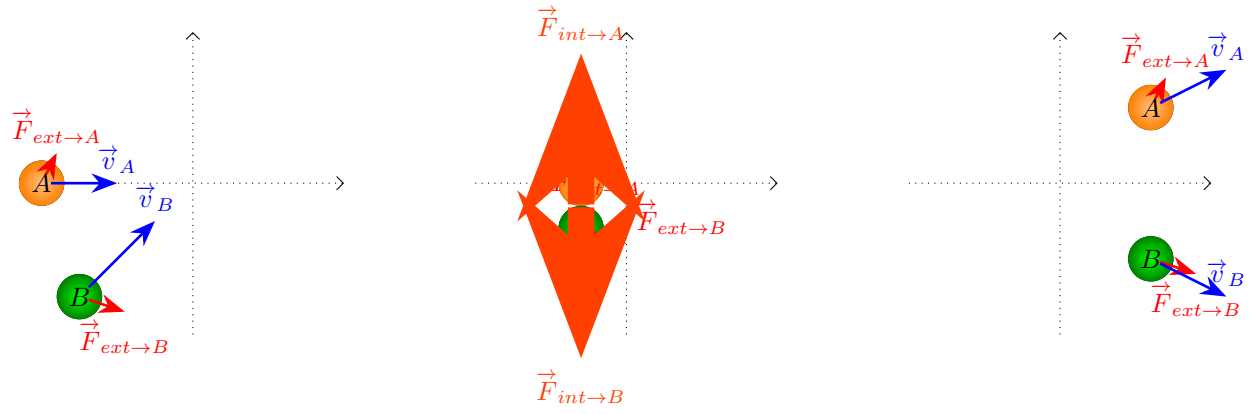
Les chocs ne sont pas au programme, mais il est intéressant d'en dire un mot, vu leur importance en physique.

Définition : Choc

Un choc est une interaction entre plusieurs parties d'un système qui se passe sur une durée très brève et une zone très petite de l'espace.

Exemple : choc de deux particules élémentaires, de deux boules de billard, de deux voitures,...
Lors d'un choc, il y a des forces très grandes qui s'exercent entre les différentes parties du système ; ce sont des forces intérieures au système. Il y a aussi des forces extérieures, mais elles sont normales (comprenez : elles ne sont pas très grandes comme les forces intérieures ; parfois on dit aussi qu'elles sont bornées) donc, sur la durée du choc, elles ont peu d'influence.

FIGURE M7.1 : Étapes d'un choc de deux boules.



(a) Avant le choc (b) Pendant le choc (c) Après le choc

Propriété : Conservation de la quantité de mouvement lors d'un choc

Lors d'un choc, la quantité de mouvement totale du système est conservée.

Démonstration

Soit $\vec{P}$ la quantité de mouvement du système. Alors par le théorème de la quantité de mouvement : $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$. Supposons que le choc ait lieu entre O et $\mathrm{d}t$ où δt est très très très petit. Alors on peut approcher la dérivée par son taux d'accroissement : $\frac{\vec{P}(\delta t)-\vec{P}(0)}{\delta t} = \sum \vec{F}_{ext}$. Donc $\vec{P}(\delta t) = \vec{P}(0) + \delta t \sum \vec{F}_{ext}$. Or $\delta t \approx 0$ et les forces extérieures sont normales donc le terme $\delta t \sum \vec{F}_{ext}$ est nul.
On en déduit que $\vec{P}(\delta t) = \vec{P}(0)$: la quantité de mouvement après le choc est égale à celle avant le choc.

Remarque : Si on applique le même raisonnement à une seule particule, par exemple la particule notée A : $\vec{p}_A(\delta t) = \vec{p}_A(0) + \delta t \sum \vec{F}_{\to A}$. Or les forces s'exerçant sur A sont les forces extérieures s'appliquant sur A, qui sont normales, et les forces intérieures, qui sont très très grandes. Donc le produit $\delta t. \sum \vec{F}_{int\to A}$ n'est pas nul a priori (sorte de forme indétermoinée $0 \times \infty$), ce qui explique que la vitesse de la particule A a été modifiée.

Remarque : Il existe aussi une quantité nommée *moment cinétique*, qu'on définira au chapitre MÉCANIQUE DES SOLIDES, qui n'est modifiée que par les actions extérieures, et qui est donc conservée lors d'un choc.

Propriété : Bilan énergétique lors d'un choc

Lors d'un choc, la variation d'énergie cinétique est non nulle a priori, car la puissance des forces intérieures est non nulle. Dans le cas particulier où $\Delta E_c = 0$, on dit que le choc est *élastique* ; sinon il est *inélastique*.

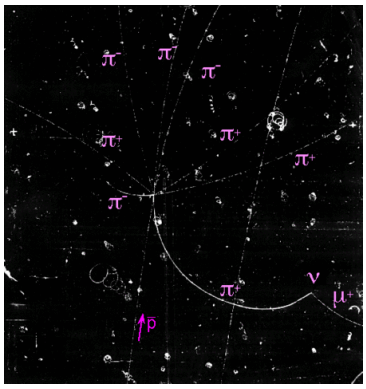
Démonstration

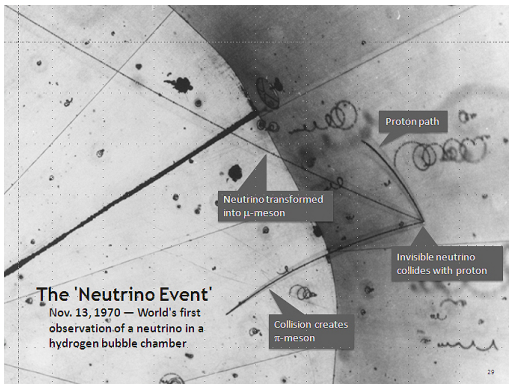
Le choc a lieu sur un temps très bref, mais aussi dans une zone très limitée de l'espace. Or le travail d'une force pendant le choc s'écrit $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$; comme $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \approx \vec{0}$, ce travail est quasiment nul sauf si $\vec{F}$ est très grande. Autrement dit, seules les forces intérieures ont le temps de travailler.

Remarque : Les forces de déformation sont la principale cause de dissipation de l'énergie cinétique. Ainsi, une balle de tennis qui rebondit perd de l'énergie ; au contraire, les chocs de boules de billard sont quasiment élastiques.

La principale application des chocs en physique est dans le domaine des accélérateurs de particules, ou on amène en collision des particules élémentaires accélérées à de grandes vitesses. On connaît les caractéristiques des particules avant le choc (vitesse, moment cinétique, énergie). Le choc produit de nombreuses nouvelles particules ; pour en tenir compte, il faut ajouter dans le bilan énergétique un terme d'**énergie de masse** donné par la relation $E = mc^2$. On analyse alors les trajectoires des particules créées dans différents détecteurs, dont de chambres à bulles et des chambres à brouillard (figure M7.2). On en déduit la vitesse, la quantité de mouvement et donc la masse, et la charge des particules créées. Si on découvre une particule inconnue, les bilans de quantité de mouvement, de moment cinétique et d'énergie permettent de déterminer les caractéristiques de celle-ci.

FIGURE M7.2 : Exemples de collisions de particules énergétiques. (Crédit : Wikipedia/Argonne National Laboratory).





M7. Dynamique des systèmes matériels

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi de Newton	
Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Quantité de mouvement	
Masse d'un système. Centre de masse d'un système.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
Quantité de mouvement d'un système de points.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\vec{p} = m.\vec{v}(G)$. Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.	Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide. Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

M7. Dynamique des systèmes matériels

Quelques conseils

✎ Les exercices sur les systèmes déformables deviennent de plus en plus rares aux concours. Retenez surtout les lois de ce chapitre, mais les exercices d'application porteront principalement sur les solides, qu'on verra au prochain chapitre.

✎ Retenez bien la différence : si on étudie la dynamique d'un système par les forces, seules les forces extérieures comptent ; si on l'étudie par l'énergie, toutes les forces comptent, intérieures et extérieures.

✎ Quand on inclus deux points matériels dans un système, ce qui les relie (fil, ressort,...) est forcément inclus aussi.

M7. Dynamique des systèmes matériels

QCMs

réponses page 859

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Si un point matériel M_1 exerce une force sur un point matériel M_2, et que M_2 exerce une force sur M_1, alors ces deux forces sont :

(a). opposées
(b). égales
(c). parallèles à (M_1M_2)
(d). nulles

Q2. Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un système par rapport au temps est égale à :

(a). la somme des forces extérieures sur ce système
(b). la somme des forces intérieures à ce système
(c). la masse totale du système multipliée par l'accélération de son centre de masse
(d). la somme de toutes les forces sur ce système

Q3. En mécanique, les forces intérieures d'un systèmes ne jouent jamais aucun rôle :

(a). Vrai
(b). Faux

Q4. Pour établir l'énergie mécanique d'un système, on ajoute :

(a). l'énergie potentielle intérieure de chaque point
(b). l'énergie potentielle extérieure de chaque point
(c). l'énergie potentielle intérieure de chaque paire de points
(d). l'énergie cinétique de chaque point

Q5. Le travail des forces intérieures est nulle pour un système :

(a). fermé
(b). quelconque
(c). indéformable
(d). conservatif

Q6. La quantité de mouvement d'un système est constante si :

(a). le système est en translation
(b). le système est fermé
(c). le système est isolé
(d). le système est pseudo-isolé

Q7. L'énergie mécanique d'un système est constante si :

(a). toutes les forces appliquées au système sont conservatives
(b). le système est isolé et indéformable
(c). toutes les forces extérieures appliquées au système sont conservatives
(d). le système est isolé

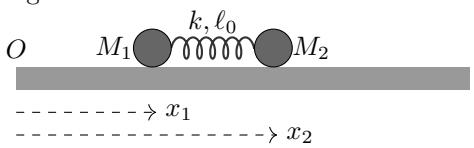
M7. Dynamique des systèmes matériels

Exercices

réponses page 860

Exercice M7.1 : Deux points reliés par un ressort [**]

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on considère deux objets M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 qui se déplacent sans frottements sur un banc à coussin d'air, le long d'un axe horizontal fixe Ox. Ils sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

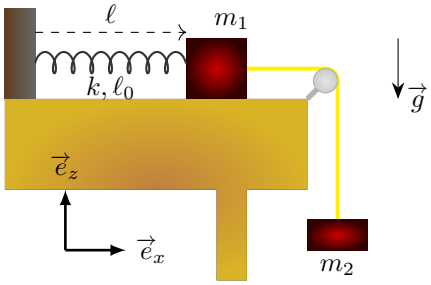


Les positions de M_1 et M_2 sont repérées par $x_1 = \overline{OM_1}$ et $x_2 = \overline{OM_2}$. Initialement (à $t = 0$), M_1 est en O, le ressort est à sa longueur à vide, M_1 est immobile, et on communique une vitesse v_0 à M_2.
On appelle $L = \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$ la longueur du ressort.

1. Exprimez x_G (abscisse du centre de masse G de M_1 et M_2) en fonction de x_1, x_2 et les masses.
   En déduire les expressions de x_1 et x_2 en fonction de x_G, L et les masses.
2. Écrivez les valeurs de $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$ puis $L(0)$ et $\dot{L}(0)$, $x_G(0)$ et $\dot{x}_G(0)$.
3. En appliquant le théorème du centre de masse au système formé des deux points, trouvez $x_G(t)$.
4. Appliquez le PFD au point M_1 ; montrez que L vérifie une équation du type $\ddot{L} = -\omega_0^2(L - \ell_0)$, où ω_0 est une constante à déterminer en fonction de k, m_1 et m_2.
5. On prend le cas $m_1 = m_2$ pour simplifier ; exprimez $L(t)$, puis $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de ℓ_0 et v_0.
6. Tracez alors l'allure de $x_1(t)$ et $x_2(t)$; montrez que chaque point s'arrête périodiquement.

Exercice M7.2 : Oscillation de deux masses reliées par une poulie [**]

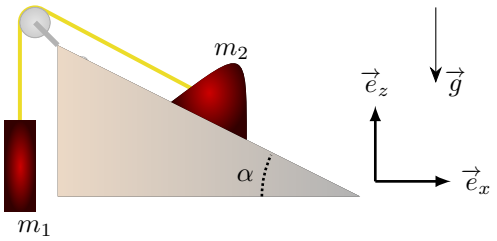
Une masse m_1 peut glisser sans frottements sur une table horizontale ; elle est reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 à une butée. On attache un fil à cette masse ; ce fil passe sur une poulie fixée au coin de la table, et on fait pendre au bout de ce fil une autre masse m_2. On suppose que le fil est inextensible, et la poulie parfaite.
Le référentiel terrestre est galiléen. On note ℓ la longueur du ressort et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.



1. On note $\mathcal{S} = \{m_1 + m_2 + \text{fil}\}$. Écrivez les vitesse de m_1 puis de m_2 dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ en fonction de $\dot{\ell}$. Déduisez-en l'énergie cinétique $E_{c,\mathcal{S}}$.
2. Exprimez l'énergie potentielle totale $E_{p,\mathcal{S}}$ à une constante près.
3. Établissez l'équation différentielle du mouvement. Trouvez les positions d'équilibre possibles, ainsi que la période des oscillations.

Exercice M7.3 : Système de deux masses dont une sur un plan incliné [**]

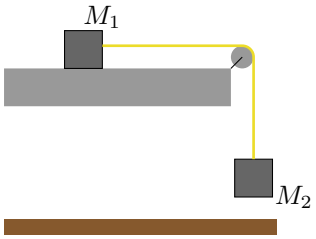
On considère le système ci-contre formé de deux masses m_1 (point M_1) et m_2 (point M_2) reliées par un fil inextensible passant sur une poulie parfaite.
On note z l'altitude de la masse m_1. La masse m_2 glisse sans frottements sur le plan incliné. Pour les AN : $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = 25°$; $m_2 = 150\,\text{g}$.



1. Que vaut l'énergie cinétique de la masse m_1 ? de la masse m_2 (on rappelle que le fil est inextensible) ?
2. Soit Z_0 l'altitude de la masse m_2 lorsque $z = 0$. En traduisant le fait que le fil est inextensible, exprimez l'altitude z_2 de la masse m_2 en fonction de z et des constantes.
3. En déduire une expression de l'énergie mécanique du système $\{m_1 + m_2 + \text{fil}\}$ en fonction de z et $\dot{z}$.
4. Justifiez que le système est conservatif. Déduisez-en l'équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par z.
5. Quelle valeur de m_1 permet d'avoir un système à l'équilibre ?
6. On suppose que $m_1 = 80\,\text{g}$. Déterminez l'accélération $\ddot{z}$ de la chute.

Exercice M7.4 : Bilan énergétique d'un système de deux masses [***]

Une masse m_1 (point M_1) bouge sur une table horizontale, avec un coefficient de frottement f (on rappelle que la composante parallèle au plan de la réaction du support est opposée au mouvement et de norme égale à f fois la composante normale). Elle est reliée par un fil inextensible, passant sur une poulie idéale (qui exerce une force sur le fil, mais ne dissipe aucune énergie), à une masse m_2 (M_2) située à une hauteur h au-dessus du sol. On note g le module du champ de pesanteur.

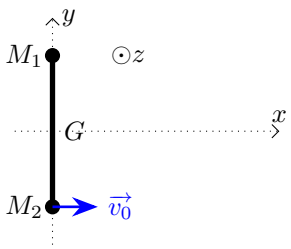


À $t = 0$, on lâche la masse m_2 ; elle descend d'une hauteur h en entraînant m_1, puis touche le sol.

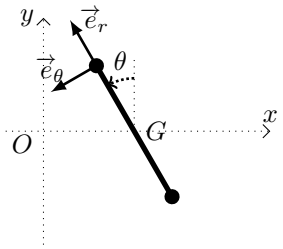
1. Que vaut la force de frottement sur M_1 lorsque M_1 bouge ?
2. Quelle relation relie les norme des vitesses v_1 de M_1 et v_2 de M_2 tant que le fil reste tendu (avant que M_2 ne touche le sol) ?
3. On s'intéresse à la première phase (avant que M_2 ne touche le sol). Appliquez le théorème de l'énergie mécanique au système entre l'instant initial et l'instant où M_2 touche le sol ; déduisez-en une relation entre les paramètres du problème, et la vitesse v_1^- de M_1 juste avant que M_2 ne touche le sol.
   Indication : il faudra calculer le travail de la force de frottements lorsque M_1 parcourt une distance h.
4. Quand M_2 touche le sol, son énergie cinétique est dissipée brutalement par le choc. Par contre, celle de M_1 ne subit pas de variation pendant ce temps très court : si on note v_1^+ la vitesse de M_1 juste après que M_2 a touché le sol, alors $v_1^- = v_1^+$. Ensuite, M_1 continue son mouvement en n'étant plus tirée par le fil. Elle parcourt une distance d avant de s'arrêter.
   En utilisant encore le théorème de l'énergie cinétique, appliqué cette fois à M_1, exprimez d en fonction de h, f, m_1 et m_2.

Exercice M7.5 : Mouvement de deux masses reliées par un fil [****]

On s'intéresse à deux objets M_1 et M_2 de même masse m qui peuvent glisser sans frottements sur un sol horizontal xy (une patinoire par exemple). Ces deux masses sont reliées par un fil inextensible de longueur ℓ.



Instant initial



Instant quelconque

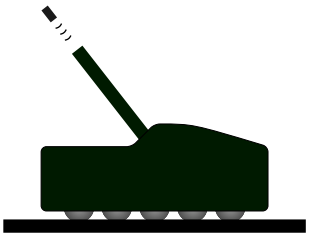
Le référentiel terrestre est galiléen. On note $S = \{M_1 + M_2 + fil\}$ le système complet et G son centre de masse, qui est ici le milieu de $[M_1M_2]$. On note $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{e}_x + y_G\vec{e}_y$.
Initialement (figure de gauche), on a $\overrightarrow{OM_1}(0) = \frac{\ell}{2}\vec{e}_y$, $\overrightarrow{OM_2}(0) = -\frac{\ell}{2}\vec{e}_y$, $\overrightarrow{v_{M_1}}(0) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_{M_2}}(0) = v_0\vec{e}_x$.

1. Rappeler la relation entre $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. En déduire $\overrightarrow{OG}(0)$ et $\vec{v}_G(0)$.
2. Faire un bilan des forces extérieures appliquées au système. En déduire que $\ddot{x}_G$ et $\ddot{y}_G$ sont nuls.

3. Par intégrations successives, en déduire $\overrightarrow{OG}(t)$.
4. Le centre de masse bouge, mais en même temps, le système tourne autour de G (figure de droite). On repère par θ l'angle dont il a tourné.
   Exprimez $\overrightarrow{OM_1}$ sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, puis la vitesse $\vec{v}_{M_1}$; exprimez de même $\vec{v}_{M_2}$. En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c du système en fonction de m, v_0, l et $\dot{\theta}$.
5. Appliquez le théorème de l'énergie cinétique au système ; en déduire que $\dot{\theta}$ est constant, et justifiez par les CI qu'il vaut $\frac{v_0}{\ell}$. En déduire $\theta(t)$.
6. En déduire l'expression de $\overrightarrow{OM_1}(t)$ en fonction uniquement des données de l'énoncé et du temps t (et de même pour $\overrightarrow{OM_2}(t)$).
7. Tracez l'allure de la trajectoire de M_1 et M_2.

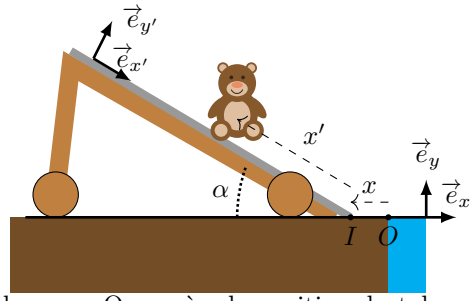
Exercice M7.6 : Les canons de Paris [*]

Durant la première guerre mondiale, l'armée allemande a utilisé des canons de très longue portée (120 km) pour bombarder Paris. Ces canons étaient fixés sur un wagon de chemin de fer. On supposera qu'un wagon roulait sans frottements sur les rails, donc que la réaction des rails sur le canon était uniquement orthogonale aux rails.
Un canon complet avait une masse de 750 t. Il tirait des obus de 100 kg avec une vitesse de $1600\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ faisant un angle de 52° avec l'horizontale.
Calculez la vitesse de recul du canon juste après le tir.



Exercice M7.7 : Toboggan mal fixé [***]

Un ours (repéré par son centre de masse G) de masse m', décide de faire un plongeon depuis un toboggan. Il amène donc un toboggan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale au bord d'un lac, et se laisse glisser depuis le haut du toboggan.
Le problème, c'est que le toboggan est sur roulettes (c'est plus pratique à déplacer) et qu'il a oublié de bloquer les roues. Le toboggan, de masse m, peut donc se déplacer sans frottements sur le sol horizontal (direction $\vec{e}_x$).



On note O le bord du lac et I le point correspondant au bas du toboggan. On repère la position du toboggan par $\overrightarrow{OI} = x\vec{e}_x$ ($x < 0$ sur la figure) et la position de l'ours sur le toboggan par $\overrightarrow{IG} = x'\vec{e}_{x'}$.
On pose S={ours+toboggan} ; tout est immobile à $t = 0$. L'ours glisse sans frottements sur le toboggan. Pour les AN : $m' = 200\,\mathrm{kg}$ (c'est un jeune ours), $m = 560\,\mathrm{kg}$ en $\alpha = 30°$.

1. Exprimez la vitesse du toboggan dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, puis celle de l'ours, en fonction de $\dot{x}$ et de $\dot{x}'$.
2. Montrez que la quantité de mouvement horizontale de S est conservée.
   En déduire une relation entre $\dot{x}$ et $\dot{x}'$ à tout instant.
3. Initialement, $x(0) = 0$ et $x'(0) = -L = -4\,\mathrm{m}$.
   Déterminez la position du toboggan quand l'ours arrive en bas. Commentez.
4. Justifiez que l'énergie mécanique est aussi conservée au cours du mouvement ; exprimez cette E_m.
   À l'aide de la relation de la question 2, montrez que

$$E_m = \frac{1}{2}m'\left[1 - \frac{m'}{m+m'}\cos^2\alpha\right]\dot{x}'^2 - m'gx'\sin\alpha$$

5. Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par x'.
6. Résolvez-la et trouvez $x'(t)$; déduisez-en le temps que met l'ours à atteindrre le bas du toboggan.

Exercice M7.8 : Propulsion d'une fusée [**]

Une fusée de masse M contient une masse $m(t)$ de carburant qu'elle brûle et éjecte derrière elle pour se propulser. On note D_m le débit massique, c'est-à-dire la masse de gaz qui est éjectée par seconde. Soit V la vitesse d'éjection des gaz **par rapport à la fusée**.

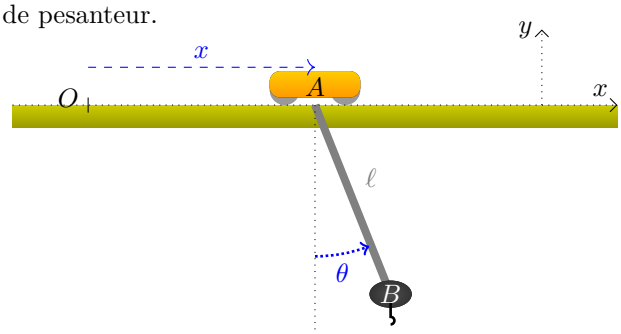


1. On note $v(t)$ la vitesse de la fusée à l'instant t ; exprimez la vitesse des gaz en fonction de v et V.
2. À un instant donné, la fusée contient une masse $M+m(t)$ de carburant, tandis qu'une masse $m(0)-m(t)$ de gaz a été éjectée derrière. Soit S le système formé de la fusée et du carburant qu'elle contient. Exprimez la quantité de mouvement $\vec{P}_S(t)$ de la fusée à l'instant t, en fonction de $v(t)$, $m(t)$ et des constantes.
   À un instant $t+\mathrm{d}t$, une masse $dm = D_m.\mathrm{d}t$ de gaz supplémentaires a été éjectée par la fusée ; le système S à l'instant $t+\mathrm{d}t$ est donc constitué :
   - de la fusée et de la masse $m(t) - D_m.\mathrm{d}t$ de carburant qui lui reste, animés d'une vitesse $v(t+\mathrm{d}t)$
   - de la masse $D_m.\mathrm{d}t$ de gaz éjectés à la vitesse $v(t+\mathrm{d}t) - V$

   En déduire l'expression de $\vec{P}_S(t+\mathrm{d}t)$
3. Supposons que ce système soit isolé (dans l'espace). Par application de la conservation de la quantité de mouvement, montrez que la vitesse $v(t)$ de la fusée obéit à l'équation $(M+m(t))\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_m V$
4. Le terme de droite s'appelle la *force de poussée* ; commentez ce nom.
   AN : pour Ariane 5, $V = 4000\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $D_m = 250\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Calculez la force de poussée.

Exercice M7.9 : Oscillations d'une grue sur un portique [***]

On modélise un portique de chantier par un rail horizontal sur lequel peut se déplacer sans frottements un chariot A de masse M. Un crochet B de masse m est suspendu au chariot par un fil de longueur ℓ constante. On note $x = OA$ (O point fixe), et θ l'angle entre AB et la verticale. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est galiléen. On note g le module du champ de pesanteur.



On note $\mathcal{S}$ le système formé des points A et B et du câble qui les relie. À $t = 0$, on a $x = 0$, l'angle θ vaut θ_0, et tout est immobile.

1. Exprimez la vitesse de A et celle de B en fonction de x, θ, leurs dérivées, l et des constantes, sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$. Déduisez-en la quantité de mouvement totale de $\mathcal{S}$.
2. Montrez qu'une des composantes de la quantité de mouvement de $\mathcal{S}$ est conservée. Déduisez-en une relation entre $\dot{x}$, θ, $\dot{\theta}$, les constantes et les conditions initiales.
3. Exprimez l'énergie cinétique de $\mathcal{S}$.
4. Montrez que ce système est conservatif, et calculez son énergie potentielle.
5. Déduisez des deux équations trouvées précédemment une équation du type $f(\theta, \dot{\theta}) = \text{cst}$.
6. Trouvez l'équation différentielle vérifiée par θ.
7. Linéarisez cette équation dans le cas de petites oscillations, et donner l'expression de la période T des petites oscillations du crochet.
8. Quel est le mouvement du chariot si le crochet oscille avec la période T ?

Réponses aux QCMs

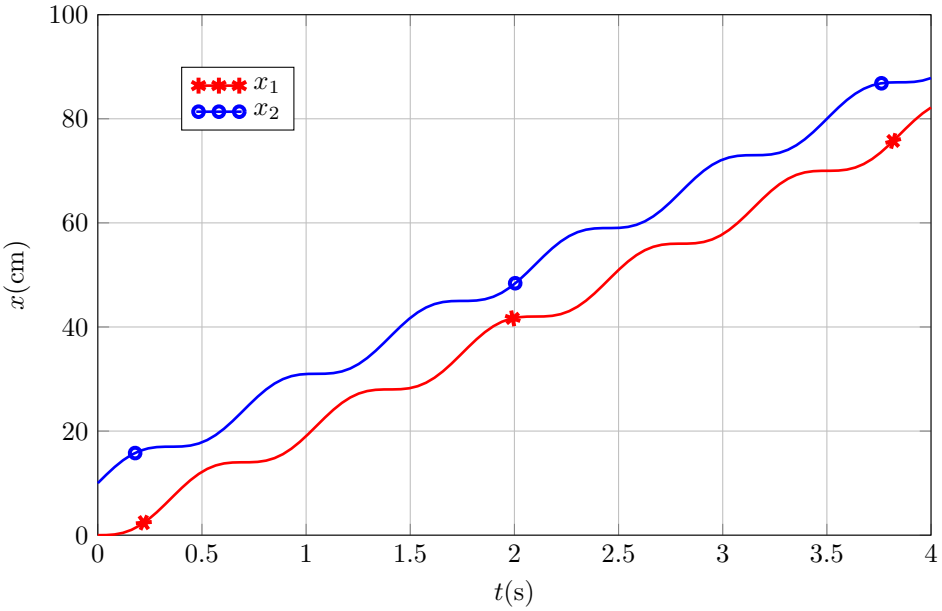
Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (c)
Q2.(a) ET (c)
Q3.(b)
Elles jouent un rôle énergétique : dans le TEC, elles apparaissent.
Q4.(b) ET (c) ET (d)
Q5.(c)
Q6.(c) ET (d)
Q7.(a) ET (b)
Isolé ne suffit pas, car les forces intérieures travaillent.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M7.1 : Deux points reliés par un ressort [**]

1. $x_G(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1+m_2}$ d'où on tire $x_1(t) = x_G(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2} L(t)$ et $x_2(t) = x_G(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2} L(t)$
2. $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \ell_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = v_0$, $L(0) = \ell_0$, $\dot{L}(0) = v_0$, $x_G(0) = \frac{m_2.\ell_0}{m_1+m_2}$ et $\dot{x}_G(0) = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}$.
3. Les seules forces extérieures appliquées au système sont orthogonales à l'axe du mouvement, donc le Théorème du Centre de Masse appliqué à $\{M_1, M_2\}$ dans $\mathcal{R}$ fournit $\ddot{x}_G(t) = 0$ donc $\dot{x}_G(t) = \text{cst} = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}$ et $x_G(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\ell_0 + v_0 t)$.
4. On écrit le PFD appliqué à M_1 dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $m_1 \ddot{x}_1(t) = k(L(t) - \ell_0)$. Or $\ddot{x}_1(t) = \ddot{x}_G(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{L}(t)$ et on a vu que $\ddot{x}_G(t) = 0$; on en déduit donc que $L(t)$ vérifie $\ddot{L}(t) = -\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}(L(t) - \ell_0)$
   Remarque : on aurait aussi bien pu appliquer le PFD à M_2, ça aurait aussi aboutit ; ou encore le TEM au système complet.
5. Donc $L(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \ell_0$. Avec les conditions initiales, on trouve $L(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.
   On en déduit alors $\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{v_0}{2}t - \dfrac{v_0}{\omega_0}\dfrac{1}{2}\sin\omega_0 t \\ x_2(t) = \ell_0 + \dfrac{v_0}{2}t + \dfrac{v_0}{\omega_0}\dfrac{1}{2}\sin\omega_0 t \end{cases}$
6. Exemple avec $\ell_0 = 10\,\text{cm}$, $v_0 = 40\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}7\,\text{s}$:





Corrigé de l'exercice M7.2 : Oscillation de deux masses reliées par une poulie [**]

1. On a évidemment $\vec{v}_1 = \dot{\ell}(t)\vec{e}_x$ et par le fait que le fil est inextensible $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|$ donc $\vec{v}_2 = -\dot{\ell}(t)\vec{e}_z$
   On en déduit que $E_{c,\mathcal{S}} = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\ell}(t)^2$
2. $E_{p,int,\mathcal{S}} = 0$ car le fil est inextensible et la poulie parfaite.
   La réaction du sol sur m_1 ne travaille pas ; le ressort est conservatif d'énergie potentielle $\frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$, et le poids est conservatif d'énergie potentielle $m_1 g z_1(t) + m_2 g z_2(t) = \text{cst} + m_2 g(\text{cst}' - \ell(t))$
   On en déduit que le système est conservatif, et $E_{p,\mathcal{S}} = E_{p,ext,\mathcal{S}} = \frac{1}{2}k\left(\ell(t) - l_0\right)^2 - m_2 g\ell(t) + \text{cst}$
3. On écrit que $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, et on en tire après simplification par $\dot{\ell}$ que $(m_1+m_2)\ddot{\ell}(t) + k\ell(t) = k\ell_0 + m_2 g$
   $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{m_2 g}{k}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

Corrigé de l'exercice M7.3 : Système de deux masses dont une sur un plan incliné [**]

1. La masse m_1 a pour vitesse $\dot{z}(t)\vec{e}_z$ donc son énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}m_1\dot{z}(t)^2$.
   Le fil étant inextensible, la masse m_2 a la même vitesse absolue (pas la même direction) donc son énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}m_2\dot{z}(t)^2$.
2. Si la masse m_1 monte de z, la masse m_2 descend de $z\sin\alpha$. Donc $z_2(t) = Z_0 - z(t)\sin\alpha$.
3. $E_m = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}(t)^2 + (m_1 - m_2\sin\alpha)gz(t) + \text{cst}$
4. Les actions autres que le poids qui s'appliquent sont : la réaction du support sur la masse m_2, qui ne travaille pas (pas de frottements) ; et la force intérieure qui ne travaille pas (fil inextensible + poulie parfaite). Donc le système est conservatif et $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ ce qui donne $(m_1+m_2)\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + (m_1 - m_2\sin\alpha)g\dot{z}(t) = 0$ donc
$$(m_1+m_2)\ddot{z}(t) + (m_1 - m_2\sin\alpha)g = 0$$
5. $m_1 = m_2\sin\alpha = 63{,}4\,\text{g}$
6. $\ddot{z}(t) = \frac{(m_1 - m_2\sin\alpha)g}{m_1+m_2} = 0{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
7. Ce système permet de simuler une chute dans une gravité faible, donc une chute plus lente et plus facile à étudier.

Corrigé de l'exercice M7.4 : Bilan énergétique d'un système de deux masses [***]

1. L'application rapide du PFD à M_1 montre que la réaction de la table a une composante verticale qui compense le poids de M_1, donc vaut $m_1 g$; la force de frottement a donc pour norme fm_1g ; elle est constante et opposée au mouvement.
2. Le fil étant tendu, les deux masses ont même vitesse : $v_1(t) = v_2(t)$.
3. L'énergie cinétique vaut donc $\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1(t)^2$. Le poids est associé à une énergie potentielle ; elle vaut $m_2 g$ fois l'altitude de M_2, puisque l'altitude de M_1 ne varie pas. La poulie exerce une force sur le fil mais ne dissipe pas d'énergie. Il reste la force de frottements, qui est constante et opposée au mouvement, donc son travail vaut $-fm_1g$ fois la distance parcourue par M_1.
   Le théorème de l'énergie mécanique appliqué au système $\{M_1+M_2\}$ entre l'instant initial et juste avant le choc donne l'équation : $\left(\frac{1}{2}(m_1+m_2)(v_1^-)^2 + 0\right) - (0 + m_2gh) = -fm_1gh$. Donc $v_1^- = \sqrt{2gh\dfrac{m_2 - fm_1}{m_1+m_2}}$.
   Remarque : encore faut-il que la racine existe ; pour cela, il faut que $m_2 > fm_1$; dans le cas contraire, il faut remettre en cause l'hypothèse que M_1 glisse : la masse m_2 est trop légère pour mettre M_1 en mouvement.
4. En appliquant le TEC à M_1 entre juste après le choc et l'arrêt, on trouve $0 - \frac{1}{2}m_1(v_1^+)^2 = -fm_1gd$. Avec l'expression trouvée à la question précédente, on trouve après quelques calculs $d = h\dfrac{m_2 - fm_1}{f(m_1+m_2)}$.

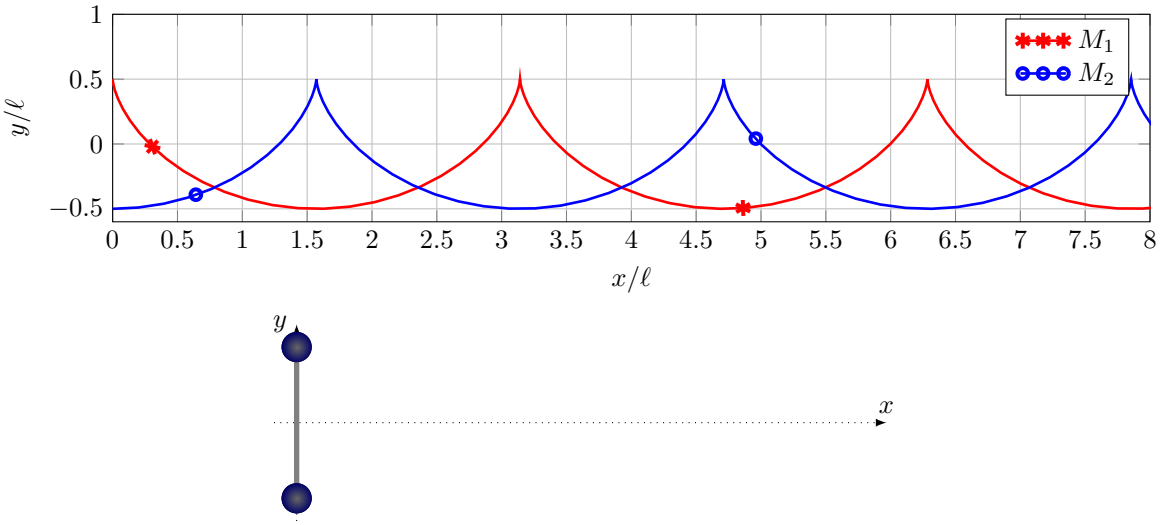
Corrigé de l'exercice M7.5 : Mouvement de deux masses reliées par un fil [****]

1. $\overrightarrow{OG}(t) = \frac{\overrightarrow{OM_1}(t) + \overrightarrow{OM_2}(t)}{2}$ puisqu'ici les masses sont égales. Donc $\overrightarrow{OG}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}_G(0) = \frac{v_0}{2}\vec{e}_x$.
2. Les forces extérieures sont les deux poids et les deux réactions du sol ; toutes sont selon $\vec{e}_z$, donc le théorème de la quantité de mouvement appliqué à S et projeté sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ indique que $\ddot{x}_G(t) = \ddot{y}_G(t) = 0$.
3. On en déduit que $\dot{x}_G(t) = v_0$ et $x_G(t) = v_0 t$, puis $\dot{y}_G(t) = 0$ et $y_G(t) = 0$. Donc $\overrightarrow{OG}(t) = \frac{v_0}{2}t\vec{e}_x$.
4. $\overrightarrow{OM_1}(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \overrightarrow{GM_1}(t) = \frac{v_0}{2}t\vec{e}_x + \frac{\ell}{2}\cos\theta(t)\vec{e}_y - \frac{\ell}{2}\sin\theta(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v}_{M_1} = \left(\frac{v_0}{2} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\vec{e}_x - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_y$. On en déduit que $\vec{v}_{M_1}^2 = \left(\frac{v_0}{2} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\right)^2 = \frac{v_0^2 + \ell^2\dot{\theta}(t)^2 - 2v_0\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)}{4}$.
   De même on montre que $\vec{v}_{M_2}^2 = \frac{v_0^2 + \ell^2\dot{\theta}(t)^2 + 2v_0\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)}{4}$. On en déduit que $E_c = m\frac{v_0^2 + \ell^2\dot{\theta}(t)^2}{4}$
5. Les actions extérieures qui s'appliquent sur M_1 sont le poids et la réaction du support qui ne travaillent pas (mouvement horizontal + pas de frottements). La force intérieure ne travaille pas car le système est indéformable (le fil est de longueur constante). Donc d'après le TEC, $E_c = \text{cst}$ d'où on déduit facilement que $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$ (tous les autres termes sont constants).
   Par les conditions initiales : $E_c(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ car seul M_2 a une vitesse initiale, donc $m\frac{v_0^2 + \ell^2\dot{\theta}^2}{4} = \frac{1}{2}mv_0^2$ d'où on tire $\dot{\theta} = \frac{v_0}{\ell}$. En intégrant : $\theta(t) = \frac{v_0 t}{\ell}$.

6. $\overrightarrow{GM_1}(t) = \frac{\ell}{2}\cos\theta(t)\vec{e}_y - \frac{\ell}{2}\sin\theta(t)\vec{e}_x$. Donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1}(t) = \left(\frac{v_0}{2}t - \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{2v_0t}{\ell}\right)\right)\vec{e}_x + \frac{\ell}{2}\cos\left(\frac{v_0t}{\ell}\right)\vec{e}_y \\ \overrightarrow{OM_2}(t) = \left(\frac{v_0}{2}t + \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{2v_0t}{\ell}\right)\right)\vec{e}_x - \frac{\ell}{2}\cos\left(\frac{v_0t}{\ell}\right)\vec{e}_y \end{cases}$$

7.



Corrigé de l'exercice M7.6 : Les canons de Paris [*]

Ici, l'ensemble {canon+obus} est soumis son poids et à la réaction des rails : les deux sont perpendiculaires à l'horizontale, donc la quantité de mouvement horizontale est conservée ; notons-la P_x.

Initialement, tout est immobile, donc $P_x = 0$.

Après le tir, l'obus a une quantité de mouvement horizontale $-100.1600.\cos 52° = 98\,500\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$, et le canon de vitesse v a pour quantité de mouvement $750000v$. Donc $P_x = 750000v - 98500$.

Par conservation de P_x, on trouve $v = \frac{98500}{750000} = 13\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Cela peut sembler faible, mais 750 t qui se déplacent à $13\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, on ne les arrête pas avec la main.

Attention, on ne peut pas invoquer la conservation de l'énergie ici, car l'explosion de la poudre de l'obus apporte de l'énergie, donc le système n'est pas conservatif.

Corrigé de l'exercice M7.7 : Toboggan mal fixé [***]

1. $\overrightarrow{OI} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v}_{toboggan} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$
   De même $\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{e}_x + x'(t)\vec{e}_{x'} = (x(t) + x'(t)\cos\alpha)\,\vec{e}_x - x'(t)\sin\alpha\,\vec{e}_y$ donc $\vec{v}_{ours} = (\dot{x}(t) + \dot{x}'(t)\cos\alpha)\,\vec{e}_x - \dot{x}'(t)\sin\alpha\,\vec{e}_y$
2. Les forces extérieures qui s'appliquent l'ensemble {ours+toboggan} sont les poids et la réaction du sol. elles sont verticales (pas de frottements sur le sol), donc la quantité de mouvement horizontale est conservée (on suppose que le référentiel terrestre est galiléen).
   Donc $[m\vec{v}_{toboggan} + m'\vec{v}_{ours}]\cdot\vec{e}_x = \text{cst}$ donc $m\dot{x}(t) + m'\dot{x}(t) + m'\dot{x}'(t)\cos\alpha = \text{cst}$. Or rien ne bouge au départ, donc la quantité de mouvement initiale est nulle. Donc $(m+m')\dot{x}(t) + m'\dot{x}'(t)\cos\alpha = 0$
3. En intégrant entre 0 et t : $(m+m')(x(t) - x(0)) + m'(x'(t) - x'(0))\cos\alpha = 0$. Pour $x' = 0$ on trouve $x = -\frac{m'}{m+m'}L\cos\alpha = -0{,}91\,\mathrm{m}$: ça va faire mal !
4. Il n'y a aucune action non conservative ici :
   — le poids du toboggan ne travaille pas (mvt horizontal), pas plus que la réaction du sol (orthogonale au mouvement)
   — le poids de l'ours a pour énergie potentielle $E_p = -m'gx'\sin\alpha$

Donc $\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m'\left((\dot{x}(t)+\dot{x}'(t)\cos\alpha)^2 + (\dot{x}'(t)\sin\alpha)^2\right) - m'gx'(t)\sin\alpha = \text{cst}$.
On développe et on simplifie avec l'aide de la relation $\dot{x}(t) = -\frac{m'}{m+m'}\dot{x}'(t)\cos\alpha$:

$$\begin{aligned} Em &= \frac{1}{2}(m+m')\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m'\dot{x}'(t)^2 + m'\dot{x}(t)\dot{x}'(t)\cos\alpha - m'gx'(t)\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\frac{(m+m')m'^2}{(m+m')^2}\cos^2\alpha\dot{x}'(t)^2 + \frac{1}{2}m'\dot{x}'(t)^2 - \frac{m'^2}{m+m'}\dot{x}'(t)^2\cos^2\alpha - m'gx'(t)\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}m'\left[1 - \frac{m'}{m+m'}\cos^2\alpha\right]\dot{x}'(t)^2 - m'gx'(t)\sin\alpha \end{aligned}$$

5. On dérive par rapport au temps, on simplifie par $\dot{x}'$, et on obtient $\left[1 - \frac{m'}{m+m'}\cos^2\alpha\right]\ddot{x}'(t) = g\sin\alpha$
6. $\ddot{x}'(t) = \text{cst} = 6{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ donc $\dot{x}'(t) = 6,1t$ et $x'(t) = -4 + 3,05t^2$. L'ours atteindra donc $x' = 0$ au bout d'un temps $t = 1{,}1\,\text{s}$

Corrigé de l'exercice M7.8 : Propulsion d'une fusée [**]

1. La fusée a pour vitesse $v(t)\vec{e}_x$ et le gaz $(v(t)-V)\vec{e}_x$.
2. $\vec{P}_S(t) = (M+m(t))v(t)\vec{e}_x$
   $\vec{P}_S(t+\text{d}t) = [(M+m(t)-D_m.\text{d}t)v(t+\text{d}t) + D_m.\text{d}t(v(t+\text{d}t)-V)]\,\vec{e}_x$
   $= [(M+m(t))v(t+\text{d}t) - D_m.\text{d}tV]\,\vec{e}_x$
3. Le système est isolé, donc la quantité de mouvement est constante : $(M+m(t))(v(t+\text{d}t)-v(t)) = VD_m.\text{d}t$ donc $(M+m(t))\frac{\text{d}v(t)}{\text{d}t} = D_mV$
4. Cela ressemble à un théorème du centre de masse dans lequel la fusée est soumise à une force $D_m.V = 1\times10^6\,\text{N}$

Corrigé de l'exercice M7.9 : Oscillations d'une grue sur un portique [***]

Correction brève.

1. $\vec{v}_A = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{v}_B = (\dot{x}+\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t))\vec{e}_x + \ell\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_z$. Donc $\vec{P} = (M+m)\dot{x}(t)\vec{e}_x + m\ell\dot{\theta}(t)(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_z)$
2. Il n'y a aucune force extérieure selon $\vec{e}_x$, donc $\vec{P}\cdot\vec{e}_x = \text{cst}$, donc $(M+m)\dot{x}(t) + m\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) = \text{cst}$. Avec les CI, on trouve $(M+m)\dot{x}(t) + m\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) = 0$
3. À partir des vitesses, on exprime les deux énergies cinétiques, puis on trouve après quelques simplifications $E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 + m\dot{x}(t)\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$
4. On a simplement $E_p = -mg\ell\cos\theta(t)$ car la réaction ne travaille pas.
5. On a les équations

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}(t)^2 + m\dot{x}(t)\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) - mg\ell\cos\theta(t) = \text{cst} = -mg\ell\cos\theta_0 \\ \dot{x}(t) = -\frac{m}{M+m}\ell\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \end{cases}$$

   $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{m}{M+m}\ell^2\dot{\theta}(t)^2\left[M + m\sin^2\theta(t)\right] - mg\ell\cos\theta(t) = -mg\ell\cos\theta_0$
6. On dérive par rapport au temps, et on simplifie par $\dot{\theta}$; on obtient alors

$$\frac{m}{M+m}\ell^2\ddot{\theta}(t)\left[M + m\sin^2\theta(t)\right] + \frac{m}{M+m}\ell^2\dot{\theta}(t)^2m\cos\theta(t)\sin\theta(t) + mg\ell\sin\theta(t) = 0$$

7. On linéarise : $\ddot{\theta}(t) + \frac{M+m}{M}\frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$. Les petites oscillations se font donc avec une période $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{M+m}\frac{\ell}{g}}$
8. La question 2 montre que le chariot va avoir des oscillations horizontales de même période T.

Chapitre M8 Dynamique des solides

Programme p.885

Conseils p.886

Cours p.866
- M8.A. Caractéristiques d'un solide indéformable
- M8.B. Mouvement de translation
- M8.C. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe
- M8.D. Annexe : Calculs de moments d'inertie par intégration (Hors programme)

QCMs p.887

Exercices p.888

TDs numériques p.895

M8. Dynamique des solides

Cours

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des systèmes particuliers : les solides. Ces systèmes ont des propriétés simplifiées par rapport aux systèmes déformables, ce qui justifie leur étude.

Néanmoins, la notion de solide est vague car différentes dans les différents domaines de la physique. Pour un mécanicien, par exemple, le verre est un solide ; pourtant, au niveau microscopique, un cristallographe le décrira plutôt comme un liquide : le verre est un « liquide gelé », ou trempé. Et la pâte dentifrice ? Elle tient bien fixement sur notre brosse à dents, mais s'écoule comme un liquide dès qu'elle est soumise à une contrainte de cisaillement. Même l'eau, dans certaines conditions, peut avoir un comportement qui se rapproche plus du solide.

En résumé, la notion de solide est plus difficile à cerner que ce qu'une première impression montre. Chaque domaine de la physique a sa propre définition du solide. En mécanique, on va travailler sur le modèle du « solide indéformable ».

! Dans tout ce chapitre, on notera $\mathcal{S}$ un solide, et $m_{\mathcal{S}}$ sa masse. Pour les démonstrations, on considérera qu'il est constitué d'atomes M_i de masse m_i, avec $\sum_{i\in\mathcal{S}} m_i = m_{\mathcal{S}}$.

M8.A. Caractéristiques d'un solide indéformable

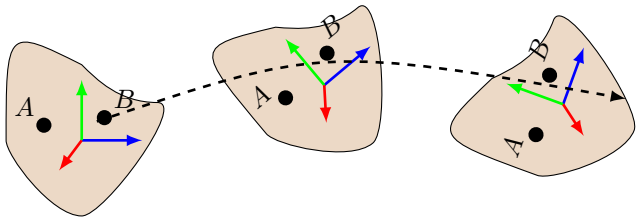
A.1. Propriétés générales et lois d'étude

Définition : Solide indéformable

Un solide indéformable $\mathcal{S}$ est un système tel que $\forall A, B \in \mathcal{S}, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{cst}$.

Attention à la définition ! C'est la distance entre A et B qui est constante ; pas le vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui, lui, peut varier. Par exemple, sur le schéma de la figure M8.1, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tourne clairement, mais sa longueur est constante.

FIGURE M8.1 : Solide en mouvement quelconque.



Remarque : Une conséquence de cette propriété, c'est que si on connaît le mouvement de deux points (2D) ou 3 points (3D) on connaît le mouvement de tous les points du solide.

Pour étudier un tel solide, il faut utiliser les lois des systèmes matériels, mais il y a ici deux simplifications :

— Si on passe par les forces : dans un solide, la position du centre de masse G est fixe par rapport au solide. C'est donc l'outil adapté pour étudier le mouvement. Par conséquent, on utilisera le Théorème du Centre de Masse.

— Si on passe par l'énergie : l'indéformabilité du solide implique que **la puissance des forces intérieures est nulle**.

On utilisera donc pour le moment les lois suivantes :

$$\text{Théorème du centre de masse : } m_{\mathcal{S}}\vec{a}_G = \sum_{\text{forces ext. } k} \vec{f}_k \tag{M8.1a}$$

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique : } \frac{dE_{c,\mathcal{S}}}{dt} = \sum_{\text{forces ext. } k} \mathcal{P}_{\vec{f}_k} \tag{M8.1b}$$

$$\text{Théorème de l'énergie mécanique : } \frac{dE_{m,\mathcal{S}}}{dt} = \sum_{\text{forces ext. non conservatives } k} \mathcal{P}_{\vec{f}_k} \tag{M8.1c}$$

A.2. Poids d'un solide

Il peut être utile, ici, d'effectuer deux calculs concernant le poids d'un solide. En effet, le poids est ce qu'on appelle une **force répartie** : chaque atome est soumis à son propre poids, donc il y a autant de poids que d'atomes. Mais on va voir que toutes ces forces se résument à une seule force particulière.

Propriété : Poids et énergie potentielle de pesanteur d'un solide

— Le poids d'un solide est égal à sa masse totale multipliée par $\vec{g}$: $\overrightarrow{poids}_{\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}}\vec{g}$.

— L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est la même que si toute la masse du solide était concentrée en son centre de masse G : $E_{pp,\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}} g z_G$ où z_G est l'altitude de G.

Démonstration

Pour démontrer la première affirmation, il faut sommer les poids de chaque point M_i pour trouver la force totale :

$$\overrightarrow{poids}_{\mathcal{S}} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\vec{g} = m_{\mathcal{S}}\vec{g}$$

donc le poids total est simplement le poids associé à la masse $m_{\mathcal{S}}$.
Considérons maintenant l'énergie potentielle de pesanteur du solide par sommation des énergies potentielles de chaque point M_i : Pour cela, notons x_i, y_i, z_i les coordonnées cartésiennes du point M_i, avec l'axe z vertical vers le haut. On a alors

$$E_{pp,\mathcal{S}} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i g z_i$$

Notons $\overrightarrow{OM_i} = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$ le vecteur position du point M_i. Alors on voit bien que $\overrightarrow{OM_i}\cdot\vec{e}_z = z_i$. On peut alors écrire

$$E_{pp,\mathcal{S}} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\overrightarrow{OM_i}\cdot g\vec{e}_z$$

et on voit apparaître la définition du centre de masse : $\sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\overrightarrow{OM_i} = m_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OG}$. Donc

$$E_{pp,\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OG}\cdot g\vec{e}_z = m_{\mathcal{S}} g z_G$$

Remarque : C'est pour cela que G s'appelle aussi le centre de gravité. En fait, il y a fondamentalement une petite différence : le centre de masse (ou centre d'inertie) est le point auquel s'applique le théorème du centre de masse ; le centre de gravité est le point où s'applique le poids. Ils sont confondus en vertu du principe d'équivalence, qui postule que la masse inerte et la masse gravitationnelle sont égales.

M8.B. Mouvement de translation

B.1. Aspect cinématique

Définition : Mouvement de translation

Un solide est en translation si tous ses points ont la même vitesse à chaque instant : $\exists\vec{v}, \forall A\in\mathcal{S}, \vec{v}_A = \vec{v}$. On parle alors de la **vitesse du solide** ; elle peut varier au cours du temps. C'est aussi la vitesse du centre de masse $\vec{v}_G$.

Propriété : Non rotation du solide

Une conséquence en est que, pour deux points A et B d'un solide en translation, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant : il ne tourne pas, bien qu'il se déplace ; voir figure M8.2.

Démonstration

$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{0}$ si le solide est en translation.

FIGURE M8.2 : Solide en translation.

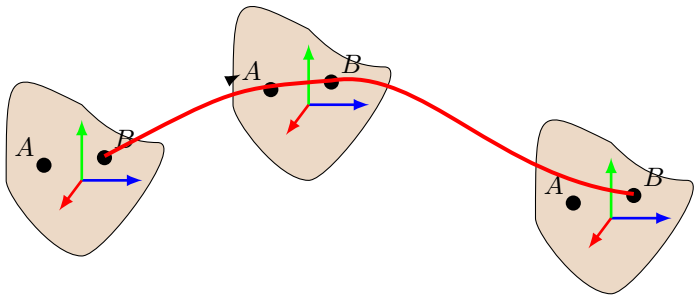


FIGURE M8.3 : Exemples de solides en translation.



(a) Tramway en ligne droite



(b) Nacelle de grande roue



(c) Bouée en mer (peu agitée) (Crédit : Wikipedia/A.Burgess)



(d) Portique de manutention (Crédit : Wikipedia/Gazouya)

Remarque : Si la vitesse $\vec{v}_G$ a toujours la même direction, on dit que le solide est en **translation rectiligne**. Voir par exemple le tramway ou la bouée sur la figure M8.3.

Si la vitesse $\vec{v}_G$ est constante (en direction et en norme), on dit que le solide est en **translation rectiligne uniforme**.

Si chaque point du solide décrit en cercle, on dit que le solide est en **translation circulaire**. Voir par exemple la nacelle de grande roue sur la figure M8.3.

B.2. Étude par les forces

Méthode : Étude d'un solide en translation à l'aide des forces

Pour un solide en translation, **il suffit de connaître le mouvement du centre de masse pour connaître le mouvement du solide tout entier**. Par conséquent, pour étudier le mouvement d'un solide en translation, il suffit d'appliquer le théorème du centre de masse (équation (M8.1a)).

Cela justifie que, depuis le début de la mécanique, nous avons étudié les solides en translation comme des points matériels ; en fait, nous étudiions, sans le savoir, le centre de masse du solide.

B.3. Étude par l'énergie

Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un solide, il faut exprimer son énergie mécanique. La formule générale est compliquée, mais elle se simplifie dans le cas d'un solide en translation :

Propriété : Énergie cinétique d'un solide en translation

L'énergie cinétique d'un solide en translation est identique à celle d'un point matériel de masse m_S placé en G.

Démonstration

Tous les points de S ont la même vitesse, donc la même vitesse que G ; donc

$$E_{c,systsol} = \sum_{i\in S} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{M_i}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i\in S} m_i \vec{v}_G{}^2 = \frac{1}{2} m_S \vec{v}_G{}^2$$

Méthode : Étude d'un solide en translation à l'aide de l'énergie

Pour étudier un solide en translation à l'aide des théorèmes de l'énergie cinétique ou mécanique, on procède comme pour un point matériel de masse m_S placé en G.

M8.C. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

La description d'un mouvement de rotation ne peut pas se faire à l'aide des forces. D'abord parce que le mouvement d'un solide en rotation ne peut se limiter à celle de son centre de masse. Si, par exemple, celui-ci se trouve sur l'axe de rotation, sa vitesse est nulle, tandis que le reste du solide tourne. Ensuite, parce que la vie courante nous prouve que la force n'est pas la seule quantité en jeu dans les mouvements de rotation.

Nous allons commencer par revenir au point matériel, et mettre en place un outil adapté à celui-ci lorsqu'il est en rotation autour d'un axe fixe ; ensuite, nous pourrons généraliser cet outil pour un solide en rotation.

! Dans toute la suite, un axe sera repéré par un point et un vecteur qui l'oriente. Par exemple l'axe Oz est l'axe passant par le point O et dirigé par le vecteur $\vec{e}_z$.

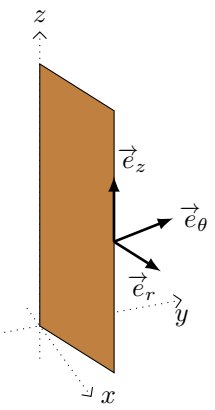
C.1. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, appliqué à un point

Quant on veut ouvrir une porte, on tourne la poignée et on pousse ou on tire la porte ; elle tourne alors autour de ses gonds. Si ce geste est évident pour chacun, il a fallu l'apprendre un jour, car il ne suffit pas de pousser ou de tirer une porte pour qu'elle s'ouvre, il faut le faire dans la bonne direction :

- si on pousse/tire perpendiculairement à la porte, ça marche
- si on pousse/tire vers le haut ou le bas, ça n'ouvre pas la porte
- si on pousse/tire en direction de l'axe de la porte, ça n'ouvre pas la porte

D'un point de vue cinématique, si on place un repère cylindrique avec l'axe Oz comme axe de la porte, alors la porte tourne selon l'angle θ. Les trois observations ci-dessus indiquent alors (figure ci-contre) que :

- une force selon $\vec{e}_\theta$ ouvre la porte
- une force selon $\vec{e}_z$ n'ouvre pas la porte
- une force selon $\vec{e}_r$ n'ouvre pas la porte



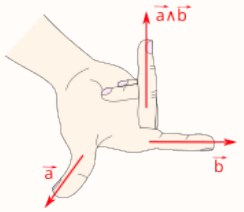
L'autre observation qu'on fait, c'est qu'il est beaucoup plus facile d'ouvrir une porte en poussant loin de l'axe (là où, d'ailleurs, on a mis la poignée !) que près de l'axe (en plus, on risque de se coincer les doigts) : l'effet d'une force pour faire tourner un objet est d'autant plus grand que la force s'applique loin de l'axe.

Ces différentes observations nous mènent à définir une grandeur proportionnelle à la fois à la projection de la force suivant $\vec{e}_\theta$, et à la distance à l'axe.

Un peu de maths : Produit vectoriel

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. On note $\vec{a} \wedge \vec{b}$, appelé *produit vectoriel* de $\vec{a}$ par $\vec{b}$, le vecteur qui a les propriétés suivantes :

- il est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$
- son sens est tel que le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ soit direct (règle de la main droite, cf. ci-contre)
- sa norme vaut $\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; par conséquent, le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est toujours nul.



Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs, on écrit les coordonnées des deux vecteurs en colonnes, on répète la première ligne en-dessous de la troisième, puis on effectue des calculs en « gamma » :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y.b_z - a_z.b_y \\ a_z.b_x - a_x.b_z \\ a_x.b_y - a_y.b_x \end{vmatrix}$$

On peut aussi décomposer les vecteurs sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et utiliser les relations des produits vectoriels de base :

- le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$
- le produit vectoriel de deux vecteurs de la base donne le troisième, avec un signe plus si les vecteurs sont dans l'ordre $x, y, z, x, y, \ldots$ et un signe moins sinon : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = +\vec{e}_z$ mais $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$, etc.

Remarque : La notation $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est une notation française ; à l'international, on utilise plutôt $\vec{a} \times \vec{b}$.

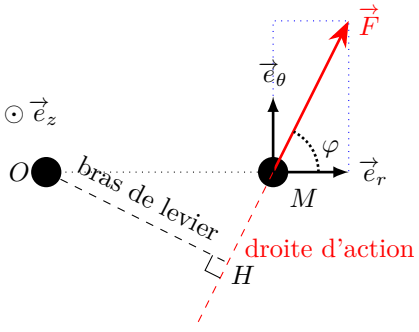
Définition : Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force s'appliquant en un point M par rapport à un axe Oz traduit la capacité d'une force à faire tourner un point/solide autour de l'axe. On le calcule par une des trois formules au choix :

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = OM.F_\theta = OM.\vec{F} \cdot \vec{e}_\theta \qquad \text{(M8.2a)}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = \pm \left\|\vec{F}\right\| .\text{bras de levier} \qquad \text{(M8.2b)}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z \qquad \text{(M8.2c)}$$



Démonstration

La troisième définition est la définition de référence ; il faut bien comprendre que O est un point quelconque de l'axe, et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire qui dirige l'axe.
Si on écrit la force $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_z\vec{e}_z$, alors

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z &= (OM\vec{e}_r \wedge (F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_z\vec{e}_z)) \cdot \vec{e}_z \\ &= (OM.F_\theta\vec{e}_z - OM.F_z\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z = OM.F_\theta\end{aligned}$$

ce qui correspond à la première formule. Cette première formule est celle qui est la plus intuitive : on multiplie la distance à l'axe par la force selon $\vec{e}_\theta$.
La deuxième formule est très utile quand on la comprend, et très obscure quand on ne la comprend pas…Notons φ l'angle non orienté $(\widehat{\vec{e}_r, \vec{F}})$. Alors on a $OM.F_\theta = \pm OM.\left\|\vec{F}\right\|.\sin\varphi$. Or $\varphi = \widehat{OMH}$ et un peu de trigonométrie dans le triangle OMH indique que $OM.\sin\varphi = OH$. On a donc bien $\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = \pm OH.\left\|\vec{F}\right\|$ où OH correspond à la plus courte distance entre l'axe (point O ici) et la droite d'action (droite qui prolonge la force) : on l'appelle le *bras de levier*.

La formule avec le bras de levier laisse choisir le signe à la fin. Pour cela, il faut se souvenir que l'axe est orienté :

le vecteur qui l'oriente définit un **sens positif de rotation autour de l'axe** selon la règle de la main droite, du tire-bouchon, du tournevis, ...

Méthode : Règle d'orientation des angles

Pour déterminer le sens positif de rotation autour d'un axe orienté par un vecteur $\vec{u}$, on peut :

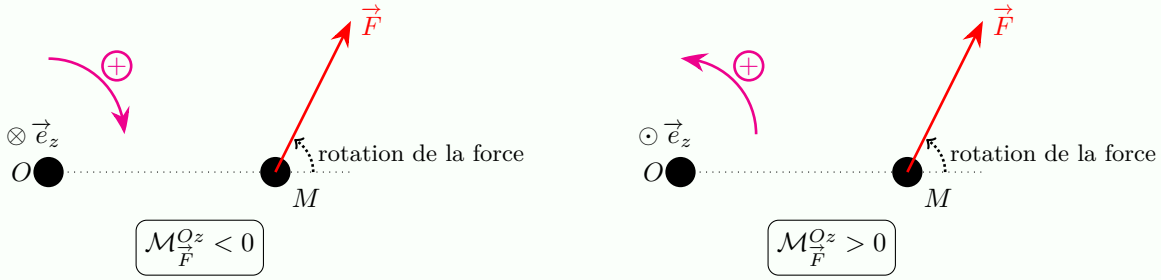
— placer sa main DROITE avec le pouce tendu dans la direction de $\vec{u}$, les autres doigts partiellement repliés indiquent alors le sens positif.

— imaginer qu'on dispose d'un tire-bouchon ou d'un tournevis dans la main, et qu'on cherche à faire avancer le tire-bouchon/la vis dans le sens de $\vec{u}$; le sens dans lequel on doit tourner l'outil est le sens positif.



Méthode : Signe d'un moment de force

Pour trouver ou vérifier le signe du moment d'une force, on regarde si la force a tendance à faire tourner le point dans le sens positif ou négatif.



On définit alors la même chose appliquée à la quantité de mouvement d'un point :

Définition : Moment cinétique d'un point par rapport à un axe

Soit M un point de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$. Son moment cinétique par rapport à l'axe Oz est défini par

$$\mathcal{L}_M^{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{e}_z \qquad \text{(M8.3)}$$

Ce Moment cinétique traduit une sorte de « quantité de rotation ».

On peut alors démontrer le

Théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à un axe fixe, pour un point

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces qui s'appliquent, par rapport à ce même axe

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_M^{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz} \qquad \text{(M8.4)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_M^{Oz}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OM}(t)\wedge m\vec{v}(t)\right)\cdot\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OM}(t)\wedge m\vec{v}(t)\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{e}_z \text{ car } \vec{e}_z = \overrightarrow{\text{cst}} \text{ (axe fixe)}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}\wedge m\vec{v}(t) + \overrightarrow{OM}(t)\wedge m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\vec{e}_z\end{aligned}$$

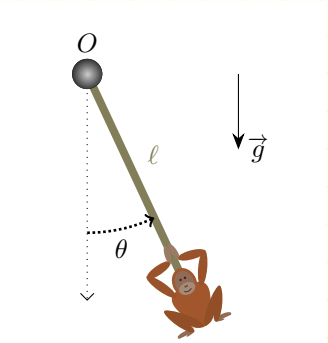
Or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(t)$ car O est fixe (car l'axe est fixe) et $\vec{v}(t)\wedge\vec{v}(t) = \vec{0}$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_M^{Oz}(t)}{\mathrm{d}t} &= \left(\overrightarrow{OM}(t)\wedge m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\vec{e}_z\\ &\overset{\text{PFD}}{=} \left(\overrightarrow{OM}(t)\wedge\sum_k\vec{f}_k(t)\right)\cdot\vec{e}_z\\ &= \sum_k\left(\overrightarrow{OM}(t)\wedge\vec{f}_k(t)\right)\cdot\vec{e}_z = \sum_k\mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}(t)\end{aligned}$$

Exemple : Le pendule simple

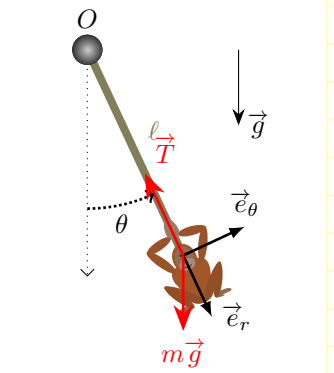
À connaître

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur ℓ, fixé en O, au bout duquel se trouve un objet M de masse m. Par application du théorème du moment cinétique, déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ entre le fil et la verticale.



On étudie le point M dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
Étude cinématique en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r(t)$ et $\vec{v} = \ell\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc

$$\mathcal{L}_M^{Oz} = m\left(\ell\vec{e}_r(t)\wedge\ell\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right)\cdot\vec{e}_z = m\ell^2\dot{\theta}(t)$$



Bilan des actions :

- la tension du fil a un moment nul car elle passe par l'axe
- le poids a un moment non nul ; on peut le calculer de 3 manières :
  - en projetant : $m\vec{g} = mg\left(\cos\theta(t)\vec{e}_r(t) - \sin\theta(t)\vec{e}_\theta(t)\right)$; la formule (M8.2a) indique alors que $\mathcal{M}_{m\vec{g}}^{Oz} = -\ell mg\sin\theta(t)$
  - en projetant et en utilisant la formule (M8.2c) :

$$\mathcal{M}_{m\vec{g}}^{Oz} = \left(\begin{vmatrix}\ell\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}mg\cos\theta(t)\\-mg\sin\theta(t)\\0\end{vmatrix}\right)\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\-mg\ell\sin\theta(t)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} = -mg\ell\cos\theta(t)$$

  - en remarquant que le bras de levier vaut $\ell\sin\theta$ et que la force fait tourner le point M dans le sens négatif ; on utilise alors la formule (M8.2b).

Dans les 3 cas, on trouve $\mathcal{M}_{m\vec{g}}^{Oz} = -\ell mg\sin\theta(t)$

Le TMC par rapport à Oz appliqué à M fournit alors l'équation $m\ell^2\ddot{\theta}(t) = -m\ell g\sin\theta(t)$ qui se simplifie en

$$\ell\ddot{\theta}(t) + g\sin\theta(t) = 0$$

C.2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, appliqué à un système

Si on considère maintenant un ensemble de points M_i de masse m_i, on peut définir son moment cinétique et lui appliquer le TMC à condition de ne tenir compte que des forces extérieures.

Définition : Moment cinétique d'un système par rapport à un axe fixe

Le moment cinétique d'un système $\mathcal{S}$ est la somme des moments cinétiques de ses points :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{Oz} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \mathcal{L}_{M_i}^{Oz}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, pour un système

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces **extérieures** qui s'appliquent, par rapport à ce même axe

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_{forces\ extérieures\ k} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{Oz}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{M_i}^{Oz}}{\mathrm{d}t} \\
&\overset{\text{TMC}}{=} \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{k\to M_i}}^{Oz} \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \left(\sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} + \sum_{j\neq i} \mathcal{M}_{\vec{f}_{M_j\to M_i}}^{Oz} \right) \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} + \sum_{paires(i,j)} \left(\mathcal{M}_{\vec{f}_{M_j\to M_i}}^{Oz} + \mathcal{M}_{\vec{f}_{M_i\to M_j}}^{Oz} \right) \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} + \sum_{paires(i,j)} \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{M_j\to M_i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{f}_{M_i\to M_j} \right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} + \sum_{paires(i,j)} \left(\left(\overrightarrow{OM_j} - \overrightarrow{OM_i} \right) \wedge \vec{f}_{M_i\to M_j} \right) \cdot \vec{e}_z \text{ (3ème loi de Newton)} \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} + \sum_{paires(i,j)} \left(\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{f}_{M_i\to M_j} \right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{forces\ extérieures\ k \\ s'appliquant \\ sur\ M_i}} \mathcal{M}_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}}^{Oz} \text{ car } \overrightarrow{M_iM_j} /\!\!/ \vec{f}_{M_i\to M_j} \text{ (3ème loi de Newton)}
\end{aligned}$$

Quand on travaille sur un système de points, toutes les forces ne s'appliquent pas au même point. Cela peut donner lieu à des couples.

Définition : Couple de forces

Un couple (de forces) est un ensemble de forces donc la somme est nulle, mais le moment par rapport à un axe n'est pas nul. Le moment de ce couple ne dépend pas de l'axe considéré ; on confondra parfois le couple et son moment.



Démonstration

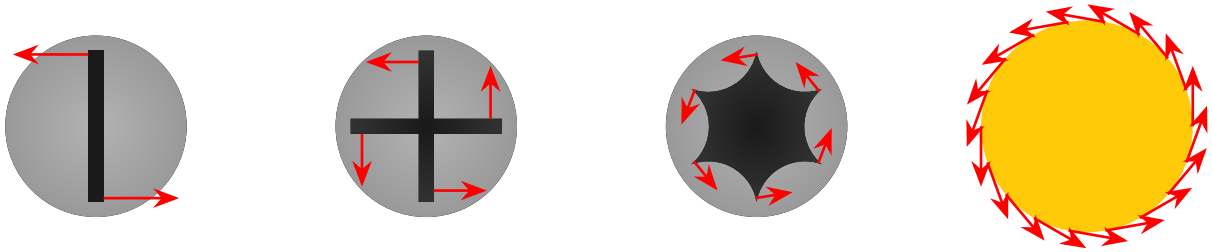
On considère le couple dessiné ci-dessus. Soit Oz un axe. Alors

$$\left(\overrightarrow{OA} \wedge \left(-\vec{F}\right)\right) \cdot \vec{e}_z + \left(\overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z = \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z$$

Cette expression est bien indépendante de la position de O.

Remarque : Un couple peut être la somme de deux forces (comme quand on tourne le volant d'une voiture) ou de beaucoup de forces (quand on tourne un tournevis) : on parle alors de *couple réparti* (figure M8.4).

FIGURE M8.4 : Exemples de couples de forces.



(a) Couple de forces d'un tournevis plat sur une vis

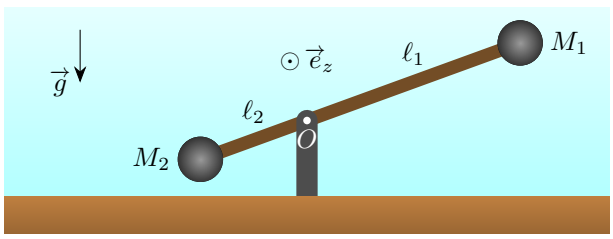
(b) Couple de forces d'un tournevis cruciforme sur une vis

(c) Couple de forces d'un tournevis torx sur une vis

(d) Couple de forces d'une main sur le manche d'un tournevis

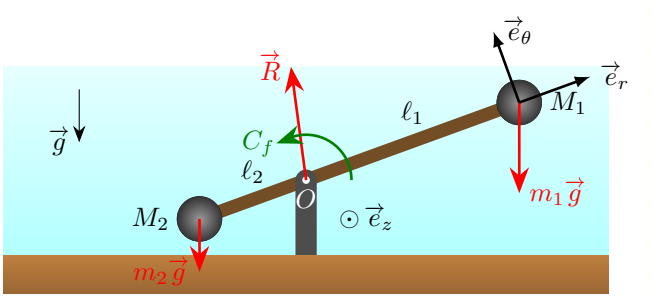
Exemple : Balançoire à deux

On considère une balançoire formée d'une tige dont on négligera la masse, pouvant tourner autour d'un axe horizontal Oz, et de deux masses situées à ses extrémités : un point M_1 de masse m_1 situé à une distance ℓ_1, et un point M_2 de masse m_2 situé de l'autre côté à une distance ℓ_2. On repère sa position par l'angle θ entre OM_1 et l'horizontale.
On suppose que la rotation autour de l'axe se fait avec des frottements : l'axe exerce sur la tige un couple $C_f = -k\dot{\theta}$.



Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

On étudie le système S formé de la tige et des deux masses, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On commence par un schéma des actions extérieures :



Étude cinématique : on place la base polaire associée à M_1 :

- $\overrightarrow{OM_1} = \ell_1\vec{e}_r(t)$ donc $\vec{v}_{M_1} = \ell_1\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\mathcal{L}^{Oz}_{M_1} = m_1\left((\ell_1\vec{e}_r(t)) \wedge (\ell_1\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t))\right)\cdot\vec{e}_z = m_1\ell_1^2\dot{\theta}(t)$
- $\overrightarrow{OM_2} = -\ell_2\vec{e}_r(t)$ donc $\vec{v}_{M_2} = -\ell_2\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\mathcal{L}^{Oz}_{M_2} = m_2\left((-\ell_2\vec{e}_r(t)) \wedge (-\ell_2\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t))\right)\cdot\vec{e}_z = m_2\ell_2^2\dot{\theta}(t)$
- la tige a une masse négligeable, donc un moment cinétique négligeable
- on en déduit le moment cinétique du système complet : $\mathcal{L}^{Oz}_S = \left(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2\right)\dot{\theta}(t)$

Remarque : les deux points ont des moments cinétiques de même signe. Le moment cinétique traduit la « quantité de rotation » du point. Or ici, si M_1 tourne autour de O dans le sens trigonométrique, M_2 tourne aussi dans le sens trigonométrique : les deux rotations se font dans le même sens, même s'ils sont de chaque côté de l'axe, d'où le signe identique.

On passe au bilan des actions mécaniques extérieures :

- la réaction de l'axe passe par l'axe, donc son moment est nul ; le couple de frottements a un moment $-k\dot{\theta}(t)$
- le poids de M_1 s'applique en M_1 et a pour moment $\mathcal{M}^{Oz}_{m_1\vec{g}} = ((\ell_1\vec{e}_r(t)) \wedge (-m_1 g\sin\theta(t)\vec{e}_r(t) - m_1 g\cos\theta(t)\vec{e}_\theta(t)))\cdot\vec{e}_z = -m_1 g\ell_1\cos\theta(t)$
- le poids de M_2 s'applique en M_2 et a pour moment $\mathcal{M}^{Oz}_{m_2\vec{g}} = ((-\ell_2\vec{e}_r(t)) \wedge (-m_2 g\sin\theta(t)\vec{e}_r(t) - m_2 g\cos\theta(t)\vec{e}_\theta(t)))\cdot\vec{e}_z = m_2 g\ell_1\cos\theta(t)$

Remarque : cette fois, les deux moments ont des signes opposés. Sur le schéma, on voit bien que le poids entraîne le système à tourner dans le sens horaire, tandis que le poids de M_2 l'entraîne dans le sens trigonométrique, d'où les signes.

Le Théorème du Moment Cinétique indique alors que $\frac{\mathrm{d}(m_1\ell_1^2+m_2\ell_2^2)\dot{\theta}(t)}{\mathrm{d}t} = -k\dot{\theta}(t) - m_1 g\ell_1\cos\theta(t) + m_2 g\ell_1\cos\theta(t)$ d'où

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\theta}(t) = -k\dot{\theta}(t) + (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g\cos\theta(t)$$

On voit en passant que l'équilibre est atteint lorsque $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$: le plus lourd doit se mettre plus près de l'axe.

C.3. Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition : Mouvement de rotation autour d'un axe

Un solide $\mathcal{S}$ est en rotation autour d'un axe Δ si tous les points du solide appartenant à Δ sont immobiles (figure M8.5).

Remarque : Définition un peu incomplète, car l'axe de rotation peut être en-dehors du solide, mais on s'en contentera pour cette année.

Soit O un point de l'axe et M un point du solide. Alors on peut écrire en coordonnées cylindriques avec $\vec{e}_z$ selon l'axe : $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r(t) + z.\vec{e}_z$ donc $\vec{v}_M = r.\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ car $r = \text{cst}$ (mouvement de rotation autour de l'axe) et $OM = \sqrt{r^2+z^2} = \text{cst}$ (c'est un solide) donc $z = \text{cst}$; de plus, $\dot{\theta}(t)$ est la vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) du point M. Si maintenant on prend un autre point M', il est facile de comprendre que si M' a une vitesse angulaire différente de M, le solide va se déformer, ce qui est en contradiction avec sa définition. On en conclut que $\dot{\theta}(t)$ est le même pour tous les points.

FIGURE M8.5 : Solide en rotation autour d'un axe fixe passant par O.

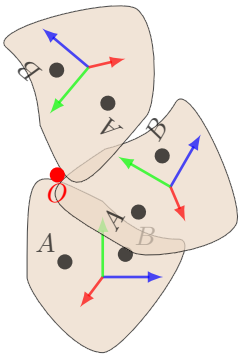


FIGURE M8.6 : Exemples de solides en rotation autour d'un axe fixe.



(a) Ailes d'un syrphe en vol stationnaire (Crédit : Wikipedia)



(c) Éoliennes (Crédit : Wikipedia/M.T.Rader)



(b) Axes de la grande roue



(d) Balais d'essuie-glace

Calcul : Nécessité de la même vitesse angulaire pour tous les points

Soient A et B deux points, repérés par leurs coordonnées $(r_A, \theta_A(t), z_A)$ et $(r_B, \theta_B(t), z_B)$ où seuls les angles varient.
Supposons que A et B soient dans le même plan $z = \text{cst}$, c'est-à-dire que $z_A = z_B$; prenons O dans ce même plan, sur l'axe. Alors par le théorème d'Al-Kashi, $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_B(t) - \theta_A(t))$ et comme $AB = \text{cst}$ (solide indéformable) alors il faut que $\theta_B(t) - \theta_A(t) = \text{cst}$ donc $\dot{\theta}_B(t) - \dot{\theta}_A(t) = 0$.
Dans le cas général, posons C le point de coordonnées $(r_A, \theta_A(t), z_B)$ alors ABC est rectangle en C donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (z_B - z_A)^2 + BC^2$; comme $AB = \text{cst}$ alors il faut que $BC = \text{cst}$ et comme B et C sont dans le même plan $z = \text{cst}$ on en revient au cas précédent.

Définition : Vitesse angulaire ou vitesse de rotation

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, il existe un scalaire $\omega(t)$ appelé *vitesse angulaire* tel que pour tout point du solide en rotation, la vitesse en coordonnées cylindriques vaut $\vec{v}(t) = r\omega(t)\vec{e}_\theta(t)$.

Remarque : θ est un angle ; $\omega = \dot{\theta}$ est une vitesse angulaire en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Remarque : Dans le cas d'une translation, tous les points ont la même vitesse (en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$). Dans le cas d'une rotation, tous les points ont la même vitesse angulaire (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) mais des vitesse différentes : plus un point est loin de l'axe, plus il se déplace vite.

On introduit parfois le *vecteur rotation*, noté souvent $\vec{\Omega}$ ou $\vec{R}$: vecteur de norme ω, dirigé selon l'axe de rotation, et orienté suivant la règle du tire-bouchon. On peut alors vérifier que pour tout point M, on a $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. On s'en servira peu en physique cette année ; il sert surtout dans le cas de composition de rotations.

Remarque : Tout mouvement peut se décomposer en superposition d'une translation et d'une rotation. Souvent on considère la translation de son centre de masse superposée à une rotation autour de ce centre de masse. Mais cette année, le programme demande de se limiter à la rotation autour d'un axe fixe

On peut alors montrer facilement que le moment cinétique d'un solide est proportionnel à sa vitesse angulaire, le coefficient de proportionnalité étant un facteur géométrique :

Définition : Moment d'inertie d'un solide

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe vaut $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{Oz}(t) = J_{\mathcal{S}}^{Oz}\omega(t)$ où $J_{\mathcal{S}}^{Oz}$ (ou $I_{\mathcal{S}}^{Oz}$) est le *moment d'inertie* du solide autour de cet axe :

$$J_{\mathcal{S}}^{Oz} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2, \text{ en } \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \qquad \text{(M8.5)}$$

Démonstration

Notons $\overrightarrow{OM_i} = r_i\overrightarrow{e_{r_i}} + z_i\vec{e}_z$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{Oz}(t) &= \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \left(\overrightarrow{OM_i}(t) \wedge \vec{v}_{M_i}(t)\right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \left((r_i\vec{e}_{r_i}(t) + z_i\vec{e}_z) \wedge r_i\omega(t)\vec{e}_{\theta_i}(t)\right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \left(r_i^2\omega(t)\vec{e}_z - z_i r_i\omega(t)\vec{e}_{r_i}(t)\right) \cdot \vec{e}_z = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2\omega(t)
\end{aligned}$$

Donc $J_{\mathcal{S}}^{Oz} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2$.

Remarque : Même si on ne vous demandera pas de calculer des moment d'inertie de solides, il est bon de savoir que le moment d'inertie d'un point matériel est le produit de sa masse par le carré de sa distance à l'axe.

Avant de pouvoir aller plus loin, intéressons-nous une nouvelle fois au poids :

Propriété : Moment du poids d'un solide

Pour calculer le moment du poids d'un solide, on considère qu'il s'applique au centre de masse G.

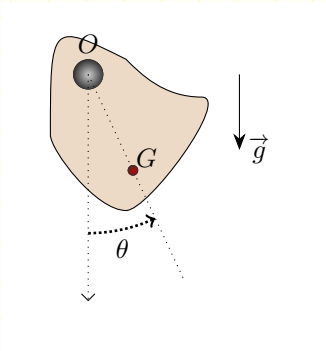
Démonstration

Soit Oz un axe :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\overrightarrow{\text{poids}}}^{Oz} &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{g}\right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \left(\sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g}\right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \left(m_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g}\right) \cdot \vec{e}_z \\
&= \left(\overrightarrow{OG} \wedge m_{\mathcal{S}}\vec{g}\right) \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Exemple : Le pendule pesant — À connaître

Un solide quelconque de masse M est suspendu en un point O et libre de tourner autour d'un axe horizontal (noté Oz). On repère sa position par l'angle entre OG et la verticale, où G est son centre de masse. On note I le moment d'inertie du solide par rapport à Oz.
Par application du théorème du moment cinétique, déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ.



On étudie le solide dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
Étude cinématique : $\mathcal{L}^{Oz} = I\dot{\theta}(t)$
Bilan des actions extérieures :

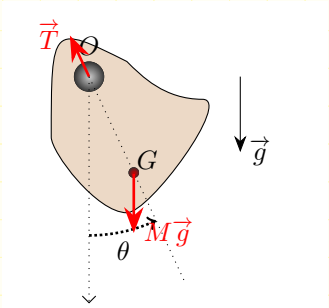
- la réaction de l'axe a un moment nul car elle passe par l'axe
- le poids a un moment non nul ; comme il s'applique en G, on peut montrer que

$$\mathcal{M}^{Oz}_{M\vec{g}} = -OG.M.g.\sin\theta(t)$$

Le TMC appliqué au solide fournit alors l'équation

$$I\ddot{\theta}(t) = -M.OG.g\sin\theta(t)$$

Remarque : dans le cas du pendule simple : $I = M.\ell^2$ et $OG = \ell$, on retrouve l'équation habituelle.



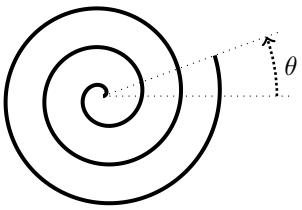
Remarque : Une poulie, un axe,... exercent une force qui passe par l'axe et a un moment nul ; mais ils peuvent aussi exercer un couple, de frottements le plus souvent.

Définition : Ressort spiral, fil de torsion

Un ressort spiral est un ressort qui exerce un couple proportionnel à l'angle dont il a tourné :

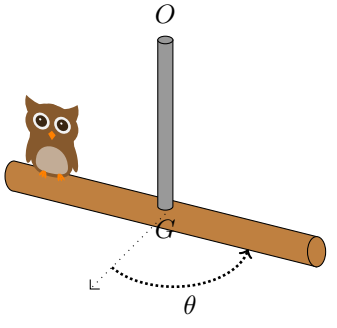
$$C = -k.(\theta - \theta_0) \qquad \text{(M8.6)}$$

où θ_0 est son angle d'équilibre, et k sa raideur. On obtient la même chose avec un fil qu'on tord, qu'on appelle alors *fil de torsion*.



Exemple : Pendule de torsion — À connaître

Une tige est suspendue en son centre de masse G à un fil métallique vertical fixé au plafond en O.
La tige peut tourner autour de l'axe vertical Oz ; on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Lorsqu'elle tourne (rotation mesurée par un angle θ), le fil se tord et exerce un couple de rappel $-C.\theta$.
Établir l'équation différentielle du mouvement, et déterminer la pulsation des oscillations.



On étudie la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
La barre a pour moment cinétique $J\dot{\theta}(t)$. Elle est soumise à :

- son poids, qui passe par l'axe et est parallèle à l'axe, donc son moment est nul
- la tension du fil, qui passe par l'axe et est parallèle à l'axe, donc son moment est nul
- le rappel dû à la torsion du fil, de moment $-C.\theta(t)$

Le TMC donne alors l'équation

$$J\ddot{\theta}(t) + C\theta(t) = 0$$

qui donne des oscillations de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$

Remarque : Pour qu'un solide en rotation soit à l'équilibre, la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui (par rapport à un axe quelconque) doit être nulle.

C.4. Aspect énergétique d'un solide en rotation

Comme dans le cas d'une translation, avant d'appliquer les théorèmes de l'énergie cinétique ou mécanique, il faut essayer d'exprimer de façon simple l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz à la vitesse angulaire ω :

Propriété : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω est reliée à son moment d'inertie par rapport à cet axe selon la relation

$$E_{c,\mathcal{S}} = \frac{1}{2} J_{\mathcal{S}}^{Oz} \omega^2 \qquad \text{(M8.7)}$$

Démonstration

Avec la notation $\overrightarrow{OM_i} = r_i \vec{e}_{r_i} + z_i \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} E_{c,\mathcal{S}}(t) &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{M_i}(t)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \omega(t)^2 r_i^2 \text{ car } \vec{v}_{M_i}(t) = r_i.\omega(t).\vec{e}_{\theta_i}(t) \\ &= \frac{1}{2} J_{\mathcal{S}}^{Oz} \omega(t)^2 \text{ avec } J_{\mathcal{S}}^{Oz} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2 \end{aligned}$$

On va alors pouvoir appliquer les théorèmes, à condition de savoir calculer la puissance d'une force, mais aussi d'un couple. Dans le premier cas, on a une formule, mais pas dans le second cas. On va donc établir une formule qui est vraie dans tous les cas :

Propriété : Puissance et travail d'une force sur un solide en rotation

Une force ou un couple de moment $\mathcal{M}$ s'exerçant sur un solide en rotation à la vitesse angulaire ω fournit au solide une puissance mécanique

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}.\omega \qquad \text{(M8.8a)}$$

Le travail fourni par cette force ou ce couple entre deux instants t_1 et t_2 vaut alors

$$W_{\mathcal{M}}^{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}.\mathrm{d}\theta \qquad \text{(M8.8b)}$$

Démonstration

On va le montrer pour une force ; un couple étant une somme de plusieurs force, la relation sera forcément vraie pour un couple.

Soit une force $\vec{F}$ s'exerçant en un point M du solide.

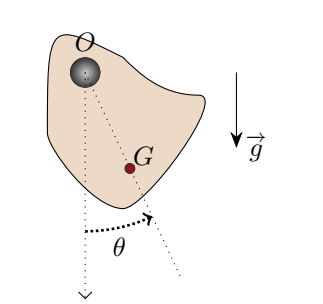
$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \vec{F}.\vec{v}_M \\ &= \vec{F}.r.\omega.\vec{e}_\theta \\ &= F_\theta.r.\omega = \mathcal{M}.\omega \text{ où } r \text{ est la distance à l'axe}\end{aligned}$$

Le travail vaut alors $W_{\mathcal{M}}^{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}.\mathrm{d}t = \int \mathcal{M}.\omega.\mathrm{d}t = \int \mathcal{M}.\mathrm{d}\theta$ avec $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$.

Exemple : Le pendule pesant

À connaître

Un solide quelconque de masse M est suspendu en un point O et libre de tourner sans frottements autour d'un axe horizontal (noté Oz). On repère sa position par l'angle entre OG et la verticale, où G est son centre de masse. On note I le moment d'inertie du solide par rapport à Oz.
Montrez que ce système est conservatif, exprimez son énergie mécanique en fonction de θ, et déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ.



On étudie le solide dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
Étude cinématique : $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2$
Bilan des actions extérieures :

- la réaction de l'axe a un moment nul car elle passe par l'axe, donc sa puissance est nulle
- le poids est conservatif, son énergie potentielle vaut $E_{pp} = Mgz_G(t) = -M.g.OG.\cos\theta(t)$

Donc le système est conservatif et $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2 - M.g.OG.\cos\theta(t) = \text{cst}$.
En dérivant et en simplifiant par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation

$$I\ddot{\theta}(t) = -M.OG.g\sin\theta(t)$$

Un couple de forces possède un moment, donc une puissance (ou un travail) ; il peut être conservatif ; par exemple, un ressort spiral :

Propriété : Énergie potentielle d'un ressort spiral ou d'un fil de torsion

Un ressort spiral, ou un fil de torsion, exerce un couple conservatif d'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\theta - \theta_0\right)^2 \qquad \text{(M8.9)}$$

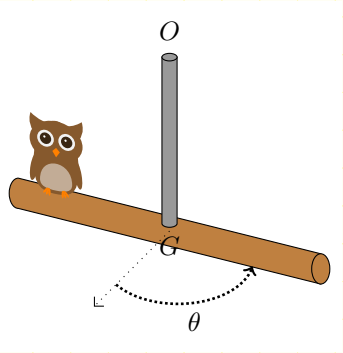
Démonstration

Calculons le travail d'un ressort spiral de moment $-k(\theta-\theta_0)$:

$$\begin{aligned}W^{t_1\to t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}.\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k(\theta-\theta_0).\mathrm{d}\theta = -\left[\frac{1}{2}k\left(\theta-\theta_0\right)^2\right]_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

Exemple : Pendule de torsion — À connaître

Une tige est suspendue en son centre de masse G à un fil métallique vertical fixé au plafond en O.
La tige peut tourner autour de l'axe vertical Oz ; on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Lorsqu'elle tourne (rotation mesurée par un angle θ), le fil se tord et exerce un couple de rappel $-C.\theta$.
Établir l'équation différentielle du mouvement à partir de son énergie mécanique, et déterminer la pulsation des oscillations.



On étudie la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
La barre a pour énergie cinétique $\frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2$. Elle est soumise à :

- son poids, d'énergie potentielle $E_{pp} = \text{cst}$ car le centre de masse ne monte ni ne descend
- la tension du fil, qui a une puissance nulle (il y a 3 ou 4 façons de le justifier)
- le rappel dû à la torsion du fil, conservatif, d'énergie potentielle $\frac{1}{2}C.\theta(t)^2$

Le système est donc conservatif, d'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}C\theta(t)^2 = \text{cst}$.
En dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation

$$J\ddot{\theta}(t) + C\theta(t) = 0$$

C.5. Récapitulatif

Dans ce chapitre, nous avons vu de nombreuses formules concernant les mouvements des solides ; il peut être utile d'en faire un récapitulatif :

Étude sans l'énergie		
Grandeur cinétique	quantité de mouvement $\vec{p}_{\mathcal{S}} = m_{\mathcal{S}}\vec{v}_G$	moment cinétique $\mathcal{L}_S^{Oz} = J_S^{Oz}\omega$
Actions	forces $\vec{f}_k$	moments des forces $\mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_k\right) \cdot \vec{e}_z$ couples $C_{k'}$
Poids	force $m_{\mathcal{S}}\vec{g}$	moment $(\overrightarrow{OG} \wedge m_{\mathcal{S}}\vec{g}) \cdot \vec{e}_z$
Ressort	force $-k(\ell - \ell_0)\vec{u}$	couple $-C(\theta - \theta_0)$
Loi	Théorème du Centre de Masse $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \vec{f}_k$	Théorème du Moment Cinétique $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_S^{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz} + \sum_{k'} C_{k'}$
Étude avec l'énergie		
Énergie cinétique	$E_{c,\mathcal{S}} = \frac{1}{2}m_{\mathcal{S}}\vec{v}_G^2$	$E_{c,\mathcal{S}} = \frac{1}{2}J_S^{Oz}\omega^2$
Puissances	$\mathcal{P}_{\vec{f}_k} = \vec{f}_k \cdot \vec{v}_M$	$\mathcal{P}_{\vec{f}_k} = \vec{f}_k \cdot \vec{v}_M = \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}\omega$ $\mathcal{P}_{C_{k'}} = C_{k'}\omega$
$E_{p,poids}$	$E_{p,pesanteur} = m_{\mathcal{S}}gz_G$	
$E_{p,élastique}$	$\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$	$\frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$
Loi	Théorème de l'Énergie Mécanique $\frac{\mathrm{d}E_{m,\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\text{actions non conservatives } k} \mathcal{P}_k$ $\Delta E_{m,\mathcal{S}}^{t_1 \to t_2} = \sum_{\text{actions non conservatives } k} W_k^{t_1 \to t_2}$	

Tableau M8.1 : Récapitulatif des principales lois concernant les solides.

C.6. Conservation du moment cinétique

On a déjà parlé de la conservation de l'énergie, et la conservation de la quantité de mouvement selon un axe fixe. On va voir maintenant la conservation du moment cinétique par rapport à un axe fixe. Dans ce paragraphe, on ne parlera pas seulement de solides, mais aussi de systèmes déformables.

Propriété : Conservation du moment cinétique

Si un système soumis à des forces dont les moments par rapport à un axe Δ sont tous nuls, alors le moment cinétique de ce système par rapport à Δ est constant. C'est le cas en particulier :

- d'un système isolé,
- d'un système soumis uniquement à des forces selon $\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques d'axe Δ.
- d'un système soumis uniquement à des forces parallèles à l'axe Δ.

Exemple : Patinage artistique

Un patineur se met en rotation, les bras et/ou une jambe écartés, à une vitesse de rotation initiale ω_1. Puis il ramène tous ses membres vers son corps, et on constate que sa vitesse de rotation augmente. Voir cette vidéo.

1. On note J_1 son moment d'inertie avec les membres écartés, et J_2 avec les membres contre son corps. Justifiez qualitativement que $J_1 > J_2$.
2. On suppose que le contact du patineur avec la glace est sans frottements ; justifier que le moment cinétique du patineur est constant.
3. En déduire la vitesse de rotation ω_2 à la fin ; justifier que $\omega_2 > \omega_1$.
4. Exprimez l'énergie mécanique du patineur au début et à la fin ; justifiez qu'il a gagné de l'énergie. D'où provient-elle ?

1. J est la somme des masses de chaque partie du corps, multipliée par la distance par rapport à l'axe au carré. Or la masse totale du patineur ne change pas, mais ses membres sont plus éloignés de l'axe au début qu'à la fin, ce qui explique que $J_1 > J_2$.
2. Le patineur est soumis à son poids et à la réaction du sol. Les deux sont verticales, donc parallèles à l'axe de rotation, donc de moment nul. Le moment cinétique du système est donc conservé.
3. On en déduit que $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ donc $\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 > \omega_1$ puisque $J_1 > J_2$.
4. $E_{c1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2$ et $E_{c2} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_2\left(\frac{J_1\omega_1}{J_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_2}\omega_1^2 = \frac{J_1}{J_2}E_{c1}$: l'énergie cinétique du patineur a augmenté. Son énergie potentielle de pesanteur n'a quasiment pas varié. Le gain d'énergie provient donc du travail des forces intérieures : pour ramener ses membres près de son corps, le patineur a dû exercer un effort qui a fourni du travail.

Cette loi de conservation du moment cinétique a de nombreuses applications : par exemple, le moment cinétique du système Terre-Lune est conservé ; comme la rotation de la Terre ralentit, la Lune, pour compenser, s'éloigne de la Terre. On peut encore citer la physique des particules, où elle jour un rôle très important.

M8.D. Annexe : Calculs de moments d'inertie par intégration (Hors programme)

Un solide peut être décomposé un un très grand nombre d'atomes ; le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ est alors donné par $J^\Delta = \sum_{atomes\ i} m_i r_i^2$ avec r_i le rayon de rotation de l'atome i en coordonnées cylindriques. Mais en pratique, le nombre d'atomes est tellement grand qu'un tel calcul est impossible.

Pour calculer J^Δ, on va donc utiliser une modélisation continue : on découpe le solide et tout petits morceaux possédant chacun une petite masse $\mathrm{d}m$, et donc un moment d'inertie $\mathrm{d}J^\Delta$; on somme ces $\mathrm{d}J^\Delta$ pour obtenir le moment d'inertie total.

Suivant la forme du solide, 3 modélisations sont possibles :

— pour un objet filiforme, on prend une modélisation 1D : on pose $\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\ell}$ la *masse linéique*, où $\mathrm{d}m$ est la petite masse d'un petit morceau de longueur $\mathrm{d}\ell$, et on effectue alors une intégrale simple : $J^\Delta = \int_{solide} r^2\mathrm{d}m = \int_{solide} r^2\lambda.\mathrm{d}\ell$

— pour un objet plat, on prend une modélisation 2D : on pose $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$ la *masse surfacique*, où $\mathrm{d}m$ est la petite masse d'un petit morceau de surface $\mathrm{d}S$, et on effectue alors une intégrale double : $J^\Delta = \iint_{solide} r^2\mathrm{d}m = \iint_{solide} r^2\sigma.\mathrm{d}S$

— pour un objet en volume, on prend une modélisation 3D : on pose $\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ la *masse volumique*, où $\mathrm{d}m$ est la petite masse d'un petit morceau de volume $\mathrm{d}V$, et on effectue alors une intégrale triple : $J^\Delta = \iiint_{solide} r^2\mathrm{d}m = \iiint_{solide} r^2\mu.\mathrm{d}V$

Un peu de maths : Intégrales doubles et triples

Une intégrale double n'est rien d'autre que l'intégrale d'une intégrale. Par exemple,

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{1/x} e^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=0}^{1/x} e^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=1}^{2}\left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_0^{1/x}\mathrm{d}x = \int_{x=1}^{2}\frac{e^1-1}{x}\mathrm{d}x = \left(e^1-1\right)\ln 2$$

Si les bornes des intégrales sont indépendantes, et si le contenu à intégrer se factorise, alors on peut factoriser l'intégrale double (ou triple) sous forme d'un produit d'intégrales :

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x)g(y).\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right)$$

Méthode : Élément d'intégration

Pour déterminer les éléments d'intégration $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}S$ ou $\mathrm{d}V$, il faut :

— déterminer le système de coordonnées permettant de décrire facilement l'objet sur lequel on intègre

— déterminer la ou les variables qui varient lorsqu'on parcourt l'objet sur lequel on intègre

— écrire le petit déplacement dans le système de coordonnées choisi, et faire le produit des normes des petits déplacements selon les variables qui varient

Par exemple, si on veut intégrer sur les bords d'un cylindre, on se place en coordonnées cylindriques. Dans ce système, lorsqu'on se déplace sur le bord du cylindre, c'est θ et z qui varient (r reste constant). Comme le petit déplacement en cylindriques vaut $\mathrm{d}r\vec{e}_r + r.\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$, la petite surface vaudra $\mathrm{d}S = r.\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$.

Exemple : Moment d'inertie d'une tige inhomogène

On considère une tige rectiligne de longueur 2ℓ. Cette tige est plus dense au centre qu'aux bords : en repérant les points par rapport au centre O de la tige, la masse linéique s'écrit $\lambda(r) = \lambda_0\left(1-\frac{r^2}{\ell^2}\right)$.



1. Exprimez le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe Oz (z étant orthogonal à la figure), en fonction de λ_0 et ℓ.
2. Exprimez le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe Az (A étant à une extrémité de la tige), en fonction de λ_0 et ℓ.
3. Exprimez ces moments d'inertie en fonction de la masse totale m de la tige, et de ℓ.

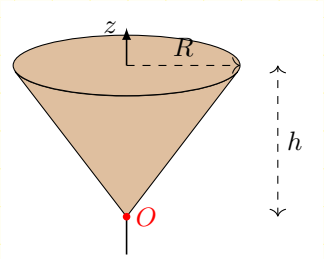
1. On repère un point P de la tige par $r = OP \in [-\ell;+\ell]$. Alors

$$J^{Oz} = \int_{-\ell}^{+\ell}\lambda(r).r^2.\mathrm{d}r = \int_{-\ell}^{+\ell}\lambda_0.\left(r^2-\frac{r^4}{\ell^2}\right)\mathrm{d}r = \lambda_0\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5\ell^2}\right]_{-\ell}^{+\ell} = \frac{4\lambda_0\ell^3}{15}$$

2. Un point P situé à une distance $r \in [0;2\ell]$ de A est à une distance $(r-\ell)$ de O, donc $J^{Az} = \int_0^{2\ell} \lambda(r-\ell).r^2.\mathrm{d}r = \int_0^{2\ell} \lambda_0.\left(1-\frac{(r-\ell)^2}{\ell^2}\right) r^2\mathrm{d}r = \int_0^{2\ell} \lambda_0.\left(\frac{2r^3}{\ell}-\frac{r^4}{\ell^2}\right)\mathrm{d}r = \lambda_0\left[\frac{r^4}{2\ell}-\frac{r^5}{5\ell^2}\right]_0^{2\ell} = \frac{8\lambda_0\ell^3}{5}$
3. On a la masse totale de la tige en intégrant : $m = \int_{-\ell}^{+\ell}\lambda(r)\mathrm{d}r = \lambda_0\left[r-\frac{r^3}{3\ell^2}\right]_{-\ell}^{+\ell} = \frac{4\lambda_0\ell}{3}$. On en déduit que $\lambda_0 = \frac{3m}{4\ell}$ d'où $J^{Oz} = \frac{1}{5}m\ell^2$ et $J^{Az} = \frac{6}{5}m\ell^2$.

Exemple : Moment d'inertie d'un cône homogène

On considère un cône homogène de masse volumique μ, de hauteur h, de rayon à la base R. On note Oz son axe avec O le sommet.



1. Exprimez le rayon r à une altitude z donnée.
2. Déterminez le moment d'inertie J^{Oz}.
3. Exprimez ce moment d'inertie en fonction de R et de sa masse totale m.

1. Par une règle de proportionnalité : $r(z) = \frac{z}{h}R$
2. Quand on parcourt le volume du cône, les trois variables cylindriques r, θ et z varient. Or le petit déplacement vaut $\mathrm{d}r\vec{e}_r + r.\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ donc $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r.r.\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$. Pour l'intégration, on constate que les bornes de r dépendent de z, donc l'intégrale selon r doit être à l'intérieur de celle en z ; quant à celle selon θ, elle est indépendante. Donc :
$$J^{Oz} = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{zR}{h}} \mu r^2.r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \mu\left(\int_{z=0}^{h}\left(\int_{r=0}^{\frac{zR}{h}} r^3\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right).\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)$$
$$= \mu\left(\int_{z=0}^{h}\frac{z^4R^4}{4h^4}\mathrm{d}z\right)2\pi = \frac{\pi\mu hR^4}{10}$$
3. La masse totale du cône est donnée par $m = \mu \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (on peut le retrouver par une intégrale : $m = \iiint \mu.\mathrm{d}V$). Donc $\mu = \frac{3m}{\pi R^2 h}$. En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve $J^{Oz} = \frac{3}{10}mR^2$

M8. Dynamique des solides

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers	
Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation. Rotation autour d'un axe fixe.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire. Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté. Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté. Moment d'une force par rapport à un axe orienté. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Relier le signe du moment cinétique aux caractéristiques du mouvement. Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire. Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier. Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple. Liaison pivot.	Définir un couple. Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté	
Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
Pendule de torsion.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique. **Capacité numérique : À l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.**

M8. Dynamique des solides

Quelques conseils

✎ Il y a beaucoup de formules, de lois et de théorèmes dans ce chapitre. Il faut y mettre de l'ordre. Quand vous voyez un exercices de mécanique du solide, posez-vous les bonnes questions :

— est-ce un solide en translation ou en rotation ?

* en translation : on utilise le TCM ou l'énergie avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
* en rotation : on utilise le TMC ou l'énergie avec $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$

✎ Il faut connaître la définition du moment cinétique d'un point ; mais ensuite, pour un solide en rotation, on a simplement $\mathcal{L} = J\omega$. Pour un point en rotation autour d'un axe fixe, on peut aussi utiliser cette formule avec $J =$ masse $\times$ rayon.

✎ Parfois, l'énoncé repère le solide en rotation par son angle $\theta(t)$, par fois par sa vitesse angulaire $\omega(t)$. Dans le premier cas, il faut comprendre que $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$.

✎ Traitez comme il faut les exercices de type « pendule pesant » : si on modélise explicitement l'objet suspendu comme un solide, ne le traitez pas comme un point matériel. Remarquez que, dans le cas du pendule simple, la tension de la tige a un moment nul car elle est orientée vers l'axe ; dans le cas du pendule pesant, la réaction de l'axe a un moment nul car elle s'applique sur l'axe.

M8. Dynamique des solides

QCMs

réponses page 896

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un solide est en translation si pour tous points A et B du solide :

(a). $AB = \text{cst}$
(b). $\vec{v}_A = \vec{v}_B$
(c). $\vec{v}_A \parallel \overrightarrow{AB}$
(d). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{cst}}$

Q2. Un solide est en rotation autour d'un axe Δ si :

(a). il n'est pas en translation
(b). tous les points du solide ont une vitesse différente
(c). tous les points de Δ sont immobiles
(d). toutes les vitesses sont parallèles à Δ

Q3. La poids d'un solide :

(a). s'applique au centre de gravité G
(b). est conservatif
(c). a pour énergie potentielle $M_S g z_G$
(d). est égal à la masse totale multipliée par $\vec{g}$

Q4. Pour un solide, la puissance totale des forces intérieures est nulle :

(a). Faux
(b). Vrai

Q5. L'énergie cinétique d'un solide en translation s'écrit :

(a). $\frac{1}{2} J v_G^2$
(b). $\frac{1}{2} J \omega^2$
(c). $\frac{1}{2} M_S \omega^2$
(d). $\frac{1}{2} M_S v_G^2$

Q6. L'énergie cinétique d'un solide en rotation s'écrit :

(a). $\frac{1}{2} M_S v_G^2$
(b). $\frac{1}{2} J \omega^2$
(c). $\frac{1}{2} J v_G^2$
(d). $\frac{1}{2} M_S \omega^2$

Q7. La puissance d'un couple de moment M s'écrit :

(a). $M.\omega$
(b). M
(c). $M.v$
(d). $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

Q8. Le moment cinétique d'un système est constante si :

(a). le système n'est soumis qu'à des couples de forces
(b). toutes les forces extérieures appliquées au système ont un moment nul
(c). le système est pseudo-isolé
(d). le système est isolé

M8. Dynamique des solides

Exercices

réponses page 897

Exercice M8.1 : Intérêt du volant d'inertie d'un moteur de voiture [**]

Dans un moteur de voiture à essence, l'arbre moteur est soumis à un couple moteur $C_m(t)$ fourni par les explosions de l'essence dans les pistons. Ce couple n'est pas régulier, il varie périodiquement en fonction du temps avec une période égale à la période des explosions.
On note J le moment d'inertie de l'arbre moteur et $r(t)$ sa vitesse de rotation. On supposera qu'il est soumis à une action de frottements exerçant un couple $-K.r$ avec K une constante. Le centre de gravité de l'arbre moteur est sur son axe de rotation.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par r en appliquant le théorème du moment cinétique à l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
2. Si le couple moteur vaut la valeur constante $C_0 = 180\,\mathrm{N\cdot m}$, l'arbre atteint la vitesse limite $r_{lim} = 8000\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$. Calculer numériquement K.
3. On s'intéresse au régime sinusoïdal forcé. On pose $\underline{H} = \frac{\underline{r}}{\underline{c_m}}$ où $\underline{r}$ et $\underline{c_m}$ sont les images complexes respectives de r et C_m.
   Établir l'expression de $\underline{H}$ sous la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 dont on exprimera la pulsation de coupure ω_0. Tracer l'allure du diagramme de Bode correspondant.
4. Quel est l'intérêt d'augmenter J ?
   En pratique, on place sur l'arbre moteur un disque très lourd appelé volant d'inertie. Le moment d'inertie de l'ensemble vaut alors $J = 0{,}4\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.
   Calculer numériquement la fréquence de coupure f_0 en $\mathrm{min^{-1}}$. Est-ce adapté pour filtrer les vibrations d'un moteur de voiture ?

Exercice M8.2 : Ventilateur [**] py Ad EDO

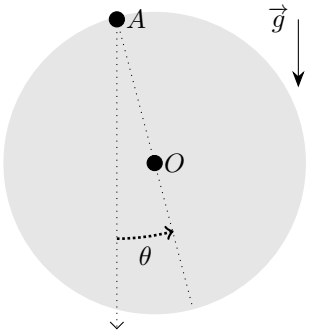
Un ventilateur est un solide de moment d'inertie $J = 2{,}2\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre de masse. Il est mû par un moteur de puissance $\mathcal{P}$. Lors de sa rotation, il est soumis à deux couples de frottements :

— les frottements solides sur les paliers de l'axe, de la forme $-C$ (constants)
— les frottements avec l'air, de la forme $-\lambda.\omega^2$ où ω représente sa vitesse de rotation.

1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par ω.
2. Il existe 2 positions de la commande de vitesse :
   — si $\mathcal{P} = 30\,\mathrm{W}$ alors le ventilateur tourne (en régime permanent) à $600\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$
   — si $\mathcal{P} = 60\,\mathrm{W}$ alors le ventilateur tourne (en régime permanent) à $900\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$
   En déduire deux équations numériques vérifiées par C et λ.
   Calculez numériquement C et λ.
3. Résoudre numériquement $\omega(t)$, à l'aide d'un schéma d'Euler durant 10 s, pour un ventileur initialement à $\omega(0) = 600\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ dont on passe la puissance à $\mathcal{P} = 60\,\mathrm{W}$.
   Mesurez le temps mis pour atteindre $850\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$.

Exercice M8.3 : Oscillations d'un cylindre [**]

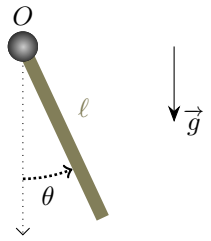
Un cylindre homogène horizontal de rayon a et de masse m est libre de tourner autour de l'axe horizontal passant par un point A (situé en périphérie). On note θ l'angle entre $\overrightarrow{AO}$ et la verticale. On néglige les frottements.



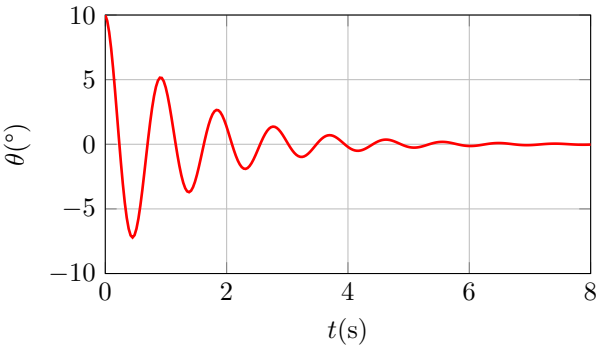
1. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe passant par O vaut $I_O = \frac{1}{2}ma^2$. Le théorème de Huygens indique que $I_A = I_O + mAO^2$. Déduisez-en I_A.
2. Par application du théorème du moment cinétique, trouvez l'équation différentielle vérifiée par θ.
   Déduisez-en la période de ses petites oscillations.
3. Reprenez la question précédente à l'aide de l'énergie.

Exercice M8.4 : Oscillation d'une tige autour d'un axe mal graissé [**]

Une tige homogène, de masse $m = 82\,\text{g}$ et de longueur $\ell = 32\,\text{cm}$, peut tourner autour d'une de ses extrémités O (axe Oz) ; néanmoins, il y a des frottements sur cet axe, qui exercent un couple de frottements qu'on modélisera sous la forme $-k.\dot{\theta}$, avec θ l'angle entre la verticale et la tige.
Le moment d'inertie de la tige par rapport à Oz vaut $I = \frac{1}{3}m\ell^2$. Le centre de masse de G de la tige est en son milieu.



1. Appliquez le théorème du moment cinétique à la tige ; déduisez-en l'ED vérifiée par θ.
2. Retrouvez cette ED par application du théorème de la puissance mécanique.
3. Linéarisez l'équation pour de petites oscillations ; calculez numériquement la pulsation propre, et la période propre correspondante.
4. On relève la courbe suivante :

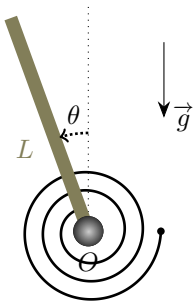


Mesurez le temps caractéritique τ de décroissance de l'enveloppe. En déduire la valeur de k.

Exercice M8.5 : Équilibre d'une tige verticale soutenue par un ressort spiral [**]

Aid $f(x) = 0$

Une tige de masse m et de longueur L pouvant tourner sans frottements autour de l'axe Oz horizontal est maintenue par un ressort spiral d'axe Oz, de raideur k et d'angle au repos 0° (l'angle θ est pris pas rapport à la verticale ascendante).
Le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$; son centre de masse est en son milieu. Pour les AN : $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $m = 12\,\text{g}$ et $L = 14\,\text{cm}$.



1. **Étude par le Théorème du Moment Cinétique**

(a) En appliquant le Théorème du Moment Cinétique à la tige, établissez l'ED vérifiée par θ ; on ne linéarisera pas $\sin\theta$ pour le moment..

(b) Établissez l'équation donnant l'angle θ à l'équilibre. Vérifiez que $\theta = 0°$ est une position d'équilibre.

(c) En linéarisant l'ED, montrer que cette position d'équilibre est stable si et seulement si k est supérieur à une valeur k_c à exprimer et à calculer.

2. **Étude par l'énergie**

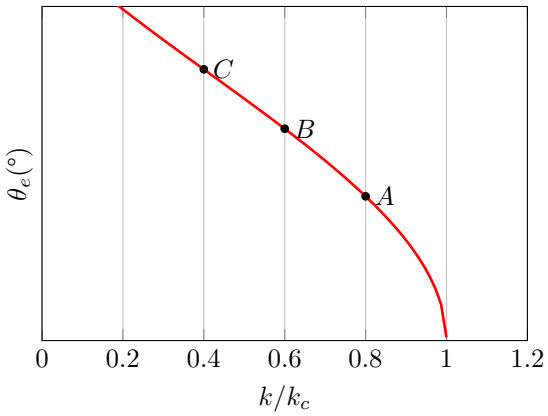
(a) Montrer que ce système est conservatif, et exprimer son énergie mécanique.

(b) Retrouver, à partir de l'expression de E_p, l'équation qui donne les positions d'équilibre.

(c) Retrouver, à partir de E_p, le résultats trouvé sur la stabilité de la position $\theta = 0°$.

3. On peut montrer que, pour $k < k_c$, l'équation donnant les positions d'équilibre admet trois solutions : $\theta = 0°$ et $\theta = \pm\theta_e$ avec $\theta_e \in]0°; 180°]$. Mais cet angle θ_e ne peut se trouver que numériquement.

Implémentez un programme sous Python qui cherche θ_e à 0,1° près (attention, Python travaille avec des radians). Indiquez alors les coordonnées de A, B et C dans le graphique ci-dessous :

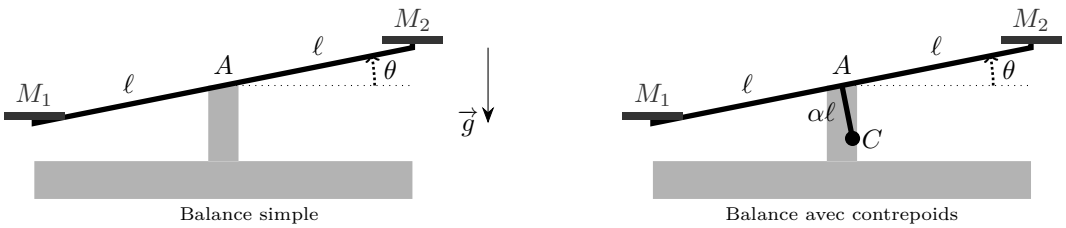


4. [***] Pour $k = 0.8k_c$, déterminez la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.

Exercice M8.6 : Étude de quelques balances [**]

Une tige verticale est fixée sur un socle. En un point A de cette tige est fixée une autre tige t de longueur 2ℓ qui peut pivoter librement autour de l'axe passant par A et orthogonal à la figure ; son centre de masse est en A. Aux deux extrémités de cette seconde tige se trouvent les deux plateaux qu'on modélisera ici simplement par deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2. Le moment d'inertie de la tige horizontale par rapport à l'axe de rotation est noté J.

On repère par l'angle θ avec l'horizontale la position de la tige M_1M_2. De par la construction du système, θ peut varier entre deux valeurs $-\theta_{max}$ et $+\theta_{max}$ avec $\theta_{max} \ll 1$; on simplifiera donc les expressions pour de petits angles.



1. **Premier essai**

On teste dans un premier temps cette balance sans rien ajouter, avec deux masses a priori différentes (figure de gauche).

(a) En appliquant le Théorème du Moment Cinétique par rapport l'axe, au système formé de la tige et des deux masses, établissez l'ED vérifiée par θ (si la balance n'est pas en butée).

(b) Quelle valeur prend θ si $m_1 > m_2$? si $m_1 < m_2$?

(c) Quelle valeur peut prendre θ à l'équilibre si $m_1 = m_2$?

2. **Ajout d'un contrepoids**

Cette première solution ne permet donc pas vraiment de savoir si les deux masses sont égales.

On se propose donc d'ajouter un contrepoids. On accroche donc à la tige M_1M_2 une autre tige plus courte, au bout de laquelle est accrochée un contrepoids C de masse m_C. Le contrepoids est placé de telle sorte que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ et $AC = \alpha.\ell$ (figure de droite).

(a) En appliquant le Théorème du Moment Cinétique à un nouveau système, trouvez la nouvelle ED vérifiée par θ.

(b) Montrez que le système peut atteindre une position d'équilibre θ_{eq}. Dans quel cas vaut-elle 0° ?

(c) On prend $m_1 = 500\,\text{g}$, $m_C = 210\,\text{g}$, $\ell = 20\,\text{cm}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, et $\theta_{max} = 5°$.
Calculez la masse m_2 telle que la position d'équilibre vaille $-\theta_{max}$; puis $+\theta_{max}$. Commentez la précision de cette balance.

(d) Calculez la période des oscillations dans le cas où $m_2 = m_1$ (mêmes valeurs numériques, et $J = \frac{1}{3}m_{tige}\ell^2$ avec $m_{tige} = 180\,\text{g}$).

3. **Frottements solides [***]**

On prend la même balance avec contrepoids, mais avec le temps, l'axe a rouillé. On a donc en plus à tenir compte d'un couple de frottements exercé au point A sur la tige. Celui-ci est caractérisé par une valeur maximale C_m. La tige reste immobile tant que le moment C du couple peut rester inférieur à C_m en valeur absolue ; sinon, la tige tourne, et le couple vaut $C = \pm C_m$ (opposé au mouvement).

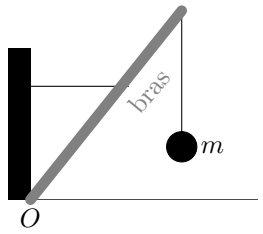
(a) À quelles lois vous fait penser le modèle choisi ?

(b) Établir la nouvelle ED du mouvement.

(c) On pose d'un côté une masse m_1 inconnue. Après divers essais, on constate que, pour une masse m_2 posée de l'autre côté comprise entre 251 g et 258 g, la balance peut rester horizontale à l'équilibre.
Déterminez m_1 et C_m

Exercice M8.7 : Grue portuaire [**]

Un bras de grue (en gris sur la figure) de longueur 25 m est fixé au point O au sol ; il est libre de tourner autour de l'axe Oz passant par ce point et perpendiculaire à la feuille. Un câble horizontal retient ce bras en le reliant à un mât vertical ; ce câble est fixé sur le bras à 15 m de l'axe.
On suspend au bout du bras une masse $m = 4\,\text{t}$ et on néglige les autres masses ; on prendra $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

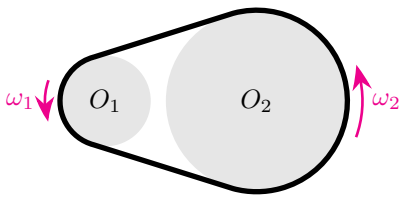


1. Le bras est immobile ; en appliquant le TMC en Oz au système {bras+masse suspendue}, exprimez la tension T du câble horizontal en fonction de mg et de l'angle θ entre le bras et l'horizontale.
AN pour $\theta = 50°$.

2. Pour que le mât ne bascule pas, on le fixe dans le sol au point O. En appliquant le TMC au système {bras+masse suspendue + câble + mât}, calculez le couple exercé par le sol sur le mât.

Exercice M8.8 : Entraînement d'un disque par une courroie [***]

Un moteur de puissance $\mathcal{P} = 5\,\text{W}$ entraîne un disque de rayon R_1 et de masse m_1 ; on notera ω_1 sa vitesse de rotation. Une courroie (inextensible et de masse négligeable) transmet le mouvement de ce premier disque à un autre disque de rayon R_2 et de masse m_2, tournant à la vitesse angulaire ω_2. Un couple de frottements $-\lambda.\omega_2$ s'applique sur ce disque.
Le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. On néglige la masse de la poulie.



1. La courroie avance à la vitesse v. En traduisant que la vitesse des bords des deux disques est égale à v, établissez une relation entre ω_1, ω_2, R_1 et R_2.

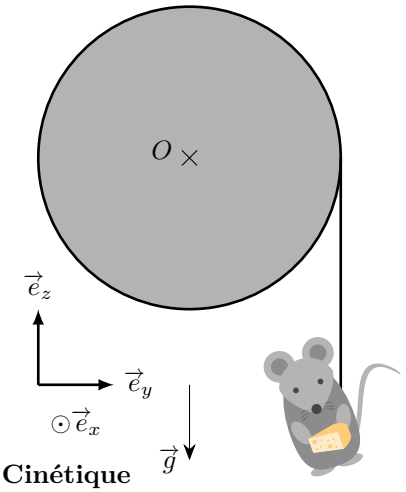
2. On considère le système S formé des deux disques et de la courroie. Exprimez son énergie cinétique

uniquement en fonction de ω_2 et des constantes.

3. On suppose que les deux disques sont équilibrés, donc le poids de chacun s'applique en son axe. Par un bilan énergétique, établissez l'ED vérifiée par ω_2.
4. On constate que ω_2 tend vers $6500\,\mathrm{tr}\cdot\mathrm{min}^{-1}$; sachant que $R_1 = 1{,}5\,\mathrm{mm}$, $R_2 = 9\,\mathrm{mm}$, $m_1 = 90\,\mathrm{mg}$, $m_2 = 15\,\mathrm{g}$, calculez numériquement λ.
5. Résolvez l'ED et établissez l'expression de $\omega_2(t)$ si $\omega_2(0) = 0$.

Exercice M8.9 : Ascenseur à souris [***]

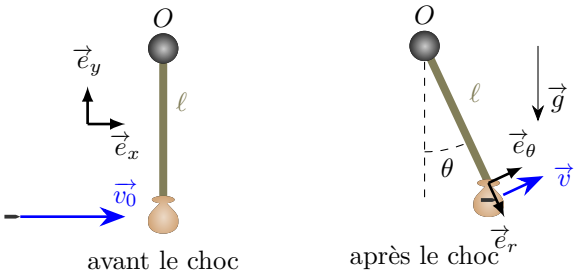
Sur une poulie d'axe Ox horizontal, de masse $M = 200\,\mathrm{g}$ et de rayon $R = 20\,\mathrm{cm}$, on enroule un fil inextensible. Au bout de ce fil est suspendue une souris (avec un morceau de fromage) de masse $m = 50\,\mathrm{g}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{2}MR^2$. On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire vertical ascendant. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.
Pour le moment, la poulie tourne sans frottements ; le fil a une masse négligeable. On note z l'altitude de la souris, et ω la vitesse angulaire de la poulie. On définit le système S={poulie+fil+souris}.



1. Justifiez que $\dot{z} = R\omega$
2. **Étude du mouvement à l'aide du Théorème du Moment Cinétique**
   (a) Exprimez le moment cinétique de S par rapport à Ox en fonction de $\dot{z}$ et des constantes.
   (b) Par application du TCM par rapport à l'axe de la poulie, exprimez $\ddot{z}$ en fonction des constantes. Faire l'AN.
   (c) Pour trouver $\ddot{z}$, on n'a pas eu besoin de connaître la tension T du fil. Supposons qu'on ait quand même besoin de la connaître (pour dimensionner le fil). Quel théorème permettrait de trouver T ? Appliquez ce théorème et calculez T.
3. **Étude du mouvement à l'aide de l'énergie**
   (a) Écrivez l'énergie mécanique de S en fonction uniquement de z, $\dot{z}$, et les constantes.
   (b) Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par z.
4. On suppose que la poulie est mal graissée, il y a un couple résistant Γ constant opposé à la rotation de la poulie (donc positif ici).
   Exprimez la nouvelle équation reliant $\ddot{z}$ aux constantes, en utilisant le Théorème du Moment Cinétique ou l'énergie.
   On mesure $\ddot{z} = -2{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$; calculez Γ.
5. On souhaite faire remonter la souris. Un moteur branché sur la poulie fournit un couple Γ'. Quelle doit être la puissance $\mathcal{P}$ du moteur pour arriver à faire remonter la souris à $8\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ (on tient compte des frottements de la question précédente, mais ils ont changé de signe, puisque le sens du mouvement a changé) ?

Exercice M8.10 : Pendule ballistique [***]

On suspend un petit sac de sable de masse M (on négligera sa taille) au bout d'un fil de longueur ℓ. Il est initialement au repos. On tire une balle de fusil dans le sac de sable. La balle, de masse m, arrive avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$; elle pénètre dans le sac de sable à un instant pris comme référence ($t = 0$) et s'y arrête quasi instantanément (c'est-à-dire que, à $t > 0$, la vitesse de la balle et celle du sac sont identiques).

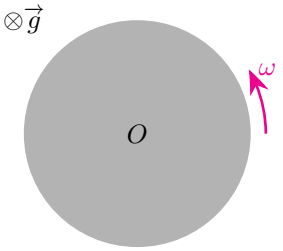


On note Σ ={balle,sac} ; le référentiel terrestre est galiléen.

1. Montrez que le moment cinétique L_Σ de Σ par rapport à l'axe Oz est conservé entre $t = 0^-$ (juste avant le choc) et $t = 0^+$ (juste après le choc).
2. Exprimez L_Σ avant le choc puis après le choc, et déduisez-en la vitesse angulaire $\dot{\theta}(0^+)$ de l'ensemble juste après le choc.
3. Que peut-on dire de Σ après le choc (du point de vue énergétique) ? Calculez alors l'angle maximum θ_{max} atteint par le sac, en fonction de v_0 et des masses, et déduisez-en comment la mesure de θ_{max} peut permettre de connaître v_0.
4. AN : $m = 11\,\text{g}$, $M = 5\,\text{kg}$, $\theta_{max} = 17°$, $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\ell = 50\,\text{cm}$. Calculez v_0.
5. Calculez numériquement l'énergie cinétique de Σ juste avant le choc, puis juste après le choc. Déduisez-en la quantité d'énergie dissipée au cours du choc.

Exercice M8.11 : Couples exercés par les forces de frottements [****]

On considère un objet de masse m, en forme de disque de rayon R (pour simplifier les calculs, mais les résultats qu'on va obtenir se généralisent à n'importe quelle forme) en rotation sur un support fixe. La figure ci-contre représente une vue de dessus.
On suppose que le disque est en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son centre, et on cherche à déterminer le couple dû aux forces de frottements entre le disque et le support.
Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe vaut $\frac{mR^2}{2}$.



1. **Frottements secs**
   On suppose pour le moment que les frottements entre le disque et le support sont modélisable par la loi de Coulomb avec un coefficient de frottements f.
   (a) Soit P un point du disque, repéré par ses coordonnées polaires (r, θ). On considère une surface infinitésimale dS autour de P. Exprimez dS en fonction de r et θ (ou leurs différentielles).
   (b) Le disque n'est soumis qu'à son poids et à la réaction du support. Que vaut la réaction normale totale $\vec{R}_N$ du support sur le disque (sans justification) ?
   En supposant que cette réaction normale est répartie uniformément sur toute la surface du disque, exprimez la petite réaction normale $\mathrm{d}\vec{R}_N$ s'exerçant sur la petite surface $\mathrm{d}S$ autour de P.
   (c) En appliquant les lois de Coulomb, exprimez la petite force de frottement (réaction tangentielle) $\mathrm{d}\vec{R}_T$ correspondante, puis le moment $\mathrm{d}\mathcal{M}$ de cette force $\mathrm{d}\vec{R}_T$ par rapport à l'axe passant par le centre.
   (d) Par intégration sur toute la surface, exprimez le moment total des forces de frottements en fonction de m, g, f et R.
   (e) Supposons que le solide n'est soumis qu'au moment des forces de frottements ; déterminez $\omega(t)$ en fonction de $\omega(0)$ et des données.
2. **Frottements fluides**
   Supposons maintenant que le disque est une pierre de curling posée sur la glace. La fine couche d'eau liquide qui se forme entre la pierre et la glace modifie les lois de frottements, qui deviennent de type frottements fluides.
   (a) Soit P un point du disque de coordonnées polaires (r, θ). Exprimez sa vitesse.

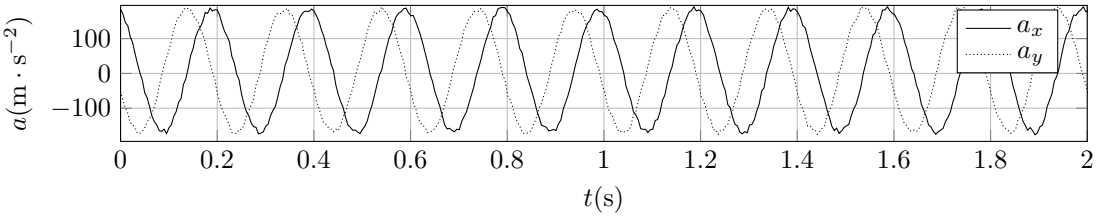
(b) La force de frottements qui s'exerce sur la petite surface dS autour de P est proportionnelle à cette surface dS et à la vitesse de P ; elle s'écrit donc $\mathrm{d}\vec{F} = -\lambda \vec{v}_P \mathrm{d}S$ avec λ une constante.
Exprimez d$\vec{F}$, puis le moment d$\mathcal{M}$ de cette force par rapport à l'axe.

(c) Exprimez le moment total des forces de frottements sous la forme $-C.\omega$ avec C à déterminer.

(d) Supposons que le solide n'est soumis qu'au moment des forces de frottements ; déterminez $\omega(t)$ en fonction de $\omega(0)$ et des données.

Exercice M8.12 : Courbe d'accélération [**]

En un point fixe d'un solide en rotation, on a relevé les courbes suivantes d'accélération :

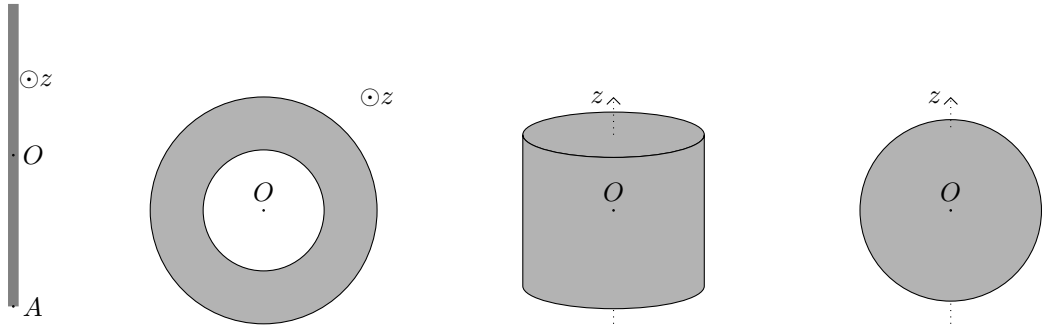


1. Mesurez la pulsation à laquelle tourne le solide.
2. À partir de la courbe, déterminer à quelle distance de l'axe est placé l'accéléromètre.
3. Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à 30 cm de l'axe de rotation ?

Exercice M8.13 : Calculs de moments d'inertie [***]

Exercice hors programme, avec des intégrales simples puis triples.

1. On considère une tige homogène de masse m et de longueur ℓ (figure (a)). Exprimez son moment d'inertie I^{Oz} par rapport à un axe Oz passant par son centre.
2. Même question par rapport à l'axe passant par son extrêmité (Az).



(a) Tige 1D (b) Couronne (c) Cylindre (d) Boule

3. On considère une couronne plate homogène de masse m et comprise entre les rayons R_1 et R_2 (figure (b)). Exprimer son moment d'inertie par rapport à son axe Oz.
Indication : exprimer d'abord la masse surfacique σ en fonction de m et des rayons.
4. Exprimez de même le moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre inhomogène de rayon R, de hauteur h, de masse m, de masse volumique $\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right)$ (figure (c)).
5. Exprimez de même le moment d'inertie par rapport à son axe d'une boule homogène de masse m et de rayon R (figure (d)).

M8. Dynamique des solides

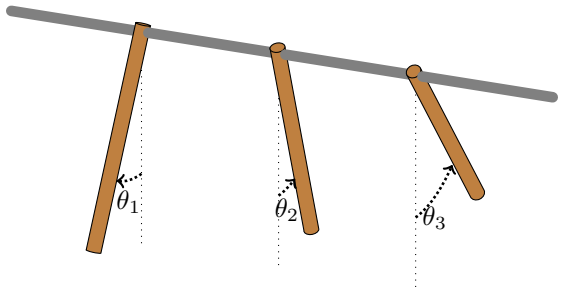
TDs numériques

réponses page 905

TD numérique : Pendules couplés

num. EDO

On considère des pendules pesants placés l'un à la suite de l'autre sur un fil de torsion : le pendule numéro i est repéré par son angle θ_i par rapport à l'axe vertical. Il y a N pendules, et les extrémités du fil de torsion sont fixées, de sorte qu'on posera $\theta_0 = \theta_{N+1} = 0°$. Les pendules sont identiques : masse $m = 300\,\text{g}$, longueur $\ell = 25\,\text{cm}$, centre de masse en leur centre, moment d'inertie par rapport au bord $J = \frac{1}{3}m\ell^2$.
Le fil de torsion compris entre le pendule n et le pendule $n+1$ exerce sur le pendule $n+1$ un couple de rappel $-k(\theta_{n+1} - \theta_n)$ (avec $k = 0{,}05\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$) et un couple opposé sur le pendule n.



1. Retrouvez rapidement la période d'un de ces pendules si on néglige le fil de torsion.
2. On considère pour le moment le cas $N = 2$. Écrivez les équations différentielles vérifiés par θ_1 et θ_2.
3. Résolvez le système sur une durée de 20 périodes propres, avec pour les CI suivantes consistant à mettre un choc au dernier pendule : $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\,\text{rad}$, $\dot\theta_1(0) = 0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dot\theta_2(0) = 0{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Tracez $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
4. Reprenez la même étude avec $N = 3$; c'est le dernier pendule qui subit le choc à $t = 0$.
5. Programmez la résolution générale dans le cas N quelconque, et simulez par exemple $N = 10$. Quel genre de solutions obtient-on ?
6. On suppose en plus que chaque pendule subit un couple de frottements $-\lambda.\dot\theta_n$ avec $\lambda = 3\times10^{-4}\,\text{USI}$. Retracez les courbes.

Réponses aux QCMs

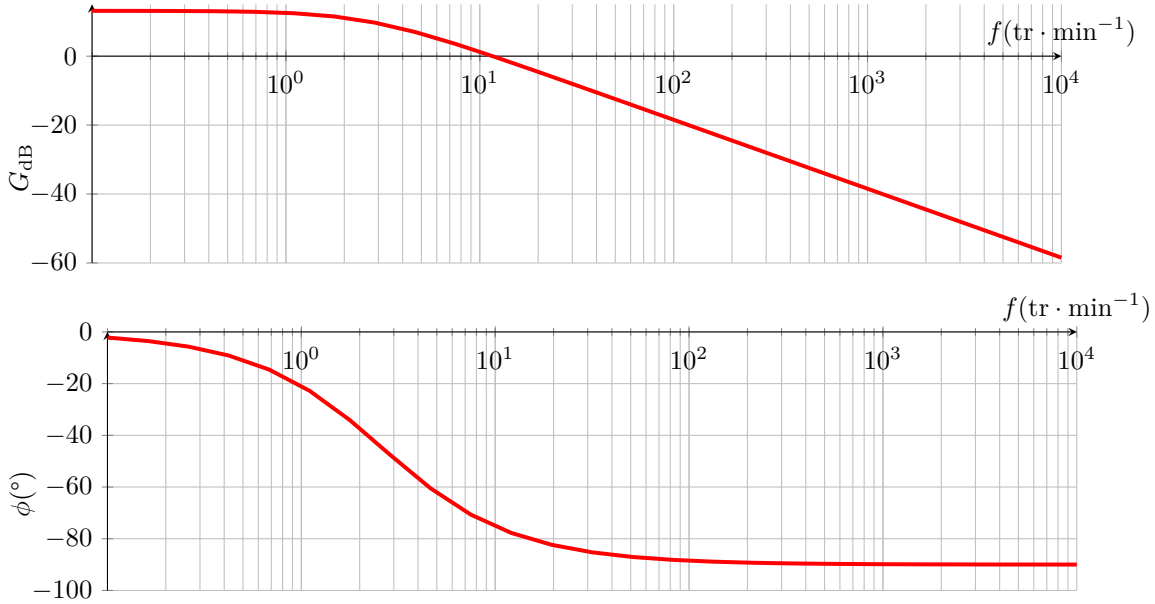
Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b) ET (d)
Q2.(c)
Q3.(a) ET (b) ET (c) ET (d)
Q4.(b)
Q5.(d)
Q6.(b)
Q7.(a)
Q8.(b) ET (d)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M8.1 : Intérêt du volant d'inertie d'un moteur de voiture [**]

1. L'application du TMC est immédiate avec les couples mentionnés dans l'énoncé : $J\dot{r}(t) + Kr(t) = C_m$
2. La vitesse limite vaut $r = \frac{C_0}{K}$ donc $K = 0{,}22\,\text{USI}$
3. $Ji\omega\underline{r}(\omega,t) + K\underline{r}(\omega,t) = \underline{c_m}(\omega,t)$ donc $\underline{H} = \frac{1}{K+iJ\omega} = \frac{1/K}{1+i\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = \frac{K}{J}$.
   On fait l'étude habituelle, c'est un passe-bas d'ordre 1 avec un gain à l'origine $G_{\text{dB}0} = -20\log K = 13\,\text{dB}$ et une coupure à $\omega_0 = \frac{K}{J}$.
   Voici son diagramme de Bode avec $f_0 = 5\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ (cf. question suivante) :



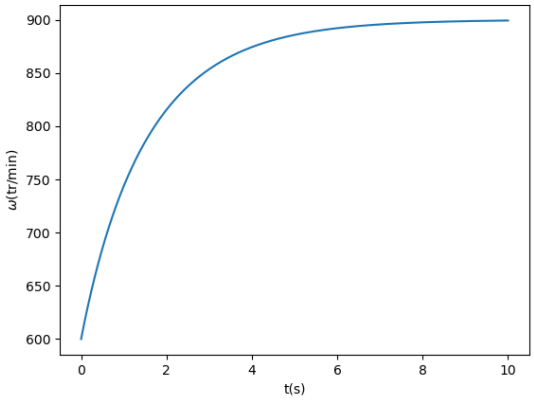
4. Si J augmente, ω_0 diminue donc on filtre mieux les vibrations en HF.
   On calcule $f_0 = 0{,}085\,\text{Hz} = 5\,\text{min}^{-1}$. Par conséquent, les vibrations dues au moteurs, tournant à plus de $1000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, vont être efficacement filtrées ($-40\,\text{dB}$ environ).

Corrigé de l'exercice M8.2 : Ventilateur [**]

1. On ne connaît que la puissance du moteur, donc il faut passer par le théorème de la puissance cinétique.
   $E_c = \frac{1}{2}J\omega(t)^2$
   Le ventilateur est soumis :
   - à son poids et à la réaction de l'axe, qui passent par l'axe, donc ont un moment nul, donc une puissance nulle
   - aux couples de frottements, de puissance $-(C + \lambda\omega(t)^2)\omega(t)$
   - au moteur de puissance $\mathcal{P}$

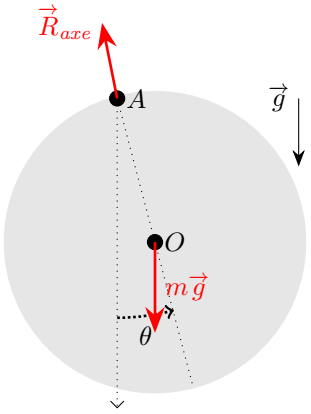
   D'après le TEC : $\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\frac{1}{2}J\omega^2(t)\right] = -C\omega(t) - \lambda\omega(t)^3 + \mathcal{P}$. En simplifiant par ω, on trouve $J\dot{\omega}(t) = -C - \lambda\omega(t)^2 + \frac{\mathcal{P}}{\omega(t)}$
2. En régime permanent : $\dot{\omega} = 0$ donc $C + \lambda\omega^2 = \frac{\mathcal{P}}{\omega}$. Avec les valeurs proposées, on a donc (pensez à mettre les ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) :
$$\begin{cases} C + 400\pi^2\lambda &= \frac{30}{20\pi} \\ C + 900\pi^2\lambda &= \frac{60}{30\pi} \end{cases}$$
   Par soustraction, on trouve $\lambda = \frac{1}{1000\pi^3} = 3{,}2\times10^{-5}\,\text{USI}$ et ensuite $C = \frac{11}{10\pi} = 0{,}35\,\text{N}\cdot\text{m}$
3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
C=0.35
lam=3.225e-5
P=60
```

```
J=2.2e-2
tmax=10
n=1000
h=tmax/n
t,w=np.zeros(n+1),np.zeros(n+1)
w[0]=20*np.pi
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+h
    w[i+1]=w[i]+h*(-C-lam*w[i]**2+P/w[i])/J
plt.plot(t,60*w/2/np.pi)
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel("omega(tr/min)")
plt.show()
```



Il faut environ 2,8 s pour atteindre les 850 tr · min^{-1}.

Corrigé de l'exercice M8.3 : Oscillations d'un cylindre [**]

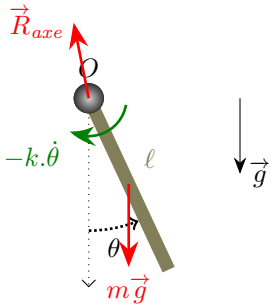


1. $I_A = \frac{3}{2}ma^2$
2. C'est un pendule pesant :
   - on étudie le cylindre dans le référentiel terrestre supposé galiléen
   - son moment cinétique par rapport à son axe de rotation vaut $I_A\dot{\theta}(t)$
   - il est soumis à son poids de moment $-mga\sin\theta(t)$ et à la réaction de l'axe de moment nul (pas de frottements)

   donc par le TMC : $I_A\ddot{\theta}(t) = -mga\sin\theta(t)$ soit $\ddot{\theta}(t) + \frac{2g}{3a}\sin\theta(t) = 0$.

   Pour les petites oscillations : $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2g}}$.
3. On écrit que $E_m = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}(t)^2 - mga\cos\theta(t) = \text{cst}$ puis on dérive $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, on simplifie par $\dot{\theta}$ et on retrouve la même équation.

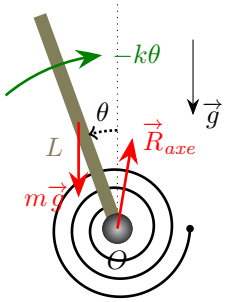
Corrigé de l'exercice M8.4 : Oscillation d'une tige autour d'un axe mal graissé [**]



1. On travaille dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen.
   Le moment cinétique de la tige par rapport à l'axe Oz vaut $I.\dot{\theta}(t)$.
   La tige est soumise à
   — son poids, de moment $-m\frac{\ell}{2}g\sin\theta(t)$
   — la réaction de la tige : une force de moment nul car elle passe par l'axe, plus un couple de frottements $-k.\dot{\theta}(t)$
   Donc par le Théorème du Moment Cinétique : $I\ddot{\theta}(t)+k\dot{\theta}(t)+\frac{m\ell g}{2}\sin\theta(t)=0$
2. L'énergie cinétique de la tige vaut $E_c=\frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2$. Le poids a pour énergie potentielle $E_{pp}=-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta(t)$ et la réaction du support est constituée d'une force de puissance nulle (car elle s'applique en un point de vitesse nulle) et un couple qui est non conservatif, de puissance $-k\dot{\theta}(t)^2$.
   Par le Théorème de l'Énergie Mécanique : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I\dot{\theta}(t)^2-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta(t)\right)=-k\dot{\theta}(t)^2$ donc on retrouve bien $I\ddot{\theta}(t)+k\dot{\theta}(t)+\frac{m\ell g}{2}\sin\theta(t)=0$
3. $\ddot{\theta}(t)+\frac{k}{I}\dot{\theta}(t)+\frac{m\ell g}{2I}\theta(t)=0$ donc $\omega_0=\sqrt{\frac{m\ell g}{2I}}=\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}=6{,}8\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ soit $T_0=0{,}9\,\mathrm{s}$.
4. On matérialise l'enveloppe exponentielle, puis on trace la tangente à l'origine à cette enveloppe, qui coupe l'axe à environ $\tau=1{,}5\,\mathrm{s}$. Or la solution est de la forme $\theta(t)=e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)$ où ω est la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique, et $\frac{-1}{\tau}$ la partie réelle, soit $\frac{1}{\tau}=\frac{k}{2I}=\frac{3k}{2m\ell^2}$. On en tire $k=\frac{2ml^2}{3\tau}=0{,}0037\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M8.5 : Équilibre d'une tige verticale soutenue par un ressort spiral [**]

1. **Étude par le Théorème du Moment Cinétique**
   (a) On étudie la tige dans le référentiel etrrestre supposé galiléen.
   Étude cinématique : $\mathcal{L}=J\dot{\theta}(t)$
   Bilan des actions extérieures :
   — le poids de la tige, de moment $+mg\frac{L}{2}\sin\theta(t)$
   — la réaction en O, de moment nul car elle passe par l'axe
   — le moment du ressort spiral : $-k.\theta(t)$
   D'après le Théorème du Moment Cinétique : $J\ddot{\theta}(t)=mg\frac{L}{2}\sin\theta(t)-k\theta(t)$
   (b) À l'équilibre : $mg\frac{L}{2}\sin\theta(t)=k\theta(t)$. Il est évident que $\theta=0°$ est une solution de cette équation.
   (c) Pour de petits angles : $\sin\theta\approx\theta$ donc l'équation devient $J\ddot{\theta}(t)+\left(k-\frac{mgL}{2}\right)\theta(t)=0$. Elle est stable si les coefficients sont de même signe, donc si $k>\frac{mgL}{2}$. On a donc $k_c=\frac{mgL}{2}=8{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{USI}$



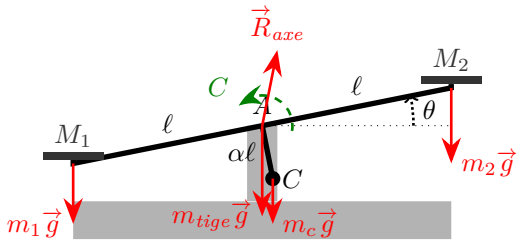
2. **Étude par l'énergie**
   (a) La tige a pour énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2$. Elle est soumise à son poids d'énergie potentielle $mg\frac{L}{2}\cos\theta(t)$, au ressort spiral d'énergie potentielle $\frac{1}{2}k\theta(t)^2$, et à la réaction de l'axe qui ne travaille pas car le point d'application est immobile.
   Donc le système est conservatif et $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta(t) + \frac{1}{2}k\theta(t)^2$.
   (b) $E_p = mg\frac{L}{2}\cos\theta(t) + \frac{1}{2}k\theta(t)^2$ et les positions d'équilibres sont les solutions de $\frac{\mathrm{d}E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$ soit $-mg\frac{L}{2}\sin\theta + k\theta = 0$
   (c) $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta + k$. La position $\theta = 0$ est stable si $\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}(0) > 0$ soit $k > mg\frac{L}{2}\cos 0 = k_c$.
3. Voici un exemple de programme utilisant la dichotomie :

```
import math
k,m,g,L=2e-3,12e-3,9.8,14e-2
def f(t):
    return k*t-m*g*L/2*math.sin(t)
a,b=1e-15,math.pi # on part juste au-dessus de 0
while (b-a)>0.1*np.pi/180:
    c=(a+b)/2 # attention, m est la masse!
    if f(c)*f(b)>0:
        b=c
    else:
        a=c
print(a*180/np.pi)
```

   On trouve $A(k = 0,8k_c, \theta_e) = 64{,}8°$, $B(k = 0,6k_c, \theta_e) = 91{,}1°$, et $C(k = 0,4k_c, \theta_e) = 121{,}8°$,
4. Au voisinage de θ_e : $E_p(\theta) = E_p(\theta_e) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_e).(\theta-\theta_e)^2$. Donc en dérivant E_m on trouve l'équation linéarisée $J\ddot{\theta}(t) + \frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_e).(\theta(t) - \theta_e) = 0$. La pulsation des petites oscillations vaut donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}^2E_p(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_e)} = \sqrt{\frac{k-mg\frac{L}{2}\cos\theta_e}{J}} = 6{,}26\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ donc $T_0 = 1{,}0\,\mathrm{s}$

Corrigé de l'exercice M8.6 : Étude de quelques balances [**]

1. **Premier essai**
   (a) Le système choisi, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, a pour moment cinétique $(J + m_1\ell^2 + m_2\ell^2)\dot{\theta}(t)$. Il est soumis :
   — au poids de la tige qui s'applique sur l'axe donc son moment est nul
   — au poids de M_1 de moment $m_1\ell g\cos\theta(t)$
   — au poids de M_2 de moment $-m_2\ell g\cos\theta(t)$
   Donc par le Théorème du Moment Cinétique par rapport à l'axe :
   $\left(J + (m_1 + m_2)\,\ell^2\right)\ddot{\theta}(t) = (m_2 - m_1)\,g\ell\cos\theta(t) \approx (m_2 - m_1)\,g\ell$
   (b) Si $m_1 > m_2$ alors le second membre est strictement positif donc $\dot{\theta}(t)$ augmente puis $\theta(t)$ va augmenter (car $\ddot{\theta}(t)$ est quasiment constant) et au final la balance va se placer en butée à $\theta = +\theta_{max}$.
   À l'inverse si $m_1 < m_2$ la balance se place en butée en $\theta = -\theta_{max}$.
   (c) Si $m_1 = m_2$ alors tous les angles sont position d'équilibre. Cette balance est difficile à utiliser, elle est quasiment toujours en butée d'un côté ou de l'autre.

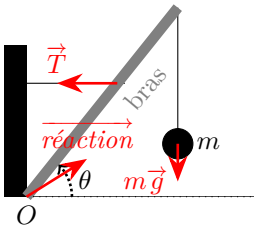


2. **Ajout d'un contrepoids**
   (a) On ajoute maintenant le contrepoids dans le système, ce qui ajoute :
   — un terme $\alpha^2\ell^2 m_c$ dans le moment d'inertie
   — un moment du poids du contrepoids $-m_c g\alpha\ell\sin\theta(t)$
   ce qui donne le nouveau Théorème du Moment Cinétique pour de petits angles :
   $\left(J+\left(m_1+m_2+\alpha^2 m_C\right)\ell^2\right)\ddot{\theta}(t)+\alpha m_C g\ell\theta(t)=(m_2-m_1)\,g\ell$
   (b) L'équilibre est atteint pour $\ddot{\theta}=0$ soit $\theta_{eq}=\frac{m_2-m_1}{\alpha m_C}$. Cet angle ne vaut 0° que si $m_1=m_2$.
   (c) On trouve les deux valeurs en butées : $m_2=500\,\text{g}\pm4{,}5\,\text{g}$ soit 0,9 % d'écart, cette balance permet donc de mesurer assez précisément l'égalité de deux masses.
   (d) On tire de l'équation différentielle $\omega_0=\sqrt{\frac{\alpha m_C g\ell}{J+(m_1+m_2+\alpha^2 m_C)\ell^2}}$ d'où $T=4{,}0\,\text{s}$

3. **Frottements solides**
   (a) Ce sont des lois de Coulomb de frottements solides, mais pour la rotation.
   (b) On ajoute le nouveau couple : $\left(J+\left(m_1+m_2+\alpha^2 m_C\right)\ell^2\right)\ddot{\theta}(t)+\alpha m_C g\ell\theta(t)=(m_2-m_1)\,g\ell+C$
   (c) À l'équilibre, $\alpha m_C g\ell\theta=(m_2-m_1)\,g\ell+C$ donc si $\theta_{eq}=0°$ on a $m_1=m_2+\frac{C}{\ell m}$. Or les deux positions extrêmes correspondent à $C=\pm C_m$ ce qui donne après quelques calculs $m_1=254{,}5\,\text{g}$ et $C=8{,}8\,\text{mN}\cdot\text{m}$

Corrigé de l'exercice M8.7 : Grue portuaire [**]

1. La grue est immobile, donc la somme des moments des actions qui s'exercent sur le bras par rapport à l'axe orthogonal à la figure et passant par O est nul ; or il y a 3 actions, la tension du câblez, le poids et la réaction du support qui s'applique sur l'axe et n'a pas de moment. On trouve facilement $15\sin(\theta)T-25\cos(\theta)mg+0=0$ en notant T la tension de câble. Donc $T=\frac{5mg}{3\tan(\theta)}=56\,\text{kN}$

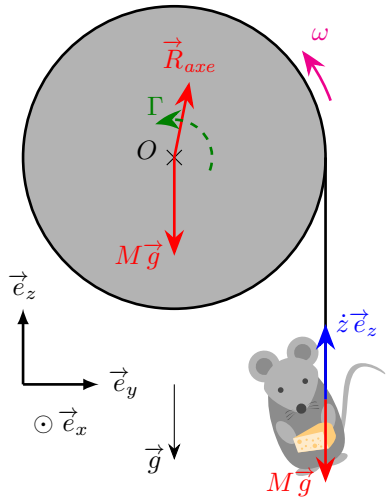


2. Pour ce système, les seules actions extérieures sont le poids et le couple de réaction du sol, donc $C-25\cos(\theta)mg=0$ soit $C=640\,\text{kN}\cdot\text{m}$

Corrigé de l'exercice M8.8 : Entraînement d'un disque par une courroie [***]

1. La vitesse d'un point à un rayon R à la vitesse ω vaut $R\omega$. Donc ici $R_1\omega_1(t)=v(t)=R_2\omega_2(t)$ donc $\omega_1(t)=\frac{R_2}{R_1}\omega_1(t)$.
2. $E_c=\frac{1}{2}I_1\omega_1(t)^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2(t)^2=\frac{1}{4}(m_1+m_2)R_2^2\omega_2(t)^2$
3. Les poids ne travaillent pas car leur moment est nul (sur l'axe). Le moteur a pour puissance $\mathcal{P}$, et la force de frottements $-\lambda\omega_2(t)^2$. Donc par le Théorème de l'Énergie Cinétique : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}=\mathcal{P}-\lambda\omega_2^2$ donc $\frac{1}{2}(m_1+m_2)R_2^2\omega_2(t)\frac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{P}-\lambda\omega_2(t)^2$
4. En régime permanent : $\mathcal{P}=\lambda\left(\omega_2^{lim}\right)^2$ donc $\lambda=1{,}1\times10^{-5}$ USI (pensez à mettre ω_2 en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).
5. L'ED $\frac{1}{2}(m_1+m_2)R_2^2\frac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathcal{P}}{\omega_2(t)}-\lambda\omega_2(t)$ est non linéaire, d'ordre 1, on la résout par séparation des variables : $\frac{1}{2}(m_1+m_2)R_2^2 d\omega_2\frac{\omega_2}{\mathcal{P}-\lambda\omega_2^2}=dt$ soit $\frac{1}{2}(m_1+m_2)R_2^2\left[\frac{1}{-2\lambda}\ln\left|\mathcal{P}-\lambda\omega_2^2\right|\right]_0^t=t$ donc $\ln\left|\frac{\mathcal{P}-\lambda\omega_2^2}{\mathcal{P}}\right|=-\frac{4\lambda}{(m_1+m_2)R_2^2}t$ puisque $\omega_2(0)=0$. On pose $\tau=\frac{(m_1+m_2)R_2^2}{4\lambda}=28\,\text{ms}$ et on trouve alors $\omega_2(t)=\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\lambda}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}=\omega_2^{lim}\sqrt{1-e^{-t/\tau}}$

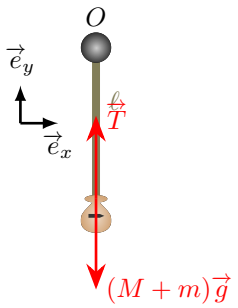
Corrigé de l'exercice M8.9 : Ascenseur à souris [***]



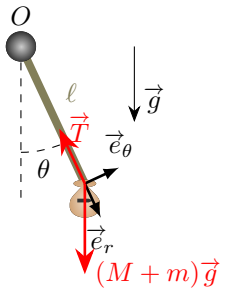
1. Quand la poulie tourne d'un angle $\mathrm{d}\theta$, le fil s'enroule de $R.\mathrm{d}\theta$ donc la souris monte de $\mathrm{d}z = R.\mathrm{d}\theta$. Donc $\dot{z} = R\omega$
2. **Étude du mouvement à l'aide du Théorème du Moment Cinétique**
   (a) Le moment cinétique de la poulie vaut $\frac{1}{2}MR^2\omega(t) = \frac{1}{2}MR\dot{z}(t)$.
   Pour la souris, elle est en translation : son moment cinétique vaut alors $m\left((R\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \wedge \dot{z}(t)\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_z = mR\dot{z}(t)$.
   Donc $\mathcal{L}_S = \left(\frac{1}{2}M + m\right) R\dot{z}(t)$
   (b) Le système est soumis à des actions extérieures :
   — le poids de la poulie s'applique sur son axe, son moment est nul. Il en va de même de la réaction de l'axe.
   — le poids de la souris a pour moment $-mgR$
   Donc par le Théorème du Moment Cinétique : $\ddot{z}(t) = -\frac{mg}{\frac{M}{2}+m} = -3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
   (c) Le plus simple est d'appliquer le théorème du centre de masse à la souris : $T(t) = m\left(g + \ddot{z}(t)\right) = 0{,}33\,\mathrm{N}$
3. **Étude du mouvement à l'aide de l'énergie**
   (a) $E_{c,poulie} = \frac{1}{2}I\omega(t)^2 = \frac{1}{4}M\dot{z}(t)^2$ et $E_{c,souris} = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2$.
   La seule action qui travaille est le poids de la souris, d'énergie potentielle $E_{pp} = mgz(t)$
   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}M\dot{z}(t)^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 + mgz(t)\right) = 0$; on en tire après simplification : $\ddot{z}(t) = -\frac{mg}{\frac{M}{2}+m} = -3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
4. Il suffit de reprendre l'équation avec le Théorème du Moment Cinétique et d'ajouter le couple Γ : on trouve $\left(\frac{1}{2}M + m\right) R\ddot{z}(t) = -mgR + \Gamma$ donc $\Gamma = 0{,}029\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$
5. On a désormais $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\Gamma\omega + \mathcal{P}$ soit $\left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{z}(t)\dot{z}(t) + mg\dot{z}(t) = -\Gamma\frac{\dot{z}(t)}{R} + \mathcal{P}$. Or on veut monter à vitesse constante, donc $\ddot{z} = 0$ d'où $\mathcal{P} = \Gamma\frac{\dot{z}}{R} + mg\dot{z} = 0{,}05\,\mathrm{W}$

Corrigé de l'exercice M8.10 : Pendule ballistique [***]

1. Entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$, le système est soumis à 3 actions extérieures :
   — les poids de la balle et du sac, verticaux et donc passant par l'axe Oz
   — la tension du fil, passant par l'axe Oz
   Ces actions ont toutes un moment nul par rapport à l'axe, donc $L_\Sigma = \mathrm{cst}$.



entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$



après le choc

2. Avant le choc, le sac est immobile donc on ne tient compte que de la balle : $L_\Sigma(0^-) = (-m\ell\vec{e}_y \wedge v_0\vec{e}_x)\cdot\vec{e}_z = m\ell v_0$. Après le choc, la masse $M+m$ bouge : en notant S leur position, $\overrightarrow{OS} = \ell\vec{e}_r(t)$ et $\vec{v}(S) = \ell\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc $L_\Sigma = (M+m)\ell^2\dot{\theta}(t)$
   On en déduit que $\dot{\theta}(0^+) = \dfrac{mv_0}{(M+m)\ell}$
3. Après, le système est conservatif, d'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}(M+m)\ell^2\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t)$. À θ_{max}, $\dot{\theta} = 0$ donc par conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}(M+m)\ell^2\dot{\theta}(0^+) - (M+m)g\ell = -(M+m)g\ell\cos\theta_{max}$ soit $\frac{m^2v_0^2}{2(M+m)} = (M+m)g\ell(1-\cos\theta_{max})$. On en tire que $v_0 = \sqrt{2\dfrac{(m+M)^2}{m^2}g\ell(1-\cos\theta_{max})}$
4. $v_0 = 300\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
5. $E_c(0^-) = \frac{1}{2}mv_0^2 = 495\,\mathrm{J}$ et $E_c(0^+) = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0^2 = 1{,}1\,\mathrm{J}$ donc on a perdu 99,78 % de l'énergie initiale.

Corrigé de l'exercice M8.11 : Couples exercés par les forces de frottements [****]

1. **Frottements secs**
   (a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r.r.\mathrm{d}\theta$
   (b) $\vec{R}_N = -m\vec{g}$ donc $\mathrm{d}\vec{R}_N = mg\frac{r.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta}{\pi R^2}\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ vertical vers le haut.
   (c) $\left\|\mathrm{d}\vec{R}_T\right\| = fmg\frac{r.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta}{\pi R^2}$. Cette force est opposée au mouvement, donc suivant $-\vec{e}_\theta$. Son moment par rapport au centre vaut $d\mathcal{M} = -r.\left\|\mathrm{d}\vec{R}_T\right\| = fmg\frac{r^2.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta}{\pi R^2}$
   (d) $\mathcal{M} = -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} fmg\frac{r^2.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta}{\pi R^2} = -\frac{2\pi fmg}{\pi R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r = -\frac{2fmgR}{3}$
   (e) Par application du Théorème du Moment Cinétique (je ne détaille pas) on trouve $\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = -\frac{2fmgR}{3}$ soit $\dot{\omega} = -\frac{4fg}{3R}$ donc $\omega(t) = \omega(0) - \frac{4fg}{3R}t$: le disque va s'arrêter de tourner au bout d'un temps $t = \frac{3R\omega(0)}{4fg}$.
2. **Frottements fluides**
   (a) $\vec{v}_P = r\omega\vec{e}_\theta$
   (b) $\mathrm{d}\vec{F} = -\lambda r\omega r.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$ donc $\mathrm{d}\mathcal{M} = -\lambda\omega r^3.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta$
   (c) Après intégration : $\mathcal{M} = -\frac{\pi\lambda R^4}{2}\omega$
   (d) On trouve $\dot{\omega} + \frac{\pi\lambda R^2}{m}\omega = 0$ soit $\omega(t) = \omega(0)e^{-\frac{\pi\lambda R^2}{m}t}$. Dans ce modèle le disque ne s'arrête jamais de tourner. Dans la réalité, la forme de la force de frottements change à basse vitesse.

Corrigé de l'exercice M8.12 : Courbe d'accélération [**]

1. On mesure $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$ donc $\omega = 10\pi = 31{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
2. Soit d la distance à l'axe ; on sait que $\vec{v} = d\omega\vec{e}_\theta$ donc $\vec{a} = -\omega^2 d\vec{e}_r = -\omega^2 d\,(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$. En mesurant l'amplitude maximale des courbes, on trouve $a = 175\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ soit $d = 0{,}18\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{cm}$
3. $v = \omega d' = 9{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M8.13 : Calculs de moments d'inertie [***]

1. Soit x l'axe de la tige. Une portion de longueur $\mathrm{d}x$ de la tige a une masse $\mathrm{d}m = \frac{m}{\ell}\mathrm{d}x$. Donc $I_{Oz} = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x^2 \mathrm{d}m = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{m}{\ell} x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24}\right) = \frac{m\ell^2}{12}$.
2. De même : $I_{Az} = \int_0^{\ell} \frac{m}{\ell} x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{3} - 0\right) = \frac{m\ell^2}{3}$.
3. En coordonnées polaires (ou cylindriques), le petit élément de surface vaut $\mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$. En notant σ la masse surfacique, on a
$$\begin{cases} m &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=R_1}^{R_2} \sigma r.\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^{R_2} = \pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma \\ I^{Oz} &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=R_1}^{R_2} r^2\sigma r.\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)\sigma \end{cases}$$
d'où on tire $I^{Oz} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)m}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$.
4. On repère en coordonnées cylindriques. Autour d'un point P, le volume infinitésimal vaut $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$. On a donc
$$\begin{cases} m &= \iiint_{cylindre} \rho(r)\mathrm{d}V = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \rho_0\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \times \left(\int_0^h \mathrm{d}z\right) \times \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \times \left(\int_0^R \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2R}\right)\mathrm{d}r\right) = \frac{5}{6}\pi\rho_0 h R^2 \\ I^{Oz} &= \iiint_{cylindre} r^2\rho(r).\mathrm{d}V = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \rho_0\left(\frac{r^3}{2} + \frac{r^4}{2R}\right).\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \times \left(\int_0^h \mathrm{d}z\right) \times \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \times \left(\int_0^R \left(\frac{r^3}{2} + \frac{r^4}{2R}\right)\mathrm{d}r\right) = \frac{9}{20}\rho_0\pi h R^4 \end{cases}$$
On en déduit que $I^{Oz} = \frac{27}{50}mR^2$.
5. Ce calcul est faisable en coordonnées sphériques, cf. prochain chapitre, mais comme on a un axe de rotation, on peut aussi le faire en coordonnées cylindriques en remarquant que pour $z \in [-R; R]$, le rayon r varie entre 0 et $+\sqrt{R^2 - z^2}$ (par le théorème de Pythagore).
En notant $\mu = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$ la masse volumique, on a en coordonnées cylindriques
$$\begin{aligned} I^{Oz} &= \iiint_{boule} r^2\mu\mathrm{d}V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-R}^{+R}\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3.\mu.\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mu\int_{z=-R}^{+R}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi\mu\int_{z=-R}^{+R}(R^2 - z^2)^2\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\pi\mu\left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-R}^{+R} = \frac{8}{15}\pi\mu R^5 \\ &= \frac{2}{5}mR^2 \end{aligned}$$
ou bien en coordonnées sphériques
$$\begin{aligned} I^{Oz} &= \iiint_{boule} (r\sin\theta)^2\mu\mathrm{d}V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} r^4.\sin^3\theta\mu.\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mu \times \left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(1 - \cos^2\theta\right)\sin\theta.\mathrm{d}\theta\right) \times \left(\int_{r=0}^{R} r^4.\mathrm{d}r\right) = 2\pi\mu\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{R} \\ &= 2\pi\mu\frac{4}{3}\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}mR^2 \end{aligned}$$

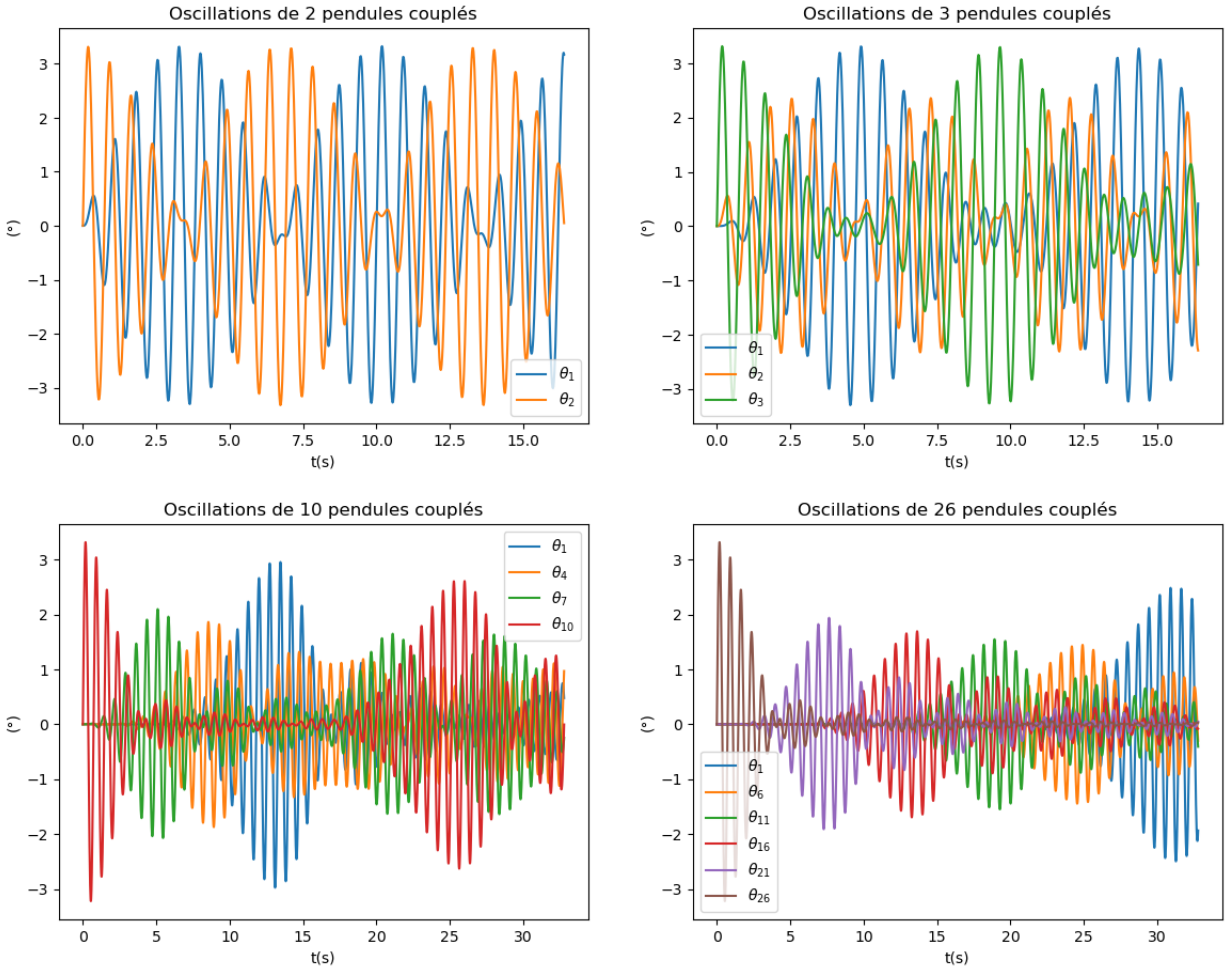
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Pendules couplés

Pour un pendule sans fil de torsion : $J\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_1$ ce qui donne aux petits angles $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mg\ell}}$.

Pour deux pendules on obtient $\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 &= -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_1 - 2k\theta_1 + k\theta_2 \\ J\ddot{\theta}_2 &= -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 - 2k\theta_2 + k\theta_1 \end{cases}$

Pour N pendules on obtient $\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 &= -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_1 - 2k\theta_1 + k\theta_2 \\ J\ddot{\theta}_i &= -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_i - 2k\theta_i + k\theta_{i+1} + k\theta_{i-1} \text{ pour } 1 < i < N \\ J\ddot{\theta}_N &= -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_N - 2k\theta_N + k\theta_{N-1} \end{cases}$



On voit que l'oscillation initiale traverse le système de pendules, puis revient : on a des ondes qui se propagent en se déformant.

Chapitre M9 Mouvements à force centrale

Programme p.924

Conseils p.925

Cours p.908

- M9.A. Coordonnées sphériques
- M9.B. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe
- M9.C. Principe de l'étude d'un mouvement à force centrale conservative
- M9.D. Annexe : étude du système à 2 corps (Hors programme)

QCMs p.926

Exercices p.927

TDs numériques p.932

M9. Mouvements à force centrale

Cours

Ce chapitre commence une série de 2 chapitres ayant pour but d'étudier les mouvements des planètes autour d'une étoile. L'étoile, c'est le centre autour duquel se fait le mouvement. Il faut donc repérer la position de la planète par rapport à un point central fixe. Les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées pour cela ; les coordonnées cylindriques non plus, car elles nécessitent un axe particulier. Nous allons donc introduire les coordonnées sphériques, qui sont plus adaptées. Elles sont aussi plus compliquées. Mais la bonne nouvelle, c'est qu'on ne va que très peu s'en servir.

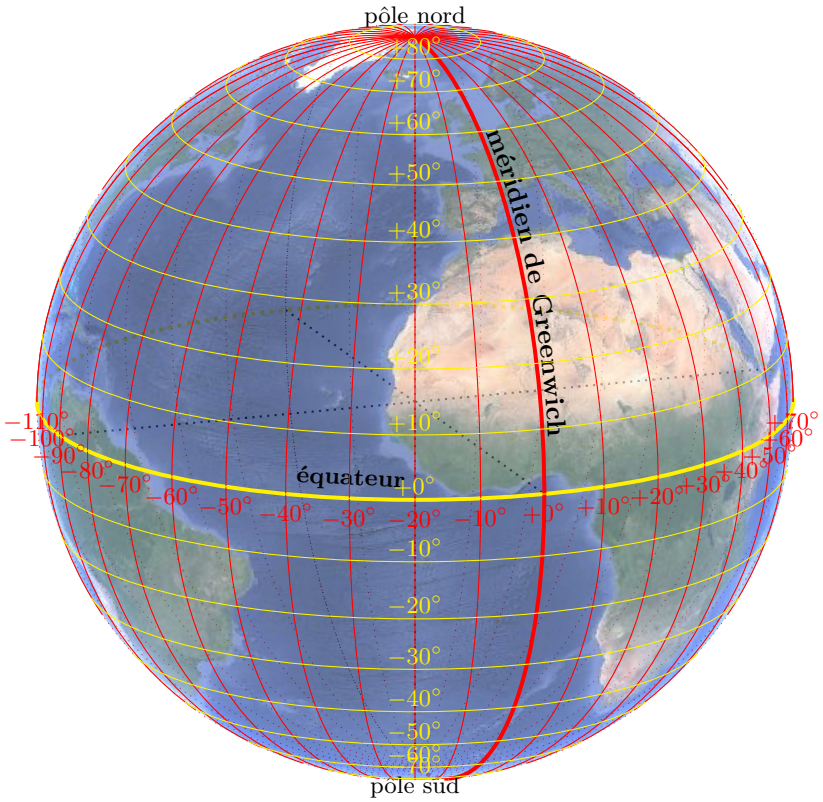
Ensuite, nous allons nous préparer à l'étude des mouvements autour d'un point central. Nous l'appliquerons dans le prochain chapitre à l'étude des planètes en orbite autour d'une étoile, mais pour le moment, nous ferons l'étude générale de n'importe quel mouvement d'un point attiré (ou repoussé) par un point central.

M9.A. Coordonnées sphériques

A.1. Repérage d'un point à la surface de la Terre

Avant de comprendre les coordonnées sphériques, il faut faire un détour du côté du repérage d'un point à la surface de la Terre. On suppose que la Terre est une sphère (en réalité, elle n'est pas parfaitement sphérique) ; en haut, le pôle nord ; en bas, le pôle sud (figure M9.1).

FIGURE M9.1 : Repérage d'un point à la surface de la Terre : parallèles et méridiens.



les méridiens (rouges) repèrent la **longitude**
les parallèles (jaunes) repèrent la **latitude**

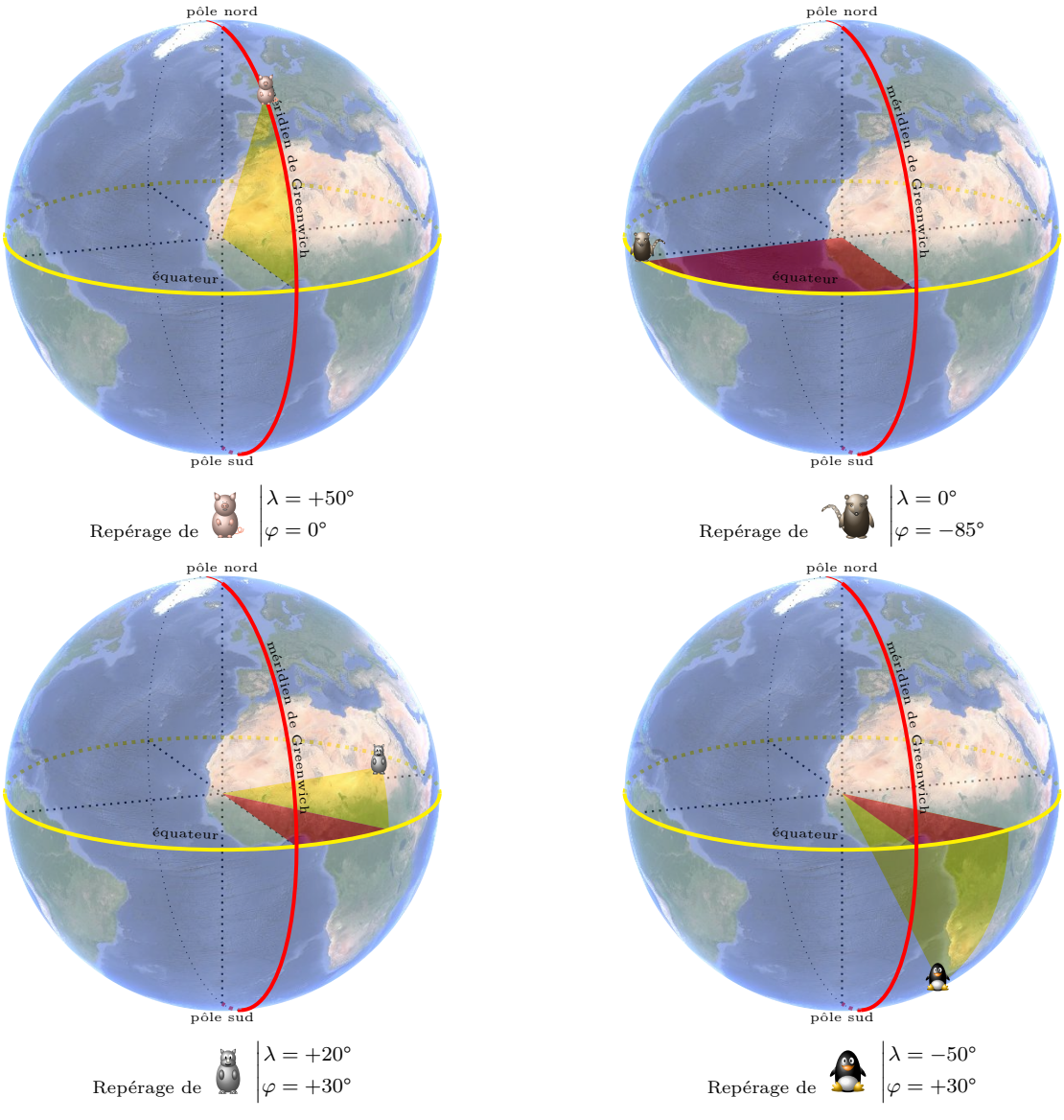
Pour repérer si un point est plutôt près du pôle nord ou du pôle sud, on découpe (par la pensée) la Terre en tranches horizontales ; les traits de découpe s'appellent des parallèles (en jaune sur le schéma). Ces parallèles sont numérotés ;

celui à mi-chemin entre les deux pôles s'appelle l'équateur, il correspond à la **latitude** 0°. Ensuite, les autres parallèles sont repérés par l'angle dont il faut monter (ou descendre) depuis l'équateur pour les atteindre (angles vus en pensée depuis le centre de la terre). Par exemple, Saint-Étienne est proche du parallèle de latitude +45°, donc à mi-chemin entre l'équateur et le pôle nord. Le pôle nord a pour latitude +90°, le pôle sud a pour latitude −90°. [1]

Il faut aussi repérer si un point est plutôt à l'est ou à l'ouest. Pour cela, on découpe la Terre en quartiers, comme un melon. Chaque trait de coupe s'appelle un méridien (en rouge sur le schéma). On a choisi un méridien particulier : au départ, celui de Paris, puis finalement celui de Greenwich [2]. Le méridien de Greenwich est donc celui qui a la **longitude** 0°. Les autres méridiens sont repérés par l'angle dont il faut tourner à partir du méridien de Greenwich pour les atteindre : elle est positive pour les méridiens à l'est de celui de Greenwich, et négative pour ceux à l'ouest.

Chaque point de la Terre est situé à l'intersection d'un seul parallèle avec un seul méridien. On repère donc sa position par une latitude et une longitude. La figure M9.2 quelques exemples. Les angles dessinés en rouge correspondent à la rotation de la longitude, ceux en jaune à la rotation de la latitude.

FIGURE M9.2 : Exemple de repérage de quelques-uns de nos amis.



Si vous voulez creuser la question, ou bien mieux comprendre ces notions à l'aide de vidéos, regardez le premier chapitre de la série Dimensions faite par des chercheurs de l'ENS Lyon et de l'université d'Anvers.

1. Le placement des méridiens et des parallèles sur la figure M9.1 est approximatif par rapport aux pays représentés.
2. En échange de la promesse de la part des Anglais qu'ils adopteraient le système métrique. Mais ils n'ont jamais dit quand…

A.2. Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques vont utiliser le même principe pour repérer un point dans l'espace, avec deux différences :

— au lieu de prendre la latitude variant entre $-90°$ et $+90°$, on a préféré repérer les angles depuis le pôle nord, de manière à avoir un angle compris entre $0°$ et $180°$ qu'on appelle la *colatitude*

— tout point à la surface de la Terre est situé à une distance du centre égale au rayon de la Terre ; mais dans le cas général, cette distance peut varier, il faudra donc l'indiquer.

Pour repérer un point à la surface de la Terre, il a fallu choisir des axes particuliers : l'axe des pôles, puis le méridien de Greenwich. De même, pour repérer un point en coordonnées sphériques, il faut avoir défini au préalable un repère $Oxyz$ orthonormé qui servira à repérer les angles.

Définition : Coordonnées sphériques d'un point

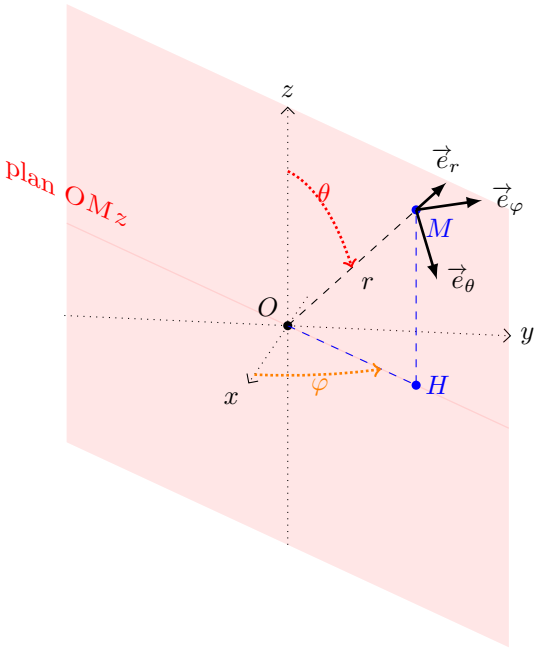
On repère un point M dans l'espace par trois coordonnées (r, θ, φ) représentant le rayon, la colatitude et la longitude, représentées sur la figure M9.3 :

— le rayon est la distance entre le centre et le point : $r = OM$, appartenant à $\mathbb{R}^+$

— la colatitude est l'angle entre l'axe Oz et le vecteur position : $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$, appartenant à $[0° ; 180°]$

— la longitude est l'angle entre le plan Oxz et le plan OMz (*plan méridien*) : en notant H le projeté orthogonal de M sur le plan xOy on peut définir $\varphi = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$, appartenant à $[0° ; 360°]$

FIGURE M9.3 : Coordonnées et base sphériques.



Pour pouvoir repérer des vecteurs, on introduit alors la base sphérique.

Définition : Base sphérique

En tout point M, on introduit la base sphérique locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ définie ainsi :

— $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$; à la surface de la Terre, c'est le vecteur vertical vers le haut

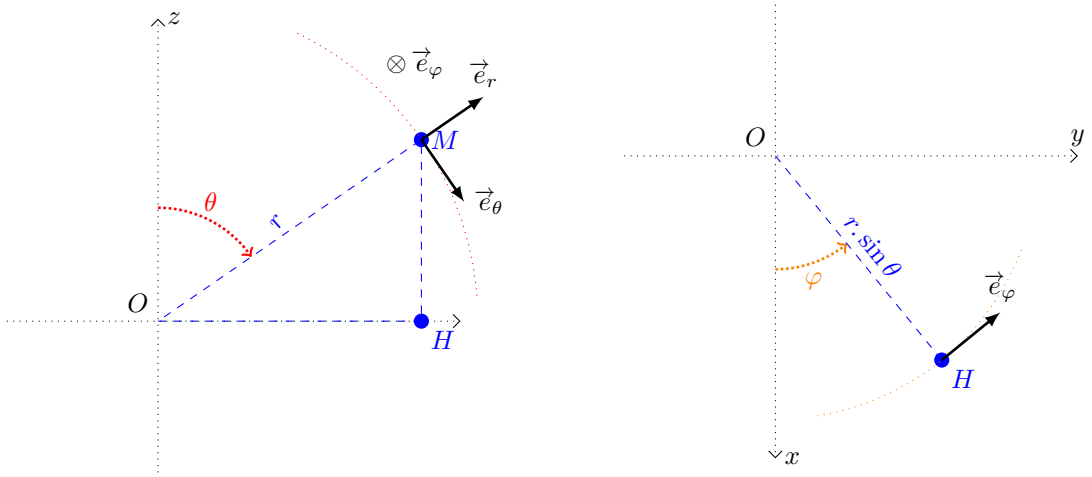
— $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire qui est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan OMz ; à la surface de la Terre, c'est le vecteur horizontal vers le sud

— $\vec{e}_\varphi$ est le vecteur unitaire qui est perpendiculaire au le plan OMz ; à la surface de la Terre, c'est le vecteur horizontal vers l'est

Évidemment, sur le schéma de la figure M9.3, on n'y voit rien. Donc pour comprendre quelque chose, il faut dessiner des schémas en projection dans certains plans (figure M9.4). Prenez du temps pour comprendre le lien entre ces deux

figures et la figure M9.3.

FIGURE M9.4 : Projection du schéma des coordonnées sphériques.



(a) Projection dans le plan OMz (b) Projection dans le plan xOy

Il devient alors possible d'établir quelques formules importantes des coordonnées sphériques :

Propriété : Lien entre les coordonnées sphériques et cartésiennes

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{(M9.1)}$$

Démonstration

$z = r\cos\theta$ se trouve à partir de la figure en projection dans le plan OMz ; cette même figure permet de trouver aussi $OH = r.\sin\theta$. À l'aide de l'autre figure, on établit alors que $x = OH.\cos\varphi$ et $y = OH.\sin\varphi$.

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) \quad \text{(M9.2)}$$

Démonstration

En effet, pour aller de O à M, il suffit de se déplacer dans la direction du vecteur $\vec{e}_r$ sur une distance $OM = r$

Remarque : Attention ! **pas de termes suivant $\vec{e}_\theta$ ni suivant $\vec{e}_\varphi$ pour la position !**

Pour obtenir la vitesse, il suffit de dériver. Il suffit… en théorie, car le vecteur $\vec{e}_r$ n'étant pas fixe, sa dérivée va être compliquée. On peut se contenter d'établir la vitesse en exprimant d'abord le vecteur petit déplacement.

Propriété : Petit déplacement

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi \quad \text{(M9.3)}$$

Démonstration

Soit $M(r,\theta,\varphi)$ un point.
Si r varie de $\mathrm{d}r$ sans que θ ni φ ne varient, alors, sur la figure M9.4 dans le plan OMz, on imagine M s'éloignant de O en ligne droite : il se déplace de $\mathrm{d}r.\vec{e}_r$.
Si θ varie de $\mathrm{d}\theta$ sans que r ni φ ne varient, alors, sur la figure M9.4(a) dans le plan OMz, on imagine M décrivant un arc de cercle de rayon r (en pointillés rouges) et d'angle $\mathrm{d}\theta$, donc de longueur $r.\mathrm{d}\theta$; ce mouvement se fait dans la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$, donc selon $\vec{e}_\theta$. Le point se déplace donc de $r.\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$.
Si φ varie de $\mathrm{d}\varphi$ sans que r ni θ ne varient, alors, sur la figure M9.4(b) dans le plan xOy, on imagine M décrivant un arc de cercle de rayon $OH = r\sin\theta$ (en pointillés oranges) et d'angle $\mathrm{d}\varphi$, donc de longueur

$r.\sin\theta.\mathrm{d}\varphi$; ce mouvement se fait dans la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OH}$, donc selon $\vec{e}_\varphi$. Le point se déplace donc de $r.\sin\theta.\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$.
Pour avoir le petit déplacement complet, on ajoute les 3 termes.

Propriété : Vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + r(t)\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t) \qquad \text{(M9.4)}$$

Démonstration

Il suffit de diviser le petit déplacement :
$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi$

On s'arrêtera là ; l'expression de l'accélération est très difficile à établir et impossible à retenir :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cos\theta r\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Intéressant, n'est-ce pas…

A.3. Résumé des différents systèmes de coordonnées

Toutes les cases du tableau ci-dessous sont à connaître par cœur, sauf celles entre crochets.

Tableau M9.1 : Résumé des différents systèmes de coordonnées.

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Variables	x, y, z	r, θ, z	r, θ, φ
Coord. cartésiennes	—	$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$
Vecteurs de base	$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ base fixe	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ base variable $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\theta}\vec{e}_r \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} &= \vec{0} \end{cases}$	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ base variable
Position	$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$	$r\vec{e}_r$
Petit déplacement	$\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$	$\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$	$\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$
Vitesse	$\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
Accélération	$\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$	$\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z\right]$	—
Gradient	$\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z$	$\left[\frac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z\right]$	$\left[\frac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\right]$

M9.B. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Pour étudier les rotations autour d'un axe, nous avons introduit le théorème du moment cinétique autour d'un axe fixe. Ici, nous allons étudier la rotation autour d'un point, pas d'un axe, donc il faut introduire un outil un tout petit peu différent.

! Les notions de ce paragraphe (moment cinétique par rapport à un point, moment d'une force par rapport à un point,…) ressemblent beaucoup à celles définies par rapport à un axe fixe. Mais dans le cas d'un point fixe, les grandeurs manipulées sont **des vecteurs** et non plus des scalaires.

B.1. TMC pour un point matériel

Définition : Moment cinétique d'un point par rapport à un point fixe

Soit M un point matériel de masse m de vitesse $\vec{v}$. Le moment cinétique de M par rapport à un point O fixe est défini par $\vec{\mathcal{L}}_M^O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$

Remarque : Que signifie ce vecteur ? Par rapport à un axe, le moment cinétique indique la quantité de rotation du point ; par rapport à un point, la norme du moment cinétique indique toujours la quantité de rotation du point, et sa direction indique l'axe autour duquel il est en train de tourner à l'instant t.

Définition : Moment d'une force par rapport à un point fixe

Le moment d'une force par rapport à un point O fixe est défini par $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}}^O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

Remarque : La direction du vecteur moment indique l'axe autour duquel la force cherche à faire tourner le point.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O, est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent dessus, pris par rapport à ce même point fixe O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_M^O}{\mathrm{d}t} = \sum_k \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{f}_k}^O \tag{M9.5}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_M^O(t)}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{v}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v}(t) + m\overrightarrow{OM}(t) \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= m\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t) + \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{a}(t) \qquad \text{car } O \text{ est fixe} \\
&= \vec{0} + \overrightarrow{OM}(t) \wedge \sum_k \vec{f}_k(t) \qquad \text{par le PFD} \\
&= \sum_k \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{f}_k(t) = \sum_k \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{f}_k}^O(t)
\end{aligned}$$

B.2. TMC pour un système

Définition : Moment cinétique d'un système par rapport à un point

Le moment cinétique d'un système est la somme des moments cinétiques des points qui le constituent : $\vec{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}}^O = \sum_i \vec{\mathcal{L}}_{M_i}^O$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système par rapport à un point fixe O, est égale à la somme des moments des forces **extérieures** qui s'exercent dessus, pris par rapport à ce même point fixe O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}}^O}{\mathrm{d}t} = \sum_{\text{forces extérieures } k} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{f}_{ext,k}}^O \tag{M9.6}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}^O_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}^O_{M_i}}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{\text{forces } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{k\to M_i}} \qquad \text{par le TMC appliqué à chaque point} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}} + \sum_{j\neq i} \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{M_j\to M_i}} \right) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{ext,k\to M_i}} + \sum_{\text{paires}(i,j)} \left(\vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{M_j\to M_i}} + \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{M_i\to M_j}} \right)\end{aligned}$$

Or $\vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{M_j\to M_i}} + \vec{\mathcal{M}}^O_{\vec{f}_{M_i\to M_j}} = \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{f_{M_j\to M_i}} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{f_{M_i\to M_j}}$ (il faut faire attention, les deux forces ne s'appliquent pas au même point). Par la première partie de la troisième loi de Newton, cela donne $\left(\overrightarrow{OM_j} - \overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \overrightarrow{f_{M_i\to M_j}}$. La parenthèse vaut $\overrightarrow{M_iM_j}$, qui est parallèle à la force d'après la seconde partie de la troisième loi de Newton. La somme de ces deux moments est donc nulle, et il en va de même pour toutes les paires de forces intérieures.

Méthode : TMC par rapport à un axe ou à un point ?

Faut-il appliquer le TMC par rapport à un point fixe ou par rapport à un axe fixe, pour résoudre un problème ? Pour un point matériel (par exemple le pendule simple), c'est absolument pareil, il faut juste être rigoureux dans la rédaction (par rapport à un point, les moments sont des vecteurs ; par rapport à un axe, ce sont des scalaires). Pour un système de points, c'est la même chose. Pour un solide, par contre, il faut toujours appliquer le TMC par rapport à **un axe fixe**. En effet, par rapport à un axe, on a la relation simple $\mathcal{L} = I.\omega$; mais par rapport à un point, la relation devient $\vec{\mathcal{L}} = \bar{\bar{I}}\vec{\Omega}$ où Ω est le vecteur rotation, et $\bar{\bar{I}}$ un tenseur d'ordre 2, c'est-à-dire une matrice. Évidemment, c'est hors programme.
En pratique, mon conseil, c'est de ne jamais utiliser le TMC autour d'un point fixe cette année en physique, sauf pour l'étude des mouvements à force centrale (section M9.C.).

M9.C. Principe de l'étude d'un mouvement à force centrale conservative

C.1. Description d'une force centrale

Définition : Force centrale

Une force $\vec{f}$ qui s'applique à un point M est dite *centrale* s'il existe un point O fixe tel que, quelle que soit la position du point M, la force $\vec{f}$ est parallèle à $\overrightarrow{OM}$ (ou, de manière équivalente, la droite d'action de $\vec{f}$ passe par O)

Par conséquent, une force centrale sera toujours, en coordonnées sphériques de centre O, parallèle à $\vec{e}_r$.

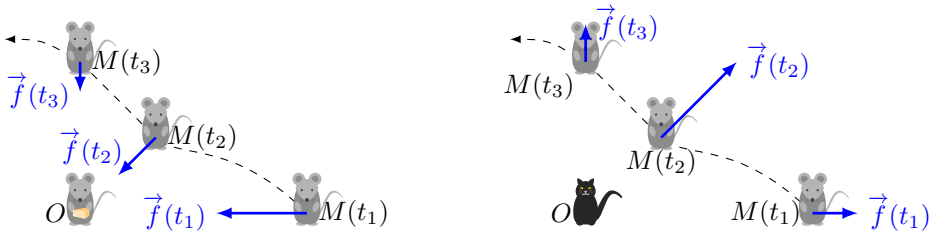
Propriété : Caractère conservatif d'une force centrale

Toute force centrale ne dépendant que de la position (ni de la vitesse, ni explicitement du temps) est conservative.

Démonstration

On l'admet ; la démonstration de cette propriété est basée sur une loi qu'on verra plus tard : le second principe de la thermodynamique.

FIGURE M9.5 : Exemples de forces centrales.



(a) Force centrale attractive (b) Force centrale répulsive

Soit $U(r,\theta,\varphi)$ l'énergie potentielle associée à la force centrale $\vec{f}$. Alors en coordonnées sphériques $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) = -\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$. Or $\vec{f}$ est parallèle à $\vec{e}_r$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}(U)$ aussi, donc $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ ce qui signifie que U ne dépend que de la variable r. On en déduit facilement qu'il en est de même pour la force :

Propriété : Forme générale d'une force centrale conservative

Une force centrale conservative s'écrit de manière générale sous la forme $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques ; son énergie potentielle associée $U(r)$ ne dépend que de r ; elles sont reliées par la loi $f(r) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}$.

Les forces centrales conservatives (indépendantes du temps) que l'on va rencontrer le plus souvent sont :

— la force de gravitation

— la force électrique entre deux charges

— la force d'un ressort

mais il y en a beaucoup d'autres.

Définition : Mouvement à force centrale conservative

On dit que le mouvement d'un point matériel M est un mouvement à force centrale conservative, si le point M n'est soumis qu'à une seule force, et que cette force est une force centrale conservative.

Remarque : Il est sous-entendu le plus souvent que la force est indépendante du temps…

C.2. Conservation du moment cinétique et conséquences

Pour le moment, nous allons établir le schéma d'étude d'un mouvement à force centrale conservative. Ces propriétés seront générales, bien que les mouvements des planètes autour d'une étoile en soient une des applications les plus courantes.

Dans la suite, M est un point matériel de masse m, soumis à une force centrale $\vec{f}$ d'énergie potentielle U ; le centre est noté O, c'est un point fixe.

Propriété : Conservation du moment cinétique par rapport au centre

Le moment cinétique de M par rapport à O est constant : $\vec{\mathcal{L}}_M^O = \overrightarrow{\text{cst}}$

Démonstration

Le TMC appliqué à M par rapport à O indique que $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_M^O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{f}}^O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$ puisque la force est parallèle à $\overrightarrow{OM}$.

Remarque : Si $\vec{\mathcal{L}}_M^O = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont toujours colinéaires : le mouvement est alors selon une droite, comme par exemple un objet qu'on lache sans vitesse initiale et qui tombe en ligne droite vers le centre de la Terre. Ce cas étant peu intéressant, on supposera dans la suite que $\vec{\mathcal{L}}_M^O \neq \vec{0}$.

Cette propriété fondamentale des mouvements à force centrale a deux conséquences importantes.

Propriété : Planéité du mouvement

M a un mouvement plan ; il se déplace dans le plan passant par O et orthogonal au moment cinétique (cf. figure M9.6).

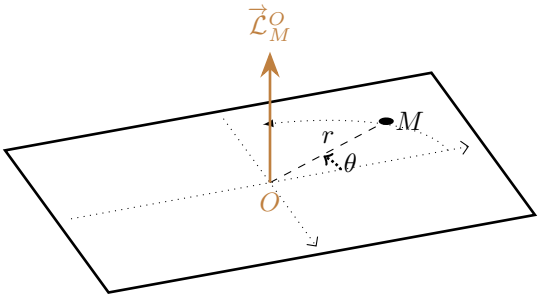
Démonstration

Il existe deux rédactions possibles de la justification de ce résultat.

Rédaction sans coordonnées : par définition, $\vec{\mathcal{L}}_M^O = m\overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{v}(t)$. Par propriété du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}(t)$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}_M^O$; donc M appartient au plan perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}_M^O$ et contenant O. Comme O est fixe et $\vec{\mathcal{L}}_M^O$ constant, ce plan est un plan fixe, dans lequel se déplace le point M.

Rédaction avec coordonnées : on va repérer le point M en coordonnées cylindriques en prenant O comme origine et $\vec{e}_z \,/\!/\, \overrightarrow{\mathcal{L}_M^O}$ (ainsi $\vec{e}_z$ est constant). On peut alors faire l'étude cinématique : $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$. Or par propriété du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}(t)$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}_M^O$ donc à $\vec{e}_z$; cela nécessite $z(t) = 0$: le point se déplace donc dans le plan $z = 0$, c'est-à-dire le plan orthogonal au moment cinétique et contenant O.

FIGURE M9.6 : Schéma du mouvement.



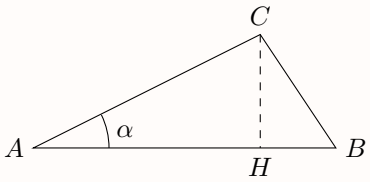
Pour la suite, on repèrera donc le point M en coordonnées cylindriques avec $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire selon $\vec{\mathcal{L}}_M^O$.

Propriété : Loi des aires (deuxième loi de Képler)

Le rayon-vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ d'un mouvement à force centrale donné balaye, au cours de son mouvement, des aires égales en des temps égaux. Plus précisément, en un temps Δt, il balaye une aire $\mathcal{A} = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_M^O\right\|}{2m}\Delta t$

Un peu de maths : Aire d'un triangle

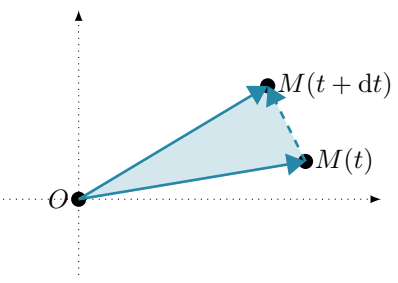
Soit un triangle ABC, et H le pied de la hauteur issue de C. Soit α l'angle en A. Alors l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{1}{2}AB \times AC.\sin\alpha = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$



L'aire d'un triangle est donc égale à la moitié de la norme du produit vectoriel de deux de ses côtés, n'importe lesquels.

Démonstration

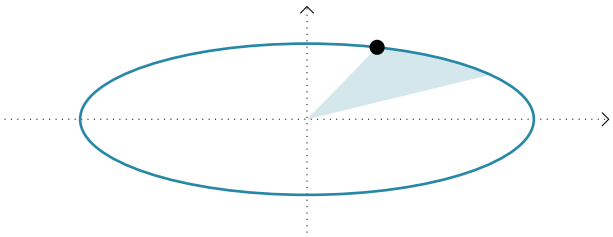
Faisons un schéma de M aux instants t et $t + \mathrm{d}t$. Le rayon-vecteur a balayé le triangle bleu en une durée $\mathrm{d}t$. Grâce à la formule magique établie ci-dessus pour l'aire d'un triangle, on peut écrire que $\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM(t)} \wedge \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM(t)} \wedge \vec{v}\mathrm{d}t\right\|$. Or le produit vectoriel est égal, à un facteur m près, au moment cinétique de M. On a donc $d\mathcal{A} = \frac{1}{2m}\left\|\vec{\mathcal{L}}_M^O\right\|.\mathrm{d}t$. On peut alors intégrer entre t et $t + \Delta t$ pour retrouver la propriété énoncée.



Remarque : $\frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_M^O\right\|}{2m}$ s'appelle la *vitesse aréolaire*.

Képler a établi cette loi en observant les mouvements des planètes autour du Soleil ; sa conséquence, c'est que plus la planète se rapproche du centre, plus sa vitesse de rotation augmente ; au contraire, plus elle s'éloigne, plus sa vitesse de rotation diminue (cf. figure M9.7). Ce qu'on a montré ici, c'est que cette loi est vraie pour tout mouvement à force centrale (contrairement à la première et à la troisième lois de Képler, qui ne sont valables que pour certains mouvements).

FIGURE M9.7 : Illustration de la loi des aires : la position du point est indiquées à des intervalles réguliers, ainsi que l'aire balayée depuis le point précédent.



On voit apparaître dans la loi des aires le rapport $\frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_M^O\right\|}{m}$; ce rapport va être très utile, on va lui donner un nom.

Définition : Constante des aires

On note $C = \frac{\vec{\mathcal{L}}_M^O.\vec{e}_z}{m}$ la *constante des aires* ; en une durée Δt, le rayon-vecteur balaye une aire $\mathcal{A} = \frac{|C|}{2}\Delta t$.

Remarque : La définition $C = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_M^O\right\|}{m}$, qu'on trouve souvent, est légèrement fausse, car on omet alors le signe de cette constante, qui indique pourtant le sens de rotation.

Propriété : Expression de la constante des aires

$$C = r(t)^2\dot{\theta}(t) \qquad \text{(M9.7)}$$

Démonstration

$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$ et $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc $\vec{\mathcal{L}}_M^O = m.r(t)\vec{e}_r(t) \wedge \left(\dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right) = mr(t)^2\dot{\theta}(t)\vec{e}_z$

C.3. Conservation de l'énergie et conséquences

Nous avons utilisé jusqu'au bout la conservation du moment cinétique, dû au fait que la force est centrale. Mais elle est aussi conservative : le système est donc conservatif, on peut exprimer son énergie mécanique.

Propriété : Expression de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique de M peut s'écrire de deux façons :

* $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$ où $U(r)$ est l'énergie potentielle de M
* $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ où $E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + U(r)$ est *l'énergie potentielle effective de* M.

Démonstration

On a établi que $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$, donc $v(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\theta}(t)^2$. Si on y ajoute l'énergie potentielle $U(r(t))$ de la force, on trouve que l'énergie mécanique du point s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2}mr(t)^2\dot{\theta}(t)^2 + U(r(t)) = \text{cst}$.
Cette énergie dépend de r et de θ ; on sait mieux utiliser les énergies mécaniques lorsqu'elles ne dépendent que d'une seule variables. Or ici, on sait que $C = r(t)^2\dot{\theta}(t)$, donc $\dot{\theta}(t) = \frac{C}{r(t)^2}$. On en déduit que $\frac{1}{2}mr(t)^2\dot{\theta}(t)^2 = \frac{1}{2}mr(t)^2\frac{C^2}{r(t)^4} = \frac{mC^2}{2r(t)^2}$.

Qu'est-ce que cette énergie potentielle effective ? Un artifice mathématique, permettant de ramener l'étude du mouvement radial (selon r) à l'étude d'un point de masse m dans une énergie potentielle $E_{p,eff}(r)$ à une seule dimension. En effet, du point de vue radial, le mouvement est soumis à deux effets :

— la force, associée à $U(r)$, qui attire M vers le centre ou au contraire le repousse

— la conservation de $C = r^2\dot{\theta}$ qui implique que, lorsque le point s'approche trop du centre, il est obligé d'augmenter $\dot{\theta}$ (donc de tourner plus vite autour du centre), ce qui l'oblige à transférer de l'énergie sous forme d'énergie cinétique de rotation (on dit aussi *orthoradiale*), ce qui lui laisse moins d'énergie disponible pour le reste.

Méthode : Étude d'un mouvement à force centrale conservative

Il faut absolument connaître les calculs précédents, qui correspondent toujours aux mêmes questions dans les problèmes sur les mouvements à force centrale conservative :

— démonstration de la conservation du moment cinétique

— justification de la planéité du mouvement

— justification de la loi des aires

— étude cinématique, et expression de la constante des aires

— expression de l'énergie potentielle effective et de l'énergie mécanique

Ensuite, tout dépend de ce qu'on vaut faire. Parfois, on peut vouloir résoudre numériquement le mouvement. Dans ce cas-là, on procède ainsi :

— on dérive l'expression $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) = \text{cst}$ par rapport au temps, de manière à obtenir une équation différentielle d'ordre 2 portant sur l'inconnue r

— on résout cette ED par une méthode d'Euler ou par `odeint`

— on déduit alors de $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ une équation différentielle d'ordre 1 qu'on résout

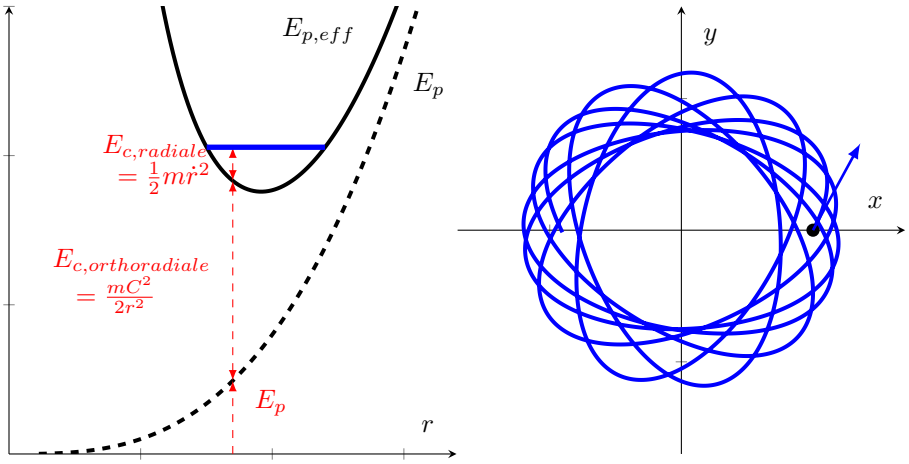
— on trace alors la courbe $r(\theta)$ en coordonnées polaires.

La résolution de l'équation d'ordre 2 en r et de celle d'ordre 1 en θ peut se faire d'un coup avec `odeint`.

D'autres fois, on va chercher une analyse qualitative du mouvement : borné ou pas, périodique, …. Pour cela, il faut tracer le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour voir s'il y a des barrières de potentiel, si le mouvement est borné ou non,…

Ainsi, la figure M9.8 montre une simulation de mouvement dans une énergie potentielle $U(r) = A.r^3$ avec A une constante. On observe une trajectoire non-périodique mais bornée, avec le rayon qui oscille entre deux valeurs, ce qui est en accord avec la courbe d'énergie potentielle effective tracée à gauche.

FIGURE M9.8 : Exemple de mouvement sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^3 ; la courbe, non périodique, s'inscrit entre deux cercles dont les rayons correspondent aux solutions de l'équation $E_{p,eff}(r) = E_m$.



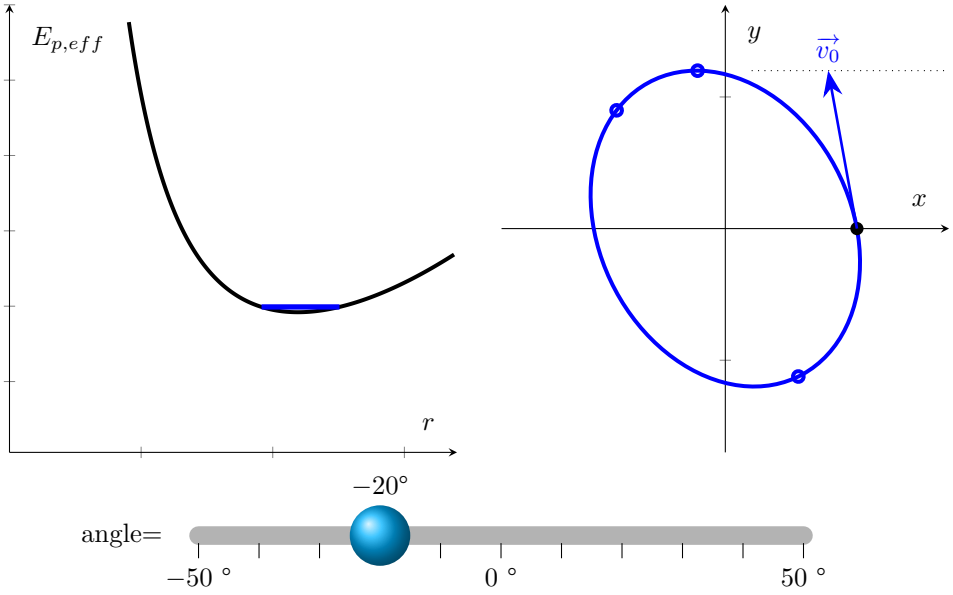
Mais en fait l'analyse n'est pas toujours simple, car $E_{p,eff}(r)$ dépend de C… qui dépend des conditions initiales.

La figure M9.9 montre un cas simple. On y simule la trajectoire d'une masse m dans une énergie potentielle $U(r) = A.r^2$, avec différentes conditions initiales correspondant à changer l'angle initial de lancement, mais en gardant

la même constante de aires[3]. L'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(0) + E_{p,eff}(r(0))$ est donc différente, mais la courbe d'énergie potentielle effective est la même, puisqu'elle dépend de C. On constate alors que, lors du mouvement, le rayon reste borné entre deux valeurs, mais ces valeurs sont différentes suivant les conditions initiales car l'énergie mécanique n'est pas la même. Cette oscillation du rayon entre deux valeurs s'accompagne d'une rotation : en effet, $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ ne s'annule jamais, donc le point tourne en permanence autour du centre.

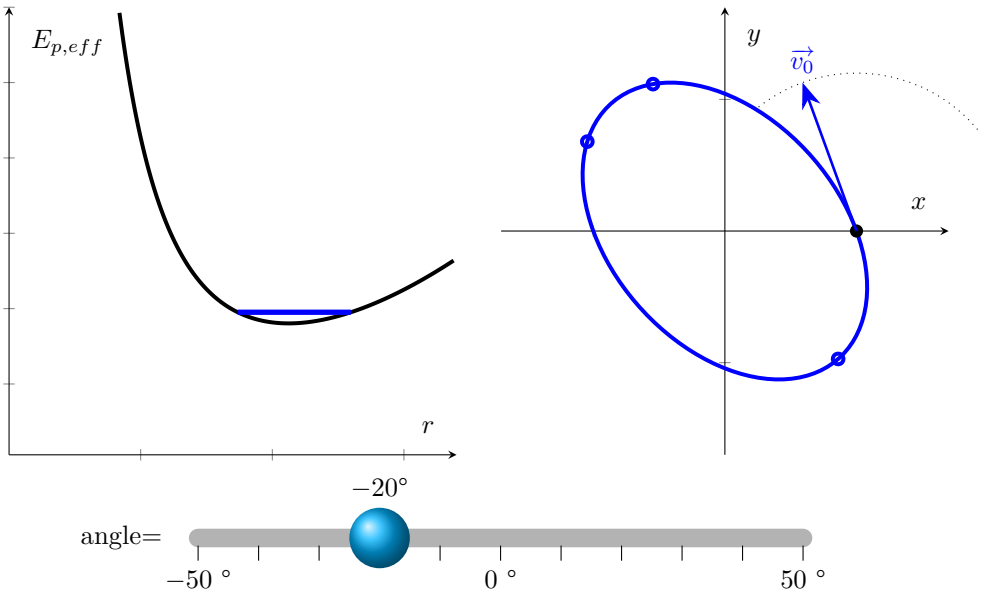
Dans le cas particulier d'un ressort, le mouvement qui en résulte est périodique, mais ce n'est pas toujours le cas.

FIGURE M9.9 : Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2, pour différents angles de vitesse initiale, **à constante des aires constante**.



Maintenant, la figure M9.10 montre la même simulation, mais la variation de l'angle initial se fait maintenant à norme de vitesse constante : ainsi, l'énergie mécanique est la même, mais la constante des aires change, donc l'énergie potentielle effective aussi. Ainsi, malgré la même énergie mécanique, les différents mouvements ont des bornes différentes.

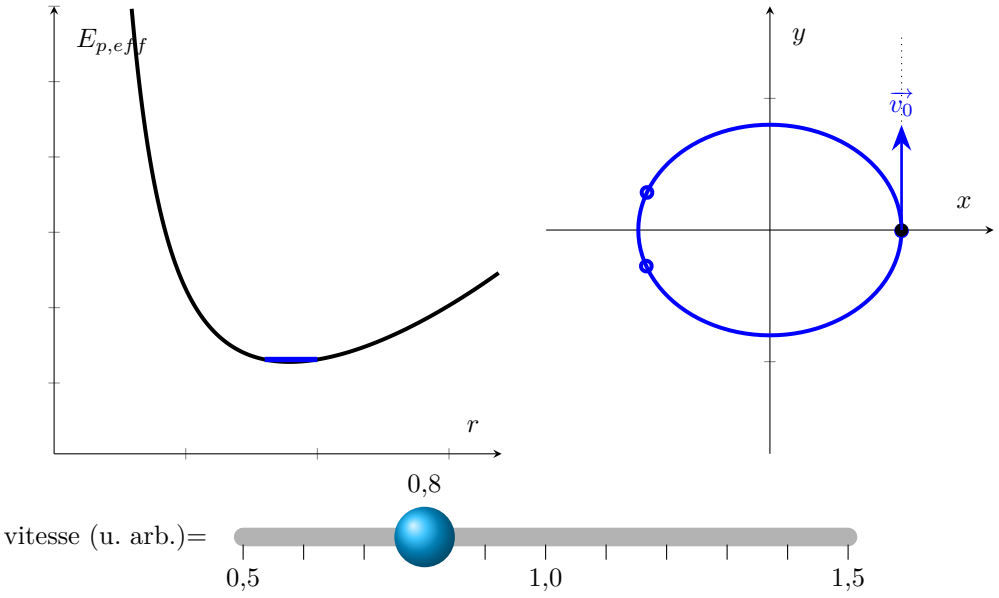
FIGURE M9.10 : Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2, pour différents angles de vitesse initiale, **à énergie cinétique constante**.



3. Les courbes partent du même point (donc $r(0)$ est le même) et avec la même valeur de $\dot{\theta}(0)$, ce qui implique la même valeur de C ; par contre, $\dot{r}(0)$ est différent.

Enfin, la figure M9.11 simule le même système avec un lancement selon une vitesse orthogonale à $\overrightarrow{OM}$ mais de norme variable. Dans ces conditions, on peut espérer un mouvement circulaire, mais uniquement si le rayon initial correspond au minimum d'énergie potentielle effective ; or cette énergie potentielle effective varie avec la constante des aires, donc avec la vitesse initiale. Les unités arbitraires de vitesse ont été choisies pour que le mouvement soit circulaire lorsque la vitesse initiale vaut 1.

FIGURE M9.11 : Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2, pour **différentes vitesses initiales orthogonales au rayon**.



Il est difficile également d'imaginer ce qui se passe en présence de frottements, car au cours du mouvement, l'énergie mécanique diminue, mais en même temps C varie aussi (il diminue le plus souvent) donc la courbe de $E_{p,eff}$ se déforme au fur et à mesure du mouvement. L'analyse, même qualitative, est compliquée.

M9.D. Annexe : étude du système à 2 corps (Hors programme)

L'étude faite jusqu'ici suppose qu'un point matériel M est attiré ou repoussé par un point O fixe ; mais qu'il a-t-il en O ? Sans doute un autre objet, qui a lui-même une masse finie, et est donc libre de bouger. Or si O exerce sur M une force, M exerce, par principe de la réaction, la force opposée sur O. Il en résulte que O n'est pas fixe, donc tout le principe de l'étude d'un mouvement à force centrale tombe.

En fait, on va voir dans ce paragraphe que l'étude que nous venons de faire reste valable, à condition de corriger quelques détails. Cette technique, s'appliquant à deux objets en interaction, ne s'applique malheureusement pas dès qu'il y a 3 objets ou plus : le système devient alors chaotique.

Commençons par poser le système étudié (figure M9.12) : on va considérer deux point matériels M_1 (de masse m_1) et M_2 (de masse m_2) en interaction selon une force conservative $f(r)$ où r représente la distance M_1M_2 ; ainsi $\vec{f}_{M_1\to M_2} = f(r)\vec{u}$ et $\vec{f}_{M_2\to M_1} = -f(r)\vec{u}$ où $\vec{u}(t)$ représente le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2. Ce système est isolé : aucune force extérieure ne s'applique sur lui.

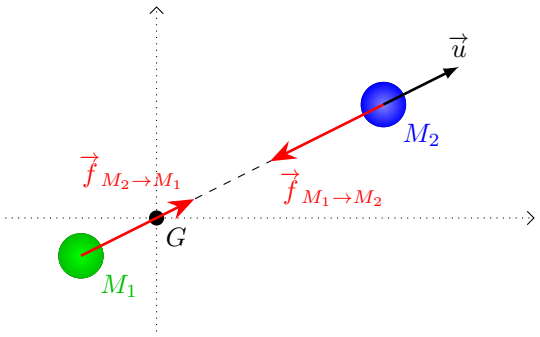
Notons G le centre de masse du sytème $\mathcal{S} = \{M_1, M_2\}$.

Définition : Référentiel barycentrique

On appelle *référentiel barycentrique* d'un système, noté $\mathcal{R}^*$, le référentiel qui est en translation par rapport au référentiel d'étude, et dans lequel le centre de masse G du système étudié est immobile.

Le référentiel barycentrique est donc un référentiel qui accompagne le système dans son mouvement, mais sans rotation. Par exemple, dans le cas d'un ballon de rugby qui décrit une parabole tout en tournant sur lui-même, le

FIGURE M9.12 : Schéma du problème à 2 corps.



référentiel barycentrique est celui qui se déplace avec le ballon sans tourner ; dans ce référentiel, le ballon de rugby se contente de tourner sur lui-même.

On va alors admettre une propriété que vous justifierez l'année prochaine :

Propriété : Référentiel barycentrique d'un système à 2 corps isolé

Le référentiel barycentrique d'un système de 2 points matériels isolés est galiléen.

Démonstration

Par hypothèse, le système $\mathcal{S}$ est isolé ; donc le théorème du centre de masse indique que $\frac{\mathrm{d}\vec{v}_G(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ donc la vitesse $\vec{v}_G(t)$ du centre de masse est constante dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'univers supposé galiléen. On en déduit que $\mathcal{R}^*$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à l'univers. Vous verrez l'année prochaine que tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen ; donc $\mathcal{R}^*$ est galiléen.

À partir de maintenant, toute l'étude se fera dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$; on prendra G comme origine des coordonnées. Les deux points matériels seront donc repérés par les vecteurs $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$; ou mais, le problème, c'est que G est un point imaginaire : quand on observe par exemple deux étoiles doubles tournant l'une autour de l'autre, il n'y a pas une flèche marquée : « Ici, il y a G. » La seule chose qu'on voit c'est M_1 et M_2. On va donc chercher à tout ramener au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ qu'on notera $\vec{r}$. Pour cela, un premier calcul préliminaire va beaucoup nous servir pour la suite :

Calcul : Expression des vecteurs position en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$

Par définition du centre de masse, $\forall O, m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{OG}$; en appliquant cette relation deux fois, une avec $O = M_1$, une avec $O = M_2$, on trouve $\begin{cases} \vec{0} + m_2\overrightarrow{M_1M_2} &= (m_1+m_2)\overrightarrow{M_1G} \\ m_1\overrightarrow{M_2M_1} + \vec{0} &= (m_1+m_2)\overrightarrow{M_2G} \end{cases}$ d'où on tire

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM_1}(t) &= -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \\ \overrightarrow{GM_2}(t) &= +\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \end{cases} \quad \text{avec } \vec{r}(t) = \overrightarrow{M_1M_2}(t) \qquad \text{(M9.8)}$$

Cette relation nous indique assez logiquement que d'une part M_1 et M_2 sont situés de part et d'autre de G, d'autre part G est d'autant plus près de M_1 que m_1 est lourd par rapport à m_2 (puisque dans ce cas la fraction $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ est petite).

À partir de là, les mouvements de M_1 et M_2 sont liés. Pour les étudier, il suffit d'appliquer le PFD à l'un des deux.

Propriété : Mobile fictif

La détermination de l'évolution du rayon-vecteur $\vec{r}(t) = \overrightarrow{M_1M_2}(t)$ revient à l'étude du mouvement d'un *mobile fictif* M, de masse $\mu = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)^{-1} = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ appelée *masse réduite du système*, de vecteur position $\overrightarrow{GM}(t) = \vec{r}(t)$, soumis à la force $\vec{f}_{M_1\to M_2}(t)$.

Démonstration

Appliquons le PFD à M_2 : $m_2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_2}(t)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f}_{M_1\to M_2}(t)$. Or $\overrightarrow{GM_2}(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}(t)$ donc l'équation devient $\mu\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f}_{M_1\to M_2}(t)$ avec $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. On reconnaît là le PFD appliqué au mobile fictif M de masse μ et de position $\overrightarrow{GM}(t) = \overrightarrow{r}(t)$.

Remarque : Le mobile fictif est soumis à $\overrightarrow{f}_{M_1\to M_2}(t)$ parce qu'on a posé $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$; on aurait pu poser $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_2M_1}$ et dans ce cas-là les signes changent, et on trouve l'autre force.

Remarque : La masse réduite μ est toujours inférieure à m_1 et à m_2.

On est donc ramené à l'étude d'un seul point matériel soumis à une seule force ; or cette force est centrale : en effet, elle est colinéaire à $\overrightarrow{r}$ par la troisième loi de Newton. Son étude se ramène donc à ce qu'on a vu plus haut. Cela est d'autant plus évident grâce aux deux propriétés suivantes :

Propriété : Moment cinétique barycentrique du système

Le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}}$ du système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2\}$ dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est égal au moment cinétique du mobile fictif dans ce référentiel :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}} = \mu\overrightarrow{r}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \tag{M9.9}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}} &= \overrightarrow{\mathcal{L}}^*_{M_1} + \overrightarrow{\mathcal{L}}^*_{M_2}\\
&= m_1\overrightarrow{GM_1}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2\overrightarrow{GM_2}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_2}}{\mathrm{d}t}\\
\text{eq. (M9.8)}\quad &= m_1.\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}\right)\wedge\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right) + m_2.\left(+\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}\right)\wedge\left(+\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= \frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\overrightarrow{r}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\\
&= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \mu\overrightarrow{r}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Propriété : Énergie cinétique barycentrique du système

L'énergie cinétique $E^*_{c,\mathcal{S}}$ du système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2\}$ dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est égal à l'énergie cinétique du mobile fictif dans ce référentiel :

$$E^*_{c,\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{M9.10}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
E^*_{c,\mathcal{S}} &= E^*_{c,M_1} + E^*_{c,M_2}\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_1}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_2}}{\mathrm{d}t}\right)^2\\
\text{eq. (M9.8)}\quad &= \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(+\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2
\end{aligned}$$

À partir de là, on voit que toute l'étude faire précédemment peut s'appliquer au mobile fictif : planéité de la trajectoire, loi des aires, énergie potentielle effective, …

Méthode : Étude du mouvement d'un système à 2 corps isolés

Pour étudier le mouvement d'un système de 2 objets isolés en interaction, on se place dans le référentiel barycentrique, et on procède ainsi :

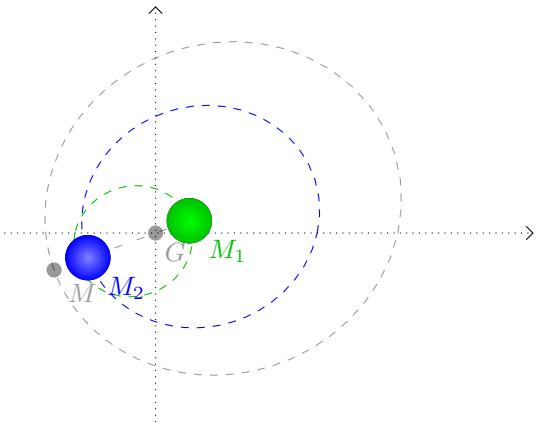
— on pose le mobile fictif, point M repéré par $\overrightarrow{GM}(t) = \overrightarrow{M_1M_2}(t)$, de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, soumis à la force $\vec{f}_{M_1 \to M_2}$

— on étudie son mouvement, qui est un mouvement à force centrale conservative, et on détermine sa trajectoire

— on en déduit les trajectoires de M_1 et M_2 par deux homothéties de centre G et de rapports respectifs $-\frac{m_2}{m_1+m_2}$ et $+\frac{m_1}{m_1+m_2}$ (d'après les formules M9.8)

La figure M9.13 montre le cas de deux objets en interaction gravitationnelle avec un rapport de masses de 2 : 1.

FIGURE M9.13 : Animation d'un système de 2 objets en interaction gravitationnelle avec $m_2 = 2m_1$.



D'après les équations M9.8, il existe deux cas limites en fonction du rapport des masses des deux objets :

— si $m_1 = m_2$ alors G est au milieu de $[M_1M_2]$ et les deux objets décrivent des trajectoires de même dimensions, mais symétriques par rapport à G ; la masse réduite vaut la moitié de la masse de chaque objet ; on trouve ce cas avec des étoiles doubles, mais aussi dans le positronium (espèce d'atome bizarre constitué d'un électron et d'un positron en rotation l'un autour de l'autre).

— si $m_1 \gg m_2$ alors $\overrightarrow{GM_1} \approx \vec{0}$ et $\overrightarrow{GM_2} \approx \vec{r} = \overrightarrow{GM}$: l'objet très lourd ne bouge quasiment pas, et l'objet léger est quasiment confondu avec le mobile fictif ; la masse réduite vaut quasiment m_2. Dans ce cas, on peut faire comme si M_2 avait un simple mouvement à force centrale autour de M_1 qui est fixe. Par exemple, dans le cas de la Terre tournant autour du Soleil, le rapport des masses vaut environ $3{,}3 \times 10^5$, donc on considérera que le Soleil est fixe, et que la Terre décrit autour une ellipse de rayon moyen $1\,\text{u.a.} = 150\,000\,000\,\text{km}$; mais en fait, le Soleil devrait alors décrire une ellipse de rayon moyen $\frac{150000000}{330000} = 450\,\text{km}$. C'est négligeable ici. Même Jupiter, qui influence le plus le mouvement du Soleil, lui fait décrire une orbite de rayon moyen égal seulement à $780\,000\,\text{km} = 5 \times 10^{-3}\,\text{u.a.}$.

M9. Mouvements à force centrale

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Coordonnées sphériques	
Système de coordonnées sphériques.	Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire et vitesse dans le cas des coordonnées sphériques. Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel).
Moment cinétique par rapport à un point	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point. Moment d'une force par rapport à un point. Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement. Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier. Conservation du moment cinétique. Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
Mouvements à force centrale conservative	
Point matériel soumis à un champ de force centrale. Conservation du moment cinétique et conséquences.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. **Capacité numérique : À l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.**

M9. Mouvements à force centrale

Quelques conseils

✎ Les coordonnées sphériques servent très peu dans les exercices, mais ce n'est pas une raison pour ne pas les connaître.

✎ Ne confondez par les moments par rapport à un axe, qui sont des scalaires, et les moments par rapport à un point, qui sont des vecteurs. Dans les exercices, travaillez toujours si possible par rapport à un axe, sans dans le cas des mouvements à force centrale.

✎ La méthode générale d'étude d'un mouvement à force centrale est à connaître par cœur, elle est toujours redemandée dans les exercices de mécanique céleste.

M9. Mouvements à force centrale

QCMs

réponses page 934

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Sur Terre, quand on se déplace vers l'ouest :

(a). la longitude croît
(b). la latitude décroît
(c). la longitude décroît
(d). la latitude croît

Q2. Sur Terre, quand on se déplace vers le nord :

(a). la latitude croît
(b). la latitude décroît
(c). la longitude décroît
(d). la longitude croît

Q3. La base sphérique est une base mobile :

(a). Vrai
(b). Faux

Q4. En coordonnées sphériques, le vecteur position vaut $\overrightarrow{OM} =$

(a). $r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \phi\vec{e}_\varphi$
(b). $r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
(c). $r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \phi\sin\theta\vec{e}_\varphi$
(d). $r\vec{e}_r$

Q5. En coordonnées sphériques, la vitesse vaut $\vec{v} =$

(a). $\dot{r}\vec{e}_r$
(b). $\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\varphi$
(c). $\dot{r}\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\vec{e}_\varphi$
(d). $\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\cos\theta\dot{\phi}\vec{e}_\varphi$

Q6. Le moment cinétique par rapport à un point est un

(a). vecteur
(b). scalaire

Q7. Quelles quantités sont conservées pour un mouvement à force centrale ?

(a). la quantité de mouvement
(b). le moment cinétique
(c). l'énergie mécanique
(d). l'énergie cinétique

Q8. Quelles sont les conséquences de le conservation du moment cinétique ?

(a). le mouvement est uniforme
(b). le mouvement vérifie la loi des aires
(c). le mouvement est circulaire
(d). le mouvement est plan

Q9. La constantge des aires vaut $C =$

(a). $r^2\dot{\theta}$
(b). $r\dot{\theta}^2$
(c). $r\dot{\theta}$
(d). $r^2\dot{\theta}^2$

Q10. Si l'énergie potentielle vaut $E_p(r)$, l'énergie potentielle effective vaut :

(a). $E_p(r) - \frac{mC^2}{2r}$
(b). $E_p(r) + mC$
(c). $E_p(r) + \frac{mC^2}{2r}$
(d). $E_p(r) + C$

M9. Mouvements à force centrale

Exercices

réponses page 935

Exercice M9.1 : Noyau de deutérium [*]

Un noyau de deutérium est constitué d'un proton P et d'un neutron N ayant approximativement la même masse $m = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\text{kg}$. Ils sont liés, dans le modèle classique, par une force centrale dérivant du potentiel de Yukawa :

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \text{ avec } \alpha = 6 \times 10^{15}\,\text{m}^{-1} \text{ et } g^2 \approx 4{,}1\,\text{MeV}\cdot\text{m}$$

On admet qu'on peut simplifier le problème en considérant que le proton P est fixe tandis que le neutron N se déplace comme s'il avait une masse $\frac{m}{2}$.

1. Montrez que le moment cinétique du neutron par rapport à P est constant. Déduisez-en que le mouvement est plan.
2. On repère le neutron par ses coordonnées polaires dans le plan. Montrez que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante.
3. Exprimez l'énergie mécanique du neutron sous la forme $E_m = \frac{1}{4}m\dot{r}^2 + U_f(r)$ avec U_f à préciser.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par r. Sait-on la résoudre ?
5. Sachant que, dans un noyau de deutérium au repos, le neutron se déplace selon un cercle à une distance $r_0 \approx 2{,}1\,\text{fm}$ du proton, déterminez la valeur de C, puis la vitesse du neutron. Commentez.

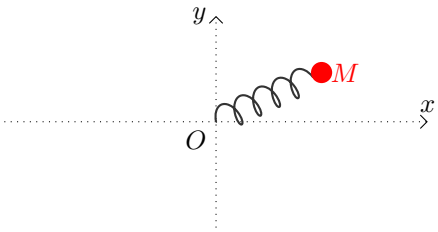
Exercice M9.2 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène [**]

On s'intéresse au modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène (proposé en 1894, avant la découverte du noyau atomique) : la charge positive de l'atome est répartie dans une grande sphère occupant la taille de l'atome ; un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ est libre de s'y déplacer, tout en étant soumis à une force $\vec{f} = -k\overrightarrow{OM}$ (k une constante positive) avec O le centre de la sphère, qui est fixe dans le référentiel d'étude galiléen,

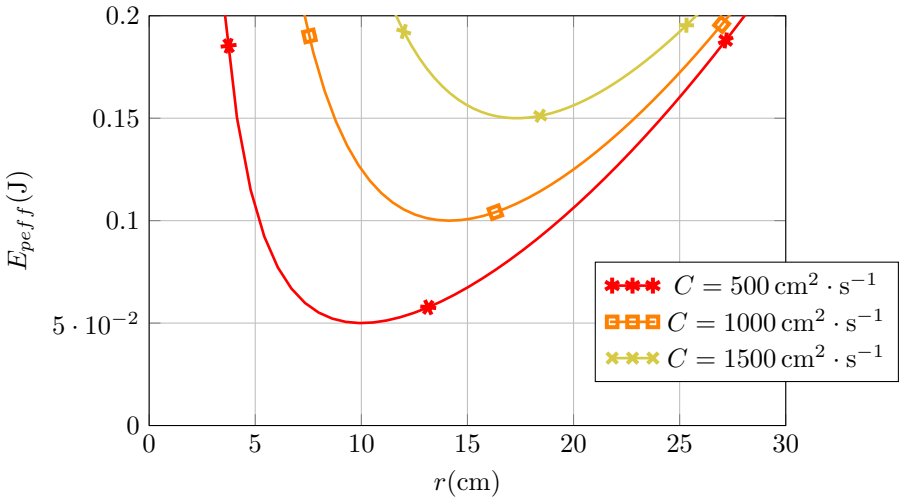
1. Montrer que la force $\vec{f}$ est conservative, et exprimer son énergie potentielle $E_p(r)$.
2. On admet les résultats vus en cours et que vous devez savoir remontrer : le mouvement de l'électron est plan, $C = r^2\dot{\theta} = \text{cst}$ et l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$ Tracez un tableau de variations de $E_{p,eff}(r)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire que le mouvement de l'électron est toujours borné. Exprimez le rayon de la trajectoire circulaire si C est fixé.
3. Dans un atome d'hydrogène, l'état fondamental est circulaire de rayon $r_0 = 53\,\text{pm}$ et possède un moment cinétique $L = \hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$. En déduire :
   (a) la valeur de k.
   (b) la vitesse v_0 de l'électron sur sa trajectoire, puis la fréquence f_0 de rotation de l'électron ; quelle est la longueur d'onde de la lumière à cette fréquence ?
4. Supposons que l'électron soit perturbé par un champ électrique ; imaginons par exemple qu'à l'instant $t = 0$, il ait un rayon $r_0 = 53\,\text{pm}$ et une vitesse $\vec{v_1} = 3{,}0 \times 10^6\,\vec{e}_\theta$ (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
   (a) Calculez numériquement sa constante des aires C et son énergie mécanique E_m.
   (b) En déduire l'équation à résoudre pour trouver les rayons minimum et maximum que va atteindre sa trajectoire.
   Indication : que vaut $\dot{r}$ lorsque le rayon est min/max ?
   (c) Résoudre cette équation et trouvez r_{min} et r_{max}.

Exercice M9.3 : Lancement d'un ressort en rotation [**]

On s'intéresse à l'exercice abstrait où une masse est reliée au centre O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Cette masse se déplace sans frottements dans le plan xOy.



1. Entraînez-vous à remontrer les résultats du cours :
   - Conservation de $C = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}^O(M)\right\|}{m}$
   - Expression de C en fonction de r et $\dot{\theta}$.
   - Expression de l'énergie mécanique sous la forme $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r) = \text{cst}$ avec $E_{peff}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$; on rappelera l'expression de $E_p(r)$.
2. On trace ci-dessous des courbes de $E_{peff}(r)$ pour un objet de 200 g :



   Déduire de la courbe orange (avec des carrés) la valeur de $E_p(14\,\text{cm})$.
3. On lance l'objet depuis $r = 14\,\text{cm}$ dans la direction $\vec{e}_\theta$; quelle vitesse doit-on lui communiquer pour obtenir un mouvement circulaire ?
   Indication : quelle valeur de C doit-il avoir ?
4. On le lance maintenant depuis $r = 14\,\text{cm}$ avec une vitesse de $107\,\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ selon $\vec{e}_\theta$; entre quelles valeurs le rayon va-t-il osciller ?
   Indication : calculez C et E_m.
5. On le lance depuis $r = 14\,\text{cm}$ avec une vitesse de $71\,\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ faisant un angle de 60° avec la direction $\vec{e}_\theta$; entre quelles valeurs le rayon va-t-il osciller ?

Exercice M9.4 : Formules de Binet [**] Ad. plot(polaire)

Les formules de Binet sont des formules permettant de résoudre les mouvements à force centrale. Elles sont hors programme, mais les problèmes de concours vous demandent parfois de les montrer.
On considère un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $f(r)\vec{e}_r$; on note O le centre.

1. Justifiez que le moment cinétique $\vec{L}$ du point M par rapport à O est constant. En déduire que le mouvement est plan.
2. On pose l'axe $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L} = L\vec{e}_z$; on pose $C = \frac{L}{m}$.
   On repère le point M par ses coordonnées cylindriques. Exprimez sa position $\overrightarrow{OM}$, sa vitesse $\vec{v}$, et la constante C en fonction de ces coordonnées.
3. On pose $u = \frac{1}{r}$ considéré comme une fonction de l'angle θ ; on notera donc u' la dérivée $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.

Exprimez $\dot{\theta}$ en fonction de C et u. Montrez alors que $\dot{r} = -Cu'$; on utilisera le fait que $r = \frac{1}{u}$ et la loi des dérivées de fonctions composées : $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
En déduire l'expression de $\vec{v}$ en fonction de C, u et u'.

4. À partir de ces expressions, exprimez l'accélération $\vec{a}$ de M et montrez qu'elle peut se mettre sous la forme $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$

5. **Application au mouvement d'une planète**

   (a) O représente le soleil de masse m_O, et M une planète de masse m. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $f(r)$.

   (b) En déduire que u vérifie une équation différentielle de la forme $u'' + u = u_0$ avec u_0 à préciser.
   Quelle est la forme générale des solutions de cette ED ?
   Remarque : on a l'habitude, dans ce problème, d'utiliser la forme utilisant un seul cosinus avec un déphasage, plutôt qu'un cosinus et un sinus.

   (c) En déduire que le rayon r peut s'exprimer en fonction de l'angle θ sous la forme $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec p et e deux constantes.

   (d) Le programme suivant permet de tracer la courbe polaire $r(\theta) = 1 - \cos\theta$:

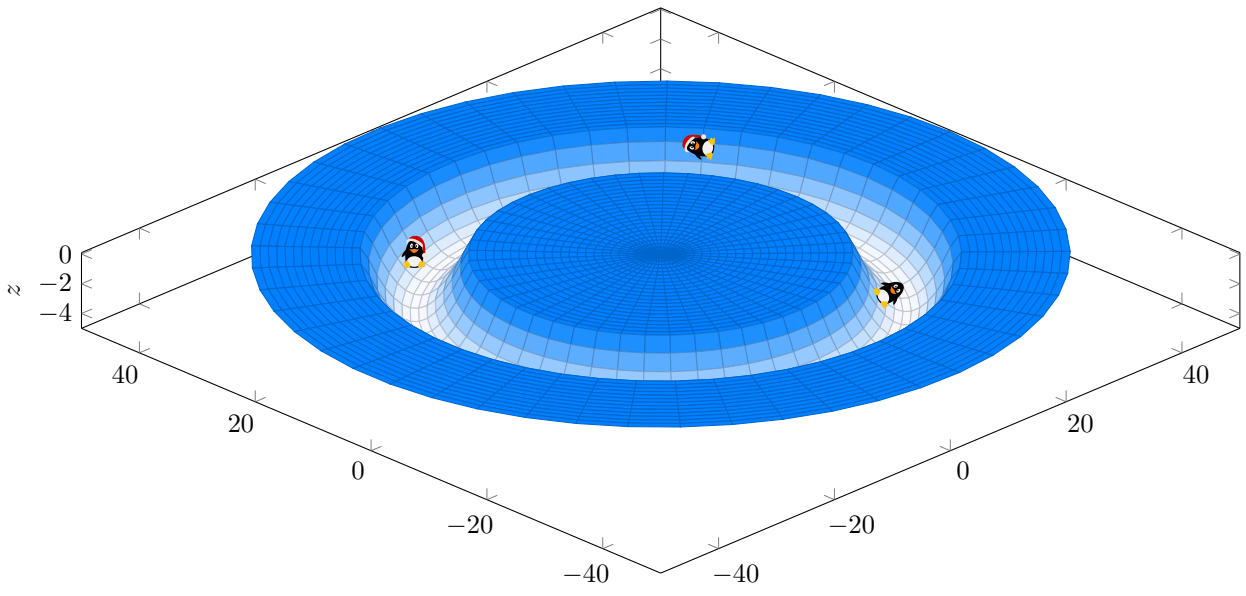
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
tab_theta=np.linspace(0,2*np.pi,100)
tab_r=1-np.cos(tab_theta)
plt.figure()
plt.polar(tab_theta,tab_r)
plt.text(0,0,"O")
plt.show()
```

   Adaptez ce programme pour tracer sur la même figure les trajectoires correspondant aux paramètres suivants (avec $\theta_0 = 0$) :
   - $p = 1$ et $e = 0$
   - $p = 1$ et $e = 0,25$
   - $p = 1$ et $e = 0,5$
   - $p = 1$ et $e = 0,75$

   Conclure quand à la la signification physique de e ; que se passe-t-il lorsque $e \to 1$?

Exercice M9.5 : Manchots dans un donut-pipe [***]

Enthousiasmés par les figures des snowboardeurs sur le half-pipe lors des derniers JO, les manchots ont décidé de fabriquer leur propre version, rebouclée sur elle-même : le donut-pipe.

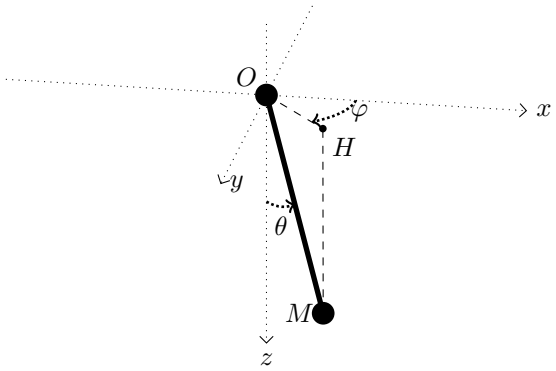


Il s'agit d'une piste creusée en cercle sur laquelle les manchots glissent sans frottements. Si on repère un manchot par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), alors son altitude z est reliée au rayon par la relation $z = -h + \alpha(r - r_0)^2$ où $h = -5\,\text{m}$ est l'altitude du fond de la piste, $r_0 = 30\,\text{m}$ le rayon correspondant au fond de la piste, et $\alpha = 0{,}1\,\text{m}^{-1}$ une constante.

1. On considère un manchot de masse m dans le donut-pipe. Exprimez sa position et sa vitesse en fonction de r, θ et leurs dérivées.
2. On admet que, vu la géométrie du donut-pipe, la réaction du sol est toujours dirigée vers l'axe Oz. Justifiez que le moment cinétique L^{Oz} du manchot par rapport à l'axe Oz est constant.
3. On pose $C = \frac{L^{Oz}}{m}$; exprimez C en fonction de r et $\dot{\theta}$.
4. Justifiez que le manchot est un système conservatif. Exprimez son énergie mécanique. Montrez qu'elle peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}\mu(r)\dot{r}^2 + U(r)$ avec $\mu(r)$ et $U(r)$ à exprimer en fonction de r, C et des constantes.
5. Un manchot souhaite avoir un mouvement circulaire de rayon $r = 34\,\text{m}$ sur le bord extérieur du donut. Calculez la vitesse qu'il doit avoir.
   Indication : pour un mouvement circulaire, $\dot{r} = 0$ donc r correspond à un minimum de $U(r)$.
6. Un autre manchot de masse $m = 8\,\text{kg}$ est lancé depuis $r = r_0$ avec une vitesse initiale $15\vec{e}_\theta + 3\vec{e}_r$ (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) :
   (a) Calculez son énergie mécanique E_m et sa constante C.
   (b) Calculez les rayons r_{min} et r_{max} extrêmes de son mouvement, et les altitudes correspondantes.

Exercice M9.6 : Pendule sphérique [***]

On a l'habitude d'étudier le mouvement d'un pendule dans un plan. Mais ici, on va voir ce qui se passe si on lance le pendule avec des conditions initiales quelconques, induisant une trajectoire en 3D.
On étudie donc le mouvement d'un point matériel M, de masse m, dans un référentiel galiléen R caractérisé par les axes (Ox, y, z) avec z vertical vers le bas. On note $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur. Ce point matériel est relié au point O fixe par un fil de longueur constante a, supposé toujours tendu. On repère le point M par ses coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$ de centre O. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base locale en coordonnées sphériques.



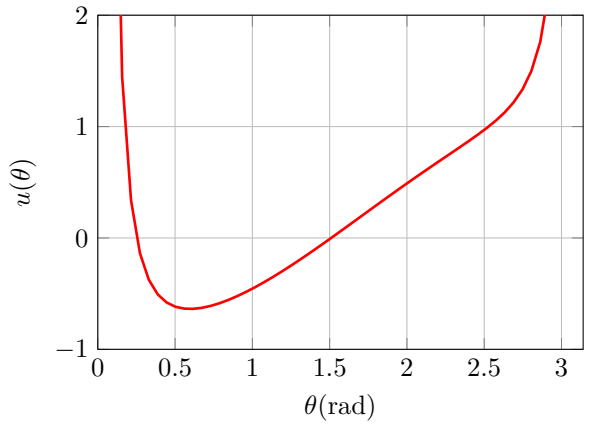
On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le point matériel M est en M_0 repéré par $r = a, \theta = \theta_0, \varphi = 0°$ et que sa vitesse initiale vaut $v_0\vec{e}_\varphi$.

1. On considère un point M de coordonnées (a, θ, φ) avec a fixé. Exprimer dans la base locale le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M par rapport au référentiel R.
2. Faire le bilan des actions s'exerçant sur le point matériel M. Préciser si ces actions travaillent et si elles dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de cette énergie potentielle en fonction de la variable θ uniquement. On choisira l'origine des énergies potentielles en O.
3. (a) Exprimez le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma^O}_M$ du point matériel M par rapport au point O. On l'exprimera dans la base locale.
   (b) En utilisant le théorème du moment cinétique **par rapport à l'axe** Oz, montrer que $\sin^2\theta.\dot{\varphi} = C$ où C est une constante que l'on exprimera en fonction des conditions initiales.
   Indication : on pourra remarquer que $\vec{e}_\theta.\vec{e}_z = -\sin\theta$ (cf. schémas du chapitre sur les coordonnées sphériques).
4. On suppose **dans toute la suite** que C est non nul.
   (a) Exprimer l'énergie cinétique en fonction de m, a, C, $\dot{\theta}$ et θ uniquement.
   (b) On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$ et $D = \frac{C^2}{2\omega_0^2}$. Montrer alors que

$$\frac{1}{2\omega_0^2}\dot{\theta}^2 + u(\theta) = e \qquad \text{(M9.11)}$$

   où $e = \frac{E_m}{mga}$ est une constante et $u(\theta) = -\cos\theta + \frac{D}{\sin^2\theta}$.

5. On choisit comme conditions initiales $a = 50\,\text{cm}$, $\theta(0) = 1{,}3\,\text{rad}$ et $v_0 = 80\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ selon $\vec{e}_\varphi$.
   On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $u(\theta)$. Cette courbe présente un minimum en $\theta = \theta_m$.



   (a) Calculez numériquement C, D et e.
   (b) Que peut-on dire du mouvement selon $\theta(t)$? Décrire alors le mouvement du point M sur la sphère.
   (c) Que se passerait-il si $e = u(\theta_m)$?

6. A partir de l'équation (M9.11), montrer que $\theta(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta + 2\omega_0^2 D \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

M9. Mouvements à force centrale

TDs numériques

réponses page 940

TD numérique : Précession du périhélie de Mercure

ad. EDO ad. plot(polaire)

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de $r(t)$, puis de $\theta(t)$, puis tracer la courbe correspondante.
La planète Mercure est proche du Soleil et est sensible au fait que le Soleil n'est pas exactement sphérique, mais aplati aux pôles comme la Terre. Par conséquent, on admet que la planète Mercure (de masse $m = 3{,}3\times10^{23}\,\text{kg}$), est soumise à une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle

$$U(r) = -\frac{GmM_S}{r}\left(1+\frac{\alpha}{r^2}\right)$$

avec $G = 6{,}67\times10^{-11}$ USI la constante de gravitation universelle, $M_S = 1{,}99\times10^{30}\,\text{kg}$ la masse du Soleil, et α une constante qui traduit l'aplatissement du Soleil ; sa vraie valeur est $8{,}7\times10^{10}\,\text{m}^2$ mais on prendra ici $\alpha = 2\times10^{19}\,\text{m}^2$ pour que l'effet soit bien visible (les valeurs de décalage angulaire obtenues seront du coup exagérées).
Dans la suite, on suppose qu'on a déjà montré que le moment cinétique est constant, et déduit les deux conséquences : le mouvement est plan (dans le plan $z=0$) et $C = r^2\dot\theta = \text{cst}$.

1. À son périhélie (point le plus proche du Soleil), pris comme référence $t=0$, Mercure se trouve à $46\times10^6\,\text{km}$ du Soleil et sa vitesse est de $59\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et orthoradiale (c'est-à-dire selon $\vec{e}_\theta$ en coordonnées polaires dans son plan de révolution).
   Déduisez-en $\dot r(0)$ et $\dot\theta(0)$ puis la valeur de la constante des aires C de Mercure.
2. Montrez que $E_m = \frac{1}{2}m\dot r^2 + U_{eff}(r) = \text{cst}$ en exprimant l'énergie potentielle effective $U_{eff}(r)$.
3. Déduisez-en l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par r.
4. Résolvez-la avec `odeint` pendant 1 an. Tracez $r(t)$ et commentez. Mesurez la période de révolution.
5. Rappeler l'expression de $\dot\theta$ en fonction de C et r.
   On pourrait primitiver $\dot\theta$ à l'aide de la fonction `scipy.integrate.cumulative_trapezoid`, mais on va plutôt faire autrement : pour calculer θ, on considère que le système est décrit non plus par une équation différentielle, mais par un système de la forme $\begin{cases}\ddot r &= \dots\\ \dot\theta &= \dots\end{cases}$ qu'on peut résoudre par `odeint` en posant comme inconnues r, $\dot r$ et θ.
   Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de θ en plus des valeurs de r et $\dot r$; on posera $\theta(0)=0$.
6. La fonction `plt.polar(theta,r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement et observez le décalage du périhélie à chaque tour.

TD numérique : Mouvement d'une bille dans un bol

ad. EDO ad. plot(polaire)

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de $r(t)$, puis de $\theta(t)$, puis tracer la courbe correspondante.
On considère donc une bille de masse m se déplaçant sans frottements dans un bol parabolique d'équation en coordonnées cylindriques

$$z = \frac{r^2}{R}$$

avec $R = 20\,\text{cm}$, O le bas du bol et z l'axe vertical ascendant. On tient compte du poids, avec $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Comme le profil du bol est invariant par rotation autour de Oz, la réaction passera toujours par l'axe Oz ; on admet ce résultat.
   Montrez que le moment cinétique L de la bille par rapport à l'axe Oz est conservé.
2. On pose $C = L/m$. Exprimez C en fonction de r, θ, z et/ou leurs dérivées.

3. Justifier que le système est conservatif, et que

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{4r^2}{R^2}\right)\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{cst}$$

avec U_{eff} à exprimer en fonction de C et du reste.

4. On lance la bille depuis $r(0) = 8\,\text{cm}$ avec une vitesse $v(0) = 10\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ orthoradiale (c'est-à-dire selon $\vec{e}_\theta$). Que valent alors $\dot{r}(0)$ et $\dot{\theta}(0)$?
Calculez (dans un programme Python) sa constante C. Tracez $u_{eff}(r) = U_{eff}(r)/m$ entre $0,02R$ et R, et commentez.

5. À partir de $E_m = \text{cst}$, déduisez l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par r.

6. Résolvez-la avec `odeint` pendant 5 s. Tracez $r(t)$ et commentez.

7. Quelle est l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de C et r ?
Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de θ en plus des valeurs de r et $\dot{r}$.

8. La fonction `plt.polar(theta,r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement.

9. Vous pouvez alors essayer avec d'autres valeurs initiales. Vous pouvez aussi essayer de tracer la trajectoire en 3D.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c)
Q2.(a)
Q3.(a)
Q4.(d)
Q5.(b)
Q6.(a)
Q7.(b) ET (c)
Q8.(b) ET (d)
Q9.(a)
Q10.(c)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M9.1 : Noyau de deutérium [*]

1. Cours.
2. Cours.
3. Cours : $U_f(r) = \frac{mC^2}{4r^2} - g^2\frac{e^{-\alpha r}}{r}$
4. $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ donc (après simplification par $\dot{r}$) on obtient $\frac{m}{2}\ddot{r}(t) - \frac{mC^2}{2r(t)^3} + g^2 e^{-\alpha r(t)}\frac{1+\alpha r(t)}{r(t)^2}$
   Cette équation différentielle est non linéaire, donc on ne sait pas la résoudre à la main, mais on peut la résoudre numériquement avec Python.
5. On en déduit que $C = \sqrt{\frac{2g^2}{m}r(1+\alpha r)e^{-\alpha r}} = 8{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ soit une vitesse $v = 4{,}1\times10^{12}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: on voit que, à cette petite échelle, tout est relativiste, et que nos lois de mécanique newtonienne ne s'appliquent plus du tout.

Corrigé de l'exercice M9.2 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène [**]

1. Le travail de $\vec{f}$ entre deux points A et B s'écrit
   $W = \int_A^B -k\overrightarrow{OM}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B -kr\vec{e}_r\cdot(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\vec{e}_\varphi) = \int_A^B -kr\mathrm{d}r = -\left[\frac{1}{2}kr^2\right]_A^B$
   donc la force est conservative et $E_p = \frac{1}{2}kr^2$
2. $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = kr - \frac{mC^2}{r^3}$ donc $\frac{dE_{p,eff}}{dr} > 0 \Leftrightarrow r^4 > \frac{mC^2}{k}$; d'où le tableau de variations suivant :

r	0		$\sqrt[4]{\frac{mC^2}{k}}$		$+\infty$
$\frac{dE_{p,eff}}{dr}$		$-$	0	$+$	
$E_{p,eff}$	$+\infty$	↘	$\sqrt{kmC^2}$	↗	$+\infty$

3. (a) Le mouvement est circulaire, donc r est constant, donc le système est au minimum de $E_{p,eff}$: $r_0^4 = \frac{mC^2}{k} = \frac{L^2}{mk}$ donc $k = \frac{L^2}{mr_0^4} = 1535\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$
   (b) Pour un mouvement circulaire, $\vec{r} = r_0\vec{e}_r$ et $\vec{v_0} = \vec{v_0}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{L} = mr_0v_0\vec{e}_z$. On en déduit que $v_0 = \frac{L}{mr_0} = 2{,}2\times10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
   Le mouvement se fait donc avec pour période $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 1{,}5\times10^{-16}\,\mathrm{s}$ soit une fréquence $f_0 = 6{,}5\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$ ce qui correspond à $\lambda_0 = 46\,\mathrm{nm}$: ultraviolet lointain.
4. (a) $C = r_0v_1 = 159\times10^{-6}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ et $E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = 6{,}25\times10^{-18}\,\mathrm{J} = 39\,\mathrm{eV}$
   (b) Lorsque le rayon est minimum ou maximum, $\dot{r} = 0$ donc $E_m = E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}kr^2$. On doit donc résoudre cette équation.
   (c) En posant $X = r^2$ on obtient $kX^2 - 2E_mX + mC^2 = 0$ qui a deux solutions ; on en tire $r_{min} = 53\,\mathrm{pm}$ et $r_{max} = 73\,\mathrm{pm}$

Corrigé de l'exercice M9.3 : Lancement d'un ressort en rotation [**]

1. Je rappelle juste les grandes étapes :
   — Application du TMC au point M : la seule force a un moment nul, donc le moment cinétique est constant, donc $C = \mathrm{cst}$
   — Étude cinématique permettant de montrer que $C = r(t)^2\dot{\theta}(t)$

— La seule force est conservative d'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{1}{2}k\left(r - l_0\right)^2$ (c'est connu, c'est du cours) donc $E_m = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}k\left(r(t) - l_0\right)^2$. D'après l'étude cinématique, $v(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\theta}(t)^2$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r(t)^2}$ ce qui permet d'obtenir $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + \frac{mC^2}{2r(t)^2} + \frac{1}{2}k\left(r(t) - l_0\right)^2$

2. $E_p(r) = E_{peff}(r) - \frac{mC^2}{2r^2}$; donc $E_p(14\,\text{cm}) = 49\,\text{mJ}$
3. Il faut qu'il soit au minimum de la courbe d'énergie potentielle effective, donc que $C = 1000\,\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ donc $v = \frac{C}{r} = 71\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$
4. On a maintenant $C = 1500\,\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ et $E_m = 0{,}16\,\text{J}$ donc on trace la droite horizontale $E_m = 0{,}16\,\text{J}$ et on regarde les intersections avec la courbe jaune : r oscille entre 14 cm et 22 cm
5. On a $E_m = 0{,}1\,\text{J}$ mais $C = 14\times 71\times\cos(60°) = 500\,\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ donc r oscille entre 5 cm et 19 cm.

Corrigé de l'exercice M9.4 : Formules de Binet [**]

1. Vu en cours.
2. Vu en cours : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r(t)$; $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$; $C = r(t)^2\dot{\theta}(t)$.
3. $\dot{\theta}(t) = \frac{C}{r(t)^2} = Cu(\theta(t))^2$.

   $\dot{r}(t) = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{u(\theta)}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{u'(\theta)}{u(\theta)^2}\dot{\theta}(t) = -Cu'(\theta)$

   On en déduit que $\vec{v}(t) = C\left(-u'(\theta(t))\vec{e}_r(t) + u(\theta(t))\vec{e}_\theta(\theta(t))\right)$
4. $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$

$$= -C\left(\frac{\mathrm{d}u'(\theta(t))}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r(t) + u'(\theta(t))\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right) + C\left(\frac{\mathrm{d}u(\theta(t))}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta(t) - u(\theta(t))\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)\right)$$

$$= -C\left(\frac{\mathrm{d}u'(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t) + u'(\theta(t))\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right) + C\left(\frac{\mathrm{d}u(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - u(\theta(t))\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)\right)$$

$$= C\dot{\theta}(t)\left[-u''(\theta(t))\vec{e}_r(t) - u'(\theta(t))\vec{e}_\theta(\theta(t)) + u'(\theta(t))\vec{e}_\theta(t) - u(\theta(t))\vec{e}_r(t)\right]$$

$$= -C^2u(\theta(t))^2\left(u''(\theta(t)) + u(\theta(t))\right)\vec{e}_r(t)$$

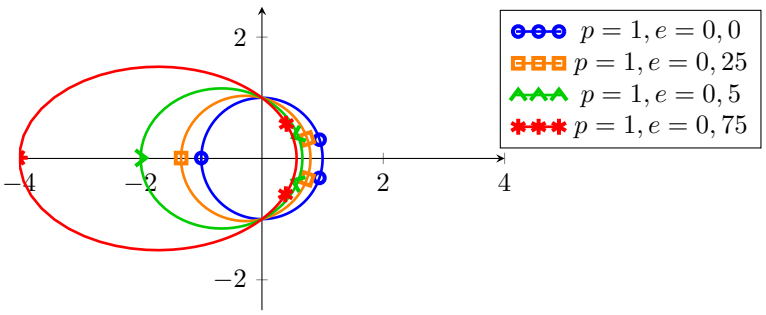
5. **Application au mouvement d'une planète**
   (a) $f(r) = -\frac{Gm_Om}{r^2}$
   (b) Donc par le PFD appliqué à la planète : $-mC^2u(\theta)^2\left(u''(\theta) + u(\theta)\right)\vec{e}_r = -Gm_Omu(\theta)^2\vec{e}_r$. On projette sur $\vec{e}_r$, on simplifie et on trouve $u''(\theta) + u(\theta) = \frac{Gm_O}{C^2}$

   Les solutions sont de la forme $u(\theta) = \frac{Gm_O}{C^2} + A\cos(\theta+\phi)$ où A et ϕ sont des constantes.

   (c) Donc $r(_theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{1}{\frac{Gm_O}{C^2} + A\cos(\theta+\phi)} = \frac{\frac{C^2}{Gm_O}}{1 + \frac{AC^2}{Gm_O}\cos(\theta+\phi)}$ ce qui correspond bien à la forme proposée.

   (d)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
tab_theta=np.linspace(0,2*np.pi,100)
tab_r1=1/(1+0*np.cos(tab_theta))
tab_r2=1/(1+0.25*np.cos(tab_theta))
tab_r3=1/(1+0.5*np.cos(tab_theta))
tab_r4=1/(1+0.75*np.cos(tab_theta))
plt.figure()
plt.polar(tab_theta,tab_r1,label="p=1,e=0.0")
plt.polar(tab_theta,tab_r2,label="p=1,e=0.25")
plt.polar(tab_theta,tab_r3,label="p=1,e=0.5")
plt.polar(tab_theta,tab_r4,label="p=1,e=0.75")
plt.legend()
plt.text(0,0,"O")
plt.show()
```



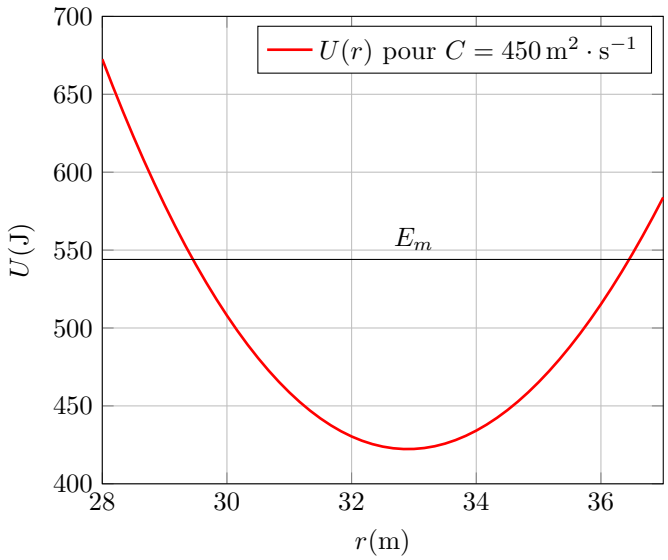
Corrigé de l'exercice M9.5 : Manchots dans un donut-pipe [***]

1. $\overrightarrow{OP} = r(t)\vec{e}_r(t) + \left[-h + \alpha(r(t)-r_0)^2\right]\vec{e}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + 2\alpha\dot{r}(t)(r(t)-r_0)\vec{e}_z$.
2. La réaction passe par l'axe et le poids est parallèle à l'axe donc d'après le TMC : $\frac{dL^{Oz}}{dt} = 0$.
3. $L^{Oz} = m(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}).\vec{e}_z = mr(t)^2\dot{\theta}(t)$ donc $C = r(t)^2\dot{\theta}(t)$
4. $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2}mr(t)^2\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}m4\alpha^2(r(t)-r_0)^2\dot{r}(t)^2 + mg\left[-h + \alpha(r(t)-r_0)^2\right]$ donc

$$\begin{cases} \mu(r) &= m\left[1 + 4\alpha^2(r-r_0)^2\right] \\ U(r) &= m\left[-gh + g\alpha(r-r_0)^2 + \frac{C^2}{2r^2}\right] \end{cases}$$

5. Le mouvement circulaire correspond à $\dot{r} = 0$; c'est une position d'équilibre selon r, atteinte lorsque $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0$ soit $2g\alpha(r-r_0) - \frac{C^2}{r^3} = 0$. On en tire $C = \sqrt{2g\alpha(r-r_0)r^3} = 555\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ d'où on tire la vitesse $\frac{C}{r} = 16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 59\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
6.
   (a) $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = 544\,\mathrm{J}$ et $C = r_0 \times 15 = 450\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$
   (b) Les rayons min et max sont caractérisés par $\dot{r} = 0$ donc ils sont solution de l'équation $U(r) = E_m$. Il s'agit d'une équation non-linéaire qu'on peut résoudre numériquement ; on trouve :

$$r_{min} = 29{,}4\,\mathrm{m} \text{ (altitude } z = -4{,}96\,\mathrm{m})$$
$$r_{max} = 36{,}5\,\mathrm{m} \text{ (altitude } z = -0{,}78\,\mathrm{m})$$



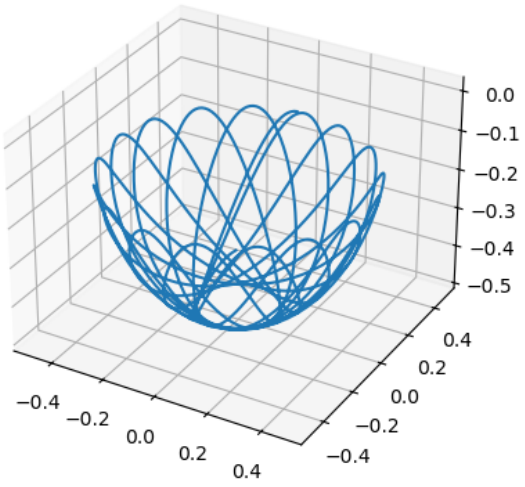
Corrigé de l'exercice M9.6 : Pendule sphérique [***]

1. $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r(t)$ et $\vec{v} = a\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + a\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$ car $r = a = \text{cst}$.
2. M est soumis à son poids, conservatif, d'énergie potentielle $-mga\cos\theta(t)$ et à la tension du fil, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement.

3.
   (a) $\overrightarrow{\sigma^O}_M = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = ma^2\dot{\theta}(t)\vec{e}_\varphi(t) - ma^2\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\theta(t)$
   (b) Le point M est soumis à son poids, parallèle à Oz, et à la tension du fil qui passe par Oz. Le moment de ces deux forces par rapport à l'axe Oz est donc nul. Par le TMC, on en conclut que le moment cinétique de M par rapport à Oz est constant.
   Or $\sigma_M^{Oz} = \overrightarrow{\sigma^O}_M.\vec{e}_z$ et on a les relations $\vec{e}_\varphi.\vec{e}_z = 0$ et $\vec{e}_\theta.\vec{e}_z = -\sin\theta$. Donc $ma^2\sin^\theta(t)\dot{\varphi}(t) = \text{cst}$. Comme m et a sont constants, on a bien $\sin^2\theta(t).\dot{\varphi}(t) = \text{cst}$.
   Or initialement, $\theta(0) = \theta_0$ et $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_\varphi = a\sin\theta_0\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi$ donc $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{a\sin\theta}$ donc $C = \frac{v_0\sin\theta_0}{a}$
4.
   (a) $E_c = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}(t)^2 + a^2\sin^2\theta(t)\dot{\varphi}(t)^2\right)$ or $\dot{\varphi}(t) = \frac{2}{\sin^2\theta(t)}$ donc $E_c = \frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\theta}(t)^2 + \frac{C^2}{\sin^2\theta(t)}\right)$
   (b) L'énergie mécanique s'écrit donc $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}(t)^2 + \frac{mC^2}{2\sin^2\theta(t)} - mga\cos\theta(t)$. En divisant par mga on trouve bien l'équation demandée.
5.
   (a) Avec les CI : $C = \frac{0.8\sin(1,3)}{0.5} = 1{,}54\,\text{s}^{-1}$ et $D = 0{,}06$ d'où on tire $e = u(\theta_0) = -0{,}2$ (sans unité).
   (b) En traçant la droite horizontale $e = -0,2$ on constate que l'angle θ oscille entre 0,3 rad et 1,4 rad. Le point M va donc tourner autour de l'axe Oz tout en ayant son angle θ qui oscille entre ces deux valeurs, mais sans jamais atteindre le point le plus bas ($\theta = 0\,\text{rad}$).
   (c) Si $e = u(\theta_m)$ alors $\theta = \text{cst}$: on a une rotation circulaire autour de l'axe Oz.
6. Il suffit de dériver l'équation (1) et de simpifier par $\dot{\theta}$.

Exemple de trajectoire simulée avec Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint,cumulative_trapezoid
a,g=0.5,9.8
th0,v0=1.3,0.8
C,w0=v0*np.sin(th0)/a,np.sqrt(g/a)
D=C**2/2/w0**2
def derivee(inconnues,t):
    th,dth,phi=inconnues
    ddth=-w0**2*np.sin(th)+2*w0**2*D*np.cos(th)/np.sin(th)**3
    dphi=C/np.sin(th)**2
    return [dth,ddth,dphi]
ci=[th0,0,v0/a/np.sin(th0)]
tab_t=np.linspace(0,10*2*np.pi/w0,1000)
sol=odeint(derivee,ci,tab_t)
tab_th=sol[:,0]
tab_phi=sol[:,2]
tab_x=a*np.sin(tab_th)*np.cos(tab_phi)
tab_y=a*np.sin(tab_th)*np.sin(tab_phi)
tab_z=-a*np.cos(tab_th)
plt.figure().add_subplot(projection='3d')
plt.plot(tab_x,tab_y,tab_z)
plt.scatter([0],[0],[0]) # pour afficher l'origine
plt.show()
```

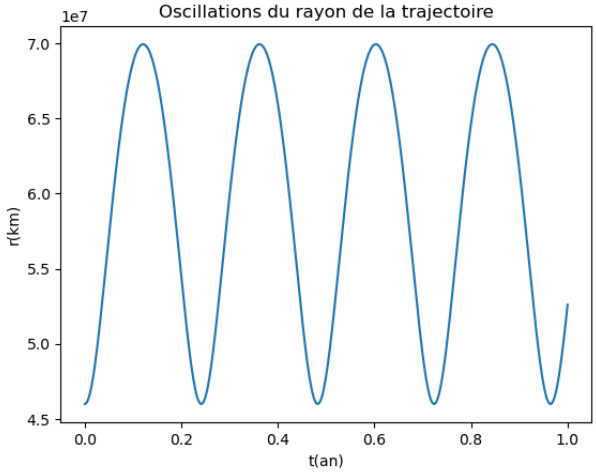

0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4

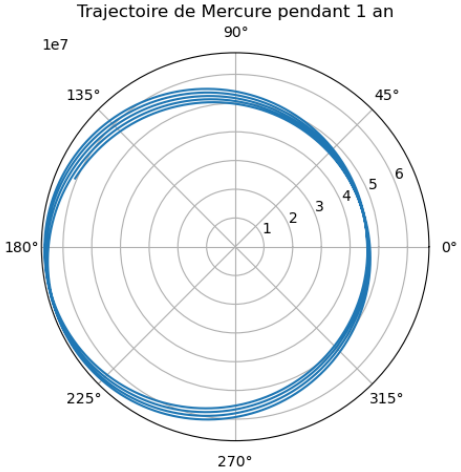
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Précession du périhélie de Mercure

On a $U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + U(r)$. On dérive l'énergie mécanique par rapport au temps, on divise par $\dot{r}$ et on obtient le système d'équations

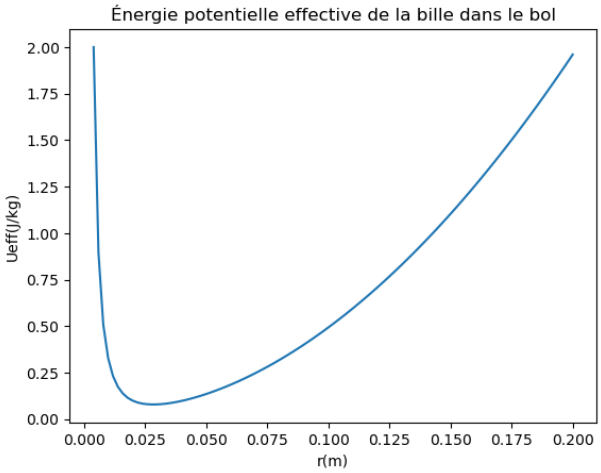
$$\begin{cases} \ddot{r} &= \frac{C^2}{r^3} - GM_s\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4}\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{C}{r^2} \end{cases}$$





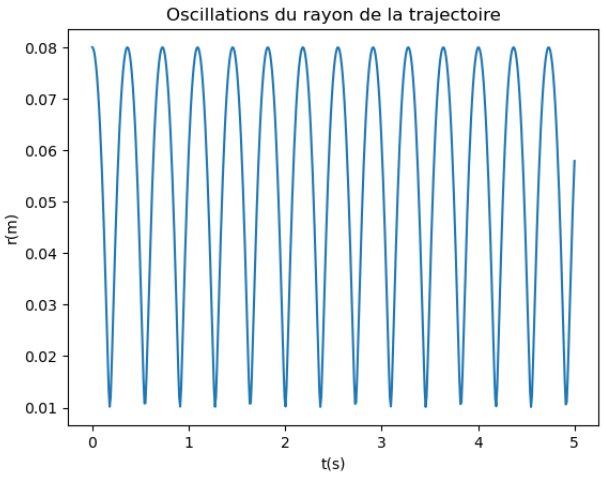
Réponses au TD d'info : Mouvement d'une bille dans un bol

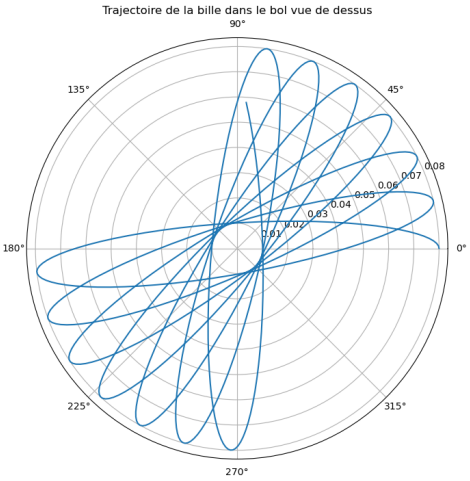
La conservation de E_m et $C = r^2\dot{\theta}$ permet d'obtenir $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz(r)$ et comme $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $\dot{z} = \frac{2r\dot{r}}{R}$ on obtient $U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + mg\frac{r^2}{R}$:

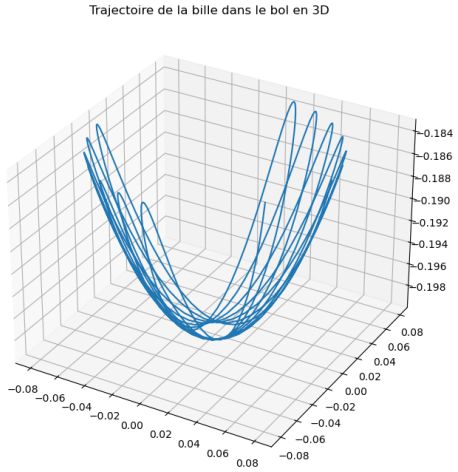


On voit que le mouvement radial sera borné.
En dérivant E_m par rapport au temps, et en simplifiant par $m\dot{r}$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \ddot{r} &= \dfrac{\frac{C^2}{r^3} - \frac{2gr}{R} - \frac{4r\dot{r}^2}{R^2}}{1 + \frac{4r^2}{R^2}} \\ \dot{\theta} &= \frac{C}{r^2} \end{cases}$$


Oscillations du rayon de la trajectoire
r(m)
t(s)
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
1
2
3
4
5


Trajectoire de la bille dans le bol vue de dessus
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01


Trajectoire de la bille dans le bol en 3D
0.184
0.186
0.188
0.190
0.192
0.194
0.196
0.198
−0.08
−0.06
−0.04
−0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08

Chapitre M10 Mouvements képlériens

Programme p.956

Cours p.944
- M10.A. Potentiel newtonien
- M10.B. Étude qualitative du mouvement
- M10.C. Étude des orbites circulaires
- M10.D. Étude des orbites elliptiques
- M10.E. Application : le système solaire
- M10.F. Annexe : établissement de l'équation des trajectoires (hors programme)

Conseils p.957

QCMs p.958

Exercices p.961

TDs numériques p.966

M10. Mouvements képlériens

Cours

Les mouvements des planètes sont des mouvements à force centrale, la force étant la force de gravitation. Ils ont été étudié expérimentalement par Képler, puis théoriquement par Newton. En fait, leur étude s'étend à tout mouvement d'un astre soumis à la gravitation : satellites autour de la Terre, étoiles autour du centre de la galaxie,... mais aussi à d'autres mouvements avec des forces qui ont la même forme mathématique, en particulier la force électrique de Coulomb.

Dans tout ce chapitre, on étudie le mouvement d'un point M de masse m soumis à une seule force, centrale, de la part d'un point O de masse m_O supposé fixe. En réalité le point O ne peut pas être fixe, puisqu'il est soumis lui aussi à la force de M. Mais d'après la théorie du mobile fictif, hors programme mais présentée à la fin du chapitre précédent :

- si $m_O \gg m$, le point O bouge très peu car il est plus lourd ; c'est le cas du Soleil soumis à l'attraction de la Terre, ou de la Terre soumise à l'attraction des satellites
- sinon, via un artifice mathématique, on peut se ramener à l'étude du point M en faisant comme si le point O était immobile, à condition de modifier légèrement la masse de M : dans les équations, il faut remplacer m par la masse réduite $\mu = \frac{mm_O}{m+m_O}$

Dans ce chapitre, on supposera la première hypothèse, sachant que, s'il le faut, on peut toujours utiliser la masse réduite dans les applications numériques.

M10.A. Potentiel newtonien

Propriété : Énergie potentielle de la force de gravitation

La force de gravitation entre deux points O et M est conservative, et son énergie potentielle est

$$E_p = -\frac{Gm_Om}{OM} \qquad \text{(M10.1)}$$

où m_O et m sont les masses deux deux points, OM la distance qui les sépare et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI (constante de gravitation universelle).

Démonstration

On se place dans le cas où O est immobile pour simplifier. En coordonnées sphériques de centre O, la force s'écrit $\vec{f} = -\frac{Gm_Om}{r^2}\vec{e}_r$ donc son travail entre deux points M_1 et M_2 vaut

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{M_1}^{M_2} -\frac{Gm_Om}{r^2}\vec{e}_r \cdot (\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\vec{e}_\varphi)$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} -\frac{Gm_Om}{r^2}\mathrm{d}r = \left[\frac{Gm_Om}{r}\right]_{M_1}^{M_2}$$

La force varie comme $\frac{1}{\text{distance}^2}$ mais l'énergie varie comme $\frac{1}{\text{distance}}$

En fait, quand on étudie les phénomènes gravitationnels, on pense rarement à des points matériels, mais à des objets célestes. Dans ce cas la force gravitationnelle (et son énergie potentielle) sont plus compliquées. On admet néanmoins un théorème que vous serez capables de démontrer l'an prochain :

Théorème de Newton

La force gravitationnelle exercée par un astre à symétrie sphérique (c'est-à-dire dont la masse se répartit sous forme de sphères concentriques) sur un point matériel situé à l'extérieur de cet astre, est la même que si toute la masse de cet astre était placée en son centre.

Le Soleil, la Terre,... sont approximativement des astres à symétrie sphérique, même si la sphère n'est pas parfait à cause de l'aplatissement aux pôles ; la Terre, par exemple, contient un noyau sphérique, entouré d'un manteau sphérique, entouré d'une croûte sphérique. Ainsi, pour exprimer l'attraction gravitationnelle (ou l'énergie potentielle correspondante) de la Terre sur un satellite, on fera comme si la Terre était ramenée à un point matériel en son centre.

Propriété : Énergie potentielle électrique

La force électrique entre deux charges O et M est conservative, et son énergie potentielle est

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{OM} \qquad \text{(M10.2)}$$

où q_O et q sont les charges deux deux points, OM la distance qui les sépare et $\varepsilon_0 = 8{,}8 \times 10^{-12}$ USI soit $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI.

Démonstration

Identique, à partir de la force $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{r^2}\vec{e}_r$

Définition : Potentiel newtonien

On appelle potentiel newtonien une énergie potentielle centrale de la forme $E_p(r) = \frac{K}{r}$, $K \in \mathbb{R}$, qui donne donc lieu à une force centrale $\vec{f} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$.
Si $K > 0$, la force est répulsive ; si $K < 0$, la force est attractive.

Remarque : La force gravitationnelle est toujours attractive (car $K = -Gm_O m$) ; la force électrique ($K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_O q$) est attractive pour des charges de signes opposés, et répulsive pour des charges de même signe.

Définition : Mouvement képlérien

On appelle mouvement képlérien le mouvement d'un point matériel soumis uniquement à une force dérivant d'un potentiel newtonien.

Dans la suite du chapitre, nous allons donc étudier les lois générales des mouvements képlériens, mais certains résultats particuliers ne s'appliqueront qu'aux potentiels gravitationnels.

M10.B. Étude qualitative du mouvement

On peut appliquer tout d'abord tous les résultats vus dans le chapitre précédents à un mouvement képlérien :

— la trajectoire est plane

— la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ est constante (deuxième loi de Képler)

— l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$

Pour en savoir plus, on peut étudier l'énergie potentielle effective et tracer sa courbe :

Calcul : Étude de l'énergie potentielle effective

On calcule la dérivée : $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{mC^2}{r^3} - \frac{K}{r^2}$
On distingue alors deux cas suivant le signe de K (car toutes les autres constantes sont positives) :

— si $K > 0$, alors $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}(r)}{\mathrm{d}r} < 0$:

r	0	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}E_{p_{eff}}(r)}{\mathrm{d}r}$	$-$	
$E_{p_{eff}}$	$+\infty$	0

On constate que, quelle que soit l'énergie mécanique, la trajectoire a une barrière de potentiel pour les petits rayons, mais aucune barrière pour les grands rayons : la trajectoire est non bornée ; on peut remarquer, en passant, que puisque $E_m > E_{p,eff}$ et que l'énergie potentielle est toujours positive, alors $E_m > 0$ dans ce cas-là.

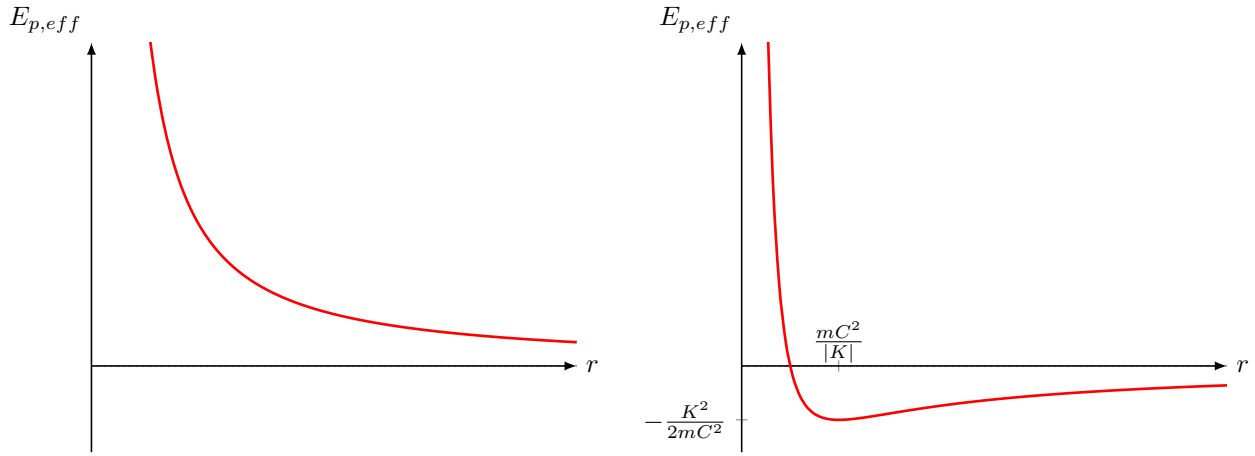
— si $K < 0$, on écrit $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{|K|}{r^2}$; alors $\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}(r)}{\mathrm{d}r} > 0 \Leftrightarrow \frac{|K|}{r^2} > \frac{mC^2}{r^3} \Leftrightarrow r > \frac{mC^2}{|K|}$ d'où le tableau de variations :

r	0		$\frac{mC^2}{\|K\|}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}E_{p,eff}(r)}{\mathrm{d}r}$		$-$	0	$+$	
$E_{p_{eff}}$	$+\infty$	↘	$-\frac{K^2}{2mC^2}$	↗	0

On voit alors apparaître un creux qui va donner des trajectoires bornées dans le cas où l'énergie mécanique est négative ; si elle est positive, la trajectoire est non bornée.

Les deux comportements sont illustrés sur la figure M10.1).

FIGURE M10.1 : Énergie potentielle effective du point M.



(a) Force répulsive : $K > 0$ (b) Force attractive : $K < 0$

Cela nous permet d'affirmer la première propriété des trajectoires :

Propriété : Trajectoires bornées

Les trajectoires des mouvements képlériens sont bornées si et seulement si leur énergie mécanique est négative. Cela n'est possible que pour une force attractive.

Pour aller plus loin, il faut résoudre les équations du mouvement. Ce n'est plus au programme, même si vous pourrez lire, en annexe, un exemple de démonstration si ça vous intéresse. On va donc simplement admettre le résultat :

Propriété : Nature géométrique des trajectoires

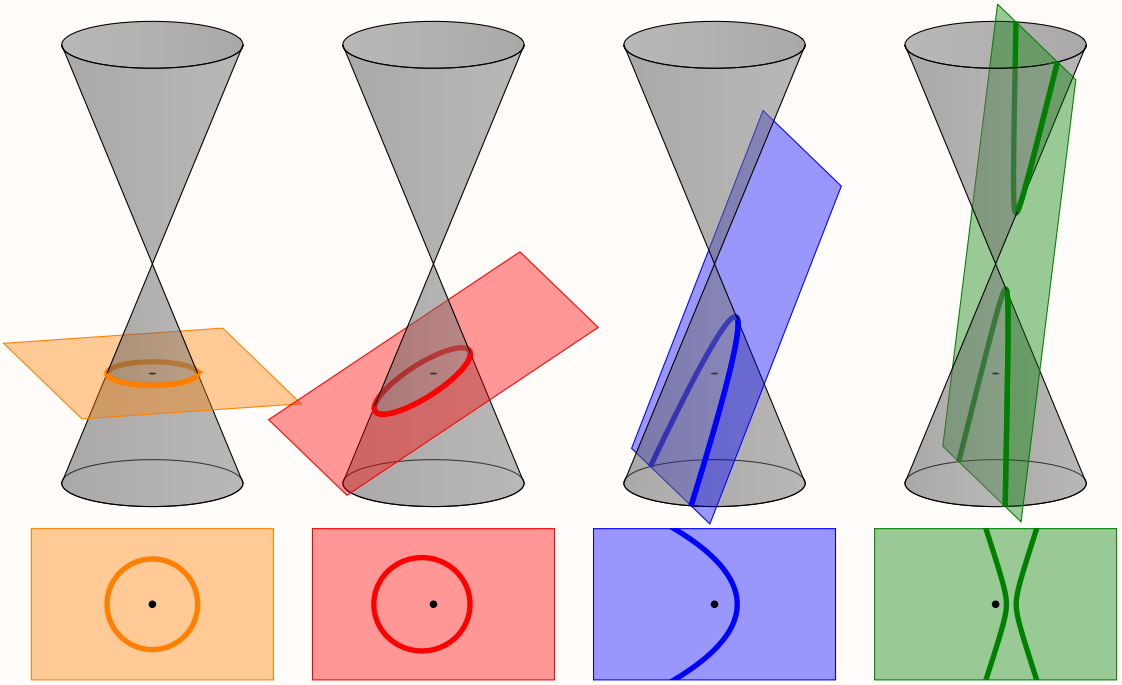
Les trajectoires des mouvements képlériens sont des coniques : ellipses si $E_m < 0$, parabole si $E_m = 0$ ou hyperboles si $E_m > 0$. Le point central est un foyer de la conique.
Dans le cas des planètes autour du Soleil, on en conclut que leur trajectoire est une ellipse dont le Soleil est un foyer : c'est la **première loi de Képler**.

Un peu de maths : Qu'est-ce qu'une conique ?

Une conique est une courbe obtenue par l'intersection d'un cône avec un plan. Suivant l'inclinaison du plan par rapport à l'axe du cône, on peut avoir :

— un cercle

— une ellipse
— une parabole
— une hyperbole (en deux branches)



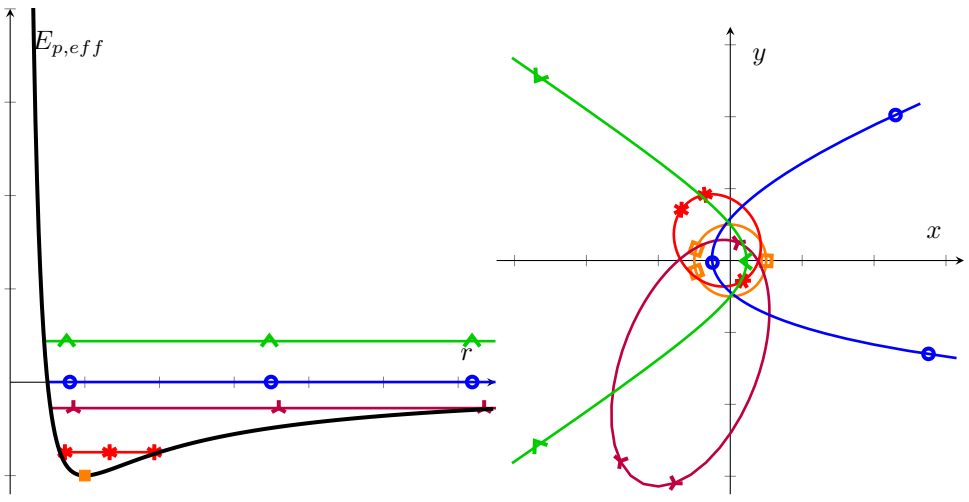
Une conique est caractérisée par deux **foyers**, dont l'un est l'intersection du plan avec l'axe du cône, et par son **excentricité** e, un paramètre sans dimension que vaut 0 pour un cercle, est compris entre 0 et 1 pour une ellipse, est égal à 1 pour une parabole, et est supérieur à 1 pour une hyperbole.

Dans le cas d'un potentiel newtonien attractif, on a vu que le mouvement peut être borné ou pas. On peut montrer que :

— si $E_m < 0$, le mouvement est un cercle ou une ellipse
— si $E_m > 0$, le mouvement est une branche d'hyperbole, celle qui s'enroule autour du foyer
— le cas limite (théorique) $E_m = 0$ correspond à une parabole

Les différents cas sont illustrés sur la figure M10.2.

FIGURE M10.2 : Exemples de mouvements sous l'action d'un potentiel newtonien attractif.



Au contraire, dans le cas répulsif, les trajectoires sont toujours non bornées : ce sont des hyperboles, ou plus précisément la branche d'hyperbole qui ne s'enroule pas autour du foyer (figure M10.3) :

FIGURE M10.3 : Exemples de mouvements sous l'action d'un potentiel newtonien répulsif.

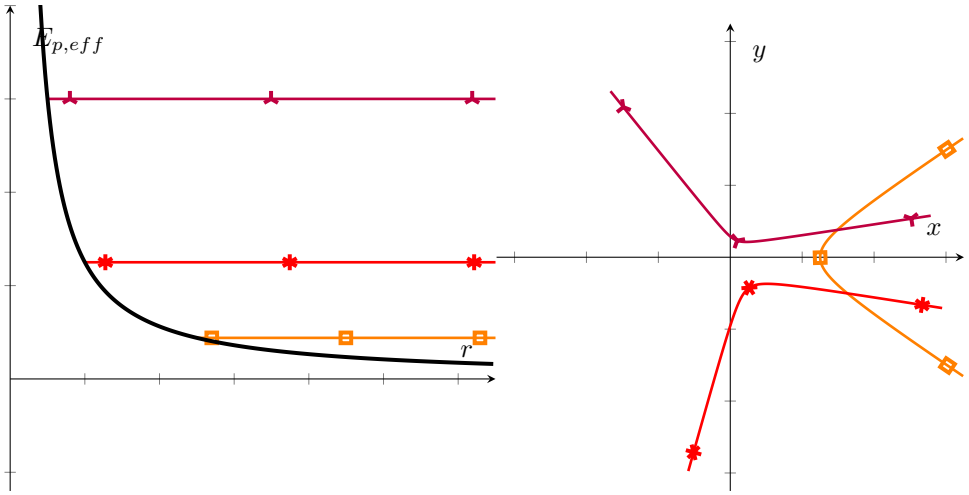
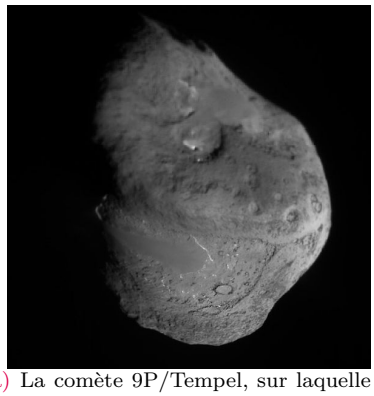
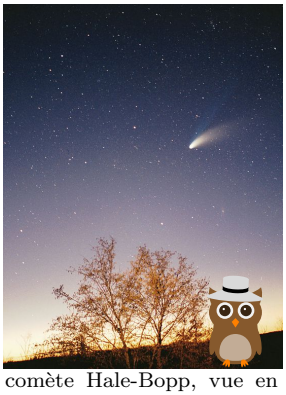


FIGURE M10.4 : Exemples de trajectoires de comètes.



(a) La comète 9P/Tempel, sur laquelle la sonde Deep Impact s'est écrasée, a une orbite peu elliptique ($e = 0,510$) (Crédit : Wikipedia/NASA)



(b) La comète Hale-Bopp, vue en 1995, est une comète périodique à l'orbite très elliptique ($e = 0,994$) (Crédit : Wikipedia/P.Salzgeber)



(c) La comète Morehouse, vue en 1908, est une comète apériodique à l'orbite hyperbolique ($e = 1,0007$) (Crédit : Wikipedia/E.E.Barnard)

Exemple : Vitesse de libération terrestre — À connaître

On tire un obus depuis la surface de la Terre. Quelle vitesse minimale v_{lib} doit-on lui communiquer pour qu'il puisse s'échapper jusqu'à l'infini ?
Données : le rayon terrestre vaut $R_T = 6400\,\text{km}$ et la pesanteur au niveau du sol $g_0 = 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pour que l'obus puisse aller à l'infini, il faut que sa trajectoire soit non bornée, donc que son énergie mécanique soit positive. Or son énergie mécanique initiale vaut $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(R_T) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$ où m est la masse de l'obus et M_T celle de la Terre. L'obus part donc à l'infini si $\frac{1}{2}mv^2 > \frac{GM_Tm}{R_T}$ soit $v > v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$.
Pour faire l'AN, on se retrouve devant une situation courante dans les exercices : l'énoncé ne conne pas G et M_T, mais g_0 et R_T. Or g_0 est la pesanteur au niveau du sol, qui apparaît dans le poids sous la forme $-mg_0\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ vertical ascendant. Mais on se souvient que le poids n'est qu'une approximation, à la surface de la Terre, de la force gravitationnelle $-\frac{GM_Tm}{R_T^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r$ est aussi vertical et ascendant. En identifiant les deux expressions, on en déduit que $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$.
On en déduit donc que $v_{lib} = \sqrt{2g_0R_T} = 11,3\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

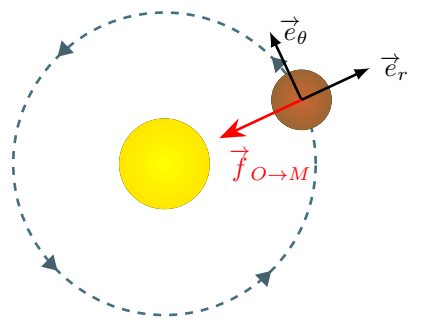
M10.C. Étude des orbites circulaires

L'étude générale des orbites d'un mouvement képlérien est compliquée. Mais il existe un cas simple qu'il faut absolument connaître : les orbites circulaires.

Exemple : Étude des trajectoires circulaires dans un potentiel gravitationnel À connaître

On suppose que l'objet M décrit autour de O une orbite circulaire de rayon r. En appliquant le PFD à M, exprimez en fonction de r et des constantes :

- la vitesse angulaire $\dot{\theta}$
- la vitesse v
- la période T ; déduisez-en le rapport $\frac{T^2}{r^3}$
- l'énergie mécanique E_m



Pour une orbite circulaire, l'étude cinématique en coordonnées polaires se simplifie : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r(t)$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ d'où $\vec{a} = r\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - r\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$.
La seule force qui s'applique est la force gravitationnelle $-\frac{Gm_Om}{r^2}\vec{e}_r(t)$. Le PFD projeté sur les deux axes donne donc deux équations :

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}(t)^2 &= -\frac{Gm_Om}{r^2} \\ mr\ddot{\theta}(t) &= 0 \end{cases}$$

La seconde indique que $\dot{\theta}(t) = \text{cst}$; la première permet d'exprimer sa valeur : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm_O}{r^3}}$.

On en déduit la vitesse $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm_O}{r}}$.

La période est $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ (on peut aussi écrire $T = \frac{2\pi r}{v}$) donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_O}}$. On en déduit facilement que $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$: c'est la **troisième loi de Képler**.
Enfin, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{Gm_Om}{r}$ et $E_p = -\frac{Gm_Om}{r}$ donc en sommant les deux : $E_m = -\frac{Gm_Om}{2r}$: **l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle prise à une distance égale à deux fois le rayon**.

Remarque : Tous les résultats précédents se généralisent pour une force newtonienne autre que la gravitation, sauf la troisième loi de Képler.

M10.D. Étude des orbites elliptiques

Les orbites périodiques sont rarement circulaires ; elles sont le plus souvent elliptiques. Il faut connaître quelques résultats importants sur les trajectoires elliptiques.

Les ellipses, comme toutes les coniques, ont de nombreuses propriétés.

Propriété : Définition bifocale d'une ellipse

Une ellipse possède deux foyers ; elle est constituée de l'ensemble des points tels que la somme des longueurs jusqu'aux deux foyers est constante (figure M10.5) :

$$\text{ellipse} = \{M, F_1M + F_2M = 2a = \text{cst}\}$$

L'ellipse est symétrique par rapport à la médiatrice de $[F_1F_2]$; la dimension de l'ellipse selon la droite (F_1F_2) est le grand-axe de l'ellipse, il vaut $2a$; la dimension de l'ellipse selon la médiatrice de $[F_1F_2]$ est le petit-axe de l'ellipse, on le note $2b$.
On note $2c$ la distance entre les foyers de l'ellipse, et on définit l'excentricité de l'ellipse par

$$e = \frac{c}{a} < 1 \qquad \text{(M10.3)}$$

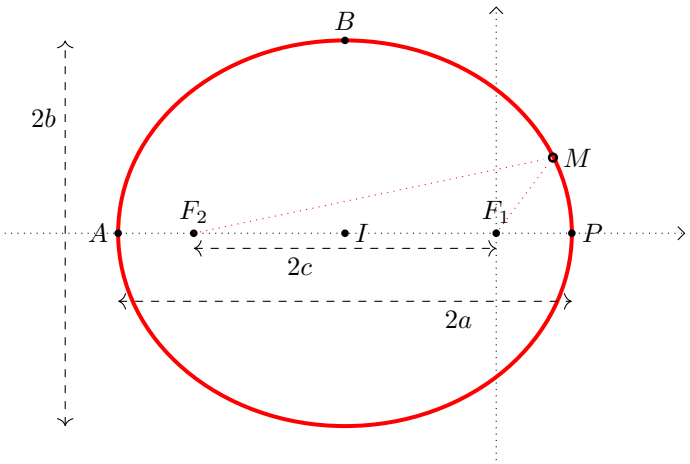
Démonstration

Pourquoi le grand-axe AP vaut-il $2a$? D'après la définition bifocale, $F_1A + F_2A = 2a$, or $F_2A = PF_1$ par symétrie, donc $PF_1 + F_1A = PA = 2a$

Remarque : Les deux données essentielles décrivant une ellipse sont son demi grand-axe a et son excentricité e. On peut en déduire $c = e.a$, puis b si c'est nécessaire, en remarquant que, de par la définition bifocale, $F_1B = F_2B = a$; or par le théorème de Pythagore, $F_1A^2 = CB^2 + CF_1^2 = b^2 + c^2 = b^2 + e^2a^2$ donc $b = a\sqrt{1-e^2}$.

Remarque : Un cercle est simplement une ellipse dont les deux foyers sont confondus (donc $e = 0$).

FIGURE M10.5 : Caractéristiques d'une ellipse.



La définition de l'ellipse fait apparaître deux foyers, mais un seul a un sens physique, celui où se trouve le centre attracteur ; l'autre est invisible. Dans la suite, on supposera que ce centre est en F_1.

Définition : Points particuliers

Le point de la trajectoire le plus proche du centre attracteur s'appelle le périgée (si le centre est la Terre), ou le périhélie (si le centre est le Soleil), ou le périastre.
Le point de la trajectoire le plus loin du centre attracteur s'appelle l'apogée (si le centre est la Terre), ou l'aphélie (si le centre est le Soleil), ou l'apoastre.

Un calcul classique en exercices consiste à exprimer le rayon minimum $r_{min} = F_1P$ et le rayon maximum $r_{max} = F_1A$ en fonction de a et e, ou bien l'inverse.

Calcul : Relations entre a, e, r_{min} et r_{max}

Il est facile de voir que $F_1P = IP - IF_1 = a - c$ donc $r_{min} = a(1-e)$.
De même $F_1A = F_1I + IA = c + a$ donc $r_{max} = a(1+e)$.
En ajoutant les deux expressions, on trouve $a = \frac{r_{max}+r_{min}}{2}$.
Enfin, on peut vérifier que $e = \frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}}$

On va alors établir les deux relations déjà vues sur les trajectoires circulaires et valables pour les trajectoires elliptiques.

Calcul : Énergie mécanique

Aux points P et A, le rayon est minimum/maximum donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est donc égale à l'énergie potentielle effective, ce qui signifie que r_{max} et r_{min} sont solutions de l'équation $E_m = E_{p_{eff}}(r)$ soit $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$E_m r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

polynôme d'ordre 2 qui a deux racines, r_{max} et r_{min}. Or la somme de ces deux racines vaut $r_{max} + r_{min} = -\frac{-K}{E_m} = \frac{K}{E_m}$. De plus, $r_{max} + r_{min} = 2a$, donc en en déduit que $E_m = \frac{K}{2a}$.

Propriété : Relation énergie - demi-grand axe

L'énergie mécanique du point M *parcourant une trajectoire elliptique* est égale à l'énergie potentielle prise à une distance égale à 2 fois le demi grand-axe :

$$E_m = \frac{K}{2a} \qquad \text{(M10.4)}$$

Calcul : Période du mouvement

On peut reécrire l'énergie en A : $\frac{K}{2a} = \frac{mC^2}{a^2(1+e)^2} + \frac{K}{a(1+e)}$ donc $\frac{mC^2}{2a^2(1+e)^2} = \frac{K}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}\right) = \frac{K(e-1)}{2a(1+e)}$ d'où on tire l'expression de la constante des aires : $C = \sqrt{\frac{K(e-1)(1+e)a}{m}} = \sqrt{\frac{-K(1-e^2)a}{m}}$

Or le rayon-vecteur balaye une aire $\frac{C}{2}\Delta t$ en une durée Δt. En une période, il balaye l'ellipse toute entière, dont l'aire vaut (d'après les formulaires de maths) $\mathcal{A} = \pi ab$. Donc $\pi ab = \frac{C}{2}T$ où T est la période du mouvement, soit $\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-K(1-e^2)a}{m}}T$. En élevant au carré et en simplifiant, on trouve $\pi^2 a^3 = -\frac{K}{4m}T^2$ soit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{-K}$.

Dans le cas gravitationnel, $K = -Gm_O m$ donc $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$.

Propriété : Troisième loi de Képler

Pour un point matériel parcourant une trajectoire elliptique dans un potentiel gravitationnel, le rapport entre la période au carré et le demi grand-axe de l'ellipse au cube ne dépend que de la masse de l'objet situé au centre :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O} \qquad \text{(M10.5)}$$

Remarque : Dans le cas du système solaire, on sait que la Terre tourne en 1 an à une distance moyenne du Soleil égale à une unité astronomique : $1\,\text{u.a.} \approx 150 \times 10^6\,\text{km}$. Donc $\frac{4\pi^2}{Gm_{Soleil}} = 1\,\text{an}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}$

Méthode : Démonstration des lois des orbites elliptiques

Les deux lois précédentes – relation énergie / demi grand-axe et troisième loi de Képler – sont à connaître par cœur ; leurs démonstrations ne sont à connaître que dans le cas d'un mouvement circulaire (section M10.C.). Les énoncés demandent souvent la démonstration dans le cas circulaire, puis indiquent : *on admettra que ces relations restent valables dans le cas d'orbites elliptiques.*

M10.E. Application : le système solaire

Le système solaire est composé du Soleil, de 8 planètes en orbite autour de lui, ainsi que d'une multitude d'objets plus petits (astéroïdes, comètes, planètes naines,...). Chacun de ces objets est soumis à l'influence du Soleil principalement, et aussi des autres planètes ; chacun a donc un mouvement approximativement plan et elliptique ou hyperbolique. Ce qu'on constate, c'est que pour les plus gros objets (les planètes), les plans des orbites sont très proche. Le tableau M10.1 indique les caractéristiques principales des planètes, en particulier leur inclinaison par rapport au plan de l'écliptique, qui est le plan de révolution de la Terre autour du Soleil.

FIGURE M10.6 : Les planètes du système solaire (Crédit : NASA).

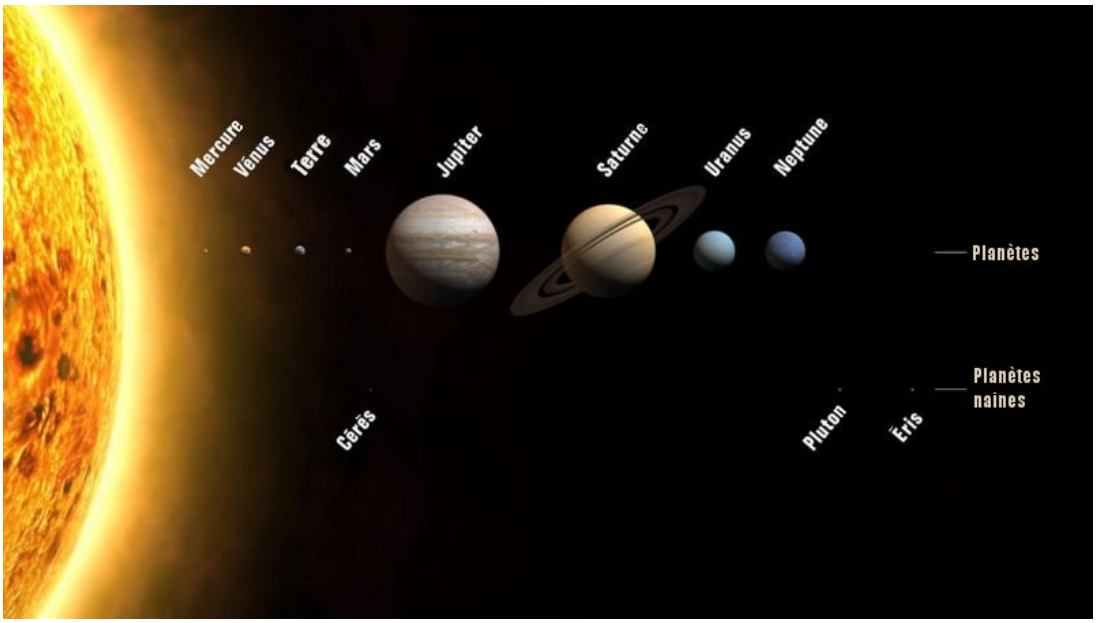
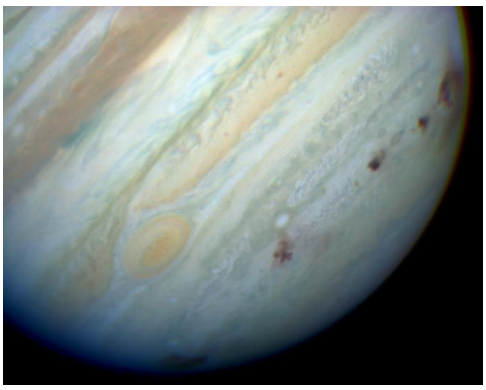


TABLEAU M10.1 : Données concernant les principaux corps du système solaire. L'inclinaison est l'angle entre le plan de révolution de la planète, et celui de la Terre (plan de l'écliptique).

Astre	Masse(10^{24}kg)	Rayon(km)	Demi-grand axe(u.a.)	Excentricité	Inclinaison(°)
Soleil	1 989 100	695 990	-	-	-
Mercure	0,330 22	2439,7	0,387 10	0,2056	7,00
Vénus	4,8690	6052,9	0,723 33	0,0068	3,39
Terre	5,9742	6378,140	1,000 00	0,0167	0,00
Mars	0,641 91	3397	1,523 69	0,0933	1,85
Jupiter	1898,8	71 492	5,202 83	0,048	1,31
Saturne	568,50	60 268	9,538 76	0,056	2,49
Uranus	86,625	25 559	19,191 39	0,046	0,77
Neptune	102,78	24 764	30,061 07	0,010	1,77

Les objets plus légers et aux trajectoires plus excentriques ont plus de chances de passer près d'une planète et d'être déviés. Ainsi, il arrive souvent que les caractéristiques orbitales d'une comète soient modifiées lors de son approche du Soleil. En 1994, la comète Shoemaker-Levy 9 a même été tellement perturbée lors du passage près de Jupiter qu'elle s'est disloquée et s'est écrasée (figure M10.7).

FIGURE M10.7 : Impacts de la comète Shoemaker-Levy 9 sur Jupiter.(Crédit : NASA)



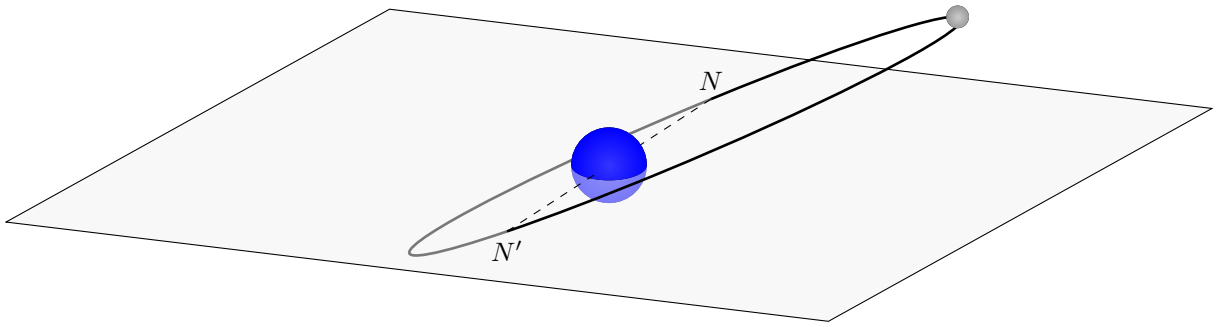
Une autre différence entre la théorie de ce chapitre et le système solaire, c'est que Soleil est en rotation sur lui-même, et est donc aplati aux pôles. N'étant pas exactement sphérique, son potentiel n'est pas exactement newtonien. Cette différence est très faible, et n'est sensible que par la plus proche planète, Mercure, dont la trajectoire n'est pas exactement une ellipse périodique : son périhélie tourne très lentement, de 574,8″ par siècle, à cause de l'aplatissement

du Soleil, ainsi que de l'effet des autres planètes. Cette valeur observée est en désaccord de 43,1″ avec les calculs théoriques les plus poussés. Il faudra attendre la théorie de la relativité générale pour expliquer cet écart.

Autour des planètes gravitent d'autres corps célestes : les satellites. La Terre en a un naturellement, la Lune. La Lune tourne autour de la Terre selon une orbite de demi-grand axe égal à environ 385 000 km, soit un peu plus d'une seconde-lumière, et une excentricité de 0,0549. De plus, le plan de son orbite est incliné d'environ 5° par rapport à l'écliptique. Si ce n'était pas le cas, si elle était dans le plan de l'écliptique, il y aurait une éclipse de Soleil à chaque nouvelle Lune, et une éclipse de Lune à chaque pleine Lune.

On appelle *ligne des nœuds* la droite matérialisant l'intersection de la trajectoire de la Lune avec l'écliptique ; à cause de l'attraction du Soleil et de l'aplatissement de le Terre, cette ligne des nœuds tourne lentement, en 18,6 an dans le référentiel géocentrique — on dit que l'orbite de la Lune précesse (figure M10.8). Cette précession, combinée à la rotation apparente du Soleil dans le référentiel géocentrique, fait que la ligne des nœuds est parfois alignée avec l'axe Terre-Soleil, amenant alors une éclipse de Soleil ou de Lune — ou les deux.

FIGURE M10.8 : Précession de la ligne des nœuds NN' de la Lune (principe simplifié et exagéré).



Autour de la Terre, on trouve désormais également de très nombreux satellites artificiels. Certains ont des propriétés particulières :

— les satellites en orbite basses sont ceux qui volent le plus bas possible ; en pratique, ils tournent vers 300 km d'altitude au minimum, sinon les frottements avec l'atmosphère terrestre sont trop important et les font rapidement tomber. À une telle altitude, ils tournent en environ 1 h30 min autour de la Terre ;

— les satellites en orbite polaire ont un plan de trajectoire orthogonal à l'équateur : ils passent au-dessus des deux pôles. Combiné à la rotation de la Terre, une telle trajectoire permet de couvrir efficacement toutes les parties de la Terre. Ce sont souvent des satellites en orbite basse ;

— à l'opposé, les satellites géostationnaires tournent beaucoup plus lentement : leur période est égale à la période de rotation de la Terre, soit 86 164 s ; leur orbite est circulaire à une altitude d'environ 36 000 km. Ils sont de plus dans le plan de l'équateur. L'avantage de cette position est qu'ils sont toujours au-dessus du même point de la Terre : vus depuis le référentiel terrestre, ils sont immobiles. On y trouve par exemple des satellites météorologiques, ou des satellites de télévision ;

— si on veut couvrir de façon stationnaire un point situé à des latitudes élevées (loin de l'équateur), les orbites géostationnaires ne conviennent pas. On se tourne alors vers les orbites de Molnia : ce sont des orbites très elliptiques (altitude au périgée d'environ 1000 km, et à l'apogée d'environ 40 000 km) et inclinées de 63,4° par rapport au plan de l'équateur. La période de l'orbite est de 12 h. Un tel satellite passe au périgée toujours au-dessus des mêmes points de la Terre (deux points différents chaque jour) ;

— la non sphéricité de la Terre, combinée à l'attraction du Soleil, font que les satellites en orbite inclinée par rapport à l'équateur ont, comme la Lune, une précession de la ligne des nœuds de leur orbite. On peut utiliser un tel effet pour faire tourner la ligne des nœuds en un an. De tels satellites, appelés héliosynchrones, ont la particularité suivante : à chaque fois qu'ils passent au-dessus d'un point donné de la Terre, l'éclairement du Soleil est le même. Cette propriété est utile pour les satellites d'observation, afin de pouvoir comparer des photos prises dans des conditions identiques d'éclairement.

M10.F. Annexe : établissement de l'équation des trajectoires (hors programme)

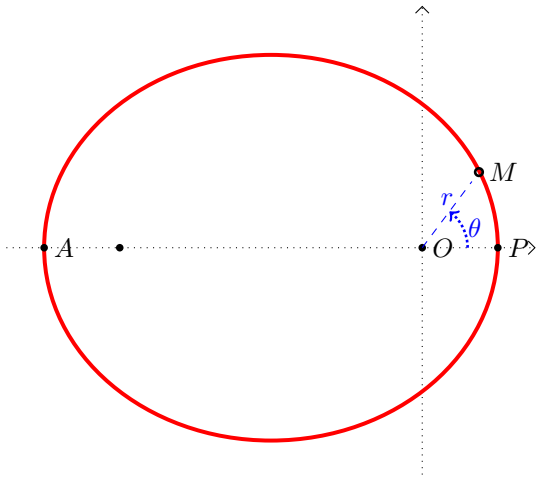
On va établir dans cette section l'équation polaire de la trajectoire et montrer que c'est une conique.

Propriété : Équation polaire d'une conique (admis)

Une conique est définie par l'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

- p est le *paramètre* de la conique
- e est l'*excentricité* de la conique
- θ_0 est l'angle entre le grand-axe et l'axe Ox



Il existe 3 méthodes pour démontrer que la trajectoire d'un point soumis à un potentiel newtonien est une conique :

- par les formules de Binet (cf. exercice du chapitre précédent)
- par le vecteur excentricité
- par le vecteur de Runge-Lenz

Calcul : Établissement de l'équation polaire de la trajectoire par la méthode du vecteur excentricité

Le PFD appliqué au point M donne $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{r(t)^2}\vec{e}_r(t)$. Or $C = r(t)^2\dot{\theta}(t)$ donc $\frac{1}{r(t)^2} = \frac{\dot{\theta}(t)}{C}$. On peut donc écrire $\frac{\mathrm{d}(m\vec{v}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{C}\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)$.
Dans $\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)$, on reconnaît la dérivée de $-\vec{e}_\theta(t)$ par rapport au temps. On peut donc écrire l'équation sous la forme $\frac{\mathrm{d}(m\vec{v}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-\frac{K}{C}\vec{e}_\theta(t))}{\mathrm{d}t}$.
En intégrant, on obtient $m\vec{v}(t) = -\frac{K}{C}\vec{e}_\theta(t) + \overrightarrow{\text{cst}}$. On a l'habitude de poser $\overrightarrow{\text{cst}} = -\frac{K}{C}\vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur constant appelé *vecteur excentricité*. On a donc $m\vec{v}(t) = -\frac{K}{C}(\vec{e} + \vec{e}_\theta(t))$.
On multiplie scalairement cette équation par $\vec{e}_\theta$: $m\vec{v}(t)\cdot\vec{e}_\theta(t) = -\frac{K}{C}(\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta(t) + 1)$. Or $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ donc $\vec{v}(t)\cdot\vec{e}_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t) = \frac{C}{r(t)}$. De plus, $\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta(t) = \|\vec{e}\|\cos(\widehat{\vec{e},\vec{e}_\theta(t)})$ car $\|\vec{e}_\theta\| = 1$. Or $(\widehat{\vec{e},\vec{e}_\theta(t)}) = (\widehat{\vec{e}_x,\vec{e}_\theta(t)}) - (\widehat{\vec{e}_x,\vec{e}}) = \left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) - (\widehat{\vec{e}_x,\vec{e}})$. En posant $\theta_0 = -\frac{\pi}{2} + (\widehat{\vec{e}_x,\vec{e}})$, on a $(\widehat{\vec{e},\vec{e}_\theta(t)}) = \theta(t) - \theta_0$ donc $\vec{e}.\vec{e}_\theta(t) = \|\vec{e}\|\cos(\theta(t) - \theta_0)$.
En mettant toutes ces simplifications ensembles, on trouve $m\frac{C}{r(t)} = -\frac{K}{C}(\|\vec{e}\|\cos(\theta(t) - \theta_0) + 1)$ d'où on tire

$$r(\theta) = \frac{-\frac{mC^2}{K}}{1 + \|\vec{e}\|\cos(\theta - \theta_0)}$$

La norme du vecteur excentricité est donc l'excentricité de la conique, et sa direction indique la direction orthogonale à l'axe de la conique ; le paramètre vaut $-\frac{mC^2}{K}$.

Calcul : Établissement de l'équation polaire de la trajectoire par la méthode du vecteur de Runge-Lenz

Le vecteur de Runge-Lenz est défini par $\vec{A} = \vec{p}\wedge\vec{L} - Km\vec{e}_r$ où $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ est le moment cinétique du point. On va d'abord montrer que ce vecteur est constant (ça ne saute pas aux yeux…). Pour cela, on dérive (on note $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ la force) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{L}(t) + m\overrightarrow{v(t)}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{L}(t)}{\mathrm{d}t} - Km\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t}\\ &= \vec{F}(t)\wedge\vec{L}(t) + \vec{0} - Km\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) \text{ en appliquant le PFD } (1^{er} \text{ terme}) \text{ et le TMC } (2^{eme} \text{ terme})\\ &= \frac{K}{r(t)^2}\vec{e}_r(t)\wedge mr(t)^2\dot{\theta}(t)\vec{e}_z - Km\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\\ &= Km\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - Km\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) = \vec{0}\end{aligned}$$

On multiplie scalairement ce vecteur de Runge-Lenz par $\vec{e}_r$ et on obtient $\vec{A}\cdot\vec{e}_r(t) = \left(m\vec{v}(t)\wedge\vec{L}(t)\right)\cdot\vec{e}_r(t) - Km$.

Pour le terme de gauche : $\vec{A}\cdot\vec{e}_r(t) = \left\|\vec{A}\right\|.\cos(\widehat{\vec{A},\vec{e}_r(t)}) = \left\|\vec{A}\right\|\cos\left(-(\widehat{\vec{e}_x,\vec{A}}) + \theta(t)\right) = \left\|\vec{A}\right\|\cos(\theta(t)-\theta_0)$ en posant $\theta_0 = (\widehat{\vec{e}_x,\vec{A}})$.

À droite : $\left(m\vec{v}(t)\wedge\vec{L}(t)\right)\cdot\vec{e}_r(t) = \left(m\left(\dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right)\wedge mr(t)^2\dot{\theta}(t)\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_r(t) = m^2r(t)^3\dot{\theta}(t)^2$.

On en déduit que $\left\|\vec{A}\right\|\cos(\theta(t)-\theta_0) = m^2r(t)^3\dot{\theta}(t)^2 - Km = m^2r(t)^3\frac{C^2}{r(t)^4} - Km = m^2\frac{C^2}{r(t)} - Km$. On en tire

$$r = \frac{\frac{mC^2}{K}}{1 + \frac{\left\|\vec{A}\right\|}{Km}\cos(\theta-\theta_0)}$$

On trouve une conique avec $e = \frac{\left\|\vec{A}\right\|}{Km}$ et $p = \frac{mC^2}{K}$ si $K > 0$ (sinon il faut changer les signes des deux, car l'excentricité doit toujours être positive).

Enfin, on peut effectuer un dernier calcul. On a expliqué auparavant que :

- pour une trajectoire elliptique, $e < 1$ et $E_m < 0$
- pour une trajectoire parabolique, $e = 1$ et $E_m = 0$
- pour une trajectoire hyperbolique, $e > 1$ et $E_m > 0$

Il semble donc qu'il y a une relation entre énergie mécanique et excentricité. On va l'établir.

Calcul : Relation entre l'énergie mécanique et l'excentricité

On pourrait partir de la relation $E_m = \frac{K}{2a}$; mais cette relation n'est vraie que pour les ellipses !

On a donc $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ comme seule relation générale (les demi grand-axe et demi petit-axe ne sont définis que pour les ellipses). Il est évident que ce rayon est minimal lorsque le cosinus est égal à 1 : $r_{min} = \frac{p}{1+e}$. Or en r_{min}, la dérivée de r par rapport au temps est nulle. Donc $E_m = E_{p,eff}(r_{min}) = \frac{mC^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}} = \frac{mC^2(1+e)^2}{2p^2} + \frac{K(1+e)}{p}$. Or on a montré dans les démonstration précédentes que $p = -\frac{mC^2}{K}$, donc $E_m = \frac{mC^2(1+e)^2K^2}{2m^2C^4} - \frac{K^2(1+e)}{mC^2} = \frac{K^2(1+e)}{mC^2}\left(\frac{1+e}{2} - 1\right) = \frac{K^2(1+e)}{mC^2}\frac{e-1}{2}$ d'où on tire

$$E_m = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2-1)$$

On retrouve donc que E_m est du signe de e^2-1, ce qui est cohérent avec les résultats précédents.

M10. Mouvements képlériens

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites terrestres : satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.	Exprimer ces vitesses et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

M10. Mouvements képlériens

Quelques conseils

- ✎ Ne mélangez pas l'expression de la force, en $\frac{1}{r^2}$, et celle de l'énergie potentielle, en $\frac{1}{r}$.
- ✎ Dans les énoncés, on demande souvent de démontrer la 3ème loi de Képler et la relation énergie-demi grand-axe sur un cercle, puis de les admettre sur une ellipse.
- ✎ Pour un mouvement elliptique, ne confondez pas l'énergie mécanique, constante, égale à $E_p(2a)$, et l'énergie potentielle $E_p(r(t))$ qui varie à chaque instant.
- ✎ Retenez bien l'astuce permettant de calculer numériquement GM_T en fonction de g_0 et R_T, elle sert très souvent.
- ✎ Pour les mouvements elliptiques, il faut savoir relier a, e, r_{min} et r_{max}. Faites un schéma clair en plaçant les grandeurs sur le grand-axe.
- ✎ Pour trouver le rayon minimal ou maximal de la trajectoire, il faut écrire que $\dot{r} = 0$ à ces deux rayons, donc $E_m = E_{p,eff}(r_{min/max})$. On obtient un polynôme de degré 2 qu'on résout.

M10. Mouvements képlériens

QCMs

réponses page 969

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle entre deux masses m et m' à la distance r s'écrit $E_p =$

(a). $\frac{Gmm'}{r^2}$ (b). $\frac{Gmm'}{r}$
(c). $-\frac{Gmm'}{r^2}$ (d). $-\frac{Gmm'}{r}$

Q2. Un mouvement Képlérien est borné si et seulement si :

(a). $E_m < 0$ (b). E_m est constant
(c). le potentiel est attractif (d). $E_m > E_p$

Q3. Pour un mouvement képlérien elliptique :

(a). $E_m = \frac{K}{2a}$ (b). $E_c = \frac{K}{a}$
(c). $E_m = \frac{K}{a}$ (d). $E_p = -\frac{K}{2a}$

Q4. Un mouvement képlérien dans un potentiel attractif est toujours périodique :

(a). Vrai (b). Faux

Q5. L'excentricité d'une ellipse est définie par :

(a). $e = \frac{\text{petit axe}}{\text{grand axe}}$ (b). $e = \frac{c}{a}$
(c). $e = \frac{r_{max}}{r_{min}}$ (d). $e = \frac{\text{distance entre foyers}}{\text{grand axe}}$

✓ QCM : Nature et énergie de la trajectoire ✗

— masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$
— rayon de la Terre : $R_T = 6400\,\text{km}$
— constante de gravitation : $G = 6{,}7 \times 10^{-11}\,\text{USI}$

Dans cet exercice, c'est le signe de E_m qui compte. Si on ne connaît pas la masse de l'objet, on calcule E_m pour 1 kg, ça suffit pour avoir le signe.

Q6. On tire un obus depuis la surface de la Terre avec une vitesse égale à $600\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Sa trajectoire (en oubliant les frottements au départ) est :

(a). hyperbolique (b). elliptique
(c). parabolique

Q7. Une fusée lâche un satellite à 15 000 km du centre de la Terre. Pour que le satellite n'échappe par à l'attraction terrestre, il faut que sa vitesse soit inférieure à

(a). $5200\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (b). aucune limite
(c). $7300\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (d). $53\,000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Q8. En fait, on le lance avec une vitesse égale à $5000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Son orbite sera une ellipse de demi grand-axe :

(a). 15 000 km
(b). 14 100 km
(c). 28 200 km
(d). 19 600 km

Q9. Une sonde spatiale de 900 kg est lâchée à 13 000 km du centre de la Terre avec une vitesse égale à $7000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pour pouvoir s'éloigner indéfiniment de la Terre et explorer d'autres planètes, ses moteurs devront fournir une énergie égale au minimum à :

(a). 6 MJ
(b). 5700 MJ
(c). 22 000 MJ
(d). 27 700 MJ

✓ QCM : Application de la 3ème loi de Képler ✗

Rappel : la Terre tourne autour du Soleil en $T = 1$ an à une distance moyenne $a = 1$ u.a. $= 150 \times 10^6$ km.

Q10. La planète Vénus tourne autour du Soleil en 224,7 j. Son demi grand-axe vaut :

(a). 0,62 u.a.
(b). 0,43 u.a.
(c). 0,72 u.a.
(d). 0,51 u.a.

Q11. Si on suppose sa trajectoire circulaire, sa vitesse vaut :

(a). $210\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
(b). $48{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
(c). $3{,}2\times10^{-2}\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
(d). $14\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$

Q12. La planète Jupiter tourne avec un demi grand-axe égal à 5,20 u.a.. Sa période vaut :

(a). 10,0 an
(b). 14,2 an
(c). 9,9 an
(d). 11,9 an

✓ QCM : Lois des ellipses ✗

Aidez-vous d'un dessin !

Q13. La planète Jupiter tourne avec un demi grand-axe égal à 5,20 u.a.. Son excentricité vaut $e = 0,048$. Sa distance au périhélie vaut :

(a). 3,46 u.a.
(b). 5,45 u.a.
(c). 5,20 u.a.
(d). 4,95 u.a.

Q14. La planète Mars décrit une ellipse de rayon compris entre 1,38 u.a. et 1,67 u.a.. Son demi grand-axe vaut :

(a). 3,04 u.a.
(b). 1,52 u.a.
(c). 1,62 u.a.
(d). 0,29 u.a.

Q15. et la distance entre ses foyers vaut :

(a). 3,04 u.a.
(b). 0,29 u.a.
(c). 1,52 u.a.
(d). 1,62 u.a.

Q16. donc son excentricité vaut :

(a). 0,095
(b). 0
(c). 0,191
(d). 0,034

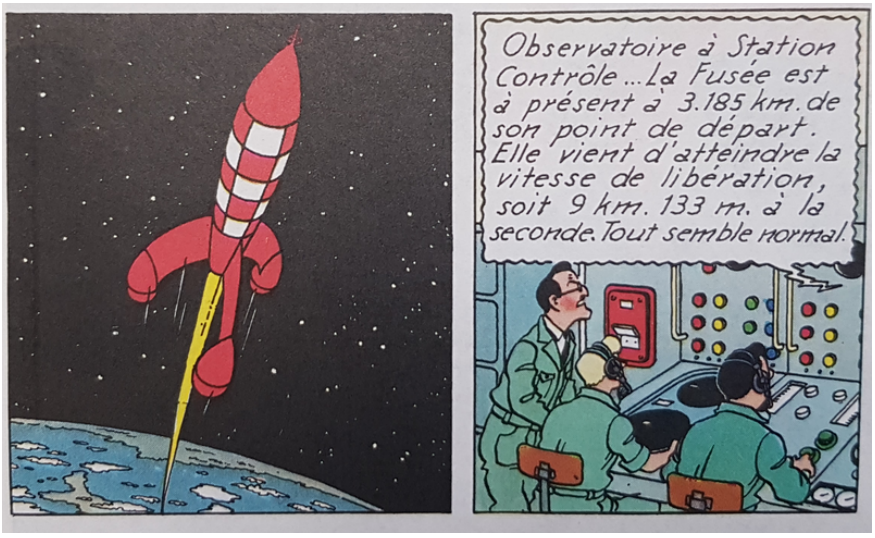
M10. Mouvements képlériens

Exercices

réponses page 970

Exercice M10.1 : Objectif Lune [*]

La vitesse de libération annoncée par l'observatoire de la fusée de Tintin est-elle juste ?



Données : rayon terrestre : $R_T = 6400\,\text{km}$; pesanteur au sol : $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Exercice M10.2 : Trajectoire de la comète de Hale-Bopp [*]

La comète de Hale-Bopp fut la comète la plus visible du XXème siècle. Elle fut découverte le 23 juillet 1995 à une distance de 7,2 u.a. du Soleil. Les caractéristiques de son orbite furent déterminées : orbite elliptique de demi grand-axe $a = 186\,\text{u.a.}$ et d'excentricité $e = 0,995$.
On notera m la masse de la comète, sa valeur est inutile ici. On donne : $1\,\text{u.a.} = 150\times10^6\,\text{km}$, $1\,\text{an} = 365{,}25\,\text{j}$ de $86\,400\,\text{s}$, et $GM_S = 4\pi^2\text{u.a.}^3\cdot\text{an}^{-2}$ avec M_S la masse du Soleil.

1. La comète est passée au périhélie en décembre 1996 ; déterminez la distance au Soleil à ce moment-là, et la date de son prochain passage au périhélie.
2. Quelle était sa vitesse au moment où elle a été découverte ? Et à son passage au périhélie ?
3. Calculez sa distance à l'aphélie, et sa vitesse à ce moment-là.

Exercice M10.3 : Orbite de Molnia [*]

Le satellite Molnia-1 lancé en 1965 a été le premier à utiliser une catégorie d'orbites particulières appelées depuis *orbites de Molnia*. Une telle orbite a une apogée à une altitude $h_A = 40\,000\,\text{km}$ et un périgée à une altitude $h_P = 1000\,\text{km}$.
Le rayon de la Terre vaut $R_T = 6400\,\text{km}$; sa masse vaut $M_T = 6\times10^{24}\,\text{kg}$ et $G = 6{,}7\times10^{-11}\,\text{USI}$.

1. Calculez les rayons r_A et r_P de l'orbite à son apogée et à son périgée.
2. Déduisez-en le demi grand-axe a puis la période T de l'orbite.
3. Calculez le paramètre c de l'ellipse, puis l'excentricité e.
4. Calculez l'énergie mécanique du satellite, sachant que sa masse vaut $m = 1650\,\text{kg}$.
5. Calculez les vitesses v_A et v_P du satellite à l'apogée et au périgée.

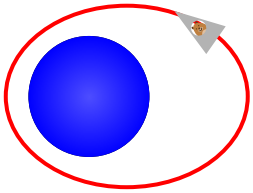
Exercice M10.4 : Caractéristiques de la trajectoire d'un satellite [*]

Spoutnik, le premier satellite artificiel, avait une apogée à une altitude au-dessus du sol $h_A = 330\,\text{km}$, et un périgée à $h_P = 180\,\text{km}$.

1. Le rayon terrestre vaut $R_T = 6370\,\text{km}$; en déduire les distance minimale r_{min} et r_{max} entre le satellite et le centre de la Terre au cours de son orbite.
2. Déterminez les caractéristiques géométriques de sa trajectoire (a et e).
3. Calculez sa période connaissant le champ de gravitation $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ à l'altitude nulle.

Exercice M10.5 : Le vol de Laïka [**]

La chienne Laïka est le premier être vivant a avoir volé en orbite autour de la Terre, le 3 novembre 1957, dans un satellite Spoutnik-2. Le satellite, de masse $m = 508\,\text{kg}$, a été amené par une fusée jusqu'à son point de lancement, à une altitude $h_0 = 240\,\text{km}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 8130\vec{e}_\theta + 220\vec{e}_r$ en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Données : rayon terrestre $R_T = 6400\,\text{km}$; pesanteur au sol : $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1. À partir des CI, calculez numériquement l'énergie mécanique E_m et la constante des aires C du satellite.
   Remarque : gardez beaucoup de chiffres significatifs en mémoire dans votre calculatrice.
2. Que vaut $\dot{r}$ à l'apogée/périgée ? En déduire une équation d'ordre 2 vérifiée par r en ces deux points. Résoudre cette équation, et déduisez-en les altitudes de Laïka à l'apogée et au périgée.
3. Calculez la période de révolution de Laïka.

Exercice M10.6 : Comète de Halley [**]

La comète de Halley décrit une ellipse autour du Soleil, de période $T = 76{,}0\,\text{an}$. La distance au périhélie est $r_0 = 0{,}59\,\text{u.a.}$.

1. À l'aide de la troisième loi de Képler, calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e.
2. Calculez la vitesse minimale et la vitesse maximale de la comète sur son orbite, dans le référentiel de Copernic.

On donne : $1\,\text{u.a.} = 150\times10^6\,\text{km}$ et $1\,\text{an} = 365{,}25\,\text{j}$ de $86\,400\,\text{s}$.

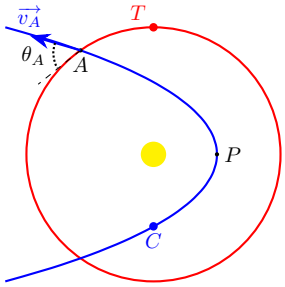
Exercice M10.7 : Lancement manqué d'un satellite [**]

On souhaite lancer un satellite de masse m sur une orbite circulaire autour de la Terre, d'altitude $h_0 = 2100\,\text{km}$.
Données : rayon terrestre $R_T = 6400\,\text{km}$; pesanteur au sol $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Exprimez et calculez la vitesse v_0 qu'il doit avoir sur son orbite.
2. Le lancement est manqué : on le dépose bien à l'altitude h_0 avec une vitesse $\vec{v} = (1-\varepsilon)v_0\vec{e}_\theta$ avec $\varepsilon \ll 1$. Déterminez les caractéristiques de la trajectoire : h_{min}, h_{max}, a et e ; AN pour $\varepsilon = 1\,\%$.
   Indication : commencez par exprimer la constante des aires C et l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de $mg_0R_T^2$, $R_T + h_0$ et $1-\varepsilon$.

Exercice M10.8 : Trajectoire d'une comète au voisinage de la Terre [**]

La Terre tourne autour du Soleil ; on considérera qu'elle décrit un cercle de rayon $R_0 = 1\,\text{u.a.}$ en $T_0 = 1\,\text{an}$, à une vitesse V_0. Un jour, une comète approche du Soleil. À son périhélie, elle se trouve à une distance $r_P = \frac{R_0}{2}$ et possède une vitesse $v_P = 1,8V_0$.



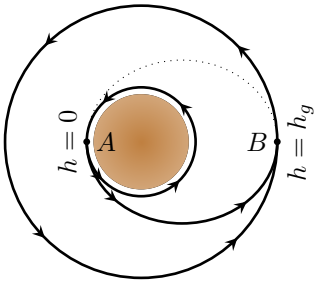
1. Reliez V_0 à R_0 et aux constantes.
2. Exprimez l'énergie mécanique de la comète, et étudiez son signe. Quel est le type de trajectoire ?
3. On note A le point où la trajectoire de la comète va couper celle de la Terre. Soit v_A la vitesse de la comète en A, et θ_A l'angle entre les 2 trajectoires.
   À l'aide de deux lois de conservation, exprimez v_A puis $v_A \cos\theta_A$. Calculez alors θ_A.

Exercice M10.9 : Lancement d'un satellite [**]

Toute l'étude est faite dans le référentiel géocentrique qui est supposé galiléen.
Données : rayon terrestre : $R_T = 6400\,\text{km}$; pesanteur au niveau du sol : $g_0 = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. **Questions préliminaires**
   (a) Rappeler la relation entre $G.M_T$, g_0 et R_T où M_T est la masse de la Terre.
   (b) Exprimez la vitesse v, l'énergie mécanique E_m et la période T d'un satellite terrestre de masse m en orbite **circulaire** à l'**altitude** h, en fonction de g_0, R_T et h.
   Indication : à l'altitude h, que vaut la distance entre le satellite et le centre de la Terre ?
   (c) Trouvez le rayon puis l'altitude h_g d'un satellite géostationnaire (qui tourne avec la même période que la Terre), ainsi que sa vitesse v_g dans le référentiel géocentrique.
   Indication : la Terre tourne sur elle-même en 1 jour sidéral, soit 86 164 s.
2. **Lancement du satellite**

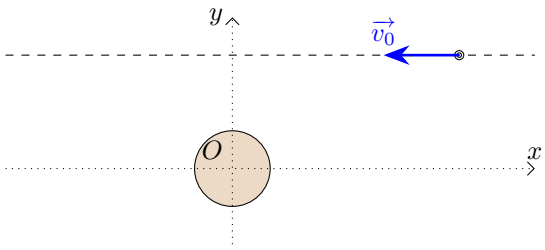
   Le lancement d'un satellite en orbite géostationnaire se fait en plusieurs étapes.
   D'abord, on place le satellite, de masse $m = 1\,\text{t}$, en orbite circulaire basse ($h \approx 0$, vitesse v_1), puis on lui communique brutalement un supplément de vitesse ; sa nouvelle vitesse est alors v_1'. Il parcours alors la moitié d'une ellipse qui est à la fois tangente extérieurement à sa trajectoire de départ et tangente intérieurement à la trajectoire géostationnaire.



   (a) Calculez la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse, et son énergie mécanique E_1.
   (b) À partir de la figure, évaluez le demi grand-axe de l'ellipse parcourue (orbite de transfert). Déduisez-en l'énergie mécanique du satellite sur cette trajectoire ainsi que durée du transfert entre les deux orbites (entre A et B).
   (c) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, calculez le travail W_A fourni au satellite pour le faire passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
   (d) Calculez numériquement la vitesse v_2 du satellite sur la trajectoire de transfert au point A.
   Calculez de même sa vitesse v_2' sur l'orbite de transfert lorsqu'il atteint le point B.
   Indication : utilisez la conservation du moment cinétique ou celle de l'énergie mécanique.
   (e) On lui communique alors une nouvelle accélération, et il passe sur l'orbite géostationnaire. Calculez le travail W_B nécessaire pour cette étape.

Exercice M10.10 : Trajectoire d'un astéroïde [***]

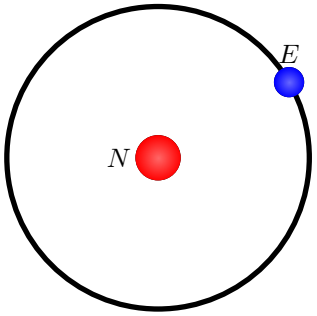
Un astéroïde de masse m inconnue arrive en direction de la Terre de rayon R_T. Alors qu'il est encore loin, il est à une position $\overrightarrow{OM}(0) = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y$ avec une vitesse $-v_0\vec{e}_x$.



1. Exprimez l'énergie mécanique de l'astéroïde si on suppose qu'il est initialement très loin de la Terre ($x_0 \approx \infty$). Qu'en déduire quant à sa trajectoire ?
2. Exprimez la constante des aires C de l'astéroïde.
3. Établir l'équation permettant de trouver la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport à la Terre. Donner l'expression de sa racine positive.
4. Montrez que l'astéroïde va éviter la Terre à condition que $v_0 > \frac{v_l}{\sqrt{(y_0/R_T)^2-1}}$ où $v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ est la vitesse de libération de la Terre.
   AN de cette vitesse limite, sachant que $v_l = 11{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, pour $y_0 = 10R_T$.

Exercice M10.11 : Modèle planétaire de l'atome [**]

Après son expérience de bombardement d'une feuille d'or par des particules α, Rutherford a proposé un modèle dit « planétaire » de l'atome d'hydrogène, dans lequel un électron E de masse $m = 9{,}1\times10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6\times10^{-19}$ C tourne autour d'un noyau N immobile et de charge $+e$.
On donne $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ USI.



1. Rappeler l'expression de la force de N sur E.
2. Montrez que le mouvement est plan.
3. On suppose que l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon r. Exprimez en fonction de r et des constantes :
   - la vitesse angulaire $\dot\theta$
   - la vitesse v
   - l'énergie mécanique E_m
   - le moment cinétique L
4. La théorie classique de l'électromagnétisme indique que l'électron en rotation va perdre de l'énergie en émettant de la lumière. La puissance rayonnée vaut $\mathcal{P} = \frac{\dot\theta^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$
   (a) Exprimez $\mathcal{P}$ en fonction de r et des constantes. Quel va être l'effet de cette perte d'énergie sur la trajectoire de l'électron ?
   (b) On suppose donc que la trajectoire de l'électron est quasiment un cercle, mais que son rayon $r(t)$ varie très lentement.
   En appliquant le TEM, montrez que le rayon du cercle obéit à une loi de la forme $r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -A$ où A est une constante à exprimer.
   (c) On suppose que $r(0) = 1\times10^{-10}$ m ; les calculs numériques donnent $A = 1{,}60\times10^{-21}$ USI. Établir la loi $r(t)$ et calculez le temps que met l'électron à s'écraser sur le noyau. Commentez.
5. Pour concilier ce modèle avec l'existence des atomes, Niels Bohr a fait en 1913 un postulat qui a fondé la mécanique quantique : certaines orbites sont stables de manière inexpliquées pour le moment. Les orbites stables sont celles dont le moment cinétique est un multiple entier de $\hbar = 1{,}05\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$, c'est-à-dire $L = n.\hbar$.
   (a) Montrez que le rayon de l'état n s'écrit $r_n = n^2 r_1$ avec r_1 à exprimer ; on en fera son AN.
   (b) Montrez que l'énergie mécanique de l'état n s'écrit $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ avec E_1 à exprimer ; on en fera l'AN.

Exercice M10.12 : Effets des frottements sur un satellite [***]

Dans le référentiel géocentrique, un satellite de masse m décrit une orbite quasiment circulaire. Mais sous l'action de l'atmosphère, très raréfiée à son altitude, il subit une force de frottements.
Cette force est très faible dans la pratique. On va donc faire l'approximation suivante : sur une échelle de temps de l'ordre de quelques périodes, son mouvement est toujours circulaire uniforme, comme en l'absence de frottements ; mais sur une échelle de temps longue, le rayon r de sa trajectoire varie lentement.
On note M_T la masse de la Terre.

1. Sur un tour, on néglige donc les frottements. Retrouvez rapidement l'expression de la vitesse et de la période du satellite en fonction de r. Retrouvez aussi l'expression de son énergie mécanique E_m.
2. On modélise la force de frottements par une force proportionnelle à la vitesse et opposée : $-\alpha\vec{v}$. Calculez le travail de la force de frottements au cours d'un tour, en fonction de r.
3. Comme r varie lentement, E_m varie aussi très peu sur une période. Par conséquent, on peut effectuer l'approximation suivante : la perte d'énergie mécanique sur une période est égale à $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}T$ (il s'agit d'une linéarisation de E_m sur une durée T : $E_m(t+T) = E_m(t) + \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}T$).
   En appliquant le théorème de l'énergie mécanique sur une durée d'une période, trouvez l'équation différentielle vérifiée par r. Faites-y apparaître une constante τ ayant la dimension d'un temps.
   AN : Calculez τ pour $m = 1\,\mathrm{t}$ et $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ USI.
4. Résolvez l'ED (en fonction de $r(0)$).
   Déduisez-en l'évolution de E_m au cours du temps, puis celle de v. Ce dernier résultat est-il paradoxal ?

M10. Mouvements képlériens

TDs numériques

réponses page 974

TD numérique : Mouvements astronomiques

ad. EDO

ad. plot(3D)

L'étude du mouvement d'une planète dans un champ de force centrale est simple mais limité ; dès que le modèle se complique un peu, il faut s'atteler à écrire le modèle complet en 3D et à le résoudre.
On rappelle que la force d'un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) de masse m_A sur un point B de coordonnées (x_B, y_B, z_B) de masse m_B s'écrit $\vec{f}_{A\to B} = -\frac{Gm_Am_B}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\vec{u}_{AB}$. En remarquant que $\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$, on obtient

$$\vec{f}_{A\to B} = -\frac{Gm_Am_B}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^3}\overrightarrow{AB} = -\frac{Gm_Am_B}{((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2)^{3/2}}\left((x_B-x_A)\vec{e}_x+(y_B-y_A)\vec{e}_y+(z_B-z_A)\vec{e}_z\right) \quad (1)$$

Dans tout ce TD on travaillera avec comme unités : l'unité astronomique (u.a.) pour les distance, les années (an) pour les durées et les unités de masses solaires ($M_\odot$) pour les masses. Dans ce système d'unités, $G = 4\pi^2 \text{u.a.}^3 \cdot \text{an}^{-2} \cdot {M_\odot}^{-1}$

1. Écrivez une fonction `force(xA,yA,zA,mA,xB,yB,zB,mB)` qui renvoie la liste des trois composantes de la force de A sur B.
2. On considère la planète Mars, de masse $m_M = 3{,}2\times10^{-7}\,M_\odot$, qui tourne autour du Soleil à la distance moyenne $a_M = 1{,}52$ u.a..
   Calculez, à l'aide de la troisième loi de Képler, la période de sa révolution T_M, puis sa vitesse moyenne v_M sur son orbite.
3. En utilisant la fonction `force` précédente, résolvez par `odeint`, le mouvement de Mars sur une durée de 5 périodes, avec comme conditions initiales : $\overrightarrow{SM}(0) = a_M\vec{e}_x$ et $\vec{v}(0) = v_M\vec{e}_y$. Vérifiez que z reste nul ; tracez la trajectoire dans le plan xy et vérifiez qu'elle est quasiment circulaire (utilisez `plt.axis('equal')` pour avoir une figure orthonormée).
   Rappel : pour récupérer les trois composantes de la force, écrivez `fx,fy,fz=force(...)`
4. **Comète Hale-Bopp**
   La comète Hale-Bopp (masse $6{,}6\times10^{-15}\,M_\odot$) a une trajectoire fortement elliptique. À son aphélie, elle se trouve à 371 u.a. du soleil avec une vitesse égale à 24×10^{-3} u.a. $\cdot\,\text{an}^{-1}$. Simulez sa trajectoire sur 5000 an.
5. **Précession de la Lune**
   La Lune a un mouvement plus compliqué car elle est soumise à l'attraction de la Terre et du Soleil. On propose la modélisation suivante :
   - le Soleil est toujours immobile au centre du repère (référentiel héliocentrique)
   - la Terre (masse $3\times10^{-6}\,M_\odot$) tourne selon un mouvement circulaire repéré par les coordonnées
     $\begin{cases} x_T = a_T\cos(\omega_T t) \\ y_T = a_T\sin(\omega_T t) \\ z_T = 0 \end{cases}$ avec a_T et ω_T à connaître
   - la Lune de masse $3{,}8\times10^{-8}\,M_\odot$ est soumise à l'attraction de ces deux astres ; on prendra comme point de départ la nouvelle lune avec les données : $x(0) = 0{,}9973$ u.a. (Lune à l'apogée) et comme vitesse initiale $\vec{v}(0) = 6{,}08\vec{e}_y + 0{,}02\vec{e}_z$ en u.a. $\cdot\,\text{an}^{-1}$ (valeur compliquée à trouver, il faut ajouter la vitesse de la Lune autour de la Terre à celle de la Terre autour du Soleil ; de plus la vitesse selon z n'est pas nulle).

   Simulez le mouvement de la Lune, soumise à l'attraction du Soleil et de la Terre, sur une durée de 6 mois pour commencer. Tracez la trajectoire dans le plan xy ; vous devez voir essentiellement un demi-cercle (celui décrit par la Terre) légèrement modifié.
6. Calculez les tableaux donnant $x' = x_{Lune} - x_{Terre}$, $y' = x_{Lune} - y_{Terre}$ et $z' = z_{Lune} - z_{Terre}$, c'est-à-dire les coordonnées le référentiel géocentrique. Tracez alors la trajectoire dans le plan $x'y'$.
   Pour mieux voir ce qui se passe, tracez en 3D à l'aide du programme :

```
fig=plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.plot(tab_xp,tab_yp,tab_zp)
plt.show()
```

et essayez d'observer la précession de la Lune (rotation de l'axe de révolution, comme une toupie).

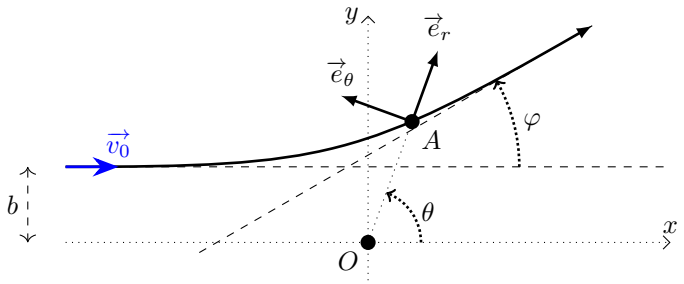
7. La planète Képler-16B, surnommée « Tatooine », tourne autour d'une étoile double. Vous pouvez essayer de simuler sa trajectoire avec les données suivantes :
   - une première étoile de masse $m_1 = 0{,}69\,M_\odot$ tourne autour du centre du système avec un rayon $r_1 = 0{,}05$ u.a. en $T = 41$ j (à convertir en années)
   - une seconde étoile de masse $m_2 = 0{,}203\,M_\odot$ tourne autour du centre du système avec un rayon $r_2 = 0{,}17$ u.a. en $T = 41$ j (pensez au départ à la mettre du côté opposé à la première étoile)
   - une planète de masse $m_T = 3{,}3 \times 10^{-4}\,M_\odot$ tourne autour de l'ensemble avec un demi-grand axe moyen $a_T = 0{,}705$ u.a. et une période moyenne T_T donnée par la troisième loi de Képler.

   en supposant le mouvement plan, une distance initiale égale à a_T et une vitesse initiale égale à la vitesse moyenne de la planète sur son orbite. Observez en zoomant que la perturbation de la trajectoire dû à la présence de 2 étoiles est très faible.

TD numérique : Expérience de Rutherford

.py EDO

L'expérience de Rutherford réalisée en 1909 a permis de préciser le modèle de l'atome, car elle a montré qu'un atome est constitué essentiellement de vide. Rutherford a bombardé une mince feuille d'or avec des particules α, c'est-à-dire des noyaux d'hélium issus de désintégrations radioactives, de masse $m_\alpha = 6{,}8 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q_\alpha = +2.e$ avec $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
On suppose que le noyau d'un atome d'or est quasiment ponctuel (point O), immobile (car très lourd par rapport à une particule α) et chargé avec une charge $Z.e$ où $Z = 79$ est le numéro atomique de l'or. La particule α (repérée par le point A) arrive de l'infini avec une vitesse v_0 selon $\vec{e}_x$; le prolongement de sa trajectoire (si elle allait tout droit et n'était pas repoussée par le noyau d'or) passe à une distance b du point O, appelée paramètre d'impact. Mais en réalité la trajectoire de A va être modifiée, et elle va passer à une distance supérieure à b.



Dans ce TD, on va simuler la trajectoire de la particule en fonction du paramètre b. Pour cette simulation, les coordonnées cylindriques sont inadaptées à cause de la forme particulière des conditions initiales. On va donc repérer le point par $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans le plan. On rappelle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI.

1. Les particules α arrivent avec une énergie cinétique $E_{c0} = 5$ MeV. Calculez la vitesse v_0 dans l'hypothèse non-relativiste ; commentez.
2. Comment s'écrit la force du noyau sur la particule α, en coordonnées polaires puis cartésiennes ?
3. En déduire les expressions de $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$.
4. À l'aide d'une méthode numérique, tracez la trajectoire de la particule avec les conditions suivantes : $b = 4r_0$ où $r_0 = 200^{1/3} \times 1{,}4$ fm est le rayon du noyau ; $x(0) = -15r_0$; temps de simulation $2\frac{|x(0)|}{v_0}$.
5. Soit $\vec{v}_\infty$ la vitesse de la particule longtemps après être passée près du noyau. On pose $\vec{v}_\infty = v_{x\infty}\vec{e}_x + v_{y\infty}\vec{e}_y$. Reliez théoriquement φ à $v_{x\infty}$ et $v_{y\infty}$.
   Affichez alors l'angle φ à la fin de la simulation. On rappelle que le dernier élément d'un tableau s'obtient en Python avec l'indice -1.
6. Pour 50 paramètres d'impacts b compris entre $r_0/10$ et $10r_0$, simulez la trajectoire de la particule, puis :
   - calculez le rayon minimal d'approche r_{min} de la particule (à l'aide de `numpy.min`), et stockez-la dans un tableau
   - calculez l'angle de déviation φ, et stockez-le dans un autre tableau.

Tracez alors $r_{min}(b)$ et $\varphi(b)$. Commentez.

7. Pour déterminer le rayon du noyau, Rutherford a observé le nombre de particules α déviées pour différents angles, et leur répartition.

   Modifiez le programme pour avoir 2500 valeurs de b. Utilisez alors la fonction `plt.hist` pour tracer l'histogramme des valeurs de φ.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(d)
Q2.(a)
Q3.(a)
Q4.(b)
Q5.(b) ET (d)

Réponses au QCM : Nature et énergie de la trajectoire

Q6.(b)
L'énergie mécanique pour 1 kg vaut $\frac{1}{2}\left(\frac{600}{3,6}\right)^2 - \frac{6,7\times10^{-11}\times6,0\times10^{24}}{6400000} = -63\,\text{MJ} < 0$.
Q7.(c)
Il faut que $\frac{1}{2}v^2 - \frac{6,7\times10^{-11}\times6,0\times10^{23}}{15000000} < 0$.
Q8.(b)
$\frac{1}{2}5000^2 - \frac{6,7\times10^{-11}\times6,0\times10^{23}}{15000000} = \frac{6,7\times10^{-11}\times6,0\times10^{23}}{2a}$
Q9.(b)
L'opposé de son énergie mécanique initiale.

Réponses au QCM : Application de la 3ème loi de Képler

Q10.(c)
Q11.(b)
$v = \frac{2\pi a}{T}$
Q12.(d)

Réponses au QCM : Lois des ellipses

Q13.(d)
$r_{min} = a(1-e)$.
Q14.(b)
$a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2}$
Q15.(b)
$2c = r_{max} - r_{min}$.
Q16.(a)
$e = \frac{c}{a}$

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M10.1 : Objectif Lune [*]

À l'altitude h, la fusée de masse m a une énergie mécanique $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R_T+h} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg_0R_T^2}{R_T+h}$. Pour que la fusée s'échappe de la Terre, l'énergie mécanique doit être positive, donc $v > \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T+h}} =< 9150\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La différence peut provenir du rayon terrestre, car la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

Corrigé de l'exercice M10.2 : Trajectoire de la comète de Hale-Bopp [*]

1. $r_{min} = a(1-e)$ (faire un dessin) donc $r_{min} = 0{,}93\,\mathrm{u.a.}$
   Par la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3} = 1\,\mathrm{an^2\cdot u.a.^{-3}}$ donc T=2536 ans et 8 mois environ, donc prochain rendez-vous en août 4533.
2. $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Sm}{r} = -\frac{GM_Sm}{2a}$ donc $v = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 3{,}27\,\mathrm{u.a.\cdot an^{-1}} = 16{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
   Par le même calcul au périhélie à une distance de 0,93 u.a. on trouve $v = 9{,}2\,\mathrm{u.a.\cdot an^{-1}} = 45{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
3. $r_{max} = a(1+e) = 371$ u.a. et $v = 0{,}11\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M10.3 : Orbite de Molnia [*]

1. $r_P = 7400\,\mathrm{km}$ et $r_A = 46\,400\,\mathrm{km}$
2. $a = \frac{r_A+r_P}{2} = 26\,900\,\mathrm{km}$ donc $T = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{GM_T}} = 43\,800\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{h}10\,\mathrm{min}$
3. $c = \frac{r_A-r_P}{2} = 19\,500\,\mathrm{km}$ (dont on peut déduire $b = \sqrt{a^2-c^2} = 18\,500\,\mathrm{km}$) et $e = \frac{c}{a} = 0{,}725$
4. $E_m = -\frac{GM_Tm}{2a} = -12{,}3\,\mathrm{GJ}$
5. À l'apogée : $\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_Tm}{r_A} = E_m$ d'où on tire $v_A = 1{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
   De même $v_P = 9{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice M10.4 : Caractéristiques de la trajectoire d'un satellite [*]

1. $r_{min} = R_T + h_P = 6550\,\mathrm{km}$ et $r_{max} = R_T + h_A = 6700\,\mathrm{km}$
2. Il est conseillé de refaire un schéma de l'ellipse et de ses longueurs particulières : a, c, r_{min} et r_{max}
   On a $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2} = 6625\,\mathrm{km}$. De plus, $r_{max} = a(1+e)$ d'où on tire $e = 0{,}011$.
3. La loi de la gravitation au sol donne $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$.
   Or on a la troisième loi de Képler : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{g_0R_T^2}{4\pi^2}$, donc $T = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{g_0R_T^2}} = 5400\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}30\,\mathrm{min}$

Corrigé de l'exercice M10.5 : Le vol de Laïka [**]

1. Au départ, $r = 6640\,\mathrm{km}$ d'où on tire $E_m = \frac{1}{2}m\left(8130^2 + 220^2\right) - \frac{mg_0R_T^2}{r} = -13{,}9\,\mathrm{GJ}$ et $C = r \times 8130 = 54\times10^9\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$
2. Au périgée ou à l'apogée, $\dot{r} = 0$ soit par la formule de l'énergie potentielle effective : $E_m = -\frac{g_0R_T^2}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}$; on en tire l'équation $E_mr^2 + g_0R_T^2mr - \frac{mC^2}{2} = 0$ qui a pour racines $r_A = 8048\,\mathrm{km}$ (altitude 1648 km) et $r_P = 6612\,\mathrm{km}$ (altitude 212 km).
3. Troisième loi de Képler : $T = 6223\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}44\,\mathrm{min}$

Corrigé de l'exercice M10.6 : Comète de Halley [**]

1. La troisième loi de Képler fournit $a^3 = T^2\frac{GM_s}{4\pi^2}$; or $\frac{GM_s}{4\pi^2} = 1\,\mathrm{u.a.^3\cdot an^{-2}}$. Donc $a = 76^{2/3} = 17{,}96\,\mathrm{u.a.} = 2{,}69\times10^{12}\,\mathrm{m}$. Or $r_0 = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$ donc $e = 1 - \frac{r_0}{a} = 0{,}967$.

2. L'énergie mécanique est conservée. La vitesse est minimale lorsque l'énergie cinétique est minimale, donc lorsque l'énergie potentielle est maximale, donc à l'aphélie. On a donc l'égalité $\frac{1}{2}mv_{min}^2 - \frac{GM_Sm}{r_{max}} = -\frac{GM_Sm}{2a}$ avec $r_{max} = a(1+e)$. Après quelques calculs, on trouve $v_{min} = \sqrt{\frac{GM_S}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(1-0,97)}{17,9(1+0,97)}} = 0{,}18\,\text{u.a.}\cdot\text{an}^{-1} = 910\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
   De même, $v_{max} = \sqrt{\frac{GM_S}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(1+0,97)}{17,9(1-0,97)}} = 145\,\text{u.a.}\cdot\text{an}^{-1} = 54\,400\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigé de l'exercice M10.7 : Lancement manqué d'un satellite [**]

1. Calcul vu en cours : par le PFD on trouve $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h_0}} = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R_T+h_0}} = 6872\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
2. $C = \|(R_T+h_0)\vec{e}_r(0) \wedge (1-\varepsilon)v_0\vec{e}_\theta(0)\| = (1-\varepsilon)v_0(R_T+h_0) = (1-\varepsilon)\sqrt{g_0R_T^2(R_T+h_0)}$ et $E_m = \frac{1}{2}m((1-\varepsilon)v_0)^2 - \frac{mg_0R_T^2}{R_T+h_0} = \frac{mg_0R_T^2}{R_T+h_0}\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - 1\right)$.
   On sait aussi que $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mg_0R_T^2}{r}$. Au périgée et à l'apogée, $\dot{r} = 0$. On résout donc
   $$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow E_m r^2 + mg_0R_T^2 r - \frac{mC^2}{2} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{mg_0R_T^2}{R_T+h_0}\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - 1\right)r^2 + mg_0R_T^2 r - \frac{(1-\varepsilon)^2mg_0R_T^2(R_T+h_0)}{2} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{R_T+h_0}\right)^2 + \frac{r}{R_T+h_0} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{r}{R_T+h_0} = \frac{-1 \pm \left(1-(1-\varepsilon)^2\right)}{(1-\varepsilon)^2-2} \text{ car } \Delta = 1 - 4\times\left(-\frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\right)\times\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - 1\right) = \left(1-(1-\varepsilon)^2\right)^2$$
   On a donc $\begin{cases} h_{min} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-(1-\varepsilon)^2}(R_T+h_0) - R_T = 1768\,\text{km} \\ h_{max} = \frac{2-(1-\varepsilon)^2}{2-(1-\varepsilon)^2}(R_T+h_0) - R_T = h_0 = 2100\,\text{km} \\ a = \frac{R_T+h_{min}+R_T+h_{max}}{2} = \frac{R_T+h_0}{2-(1-\varepsilon)^2} = 8334\,\text{km} \\ e = \frac{h_{max}-h_{min}}{2a} = 1-(1-\varepsilon)^2) = 2\,\% \end{cases}$

Corrigé de l'exercice M10.8 : Trajectoire d'une comète au voisinage de la Terre [**]

1. $\frac{1}{2}M_TV_0^2 - \frac{GM_SM_T}{R_0} = -\frac{GM_SM_T}{2R_0}$ donc $V_0^2 = \frac{GM_S}{R_0}$
2. $E_m = \frac{1}{2}M_C1,8^2V_0^2 - \frac{2GM_SM_C}{R_0} = \frac{GM_SM_C}{R_0}\left[\frac{1,8^2}{2} - 2\right] = -0,38\frac{GM_SM_C}{R_0} < 0$ donc la trajectoire est une ellipse.
3. Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM_S}{R_0} = \frac{1}{2}1,8^2V_0^2 - \frac{2GM_S}{R_0}$ donc après quelques calculs $v_A = V_0\sqrt{1,8^2-2} = 1,1V_0$
   Par conservation du moment cinétique : $\frac{R_0}{2}\times 1,8V_0 = R_0\times V_A\cos\theta_A$ donc $V_A\cos\theta_A = 0,9V_0$.
   On en déduit que $\cos\theta_A = 0,8$ donc $\theta_A = 37°$

Corrigé de l'exercice M10.9 : Lancement d'un satellite [**]

1. **Questions préliminaires**
   (a) La force gravitationnelle au niveau du sol a pour norme $\frac{GM_Tm}{R_T^2}$ et aussi mg_0 donc $GM_T = g_0R_T^2$
   (b) Méthode vue en cours. Pour une orbite circulaire de rayon R_T+h, l'étude cinématique fournit $\vec{v} = (R_T+h)\,\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = (R_T+h)\left[-\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t) + \ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right]$.
   Le PFD s'écrit alors $m\,(R_T+h)\left[-\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t) + \ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)\right] = -\frac{GM_Tm}{(R_T+h)^2}\vec{e}_r(t)$ ce qui donne après projection sur $\vec{e}_r$ la relation $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)^3}} = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{(R_T+h)^3}}$
   On en déduit que :
   — la vitesse vaut $v = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R_T+h}}$

— l'énergie mécanique vaut $E = \frac{1}{2}m\frac{g_0R_T^2}{R_T+h)} - \frac{g_0R_T^2m}{R_T+h} = -\frac{mg_0R_T^2}{2(R_T+h)}$

— la période vaut $T = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0R_T^2}}$

(c) On part de l'expression $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0R_T^2}}$ qu'on inverse : $h_g = \sqrt[3]{g_0R_T^2\frac{T^2}{4\pi^2}} - R_T$. Pour $T = 86\,164\,\text{s}$ on trouve $h_g = 35\,900\,\text{km}$ (ou $R_T + h = 42\,300\,\text{km}$)
À cette altitude on trouve $v_g = 3100\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

2. **Lancement du satellite**

(a) On trouve $v_1 = 7900\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $E_1 = -31{,}4\,\text{GJ}$ avec les formules précédentes.

(b) En travaillant sur le schéma avec le grand axe, on trouve que $2a = h_g + 2.R_T$ soit $a = 24\,300\,\text{km}$. On en déduit que l'énergie mécanique vaut $E_2 = -8{,}2\,\text{GJ}$. De plus la période vaut $T = 37\,600\,\text{s} = 10\,\text{h}25\,\text{min}$ donc le transfert, qui ne fait que la moitié de l'orbite, dure 5 h12 min

(c) Par le TEM : $E_2 - E_1 = W_A$ (la force du moteur n'est pas conservative) donc $W_A = 23{,}2\,\text{GJ}$

(d) En A, on connaît son énergie mécanique $E_m = -\frac{g_0R_T^2m}{2a}$ et son énergie potentielle $-\frac{g_0R_T^2m}{R_T}$ (car l'altitude du satellite vaut encore R_T) donc on en déduit $E_c(A) = 54{,}5\,\text{GJ}$ puis $v_2 = 10\,400\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. C'est juste en-dessous de la vitesse de libération terrestre ($11\,300\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) donc il ne faut pas se planter si on veut revoir notre satellite.
Pour v_2', on peut soit utiliser la même méthode en B, soit utiliser la conservation de C qui donne $R_T.v_2 = (R_T + h_g).v_2'$; dans les deux cas on trouve $v_2' = 1600\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

(e) L'énergie sur l'orbite géostationnaire vaut $E_g = -4{,}7\,\text{GJ}$ donc le travail à fournir vaut $E_g - E_2 = 3{,}5\,\text{GJ}$

Corrigé de l'exercice M10.10 : Trajectoire d'un astéroïde [***]

1. Au départ, l'énergie potentielle est quasiment nulle, et $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$ donc la trajectoire est une hyperbole.
2. $C = \|(x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y) \wedge (-v_0\vec{e}_x)\| = y_0v_0$
3. Au plus proche : $\dot{r} = 0$ donc $E_m = E_{peff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GM_Tm}{r}$ donc $\frac{1}{2}v_0^2r^2 + GM_Tr - \frac{y_0^2v_0^2}{2} = 0$.
On exprime $\Delta = (GM_T)^2 + y_0^2v_0^4$ donc $r_{min} = \frac{-GM_T+\sqrt{(GM_T)^2+y_0^2v_0^4}}{v_0^2}$. Pour qu'il n'y ait pas collision avec la Terre, il faut que $r_{min} > R_T$ donc $-GM_T + \sqrt{(GM_T)^2 + y_0^2v_0^4} > R_Tv_0^2$ soit $(GM_T)^2 + y_0^2v_0^4 > (GM_T + R_Tv_0^2)^2$. On développe, on simplifie un peu et on obtient $y_0^2v_0^2 > 2GM_TR_T + R_T^2v_0^2$ d'où on tire $v_0 > \sqrt{\frac{2GM_TR_T}{y_0^2-R_T^2}}$.
Avec $y_0 = 10R_T$, on trouve $v_0 > \frac{v_l}{\sqrt{99}} = 1{,}14\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice M10.11 : Modèle planétaire de l'atome [**]

1. $\vec{f} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{NE^2}\vec{e}_r$
2. La seule force à laquelle est soumis l'électron est centrale, dont le moment par rapport à N est nul, donc d'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique $\vec{L}$ de E par rapport à N est constant. Or $\overrightarrow{NE} \perp \vec{L}$ donc l'électron se déplace dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ passant par N.
3. Pour un mouvement circulaire : $\vec{v} = r\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t) + r\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$. La seule force est $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{e}_r(t)$.
Le PFD projeté sur $\vec{e}_r$ fournit donc l'équation $-mr\dot{\theta}(t)^2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ d'où on tire $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^3}}$
On en déduit facilement que $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}}$
On trouve aussi $E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r}$ et $E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ donc $E_m = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r}$
Enfin $L = mr^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}me^2r}$
4.

(a) $\mathcal{P} = \frac{e^6}{192\pi^3\varepsilon_0^3c^3m^2r^4}$
L'électron perdant de l'énergie, le rayon de sa trajectoire va diminuer et il va s'écraser sur le noyau.

(b) Par le TEM : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}$ donc $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r(t)^2}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^6}{192\pi^3\varepsilon_0^3c^3m^2r(t)^4}$ d'où on tire $r(t)^2\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^4}{24\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2} = -A = -1{,}60\times10^{-21}\,\text{USI}$

(c) On sépare les variables et on intègre : $r^2\mathrm{d}r = -A\mathrm{d}t$ donc $\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r(0)}^{r} = -At$ soit $r(t) = \sqrt[3]{r(0)^3 - 3At}$

On trouve que $r = 0$ lorsque $t = \frac{r(0)^3}{3A} = 2{,}1 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$: autrement dit, en moins d'une microseconde, tous les atomes ont cessé d'exister. Ce modèle pose donc de gros problèmes.

5.

(a) $L = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} m e^2 r_n} = n\hbar$ donc $r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}$ et $r_1 = 53\,\mathrm{pm}$

(b) $E_m = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r_n} = -\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{me^4}{\hbar^2 n^2}$ et $E_1 = -2{,}2 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = -13{,}7\,\mathrm{eV}$

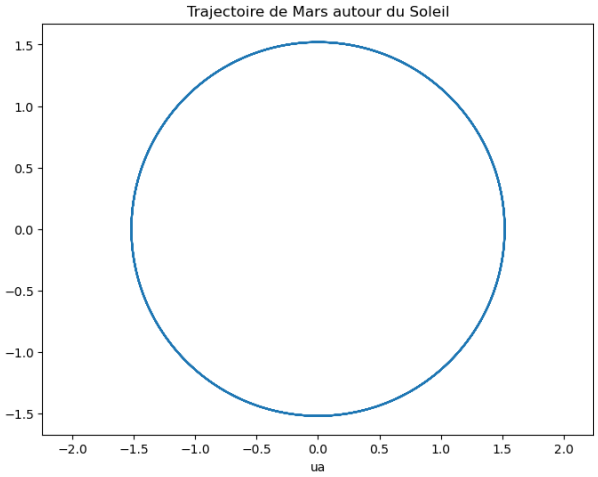
Corrigé de l'exercice M10.12 : Effets des frottements sur un satellite [***]

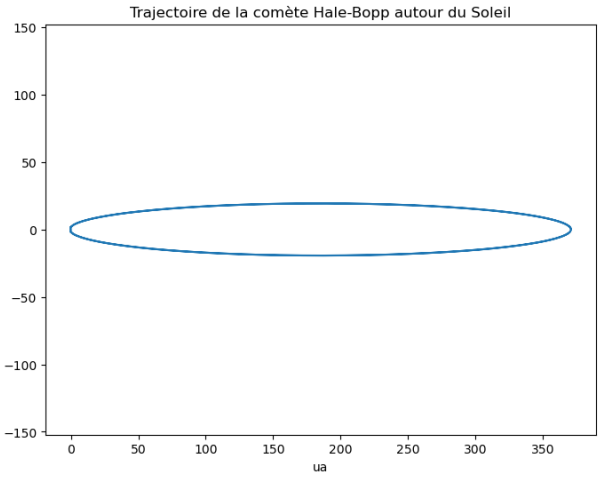
1. Cf. cours : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ et $E_m = -\frac{GM_T m}{2r}$.
2. Le travail infinitésimal vaut $\delta W = -\alpha\vec{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\alpha.v.r.\mathrm{d}\theta$ car $\vec{v}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ sont selon $\vec{e}_\theta$ pour une trajectoire circulaire. Sur une période, on a donc $W = -\alpha.v.2\pi r = -2\pi\alpha\sqrt{GM_T r}$.
3. D'après le TEC appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique sur une période, et avec l'approximation $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta E_m}{T}$, on obtient $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}T = -2\pi\alpha\sqrt{GM_T r(t)}$, donc $\dot{r}(t)\frac{GM_T m}{2r(t)^2}2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = -2\pi\alpha\sqrt{GM_T r(t)}$, soit $\dot{r}(t) = -\dfrac{r(t)}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m}{2\alpha}$.
   AN : $\tau = 5 \times 10^7\,\mathrm{s}$ soit 1 an et 7 mois environ.
4. On a alors $r(t) = r(0)e^{-t/\tau}$, d'où $E_m(t) = E_m(0)e^{+t/\tau}$ (ce qui correspond bien à une diminution, puisque $E_m(0) < 0$) et $v(t) = v(0)e^{+t/2\tau}$: la vitesse augmente ! L'effet des frottements est donc d'augmenter indirectement la vitesse, parce qu'ils obligent le satellite à descendre donc à perdre de l'énergie potentielle.
   Dans la réalité, on équipe les satellites de moteurs pour relever leur orbite.

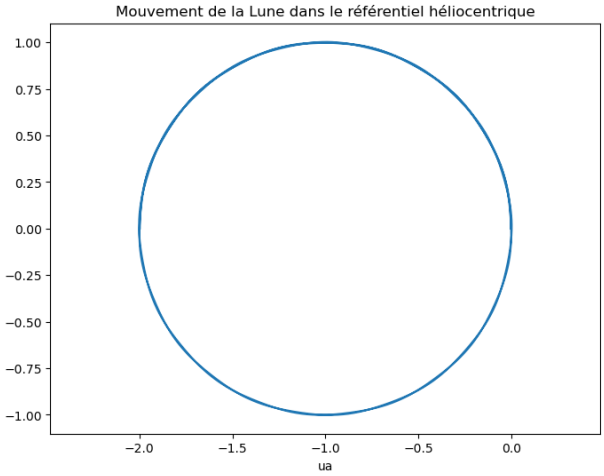
Réponses aux TDs numériques

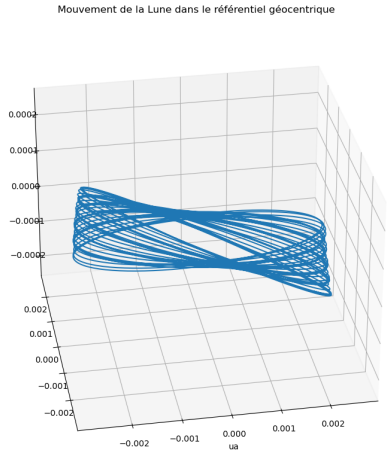
Réponses au TD d'info : Mouvements astronomiques

La résolution de ces systèmes ne pose pas de problèmes particuliers, hormis les erreurs de frappe :



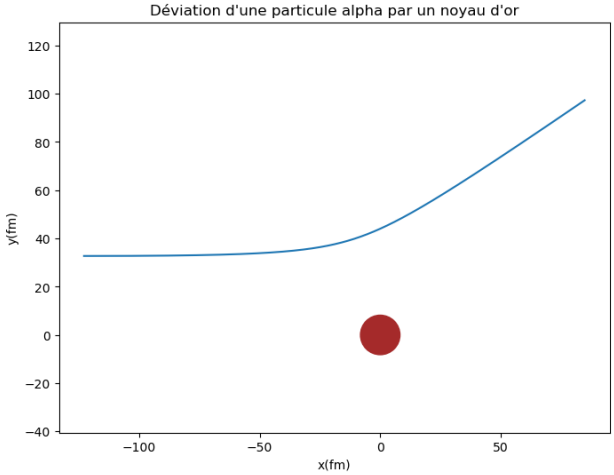




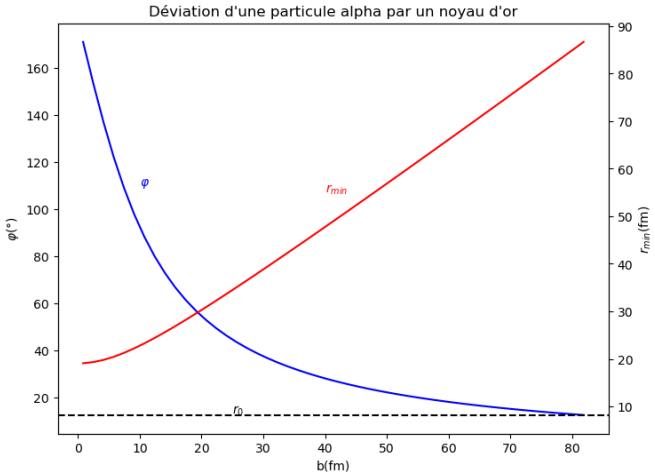


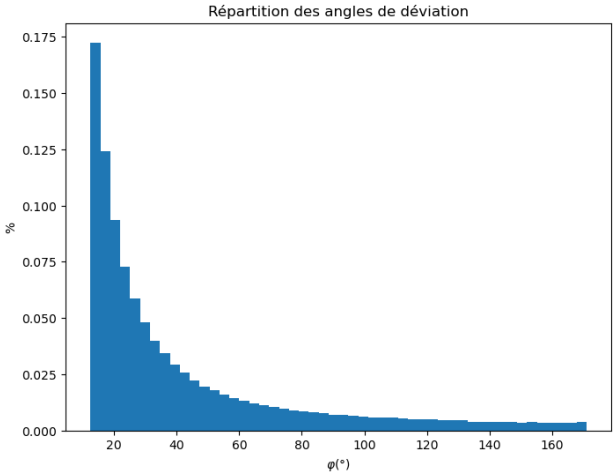
Réponses au TD d'info : Expérience de Rutherford

On a $v_0 = 1{,}5 \times 10^7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ donc on est en-dessous de la limite relativiste. La particule obéit alors aux équations $\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} &= \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$ qu'on résout avec un schéma d'Euler ou `odeint` avec comme inconnues x, $\dot{x}$, y et $\dot{y}$.



L'angle final se trouve par l'équation $\tan\varphi = \frac{v_{y\infty}}{v_{x\infty}}$ tandis que le rayon minimal se trouve en prenant le minimum de $\sqrt{x^2+y^2}$.





On constate qu'avec la vitesse initiale choisie, les particules α ne rentrent jamais en collision avec le noyau.

Chapitre M11 Mouvements de particules chargées

Programme p.992

Cours p.978

- M11.A. Forces s'exerçant sur une particule chargée
- M11.B. Mouvement dans un champ électrique uniforme constant
- M11.C. Mouvement dans un champ magnétique uniforme constant
- M11.D. Mouvement dans des champs électrique et magnétique uniformes constants

Conseils p.993

QCMs p.994

Exercices p.996

TDs numériques p.1000

M11. Mouvements de particules chargées

Cours

Nous allons maintenant changer de domaine pour passer à l'infiniment petit : les mouvements de charges élémentaires, principalement affectés par les forces électriques et magnétiques. Ce chapitre servira aussi de transition vers les chapitres d'électromagnétisme concernant l'induction.

M11.A. Forces s'exerçant sur une particule chargée

A.1. Étude de la force de Coulomb

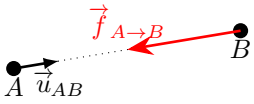
Nous allons partir de ce que nous connaissons : la force électrique qui s'applique entre deux particules chargées, appelée encore *force de Coulomb*.

Force de Coulomb

Une particule A de charge électrique q_A exerce sur une particule chargée B de charge électrique q_B une force :

$$\vec{f}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{AB^2}\vec{u}_{AB} \qquad \text{(M11.1)}$$

où



$\varepsilon_0 = 8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$ est la *permittivité diélectrique du vide*, donc $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ USI, et $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire de A vers B.

Cette force est attractive si les charges sont de signe opposé, et répulsive si les charges sont de même signe.

Calculons quelques ordres de grandeur de cette force par 2 comparaisons.

Considérons un proton et un électron dans un atome d'hydrogène ; ils ont pour charge $+e$ et $-e$ avec $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ et sont situés à une distance $a_0 = 5{,}3\times10^{-11}\,\mathrm{m}$. La force électrique du proton sur l'électron vaut donc $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2} = 8{,}2\times10^{-8}\,\mathrm{N}$. En même, temps, il existe entre le proton de masse $m_P = 1{,}7\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et l'électron de masse $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ une force d'attraction gravitationnelle de norme $G\frac{m_P m_e}{a_0^2} = 3{,}7\times10^{-47}\,\mathrm{N}$, soit environ 10^{39} fois plus faible.

On peut aussi calculer le poids de l'électron, résultant de l'attraction gravitationnelle de la Terre ; on trouve $m_e g = 8{,}9\times10^{-30}\,\mathrm{N}$ soit 10^{22} fois moins que la force électrique.

Propriété : Importance de la force électrique

Dans un problème faisant intervenir des particules chargées, le poids et les autres forces gravitationnelle sont négligeables ; on n'en tiendra jamais compte.

Pourquoi donc le poids joue-t-il un rôle si important dans la vie de tous les jours ? Pourquoi l'attraction gravitationnelle fait-elle tourner la Terre autour du Soleil ? Parce que ce sont des objets neutres, pour lesquels il existe des forces électriques, mais plus faibles et surtout de courte portée. Pour de gros objets neutres, les effets gravitationnels l'emportent.

Illustrons cela par un petit calcul. Considérons, en TP de chimie, deux béchers remplis de 100 mL d'une solution de sulfate de cuivre à $0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. Chaque bécher contient $1\times10^{-2}\,\mathrm{mol}$ de Cu^{2+} et $1\times10^{-2}\,\mathrm{mol}$ de ${SO_4}^{2-}$, soit une charge positive $2\times1{,}6\times10^{-19}\times10^{-2}\times6{,}0\times10^{23} = 1920\,\mathrm{C}$ et une charge négative $-1920\,\mathrm{C}$, qui se compensent.

Il faut espérer qu'elles se compensent bien. Imaginons qu'en versant le sulfate de cuivre dans les béchers, un excès de 0,001 % de Cu^{2+} soit allé dans l'un des béchers. Cela signifie qu'il possède une charge $+0{,}0192\,\mathrm{C}$ tandis que l'autre bécher contient une charge $-0{,}0192\,\mathrm{C}$. Si ces deux béchers sont placés à 50 cm l'un de l'autre, il va s'exercer entre eux une force électrique attractive de norme $9\times10^9\frac{0{,}0192^2}{0{,}5^2} = 13\times10^6\,\mathrm{N}$ soit à peu près la poussée de la fusée Ariane 5 au décollage !

On comprend donc pourquoi la matière autour de nous est neutre : si elle ne l'était pas, la force électrique aurait vite fait de réunir les charges positives et négatives pour retrouver la neutralité. Et même lorsque des charges électrostatiques apparaissent, il s'agit de fractions infimes.

Maintenant, imaginons un problème avec N charges électriques q_i placées en des points A_i. Une charge q_B placée en B subit alors une force de la part de toutes ces charges :

$$\vec{f}_{\to B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_B}{A_i B^2} \vec{u}_{A_i B}$$

ce qui donne un calcul rapidement très compliqué. C'est pour cela qu'on a décidé de séparer le calcul en deux parties, de manière à le simplifier. Pour cela, réécrivons la force sous la forme :

$$\vec{f}_{\to B} = q_B \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{A_i B^2} \vec{u}_{A_i B} \right)$$

Le terme entre parenthèses dépend des charges q_i (et de leur emplacement A_i), ainsi que de la **position** de B. Ce terme peut être calculé en tout point B de l'espace, même si aucune charge ne s'y trouve ; notons-le $\vec{E}(B)$. Alors si on place la particule B quelque part, elle subira une force électrique $q_B.\vec{E}(B)$.

A.2. Force de Lorentz

Plus encore, depuis Ampère, on sait que les courants (c'est-à-dire les particules chargées en mouvement) interagissent eux aussi entre eux. Au cours du XIXe siècle, on a pu montrer que ces deux phénomènes sont liés. On a alors défini deux objets physiques pratiques permettant d'exprimer les actions mécaniques des charges l'une sur l'autre :

Définition : Champs électrique et magnétique

En tout point de l'espace, on peut définir un *champ électrique* $\vec{E}$ qui est créé par les charges électriques, et qui agit sur les charges électriques. Il s'exprime en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.
En tout point de l'espace, on peut définir un *champ magnétique* $\vec{B}$ qui est créé par les charges électriques en mouvement (les courants), et qui agit sur les charges électriques en mouvement (les courants). Il s'exprime en Tesla (T).

Remarque : Le Tesla est une unité très grande ; on utilise parfois le Gauss : $1\,\text{G} = 1 \times 10^{-4}\,\text{T}$. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de quelques dizaines de microtesla ; sa valeur au centre de la France métropolitaine est $47\,\mu\text{T}$.

Le calcul de ces champs n'est pas au programme de première année ; nous verrons simplement plus loin deux dispositifs permettant de créer des champs électriques et magnétiques simples ; vous verrez l'an prochain les théorèmes permettant de calculer ces champs (théorème de Gauss et d'Ampère).

Pour cette année, nous allons admettre l'expression de ces champs, et regarder comment les particules se déplacent dans ces champs. Pour cela, il faut connaître l'action de ces champs sur les particules chargées.

Force de Lorentz

Une particule chargée de charge q placée en un point M et animée d'une vitesse $\vec{v}$ subit une *force électromagnétique* ou *force de Lorentz*

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E}(M) + q\vec{v} \wedge \vec{B}(M) \qquad \text{(M11.2)}$$

On distingue parfois la *force électrique* $q\vec{E}$ et la *force magnétique* $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Remarque : On rappelle que le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, orienté par la règle de la main droite, et de norme $\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

A.3. Aspects énergétiques

Les deux parties de la force de Lorentz ont des comportements énergétiques très différents.

Propriété : Potentiel électrique

On admet qu'il existe un champ scalaire appelé *potentiel électrique* V (en Volts) tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \qquad \text{(M11.3)}$$

Remarque : C'est le même potentiel électrique déjà vu en électricité. Quand on impose une différence de potentiel entre deux points, il apparaît un gradient de potentiel et donc un champ électrique, opposé à ce gradient, dirigé du + vers le −. Ce champ exerce une force sur les charges électriques et les met en mouvement, ce qui crée un courant.

Propriété : Aspect énergétique de la force électrique

La force électrique dérive d'une énergie potentielle $E_{p,\text{élec}} = q.V$ et est donc conservative.

Démonstration

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$ donc $q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(q.V) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{p,\text{élec}})$ en posant $E_{p,\text{élec}} = q.V$.

Remarque : Cette relation explique la définition de l'unité *électron-volt* : 1 eV, c'est (en valeur absolue) l'énergie potentielle d'un électron dans un potentiel de 1 V.

Propriété : Aspect énergétique de la force magnétique

La force magnétique ne travaille jamais.

Démonstration

Par définition, $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{v}$, donc sa puissance est nulle.

M11.B. Mouvement dans un champ électrique uniforme constant

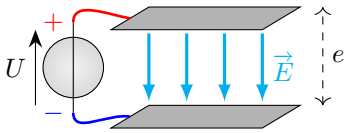
Le premier exemple que nous allons traiter, c'est celui du mouvement d'une particule de charge q dans un champ électrique uniforme et constant, en l'absence de champ magnétique.

B.1. Production d'un champ électrique constant

Pour produire un champ électrique, il faut des charges. Pour cela, le plus simple est de charger un condensateur.

Propriété : Production d'un champ électrique uniforme par deux plaques parallèles

Si on place deux plaques métalliques l'une en face de l'autre, parallèles, de taille très supérieure à l'écart e entre elles, et qu'on impose une tension U entre ces plaques, alors il apparaît entre ces plaques un champ électrique uniforme de norme $E = \frac{U}{e}$ dirigé du + vers le −.



Vous montrerez cette relation l'année prochaine, en étudiant l'électrostatique. Les deux plaques ainsi disposées réalisent un condensateur.

B.2. Accélération d'une particule

La force électrique travaille, donc en l'orientant comme il faut, on peut s'en servir pour communiquer de l'énergie cinétique à une particule.

Exemple : Accélération d'une particule — **À connaître**

On considère une particule de masse m et de charge q, initialement au repos, placée dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}$; on place l'axe x selon le champ électrique, de sorte que $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Le point de départ est choisi comme origine.

1. Établir l'expression de la position de la particule $x(t)$.
2. Exprimer la vitesse v du point à l'abscisse x.

3. À l'aide de la relation (M11.3), justifier que $V(0) - V(x) = E.x$. En déduire l'expression de la vitesse v en fonction de $V(0) - V(x)$ et des constantes.
4. Redémontrer cette dernière relation à l'aide d'un bilan énergétique.

1. On étudie la particule M de charge q dans le référentiel terrestre galiléen.
   Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$.
   La particule est soumise à la force électrique $q\vec{E} = qE\vec{e}_x$.
   Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ donne donc $m\ddot{x}(t) = qE$ soit $\ddot{x}(t) = \frac{qE}{m}$. En intégrant : $\dot{x}(t) = \frac{qE}{m}t$ et $x(t) = \frac{qE}{2m}t^2$.
2. On peut isoler t en fonction de la position : $t = \sqrt{\frac{2mx}{qE}}$. On en déduit que $\dot{x} = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2mx}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEx}{m}}$
3. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ est ici à projeter sur l'axe x : on obtient $E = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$ (inutile de mettre des dérivées partielles, puisqu'on travaille en 1D ici). En intégrant entre 0 et x on trouve $E.x = -(V(x) - V(0)) = V(0) - V(x)$.
   On en déduit que $\dot{x} = \sqrt{\frac{2q(V(0)-V(x))}{m}}$
4. La seule force à laquelle est soumise la particule est la force électrique, conservative, d'énergie potentielle $q.V$. Le système est donc conservatif, donc $E_m(0) = E_m(x)$ soit $0 + q.V(0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + q.V(x)$. On en déduit que $\dot{x} = \sqrt{\frac{2q(V(0)-V(x))}{m}}$.

On voit donc qu'un a pu accélérer une particule chargée, et que la vitesse atteinte ne dépend pas du champ électrique, mais plutôt de la tension entre le point de départ et le point d'arrivée :

Propriété : Accélération d'une particule

En accélérant une particule de charge q entre deux points séparée d'une différence de potentiel U, on lui communique une énergie cinétique $E_c = |q.U|$.

Démonstration

La force électrique étant conservative, la particule est un système conservatif : $E_c + qV = \text{cst}$. Si la particule est initialement immobile, on a donc $0 + qV_{\text{initial}} = E_{c,\text{final}} + qV_{\text{final}}$ soit $E_{c,\text{final}} = q(V_{\text{initial}} - V_{\text{final}})$ qui fait bien apparaître la tension. Évidemment, il faut choisir le bon signe de tension en fonction du signe de q.

Par exemple, un proton de masse $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg et de charge $1{,}6 \times 10^{-19}$ C accéléré par une tension de 1 kV atteint la vitesse de $4{,}3 \times 10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: comme il est très léger, il accélère très vite ! Pour un électron, avec la même tension (dans l'autre sens) on atteint $1{,}9 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: on voit qu'on s'approche de la limite relativiste. Si les vitesses atteintes dépassent $c/10 \approx 3 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la loi de l'énergie cinétique gagnée $E_c = |q.U|$ reste vraie, mais l'expression de E_c en fonction de v change ; la vitesse ne pourra jamais dépasser c.

Pour faire de la recherche en physique des particules, on a besoin de communiquer une grande énergie cinétique à des particules, puis les faire entrer en collision ; l'énergie cinétique peut alors être transformée en nouvelles particules selon la relation $E = mc^2$. En étudiant les particules créées, on espère trouver de nouvelles particules qui n'existent pas à l'état naturel.

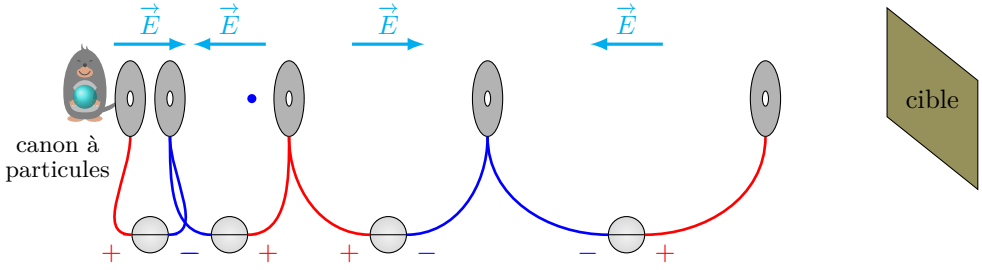
Le but est donc de communiquer le plus possible d'énergie cinétique aux particules. Pour cela, il suffit de mettre une très grande tension entre deux plaques métalliques. Mais on est limité par les tensions maximales qu'on sait générer. Il faut donc trouver une autre solution pour communiquer à la particule de l'énergie par étapes.

La figure M11.1 présente (en haut) le principe d'un accélérateur linéaire. Un émetteur de particule à gauche produit des particules avec une vitesse initiale négligeable ; sur le schéma, ce sont des particules chargées négativement. Ces particules sont immédiatement placées entre deux plaques percées (ou des anneaux) séparées par une tension U ; elles sont alors attirées par la deuxième plaque et acquièrent une énergie cinétique $q.U$. Au moment où les particules traversent la deuxième plaque, on inverse les polarités : la deuxième plaque devient $-$ tandis que la troisième devient $+$; ainsi, la particule va de nouveau être accélérée vers la troisième plaque, et gagner encore $q.U$ d'énergie cinétique. On recommence le processus à chaque section, et au bout de N sections, la particule a acquis une énergie cinétique $N.q.U$. Elle entre alors en collision avec une cible immobile.

La photo du bas montre le plus grand accélérateur linéaire de particules du monde ; il permet de communiquer 60 GeV aux particules accélérées. De nombreuses particules ont été découvertes dans cet accélérateur.

Un projet international, l'ILC, envisage de construire un tel accélérateur atteignant 2×500 GeV sur une longueur de 50 km.

FIGURE M11.1 : Accélérateur linéaire.



(a) Principe d'un accélérateur linéaire



(b) Accélérateur linéaire de Stanford (3,2 km, 60 GeV) ; (Crédit : Wikipedia/P.Kaminski)

B.3. Déviation d'une particule

Nous allons voir rapidement comment un champ électrique peut dévier une particule, sans entrer dans trop de détails de calculs ; les détails seront vus dans un exercice.

Calcul : Déviation d'une particule par un champ électrique orthogonal à sa vitesse

Supposons qu'une particule de masse m et de charge q arrive avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$; on prendra l'axe x selon cette direction, de sorte que $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$. Pour la dévier, on la soumet à un champ électrique uniforme et constant $\vec{E} = E\vec{e}_y$. Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = \dfrac{qE}{m}t \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

En combinant les équations sur x et y, on trouve que

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$

donc la particule va suivre une trajectoire parabolique.

Cette propriété est à la base des tubes cathodiques de première génération (figure M11.2). Prenons l'exemple des premiers oscilloscopes. Au départ du tube, une cathode chauffée par un courant émet des électrons qui « sautent » dans le vide, mais reviennent vite sur le fil qu'ils ont quitté, sauf si on les attire ailleurs. Pour cela, on place en face de la cathode une anode, élevée à un potentiel électrique plus élevé que la cathode, et percée d'un petit trou. Les électrons sont accélérés, et un fin pinceau passe à travers le trou. On place alors des paires de plaques de part et d'autres pour dévier le faisceau : les plaques du dessus et du dessous, reliées à la tension mesurée, font bouger le faisceau verticalement, tandis que les plaques de droite et de gauche, reliées au générateur de balayage, le font bouger horizontalement. Le faisceau va alors jusqu'à l'écran où il marque un point lumineux.

Néanmoins, cette façon de dévier les électrons est peu efficace, car on voit dans le calcul ci-dessus qu'elle varie comme $\frac{1}{v_0^2}$: il est très difficile de dévier des électrons rapides.

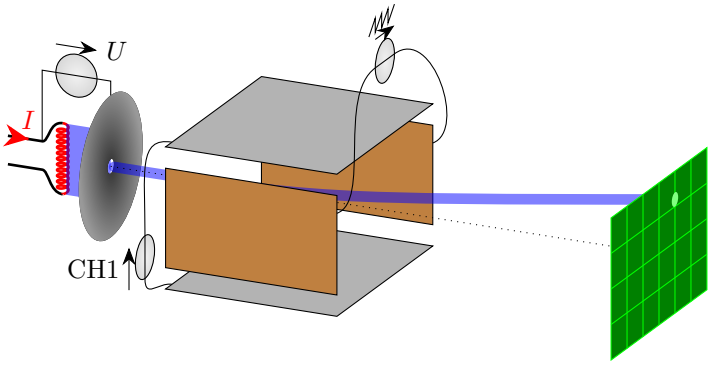
FIGURE M11.2 : Déviation électrique d'un faisceau d'électrons.



(a) Écran cathodique long (Crédit : Wikipedia/Catalogo collezioni)



(b) Détail du canon à électrons (à droite). Le cylindre sert à focaliser le faisceau. On voit ensuite un disque percé qui laisse passer un pinceau d'électrons, puis les plaques de déviation, qui s'écartent pour pouvoir dévier le faisceau sur une longueur plus grande. (Crédit : Wikipedia/Willemdd)



(c) Principe de la déviation dans un oscilloscope cathodique

M11.C. Mouvement dans un champ magnétique uniforme constant

La force magnétique est très différente de la force électrique. D'une part, elle ne travaille pas, donc ne permettra jamais d'accélérer une particule ; elle pourra seulement la dévier. D'autre part, sa norme grandit avec la vitesse v, donc plus la particule va vite, plus cette force sera importante.

C.1. Production d'un champ magnétique uniforme

Les champs magnétiques sont produits par des courants. Le champ magnétique produit par un courant même de quelques ampères reste faible. Pour avoir plus d'effet, il faut mettre plusieurs fils parcouru par un courant ; c'est ce qu'on fait en enroulant le fil sur un cylindre pour former une bobine.

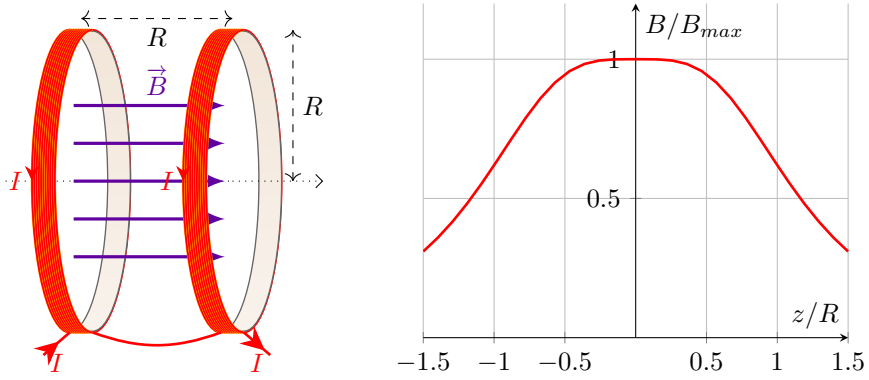
Le champ magnétique créé par une bobine n'est pas uniforme. Pour obtenir un champ uniforme, il existe une astuce toute simple : les *bobines de Helmholtz*.

Propriété : Bobines de Helmholtz

Le dispositif des bobines de Helmholtz consiste à placer deux bobines plates de même rayon R, avec N tours de fil chacune, parcourues par le même courant I, sur le même axe et à une distance l'une de l'autre égale à leur rayon R.

Dans l'espace entre les bobines apparaît alors un champ magnétique dirigé selon l'axe des bobines, orienté selon le sens de rotation du courant, uniforme et égal à $0,716\frac{\mu_0 NI}{R}$ où $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$USI est la *perméabilité magnétique du vide*.

FIGURE M11.3 : Bobines de Helmholtz.



(a) Disposition des bobines (b) Champ magnétique sur l'axe

C.2. Propriétés générales du mouvement dans un champ magnétique uniforme

Propriété : Vitesse de la particule

Une particule qui se déplace dans un champ magnétique uniforme a une vitesse constante.

Démonstration

Que le champ soit uniforme ou pas, la force magnétique ne travaille pas, donc $E_m = E_c = \text{cst}$ d'où on tire que $v = \text{cst}$.

Propriété : Vitesse de la particule parallèle au champ

Une particule qui se déplace dans un champ magnétique uniforme a une vitesse selon l'axe du champ constante.

Démonstration

Par propriété du produit vectoriel, $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{B}$, donc la force projetée sur l'axe parallèle à $\vec{B}$ est toujours nulle. Par conséquent, la vitesse selon cet axe est constante.

C.3. Résolution du mouvement

À partir de maintenant, puisque le champ magnétique est uniforme, on supposera qu'il est dirigé selon $\vec{e}_z$; on posera donc $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

On sait donc que la particule a un mouvement uniforme ; mais quelle est sa trajectoire ?

Un peu de maths : Calcul du produit vectoriel (rappel)

Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs, on écrit les coordonnées des deux vecteurs en colonnes, on répète la première ligne en-dessous de la troisième, puis on effectue des calculs en « gamma » :

$$\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_x \end{vmatrix} \begin{matrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_x \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_y.b_z - a_z.b_y \\ a_z.b_x - a_x.b_z \\ a_x.b_y - a_y.b_x \end{vmatrix}$$

On peut aussi décomposer les vecteurs sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et utiliser les relations des produits vectoriels de base :

- le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$
- le produit vectoriel de deux vecteurs de la base donne le troisième, avec un signe plus si les vecteurs sont dans l'ordre $x, y, z, x, y, \ldots$ et un signe moins sinon : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = +\vec{e}_z$ mais $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$, etc.

Exemple : Mouvement dans un champ magnétique uniforme — À connaître

On considère une particule M de masse m et de charge q se déplaçant dans un champ magnétique uniforme et constant $B\vec{e}_z$. On prend la position de la particule à l'instant $t = 0$ comme origine. On suppose que la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ magnétique, et on prend l'axe x selon cette vitesse : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$.

1. Établir les 3 équations différentielles vérifiées par x, y et z ; on posera $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la *pulsation cyclotron.*
2. Résoudre rapidement $z(t)$.
3. **Méthode 1 de résolution** : par double intégration.
   (a) Intégrer l'équation différentielle obtenue pour $\ddot{y}$ de manière à relier $\dot{y}$ et x.
   (b) Renvoyer ce résultat dans l'autre équation, de manière à établir une ED d'ordre 2 vérifiée par x.
   (c) Résoudre cette ED et trouver $x(t)$.
   (d) En déduire $y(t)$.
4. **Méthode 2 de résolution** : par les complexes.
   On pose $\underline{u} = x + iy$.
   (a) Établit l'ED d'ordre 2 vérifiée par $\underline{u}$.
   (b) On pose $\underline{w} = \dot{\underline{u}}$; établir l'ED d'ordre 1 vérifiée par $\underline{w}$.
   (c) La résoudre et établir $\underline{w}(t)$.
   (d) En déduire $\underline{u}(t)$ puis $x(t)$ et $y(t)$.

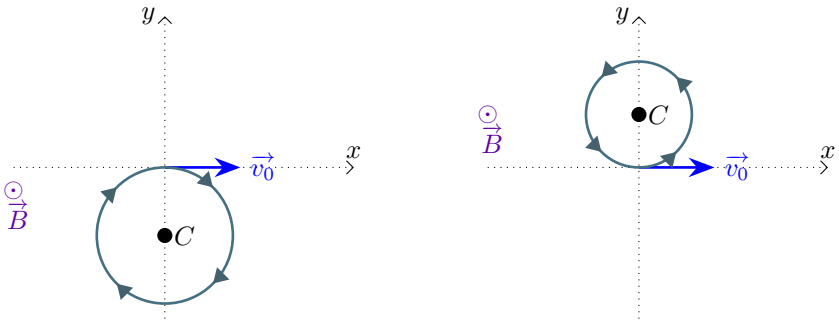
---

1. On étudie le point M dans le référentiel terrestre, repéré par ses coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$.
   La seule force qui s'exerce sur le point est la force magnétique : $q\vec{v}(t)\wedge\vec{B} = q\begin{vmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\0\\B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}qB\dot{y}(t)\\ -qB\dot{x}(t)\\ 0\end{vmatrix} =$
   $qB\dot{y}(t)\vec{e}_x - qB\dot{x}(t)\vec{e}_y$
   Le PFD projeté sur les 3 axes donne alors les équations $\begin{cases}\ddot{x}(t) = \omega_c\dot{y}(t) & \text{(a)}\\ \ddot{y}(t) = -\omega_c\dot{x}(t) & \text{(b)}\\ \ddot{z}(t) = 0 & \text{(c)}\end{cases}$
2. En intégrant (c) avec les CI $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$ on trouve facilement que $z(t) = 0$.
3. **Méthode 1 de résolution** : par double intégration.
   (a) En intégrant l'équation (b) entre 0 et t, on trouve $\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\omega_c x(t) + \omega_c x(0)$ soit $\dot{y}(t) = -\omega_c x(t)$.
   (b) En remplaçant $\dot{y}(t)$ dans l'équation (a), on obtient alors $\ddot{x}(t) = -\omega_c^2 x(t)$.
   (c) $\ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = 0$ a des solutions de la forme $x(t) = A\cos(\omega_c t) + C\sin(\omega_c t)$ donc $\dot{x}(t) = -A\omega_c\sin(\omega_c t) + C\omega_c\cos(\omega_c t)$. On applique alors les CI : $x(0) = A = 0$ et $\dot{x}(0) = C\omega_c = v_0$. On en déduit que $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$.
   (d) Donc $\dot{y}(t) = -\omega_c x(t) = -v_0\sin(\omega_c t)$ qu'on intègre entre 0 et t : $y(t) - y(0) = \left[\frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t)\right]_0^t$ soit $y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$
4. **Méthode 2 de résolution** : par les complexes.
   On pose $\underline{u}(t) = x(t) + iy(t)$.
   (a) On effectue l'opération (a)$+i.$(b) et on obtient $\ddot{x}(t) + i.\ddot{y}(t) = \omega_c\dot{y}(t) - i\omega_c\dot{x}(t) = -i\omega_c.(\dot{x}(t) + i.\dot{y}(t))$ d'où on tire $\ddot{\underline{u}}(t) + i\omega_c\dot{\underline{u}}(t) = 0$
   (b) On a donc $\dot{\underline{w}}(t) + i\omega_c\underline{w}(t) = 0$: ED d'ordre 1.
   (c) On peut l'écrire $\tau\dot{\underline{w}}(t) + \underline{w}(t) = 0$ avec $\tau = \frac{1}{i\omega_c}$: c'est complexe, mais peu importe, les calculs sont les mêmes. On a alors des solutions de la forme $\underline{w}(t) = \underline{K}e^{-i\omega_c t}$. Or $\underline{w}(0) = \underline{K} = \dot{\underline{u}}(0) = \dot{x}(0) + i.\dot{y}(0) = v_0$ donc $\underline{w}(t) = v_0 e^{-i\omega_c t}$.
   (d) On intègre entre 0 et t : $\underline{u}(t) - \underline{u}(0) = \left[\frac{v_0}{-i\omega_c}e^{-i\omega_c t}\right]_0^t = \frac{iv_0}{\omega_c}\left(e^{-i\omega_c t} - 1\right)$.
   Pour trouver $x(t)$ et $y(t)$, il faut prendre les parties réelle et imaginaire de $\underline{u}(t)$. Pour cela, on développe l'exponentielle complexe : $\underline{u}(t) = \frac{iv_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t - i.\sin(\omega_c t) - 1) = \frac{v_0}{\omega_c}(i\cos(\omega_c t + \sin(\omega_c t) - i)$. On en déduit que $x(t) = \mathfrak{Re}[\underline{u}(t)] = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$ et $y(t) = \mathfrak{Im}[\underline{u}(t)] = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$.

À quoi ressemble alors le mouvement décrit par les équations $\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$? Remarquons que $\frac{v_0}{\omega_c}$ a la dimension d'un longueur ; on va donc poser $R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$, on peut écrire le vecteur position comme $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y = -R_c\vec{e}_y + R_c\sin(\omega_c t)\vec{e}_x + R_c\cos(\omega_c t)\vec{e}_y$. En posant C le point tel que $\overrightarrow{OC} = -R_c\vec{e}_y$, on a alors $\overrightarrow{CM} = R_c\sin(\omega_c t)\vec{e}_x + R_c\cos(\omega_c t)\vec{e}_y$, ce qui correspond à la projection d'un point sur un cercle de centre C, de rayon $|R_c|$, placé à un angle $\omega_c t$. On en déduit donc que le mouvement est un mouvement circulaire de centre C tel que $\overrightarrow{OC} = -R_c\vec{e}_y$, de rayon $|R_c|$, parcouru à la pulsation ω_c.

Il faut néanmoins remarquer que $\omega_c = \frac{qB}{m}$ a le signe de q, il peut donc être positif ou négatif ; en en va de même pour R_c. Deux cas de figure existent donc en fonction du signe de la charge (figure M11.4).

FIGURE M11.4 : Mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant, dans le plan xOy (rappel : un cercle avec un point est un vecteur qui sort de la feuille ; un cercle avec une croix est un vecteur qui entre dans la feuille).



(a) Mouvement d'une charge $q > 0$ (b) Mouvement d'une charge $q < 0$

Le fait que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique ou horaire en fonction de la charge, est relié au fait que la direction de la force magnétique dépend du signe de la charge.

On retiendra donc le résultat :

Propriété : Mouvement plan dans un champ magnétique uniforme et constant

Une particule placée dans un champ magnétique uniforme et constant, et lancée avec une vitesse initiale v_0 perpendiculaire à $\vec{B}$, parcourt un cercle de rayon $R_c = \frac{v_0}{|\omega_c|}$ avec une pulsation $\omega_c = \frac{qB}{m}$ appelée *pulsation cyclotron* ; le sens de parcourt dépend du signe de la charge.

Démonstration

Il faut connaître la démonstration complète, explicitée dans l'exemple d'application ci-dessus. Néanmoins, si on admet que le mouvement est circulaire, on peut retrouver rapidement les caractéristiques du mouvement sans tout recalculer. Voici comment.

Admettons que la charge a un mouvement circulaire de rayon R_c, et plaçons-nous dans un repère ayant pour origine le centre de ce cercle. En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = R_c\vec{e}_r(t)$ donc $\vec{v} = R_c\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = R_c\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - R_c\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$.

La particule de charge q est soumise à la force (décomposée dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$) $q\vec{v}(t) \wedge \vec{B} = q\begin{vmatrix} 0 \\ R_c\dot{\theta}(t) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = qR_c\dot{\theta}(t)B\vec{e}_r(t)$.

Le PFD projeté sur les deux axes indique donc que $\begin{cases} -mR_c\dot{\theta}(t)^2 = qR_c\dot{\theta}(t)B \\ mR_c\ddot{\theta}(t) = 0 \end{cases}$. La seconde équation impose $\dot{\theta} = \text{cst}$ donc la vitesse $R_c\dot{\theta}$ est constante (ce qu'on a déjà démontré avec l'énergie) et $R_c\left|\dot{\theta}\right| = v_0$ (par les conditions initiales). La première équation implique que $m\dot{\theta} = -qB$ soit $\dot{\theta} = -\omega_c$: le sens de rotation dépend bien du signe de ω_c, donc du signe de la charge. De plus, on a $R_c = \frac{v_0}{\left|\dot{\theta}\right|} = \frac{v_0}{|\omega_c|}$.

Remarque : On peut aussi retrouver ce résultat dans la base de Frenet. si on admet que le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse : la force magnétique aura pour norme $|qv_0B|$, elle est la cause de l'accélération perpendiculaire au mouvement $\frac{v_0^2}{R_c}$. Le PFD fournit alors $\frac{v_0^2}{R_c} = |qB|v_0$ donc $R_c = \frac{v_0}{|\omega_c|}$.

Regardons quelques ordres de grandeur. Avec des bobines de Helmholtz classiques, on atteint un champ de quelques dizaines de milliTesla ; prenons $B = 10\,\text{mT}$, et envoyons-y un électron (masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$, charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$) d'énergie cinétique $E_c = 1\,\text{keV}$. On peut alors calculer :

— sa pulsation cyclotron : $|\omega_c| = 1{,}8 \times 10^9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit une fréquence $f_c = 280\,\text{MHz}$

— sa vitesse initiale : $v_0 = 1{,}9 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (on est encore dans le domaine non-relativiste)

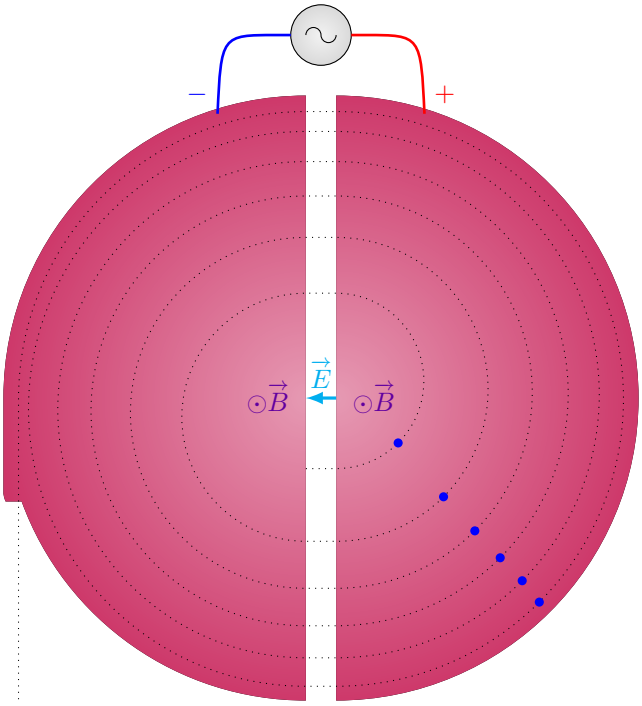
— le rayon de sa trajectoire : $R_c = 11\,\text{cm}$

Ainsi, un champ magnétique assez faible permet de dévier des électrons très rapide selon un cercle d'à peine 11 cm de rayon ! La déviation magnétique est très efficace. C'est pour cela que, dans les écrans cathodiques, les plaques de déviation ont été ensuite remplacées par des bobines créant une déviation magnétique du faisceau.

Ce qui est très intéressant dans le résultat trouvé, c'est que la pulsation ne dépend pas de la vitesse, donc la période de parcours $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ non plus. Ce phénomène a été à l'origine de l'invention du premier accélérateur de particule efficace, le *cyclotron*, mis au point au début des années 1930 par Ernest Lawrence.

Le principe du cyclotron est montré sur la figure M11.5. On place deux aimants en forme de demi-cylindres creux, les « Dees » (en violet sur le dessin), qui créent en leur sein un champ magnétique orthogonal à la figure. Ces Dees sont séparés d'un petit espace. On les relie aux deux bornes d'un générateur de tension alternative de pulsation ω_c, ce qui crée entre eux un champ électrique qui oscille à cette même pulsation.

FIGURE M11.5 : Fonctionnement d'un cyclotron.



Au départ, on envoie des particules chargées (électrons émis par un filament, par exemple) au centre des Dees ; leur vitesse initiale est négligeable. Ces particules vont être accélérées par le champ électrique qui règne entre les Dees. Une fois arrivées à l'intérieur d'un Dee, elles ne sont plus soumise au champ électrique, mais au champ magnétique, qui leur fait faire un demi-tour en une durée $\frac{T_c}{2}$, soit exactement le temps nécessaire pour que le champ électrique entre les Dees ait changé de sens. Les particules traversent alors de nouveau l'espace entre les Dees en étant accélérées, puis font de nouveau demi-tour dans l'autre Dee. Le mouvement continue, et à chaque passage, les particules gagnent de l'énergie.

Cependant, plus les particules vont vite, plus le rayon des trajectoires circulaires augmente, ce qui fait qu'au bout d'un moment, les particules sortent du Dee, par une petite ouverture prévue pour cela. L'énergie maximale qu'on peut transférer aux particules dépend donc du rayon du cyclotron : plus il est grand, plus on peut accélérer les particules. La figure M11.6 montre le premier cyclotron installé en France en 1937. Aujourd'hui, ce dispositif est très utilisé dans les hôpitaux pour produire des isotopes radioactifs utilisés pour de l'imagerie ou des traitements.

Il y a cependant des limitations aux énergie qu'on peut communiquer aux particules. D'abord, toute particule accélérée rayonne de la lumière et perd une puissance proportionnalle à son accélération au carré. Quand les particules font demi-tour, elles perdent en réalité de l'énergie par rayonnement à cause de leur accélération. L'accélération latérale varie comme $\frac{v^2}{R}$ et, dans un cyclotron, R varie comme v, donc cette accélération varie comme v ou comme R : au bout d'un certain nombre de tours, les pertes par rayonnement compensent le gain d'énergie dû au champ électrique, et les particules n'accélèrent plus. Il faut dont concevoir un dispositif différent, plus efficace. L'autre limitation, c'est que

FIGURE M11.6 : Le premier cyclotron du Collège de France (de 7 MeV), exposé au Conservatoire National des Arts et Métiers. On distingue les Dees sous la plaque en verre.(Crédit : Wikipedia/Edal)

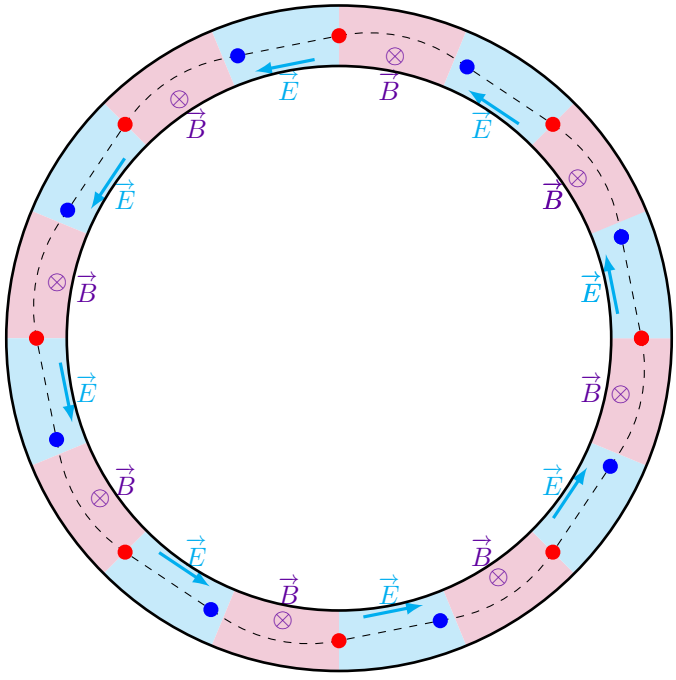


quand on atteint des vitesses relativistes, le temps de demi-tour devient dépendant de la vitesse, et il faut modifier la fréquence au fur et à mesure, ce qui complique le système.

Pour aller plus loin dans la découverte de particules, il faut donner toujours plus d'énergie aux particules qu'on fait s'entrechoquer. La limitation du cyclotron, c'est son rayon : plus la particule va vite, plus son rayon de giration est grand. Pour atteindre de plus grandes énergies, il faut donc un plus grand rayon ; mais il est difficile de fabriquer des Dees immenses.

On a alors fabriqué des *synchrotrons* : des anneaux dans lesquels alternent des section où un champ électrique accélère les particules, et des sections où un champ magnétique les dévie. La figure M11.7 montre par exemple le fonctionnement d'un accélérateur de particules de signes opposés ; quand elles se croisent, elles ont une probabilité faible mais non nulle de se rencontrer, et ce sont ces chocs qui créent de nouvelles particules.

FIGURE M11.7 : Principe d'un synchrotron avec des particules de signes opposés.

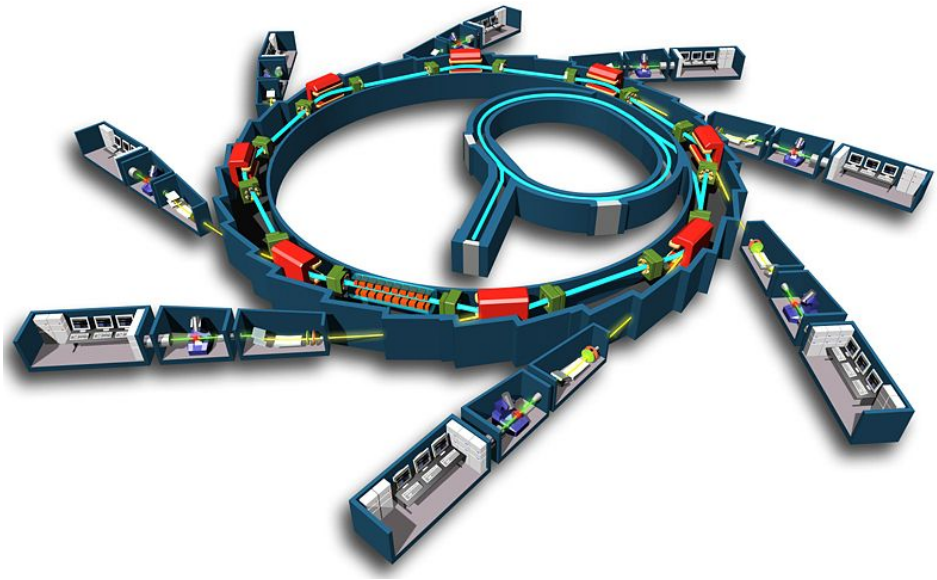


De tels synchrotrons permettent d'obtenir des énergies gigantesques. La figure M11.8 montre le double anneau du synchrotron du Fermilab, près de Chicago. La plus gros anneau fait 6 km de circonférence et accélère des protons avec une énergie de 2 TeV. Le plus gros synchrotron du monde est le LHC, situé sous Genève, qui atteint 14 TeV dans des anneaux de 27 km de circonférence.

FIGURE M11.8 : Anneaux du synchrotron du Fermilab. (Crédit : Wikipedia/R. Hahn)



FIGURE M11.9 : Schéma du synchrotron Soleil. (Crédit : Wikipedia/EPSIM 3D/JF Santarelli)



Néanmoins, tous les synchrotrons ne servent pas à créer des collisions. Une autre propriété est intéressante : toute particule chargée accélérée rayonne de la lumière, et plus son accélération est forte, plus l'énergie de la lumière émise est élevée. On crée donc aujourd'hui des synchrotrons assez petits, de l'ordre du kilomètre de circonférence, comme l'ESRF à Grenoble ou Soleil à Saclay, dans lesquels on intercale des « wiggler » (des « tortilleurs », suites de petits cube oranges sur le schéma de la figure M11.9) qui font osciller les particules. Celles-ci émettent alors vers l'avant des rayons X de très grande qualité, quasiment monochromatiques, qui servent à des recherches cristallographiques ou des imageries médicales.

C.4. Aspect tridimensionnel

Le mouvement circulaire n'est suivi par la particule chargée que si sa vitesse initiale est orthogonale à $\vec{B}$. Si elle possède aussi une vitesse initiale selon $\vec{B}$, on a déjà montré que cette vitesse sera inchangée. Par conséquent, le mouvement global de la particule sera la combinaison :

— d'un mouvement de rotation dans le plan xOy

— d'un mouvement uniforme selon Oz

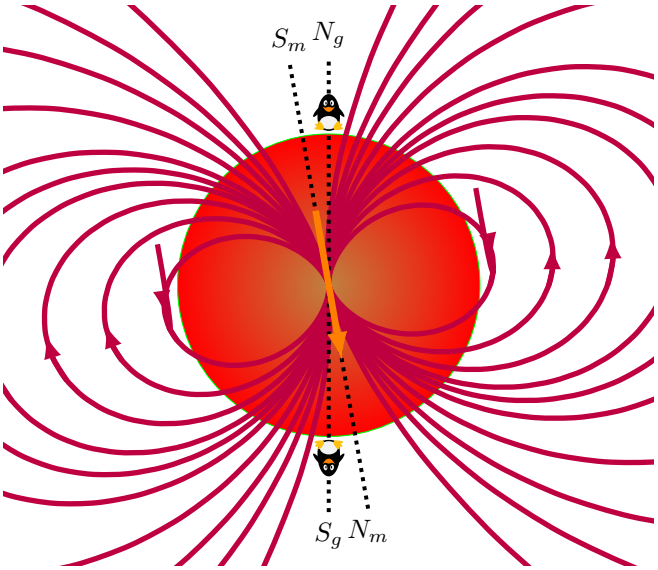
ce qui donne un mouvement hélicoïdal (figure M11.10). La particule se met donc à suivre le champ magnétique : on dit parfois que le mouvement de la particule est « canalisé par le champ magnétique » : vu de loin, on l'impression que la particule suit simplement le champ magnétique.

FIGURE M11.10 : Mouvement hélicoïdal dans un champ magnétique uniforme.

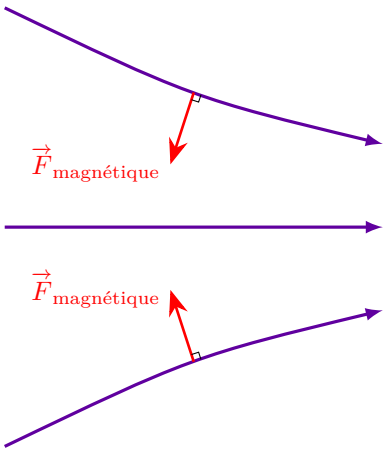


Ce principe est essentiel pour nous. En effet, le Soleil nous envoie en permanence des particules chargées très énergétiques : le *vent solaire*. Ces particules sont très dangereuses pour les êtres vivants. Mais la Terre possède un champ magnétique (figure M11.11) qui arrête ces particules, qui se mettent à suivre les lignes de champ magnétique (en rouge, ce sont des lignes qui sont parallèles au champ magnétique) ; du coup, les habitants de la Terre sont protégés.

FIGURE M11.11 : Piégeage des particules dans la magnétosphère terrestre.



(a) Champ magnétique terrestre



(b) « Effet miroir » lorsque les lignes de champ magnétique se rapprochent

Néanmoins, si les particules suivent les lignes de champ magnétique, elles arrivent aux pôles. Il intervient alors un autre phénomène : le champ magnétique n'est pas uniforme ; aux pôles, les lignes de champ magnétique se rapprochent. L'effet, illustré à droite de la figure M11.11, c'est que la force magnétique repousse les particules en arrière ; du coup, les particules n'arrivent pas aux pôles ; elles font plutôt des rebonds, des aller-retours d'un pôle à l'autre.

Cependant, les choses sont plus compliquées. D'une part, les particules chargées piégées créent elles-mêmes un champ magnétique qui s'ajoute à celui de la Terre ; avec le temps, elles s'accumulent et cet effet grandit. D'autre part, la Terre tourne. Tout cela crée une dynamique complexe de la magnétosphère, et parfois, des modifications brutales des lignes de champ magnétique amènent la précipitation de particules chargées au niveau des pôles. Ces particules ionisent l'atmosphère, qui émet de la lumière : ce sont les *aurores boréales*.

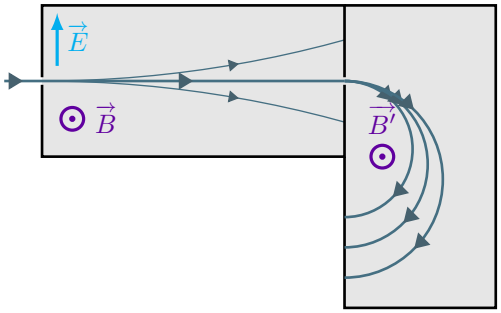
Ce confinement des particules chargées par des champs magnétiques a d'autres applications, par exemple pour la fusion nucléaire dans les réacteurs de type *Tokamak*.

M11.D. Mouvement dans des champs électrique et magnétique uniformes constants

En présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique, de nombreuses configurations existent qui donnent lieu à d'aussi nombreuses applications. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique a la particularité de dépendre du rapport charge/masse. Cela en fait un mouvement de choix lorsqu'on veut séparer des isotopes, c'est-à-dire des atomes qui ont le même numéro atomique mais des nombres de masse différents. On peut citer comme applications :

— le spectromètre de masse, dans lequel un faisceau d'ions est filtré en vitesse dans un champ magnétique et un champ électrique (figure M11.12) : la force électrique pousse les ions d'un côté, et la force magnétique de l'autre. Si les ions vont trop vite, la force magnétique gagne, s'ils vont trop lentement, la force électrique gagne ; il existe une vitesse particulière pour laquelle le faisceau va tout droit ; il arrive alors dans une seconde partie où on champ magnétique le dévie, et il frappe un écran au bout d'un demi-tour, à une distance proportionnelle à sa masse.

FIGURE M11.12 : Principe d'un spectromètre de masse.



— l'enrichissement de l'uranium par résonance cyclotron : quand des ions tournent en rond dans un champ magnétique, l'ajout d'un champ électrique oscillant va créer une résonance à la pulsation cyclotron, qui va permettre de faire résonner un isotope et pas un autre.

M11. Mouvements de particules chargées

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique. Puissance de la force de Lorentz.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles. Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.

M11. Mouvements de particules chargées

Quelques conseils

✎ Ne tenez jamais compte du poids dans un exercice contenant des forces électriques ou magnétiques.

✎ Apprenez bien la force de Lorentz ; trop souvent on voit dans les copies des forces magnétiques valant $q\vec{B}$, voire $\vec{B}$!

✎ Dans le cas d'un mouvement dans un champ magnétique uniforme, si l'énoncé indique de supposer que le mouvement est circulaire, contentez-vous de la démonstration en coordonnées cylindriques pour retrouver le rayon ; inutile dans ce cas de tout redémontrer.

M11. Mouvements de particules chargées

QCMs

réponses page 1003

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Un champ électrique :

(a). est créé par des courants
(b). agit sur des courants
(c). agit sur des charges
(d). est créé par des charges

Q2. Un champ magnétique :

(a). agit sur des courants
(b). agit sur des charges
(c). est créé par des courants
(d). est créé par des charges

Q3. La force de Lorentz s'écrit :

(a). $q\vec{E} + q\vec{B}$
(b). $q\vec{E} + \vec{B}$
(c). $q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$
(d). $q\vec{E} + q\vec{v}.\vec{B}$

Q4. La force électrique

(a). est non conservative
(b). ne travaille jamais
(c). est conservative
(d). est nulle

Q5. La force magnétique

(a). est nulle
(b). ne travaille jamais
(c). est conservative
(d). est non conservative

Q6. Un champ électrique uniforme et constant peut servir à :

(a). dévier des charges
(b). faire tourner en rond des charges
(c). faire pousser des pommes de terre
(d). accélérer des charges

Q7. Dans un champ magnétique uniforme, les charges :

(a). tournent en rond
(b). tournent en bourrique
(c). tournent au vinaigre
(d). tournent en carré

Q8. Dans un champ magnétique uniforme, le sens de rotation des charges dépend :

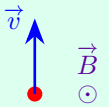
(a). de la masse
(b). du sens du champ magnétique
(c). du signe de la charge
(d). de la vitesse initiale

Q9. Dans un champ magnétique uniforme, la fréquence de rotation des charges dépend :

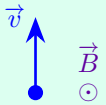
(a). du champ magnétique
(b). de la masse
(c). de la charge
(d). de la vitesse initiale

✓ QCM : Sens de la force magnétique ✗

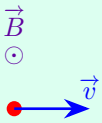
Pour connaître le sens de $\vec{v} \wedge \vec{B}$, on utilise la règle de la main droite : on place sa main droite de manière à avoir le pouce selon $\vec{v}$ et l'index selon $\vec{B}$, alors le produit vectoriel est selon le majeur. Ensuite, il ne faut pas oublier de tenir compte du signe de q pour avoir le sens de la force magnétique.

Q10. Un proton dans la configuration  subit une force vers :

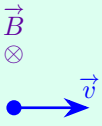
(a). la droite (b). la gauche

Q11. Un électron dans la configuration  subit une force vers :

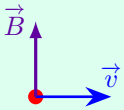
(a). la droite (b). la gauche

Q12. Un proton dans la configuration  subit une force vers :

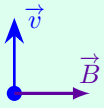
(a). le haut (b). le bas

Q13. Un électron dans la configuration  subit une force vers :

(a). le bas (b). le haut

Q14. Un proton dans la configuration  subit une force :

(a). rentrante (fuyant l'œil de l'observateur) (b). sortante (vers l'œil de l'observateur)

Q15. Un électron dans la configuration  subit une force :

(a). sortante (vers l'œil de l'observateur) (b). rentrante (fuyant l'œil de l'observateur)

M11. Mouvements de particules chargées

Exercices

réponses page 1004

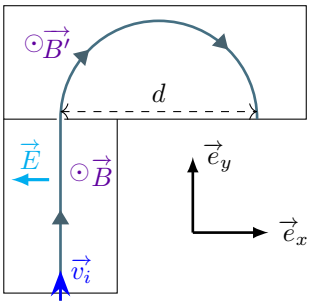
Exercice M11.1 : Champ électrique et pesanteur [*]

On néglige toujours le poids des charges quand il y a des forces électromagnétiques. Pour le justifier, on peut évaluer quelques ordres de grandeur.

1. Calculez le champ électrique nécessaire pour compenser le poids d'un électron ($m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg) puis d'un proton ($m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) ; on rappelle que la charge de ces deux particules vaut $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
2. En supposant que les électrons libres d'un métal sont en équilibre sous l'action de leur poids et du champ électrique trouvé ci-dessus, calculez la tension qui existe entre le pied et le sommet de la Tour Eiffel.

Exercice M11.2 : Spectromètre de masse [**]

Un spectromètre de masse est un appareil permettant de mesurer la masse des différents atomes constituant un objet, ainsi que leurs proportions. Il est très utilisé pour l'analyse d'échantillons inconnus, que ce soit dans l'exploration planétaire ou en archéologie.
L'échantillon à analyser est d'abord décomposé en atomes, qui sont ionisés. On suppose pour simplifier qu'on a des ions qui ont tous la même charge $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C (en réalité, il peut y avoir des ions ionisés deux fois, ou plus).



1. **Sélection des vitesses**
   On note m_i la masse de l'ion i ; il pénètre dans l'appareil avec une vitesse $\vec{v}_i = v_i \vec{e}_y$. Il entre alors dans une première zone où règnent :
   - un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $B = 0{,}1$ T,
   - un champ électrique constant $\vec{E} = -E\vec{e}_x$ avec $E = 1 \times 10^4$ V · m^{-1}.

   En effectuant un bilan des forces qui s'exercent sur l'atome i, montrez qu'il existe une vitesse v_ℓ *indépendante de* m_i telle que, si $v_i = v_\ell$, alors l'ion i a un mouvement rectiligne uniforme. Faites l'AN de v_ℓ.
   Que se passe-t-il si $v_i < v_\ell$? si $v_i > v_\ell$?
2. **Mesure de la masse**
   Au bout de la première zone, un petit trou permet de ne laisser passer que les ions qui sont allés exactement tout droit. Ces ions entrent alors dans une seconde zone où il y a uniquement un champ magnétique $\vec{B'} = B'\vec{e}_z$ avec $B' = 0{,}5$ T. Les ions ont alors un mouvement circulaire (admis). Après avoir parcouru un demi-cercle, ils frappent un écran. On mesure alors la distance d entre le trou et le point d'impact.
   Montrez que la mesure de d permet de remonter à m_i. AN : on mesure $d = 5{,}0$ cm ; déduisez-en la masse de l'atome, puis l'élément en question (on donne $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{23}$ mol^{-1}).

Exercice M11.3 : Dérive dans des champs électrique et magnétique orthogonaux [**]

Une particule de masse m et de charge q est placée dans le vide et soumise à des champs électrique et magnétique orthogonaux. On choisit les axes tels que $\vec{e} = E\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec E et B positifs. La vitesse initiale de la particule est nulle ; on prend l'origine du repère à sa position initiale.

1. Écrivez les 3 équations différentielles du mouvement ; on posera $\omega_c = \frac{qB}{m}$
2. Trouvez $z(t)$
3. Intégrez l'équation selon $\vec{e}_x$, et déduisez-en une ED d'ordre 2 vérifiée par y.
4. Trouvez $y(t)$ puis $x(t)$.

5. Tracez l'allure de la trajectoire pour une particule de charge positive.
6. Calculez le vecteur vitesse moyen de la particule (on l'appelle parfois *vitesse de dérive*).

Exercice M11.4 : Chambre à bulles [**]

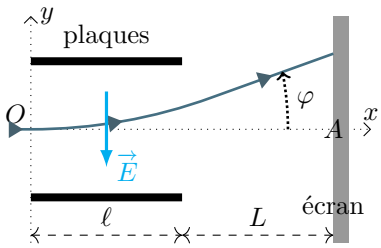
Lors des chocs qui se produisent dans les accélérateurs, de nombreuses particules sont créées. Pour les identifier, les physiciens placent différents détecteurs autour des lieux de choc. L'un deux, qui a été longtemps utilisé, est la chambre à bulles. Il s'agit d'une enceinte fermée contenant un liquide en état de surébullition. Il est donc liquide, mais le simple passage d'une particule suffit à déclencher l'ébullition dans son sillage. Si on prend rapidement une photo, on peut visualiser le trajet de la particule.
Pour identifier les molécules, on fait régner dans la chambre à bulles un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. On pose $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On suppose que les particules subissent, en plus de la force magnétique, une force de frottement qu'on peut modéliser par une loi $-f\vec{v}$ avec f un coefficient constant positif.

1. Écrivez les équations du mouvement d'une particule de masse m et de charge q ; on posera ω_c la pulsation cyclotron, et $\tau = \frac{m}{f}$.
2. On suppose qu'initialement, la particule a une vitesse $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_x + v_1\vec{e}_z$, et est à l'origine O du repère. Résolvez l'équation du mouvement en z.
3. Pour résoudre le mouvement dans le plan xOy, la méthode de double intégration marche mal. Il faut donc passer par la variable complexe $\underline{u} = x + iy$ avec $i^2 = -1$.
   Écrivez l'équation vérifiée par $\underline{u}$, et résolvez-la.
4. Que vaut la limite $\underline{u}_\infty$ de $\underline{u}$ aux temps longs ?
5. On pose $\underline{a} = \underline{u} - \underline{u}_\infty$. Que représentent physiquement $|\underline{a}|$ et $\arg(\underline{a})$? Exprimez ces deux grandeurs en fonction du temps. Quel est donc le mouvement de la particule dans le plan xOy ?

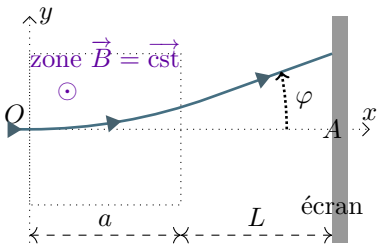
Exercice M11.5 : Déviation des électrons dans un tube cathodique [***]

Dans un tube cathodique (anciens écrans d'oscilloscopes, d'ordinateurs ou de télévisions), un faisceau d'électrons est dévié par un champ électrique ou magnétique. On va comparer ces deux techniques.
Dans cet exercice, on suppose que les électrons (charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$, masse $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$) ont tous la même énergie cinétique initiale $E = 2{,}5\,\text{keV}$. On négligera le poids des électrons.

1. Calculez la vitesse initiale v_0 des électrons, et commentez.
2. **Déviation électrique :** Le faisceau passe entre deux plaques parallèles séparées d'une distance $d = 1\,\text{cm}$, entre lesquelles on impose une tension $V = 200\,\text{V}$. On note $\ell = 5\,\text{cm}$ la longueur des plaques, et on suppose pour simplifier que le champ électrique vaut V/d entre les plaques et est strictement nul en-dehors (en réalité, la transition est progressive).
   On choisit un repère comme indiqué sur la figure. À $t = 0$, l'électron pénètre entre les plaques (en O).
   (a) Établissez les équations différentielles du mouvement d'un électron tant qu'il est entre les plaques (on négligera les forces entre les différents électrons du faisceau).
   (b) Résolvez-les et déduisez-en :
   — le temps mis pour traverser les plaques
   — la vitesse de l'électron lorsqu'il sort des plaques
   — l'angle que fait sa vitesse avec sa direction initiale Ox
   — les coordonnées de l'électron lorsqu'il sort des plaques.
   (c) On place un écran à une distance $L = 10\,\text{cm}$ derrière les plaques. Calculez à quelle distance du centre A l'électron frappera l'écran.



Déviation électrique (vue de côté).



Déviation magnétique (vue de côté).

3. **Déviation magnétique :** On remplace désormais les plaques par un électroaimant qui produit un champ magnétique qu'on peut faire varier. On suppose, pour simplifier, que le champ magnétique est nul partout sauf dans une zone de longueur $a = 1\,\text{cm}$ où il vaut $B = 10\,\text{mT}$ selon $\vec{e}_z$ (là encore, la transition est progressive en réalité).

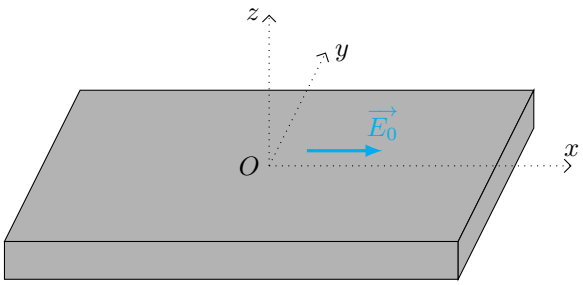
   (a) Vérifiez que vous savez établir les équations du mouvement de l'électron lorsqu'il est dans la zone de champ magnétique, et les résoudre (cf. le cours).

   (b) Calculez :
   - Le rayon de la trajectoire
   - la position de l'électron lorsqu'il sort de la zone où $\vec{B}$ existe
   - l'angle que fait sa vitesse avec l'axe lorsqu'il sort.

   (c) On place encore un écran à une distance $L = 10\,\text{cm}$; calculez la position de l'impact.

Exercice M11.6 : Effet Hall [***]

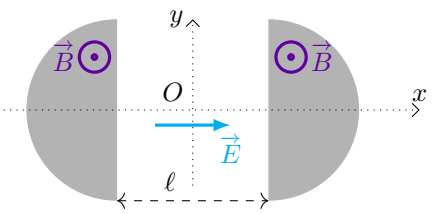
On considère un conducteur ohmique contenant n électrons par unité de volume, de largeur ℓ selon y, de hauteur h selon z, soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E_0} = E_0.\vec{e}_x$ avec $E_0 > 0$.



1. Le modèle de Drude modélise les électrons dans le conducteur comme des électrons libres de se déplacer, mais soumis à une force de frottements de la forme $-f.\vec{v}$.
   Effectuez le bilan des forces s'exerçant sur un électron du métal. Montrez que, en régime permanent, la vitesse est proportionnelle à $\vec{E}$.
2. On considère une section S du conducteur perpendiculaire à $\vec{E}$. Où se situent à l'instant t les électrons qui vont traverser S pendant une durée dt ? En déduire que le courant total I à travers S vaut $I = \frac{ne^2S}{f}.E_0$.
3. On ajoute un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Indiquer qualitativement dans quelle direction les électrons vont être déviés.
   Cette déviation fait apparaître des charges sur les côtés $y = \pm\frac{\ell}{2}$ qui créent un champ électrique $\overrightarrow{E_H} = E_H.\vec{e}_y$. Déterminer par un raisonnement qualitatif le signe de E_H.
4. Le système atteint son équilibre lorsque la force électrique due à $\overrightarrow{E_H}$ compense la force magnétique, et que les électrons circulent à nouveau comme sans champ magnétique. En déduire E_H en fonction de E_0, B et des données.
5. On mesure la tension de Hall $U_H = V(x, -\frac{\ell}{2}, z) - V(x, +\frac{\ell}{2}, z)$; on définit le coefficient de Hall $R_H = \frac{U_H h}{IB}$. Montrer que $R_H = -\frac{1}{ne}$
   Cet effet est-il plus important pour un métal ou pour un semi-conducteur ? Pourquoi la résistance de Hall de certains semi-conducteurs a-t-elle un signe opposé ?

Exercice M11.7 : Cyclotron [***]

Cet exercice reprend plusieurs calculs faits en cours ; c'est un exercice de révision. Il n'est pas difficile, mais long.
On s'intéresse à une particule de masse m chargée avec une charge $q > 0$. Cette particule est émise en un point situé entre deux zones où règne un champ magnétique $\vec{B}$; dans la zone centrale de largeur $\ell = 6\,\text{cm}$, le champ magnétique est négligeable mais on applique un champ électrique oscillant. Les détails seront précisés au fur et à mesure.



Données :

— masse d'un nucléon : $m_n = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\text{kg}$

— charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$

1. **Première phase : accélération**
   La particule démarre à l'origine O, avec une vitesse initiale négligeable. Elle se trouve dans la zone $-\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ dans laquelle le champ magnétique est négligeable, et le champ électrique uniforme : $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_x$ avec $E_0 = 2 \times 10^5\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.
   (a) Écrivez le PFD appliqué à la particule et déduisez-en $\ddot{x}$, puis $x(t)$.
   (b) Exprimez le temps t_0 que met la particule à atteindre les bords $x = \pm\frac{\ell}{2}$. AN pour un ions Fe^{2+} ($A = 56$, $Z = 26$).
   (c) Exprimez la vitesse v_0 de la particule lorsqu'elle atteint les bords, ainsi que son énergie cinétique E_0. AN pour la vitesse.
2. **Seconde phase : rotation**
   La particule arrive dans la zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ avec $B_0 = 0{,}2\,\text{T}$, où le champ électrique est négligeable, avec une vitesse $v_0\,\vec{e}_x$ à l'instant $t = 0$ (on prend une nouvelle origine des temps).
   (a) Justifiez que la vitesse absolue de la particule ne va pas être modifiée.
   (b) On admet que le mouvement de la particule est circulaire dans le plan Oxy ; déterminez son rayon r_1 et sa période T_1.
   (c) En déduire l'instant t_1 où la particule va ressortir de la zone de champ magnétique.
   Faire l'AN pour un ion Fe^{2+}. Dans les deux cas, comparez t_1 à t_0.
   (d) Exprimez la position et la vitesse de la particule au momment où elle ressort de la zone de champ magnétique.
3. **Troisième phase : accélération**
   La particule traverse de nouveau le zone $-\frac{\ell}{2} < x < \frac{\ell}{2}$ mais le champ électrique a changé de signe.
   Déterminez $x(t)$ sur cette troisième phase, puis la durée t_2 de traversée, la vitesse v_2 à la fin de cette phase et l'énergie cinétique correspondante.
   AN pour t_2.
4. **Quatrième phase : rotation**
   En appliquant rapidement les résultats de la seconde phase, déterminez la durée t_3 du demi-tour, et la position du point à la fin de celui-ci.
5. Dessiner sur la figure le trajet de la particule pendant ces 4 phases, dans le cas d'un ion Fe^{2+} ; comment serait-elle pour un ion négatif ?
6. Vérifiez que le temps total écoulé pour ces 4 phases est approximativement égal à $\frac{2\pi m}{eB_0}$. Déduisez-en la fréquence à laquelle il faut faire osciller le champ électrique pour accélérer l'ion.
7. On répète N fois ce processus (2 accélérations, 2 demi-tours), avec $N \gg 1$. Avec un peu d'intuition, exprimez la vitesse v_f et l'énergie cinétique E_f de la particule à la fin de ces N tours. Exprimez aussi le rayon r_f du dernier demi-tour effectué par la particule.
   Déduisez-en E_f en fonction de r_f.
8. Le dispositif générant le champ magnétique a un rayon $R = 1{,}2\,\text{m}$ fixé. Exprimez l'énergie cinétique maximale qu'on peut communiquer à la particule. AN pour un ions Fe^{2+}.
9. Comment pourrait-on communiquer plus d'énergie à l'ion fer ?

M11. Mouvements de particules chargées

TDs numériques

réponses page 1008

TD numérique : Séparation isotopique par résonance cyclotron

Numpy EDO Numpy plot(3D)

La résonance cyclotron exploite la différence de pulsation cyclotron d'isotopes du même élément chimique pour provoquer une résonance sur certains isotopes et pas d'autres, afin de les séparer. Cette technique a été testée par exemple pour séparer l'uranium 235 de l'uranium 238.
Les données suivantes serviront dans plusieurs questions :

- charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$
- électron-Volt : $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$
- unité de masse atomique : $1\,\text{uma} = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
- masse de l'uranium 235 : $m_{235} = 235\,\text{uma}$
- masse de l'uranium 238 : $m_{238} = 238\,\text{uma}$

On considère un ion de masse m, de charge q, placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\vec{u}_z$ ($B_0 > 0$) orienté selon l'axe Oz d'un référentiel galiléen muni d'une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ directe, ainsi que dans un champ électrique $\vec{E} = E(t)\vec{u}_y$.

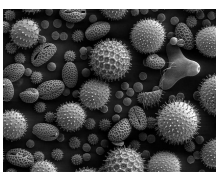
1. Écrivez rapidement les équations différentielles vérifiées par x, y et z.
2. Résolvez le mouvement pour de l'uranium 238 ionisé une fois (charge $+e$), dans $B_0 = 0{,}5\,\text{T}$ et $E(t) = 0\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, avec comme CI : $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x + v_1\vec{u}_z$ avec $\frac{1}{2}mv_0^2 = 10\,\text{eV}$ et $\frac{1}{2}mv_1^2 = 5\,\text{eV}$. On simulera sur une durée de 20 périodes environ.
   Tracez la trajectoire dans le plan xy à l'aide de la fonction `odeint`. On pourra utiliser la commande `plt.axis('equal')` pour avoir une figure orthonormée.
3. À l'aide du programme suivant, tracez la trajectoire en 3D :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig=plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(tab_x,tab_y,tab_z)
plt.show()
```

4. On ajoute maintenant un champ électrique $E(t) = E_0\cos(\omega t)$ avec $E_0 = 80\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.
   Simulez la courbe avec $\omega = \frac{\omega_c}{2}$. Notez les dimensions approximative de la courbe.
5. Reprenez la même chose pour $\omega = 0,9.\omega_c$, puis $0,99\omega_c$.
6. On note désormais $\omega_{c,235}$ la pulsation cyclotron de l'uranium 235 et $\omega_{c,238}$ celle de l'uranium 238.
   On se place à $\omega = \omega_{c,235}$. Simulez les deux courbes pour de l'uranium 235 puis 238, et tracez-les sur le même graphe ; on poussera la simulation jusqu'à 50 périodes.
7. On note $R_{max}(\omega)$ le rayon maximal atteint par la trajectoire. Tracez la courbe $R_{max}(\omega)$ pour un atome d'uranium 238, puis pour un atome d'uranium 235, sur le même graphique.
   Remarque : pour être sûr d'atteindre R_{max} on pourra simuler sur 200 périodes. À la résonance exacte le rayon croît indéfiniment donc de toutes façons on n'atteindra jamais de maximum.

TD numérique : Lentille magnétique

Numpy EDO



On étudie le passage d'un électron à travers une spire parcourue par un courant, dans le but de montrer qu'on obtient un effet de lentille, qui permet de construire des microscopes électroniques sur le même principe que les microscopes optiques.
La spire crée un champ magnétique qui s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(r,z) = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_z(z)\vec{e}_z = \frac{3zrB_0}{2a^2\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{5/2}}\vec{e}_r + \frac{B_0}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2}}\vec{e}_z \qquad (1)$$

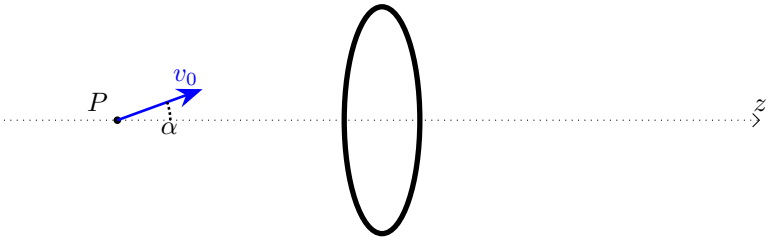
L'écriture du PFD $m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ projeté sur les 3 axes de la base cylindrique permettent d'obtenir les équations (admises, mais c'est un bon exercice par ailleurs) :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e}{m} r\dot{\theta} B_z(z) \tag{2}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{e}{m}\dot{r} B_z(z) - \frac{e}{m}\dot{z} B_r(r,z) \tag{3}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} r\dot{\theta} B_r(r,z) \tag{4}$$

avec $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.
On va simuler le trajet d'une particule émise depuis un point P de l'axe ($r(0) \approx 0$) à une ordonnée $z(0) < 0$ partant avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec la direction $\vec{e}_z$. On remarquera que la seconde équation possède un problème en $r = 0$.



1. On considère une lentille telle que $B_0 = 40$ mT et $a = 1$ mm. Définissez sous Python les constantes ainsi que les fonctions `Br` et `Bz`.
2. Résolvez le mouvement avec `odeint` pour les CI : $r(0) = \frac{a}{1000}$, $\theta(0) = 0$ rad, $z(0) = -100a$, $v_0 = 2 \times 10^7$ m·s^{-1} et $\alpha = 0{,}001$ rad, sur un temps total $\frac{200a}{v_0}$. Tracez la courbe $r(z)$ et interprétez en comparant avec l'effet d'une lentille convergente (placée en $z = 0$) sur un rayon lumineux.
   Remarque : lorsque la simulation amène le point trop près de l'axe, il y a un risque de divergence de $\ddot{\theta}$. On l'éviter en ajoutant la ligne `if r<a*1e-4: r=a*1e-4` dans la fonction dérivée.
3. On note Z l'abscisse de départ ; mesurez à l'aide du curseur l'abscisse Z' où l'électron revient sur l'axe. On définit la distance focale f' de la lentille par la relation $\frac{1}{f'} = \frac{1}{Z'} - \frac{1}{Z}$. Comment s'appelle cette loi ? Déterminez f'.
   Choisissez d'autres valeurs de Z et vérifiez que f' reste constant.
4. Tracez un ensemble de courbes partant de $z(0) = -100a$ et avec des angles variant entre 0,001 rad et 0,04 rad. Observez en zoomant le déplacement du point de focalisation. Comment appelle-ton ce phénomène en optique ?
5. Tracez la trajectoire pour $z(0) = -100a$, $\alpha = 0{,}001$ rad et B_0 variant de 25 mT à 100 mT.
6. La théorie indique que la distance focale de la lentille vaut approximativement $f' \approx \frac{32m^2v_0^2}{3\pi a e^2 B_0^2}$. Vérifiez cette loi.

TD numérique : Piège de Paul

py EDO

Pour étudier un électron et mesurer précisément ses caractéristiques, des scientifiques ont mis au point des pièges qui permettent de les confiner dans une petite zone de l'espace entre des électrodes. Nous allons ici étudier un piège 2D : le piège de Paul.
Dans ce piège, l'électron ne se déplace qu'en 2D dans un potentiel électrique $V(x,y,t) = -U(t)\frac{y^2-x^2}{2r_0^2}$ avec $U(t) = U_0 + U_s\cos(\omega t)$.
Pour les AN : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

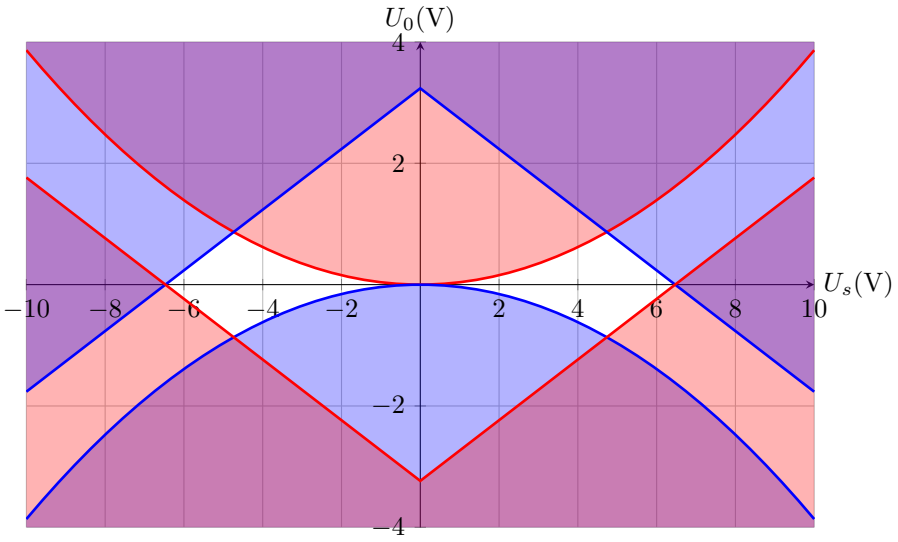
1. Établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$.
2. En déduire les deux équations différentielle vérifiées par x et y :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \alpha U(t) x = 0 \\ \ddot{y} + \alpha U(t) y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   avec α une constante à déterminer.
3. Résoudre numériquement la trajectoire de l'électron pour les valeurs : $U_s = 5$ V, $U_0 = 0{,}45$ V, $r_0 = 2$ mm

et $\omega = 2\pi \times 120\,\text{MHz}$, avec $x(0) = y(0) = \frac{r_0}{10}$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, sur une durée égale à environ 100 fois la période de la tension.

4. En fait, la trajectoire de l'électron est stable ou instable en fonction des valeurs de U_0, U_s, α et ω. Pour les valeurs de α et ω précédentes, le diagramme de stabilité pour U_0 et U_s est le suivant (les zones non colorées sont stables) :



Simulez la trajectoire pour différents couples (U_0, U_s) dans la partie stable, ou instable.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c) ET (d)
Q2.(a) ET (c)
Q3.(c)
Q4.(c)
Q5.(b)
Q6.(a) ET (d)
Q7.(a)
Q8.(b) ET (c)
Q9.(a) ET (b) ET (c)

Réponses au QCM : Sens de la force magnétique

Q10.(a)
Q11.(b)
Q12.(b)
Q13.(a)
Q14.(b)
Q15.(a)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice M11.1 : Champ électrique et pesanteur [*]

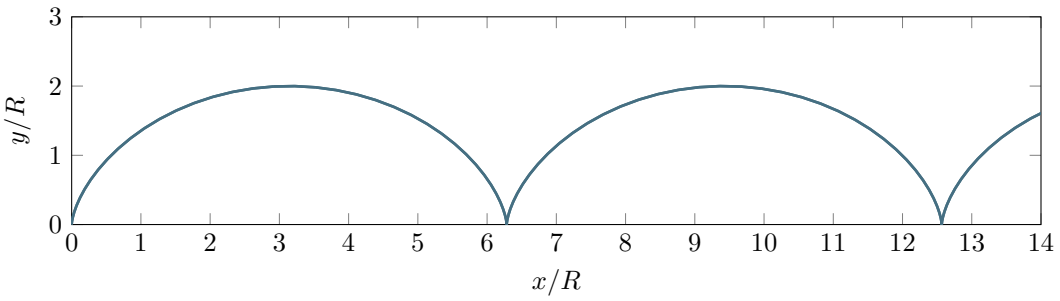
1. On résout $eE = mg$; on trouve $E = 5{,}6 \times 10^{-11}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ pour un électron et $1{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ pour un proton : c'est très faible.
2. Si la Tour Eiffel contient un champ électrique de $5{,}6 \times 10^{-11}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, alors il y a entre le pied et le sommet une tension $5{,}6 \times 10^{-11} \times 300 = 17\,\mathrm{nV}$

Corrigé de l'exercice M11.2 : Spectromètre de masse [**]

1. **Sélection des vitesses**
   L'ion est soumis à deux forces : la force électrique $-eE\vec{e}_x$ et la force magnétique $eB\vec{v}_i(t) \wedge \vec{e}_z$. **Mais on ne connaît pas $\vec{v}_i(t)$.**
   À l'instant où l'atome pénètre dans la zone, on sait que $\vec{v}_i(0) = v_i(0)\vec{e}_y$ donc la force magnétique vaut $eBv_i(0)\vec{e}_x$. Si $eBv_i(0) = eE$ alors les deux forces se compensent, donc la vitesse ne change pas, donc la relation reste vraie à chaque instant : la somme des forces est alors toujours nulle. Donc l'ion a un mouvement rectiligne uniforme si $v_i(0) = v_\ell = \dfrac{E}{B} = 1 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   Si la vitesse est supérieure, la force magnétique l'emporte, et l'ion part vers la droite ; si elle est inférieure, la force électrique l'emporte, et il part vers la gauche.
2. **Mesure de la masse**
   On admet que les ions ont un mouvement circulaire de rayon $R = \frac{d}{2}$. En se plaçant en coordonnées polaires, on a donc $\vec{v} = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - R\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$. La seule force est la force magnétique $eR\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) \wedge B'\vec{e}_z = eRB'\dot{\theta}(t)\vec{e}_r(t)$. Le PFD projeté sur $\vec{e}_r$ indique alors que $-m_iR\dot{\theta}(t)^2 = eRB'\dot{\theta}(t)$ donc $R\dot{\theta}(t) = -\frac{ReB'}{m_i}$: la vitesse est constante, et vaut donc $v_\ell = \frac{ReB'}{m_i}$. On en tire R, puis $d = 2R = 2\frac{m_iv_\ell}{eB'} = 2\frac{m_iE}{eBB'}$
   AN : $m_i = 2{,}0 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ soit $m_i\mathcal{N}_A = 12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$: le tableau de Mendeleïev indique que c'est sans doute du carbone.

Corrigé de l'exercice M11.3 : Dérive dans des champs électrique et magnétique orthogonaux [**]

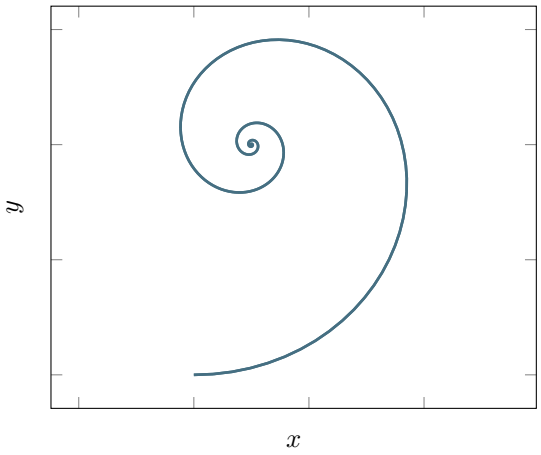
1. Rapidement : la particule d'accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$ est soumise à la force magnétique $q\vec{v}(t) \wedge \vec{B} = qB(\dot{y}(t)\vec{e}_x - \dot{x}(t)\vec{e}_y)$ et à la force électrique $q\vec{E} = qE\vec{e}_y$. Le PFD projeté selon les 3 axes donne les équations
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \omega_c\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega_c\dot{x}(t) + \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$
2. $\ddot{z}(t) = 0$ donc en intégrant deux fois avec des CI nulles on trouve $z(t) = 0$
3. $\dot{x}(t) = \omega_c y(t)$ car $\dot{x}(0) = 0$ et $y(0) = 0$. Donc $\ddot{y}(t) + \omega_c^2 y(t) = \frac{qE}{m} = \omega_c\frac{E}{B}$
4. $y(t) = \frac{E}{B\omega_c} + A\cos(\omega_c t) + C\sin(\omega_c t)$ donc $\dot{y}(t) = -\omega_c A\sin(\omega_c t) + C\omega_c\cos(\omega_c t)$. Or $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$ donc $\frac{E}{B\omega_c} + A = 0$ et $\omega_c C = 0$. On en tire que $y(t) = \frac{E}{B\omega_c}[1 - \cos(\omega_c t)]$.
   Or $\dot{x}(t) = \omega_c y(t)$ donc en intégrant on trouve (en tenant compte des CI) $x(t) = \frac{E}{B\omega_c}[\omega_c t - \sin(\omega_c t)]$
5. On obtient une cycloïde ($R = \frac{E}{B\omega_c}$) :



6. $\langle \dot{x}(t) \rangle = \frac{E}{B}$ et $\langle \dot{y}(t) \rangle = 0$ d'où une vitesse de dérive $\vec{v}_d = \frac{E}{B}\vec{e}_x$

Corrigé de l'exercice M11.4 : Chambre à bulles [**]

1. Les deux forces sont $-f(\dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z)$ et $qB(\dot{y}(t)\vec{e}_x - \dot{x}(t)\vec{e}_y)$. On obtient donc
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) &= \omega_c \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{y}(t) &= -\omega_c \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{z}(t) &= 0 \end{cases}$$
2. $\dot{z}(t) = v_1 e^{-t/\tau}$ avec les CI, puis $z(t) = v_1\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$
3. Avec les deux premières équations, on trouve $\ddot{\underline{u}}(t) + \left[\frac{1}{\tau} + i\omega_c\right]\dot{\underline{u}}(t) = 0$. Donc $\dot{\underline{u}}(t) = v_0 e^{[-t/\tau - i\omega_c t]}$ avec les CI, puis après intégration $\underline{u}(t) = \dfrac{v_0}{1/\tau + i\omega_c}\left[1 - e^{[-t/\tau - i\omega_c t]}\right]$
4. $\underline{u}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} u = \dfrac{v_0}{1/\tau + i\omega_c}$
5. $\underline{u}$ représente l'affixe de la particule dans le plan complexe centré en O ; $\underline{a}$ représente l'affixe dans le plan centré en $\underline{u}_\infty$. $|\underline{a}| = r$ et $\arg(\underline{a}) = \theta$ permettent donc de repérer la particule en coordonnées cylindriques centrées sur $\underline{u}_\infty$, point limite vers lequel tend la particule.
   Or $\underline{a}(t) = -\dfrac{v_0}{1/\tau + i\omega_c} e^{[-t/\tau - i\omega_c t]}$; donc $|\underline{a}|(t) = \dfrac{v_0\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} e^{-t/\tau}$ et $\arg\left(\underline{a}(t)\right) = \arg\left(-\dfrac{v_0}{1/\tau + i\omega_c}\right) + \omega_c t$. On a donc un mouvement de spirale décroissante tendant vers $\underline{u}_\infty$.



Corrigé de l'exercice M11.5 : Déviation des électrons dans un tube cathodique [***]

1. $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 3 \times 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = c/10$: on est en limite de régime relativiste.
2. (a) L'électron n'étant soumis qu'à la force électrique $\frac{eV}{d}\vec{e}_y$, le PFD dans le référentiel du laboratoire qui est galiléen donne $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t) = \frac{eV}{m_e d}$.
   (b) Le second membre est constant, donc les intégrations sont faciles : $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(t) = 0 + \frac{eV}{m_e d}t$; puis $x(t) = 0 + v_0 t$ et $y(t) = 0 + \frac{eV}{2m_e d}t^2$. On trouve alors :
   — que l'électron traverse les plaques en en temps Δt tel que $v_0\Delta t = \ell$, soit $\Delta t = \frac{\ell}{v_0} = 1{,}7\,\mathrm{ns}$
   — que sa vitesse à la fin de la traversée vaut $3 \times 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur $\vec{e}_x$ et $6 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur $\vec{e}_y$
   — ce qui correspond à un angle arctan $\frac{6\times10^6}{3\times10^7} = 11°$ environ
   — et que sa position à la fin de la traversée est donnée par $x = \ell = 5\,\mathrm{cm}$ et $y = \pm 5\,\mathrm{mm}$.
   (c) L'électron n'est plus soumis à la moindre force. Il continue donc en ligne droite, en faisant un angle de 11° avec l'axe. En une distance L, il s'éloigne donc encore de $L\tan 11°$ de l'axe. Il frappera donc au final l'écran à une distance 2,5 cm du centre.
   Remarque : ce qui est important pour pouvoir utiliser un tel dispositif dans un oscilloscope, c'est que la distance entre le point d'impact et le centre est proportionnelle à V.
3. (a) cf. cours : $x(t) = \frac{v_0 m_e}{eB}\sin\frac{eBt}{m_e}$ et $y(t) = \frac{v_0 m_e}{eB}\left(1 - \cos\frac{eBt}{m_e}\right)$ (en utilisant les parités).
   (b) — $R = \frac{v_0 m_e}{eB} = 17\,\mathrm{mm}$

— l'électron sort pour $t = \frac{m_e}{eB} \arcsin \frac{eBa}{v_0 m_e} = 0{,}36\,\text{ns}$, avec pour coordonnées $x = 1\,\text{cm}$ et $y = 3{,}3\,\text{mm}$
— et sa vitesse fait un angle $\arctan \frac{eBt}{m_e} = 32°$ avec l'axe.

(c) On trouve alors un impact à 6,7 cm du centre.

Remarque : la déviation magnétique est beaucoup plus performante : avec un champ assez faible et une courte longueur d'interaction, on obtient une déviation très forte. Cela vient du fait que la force magnétique est proportionnelle à la vitesse des électrons.

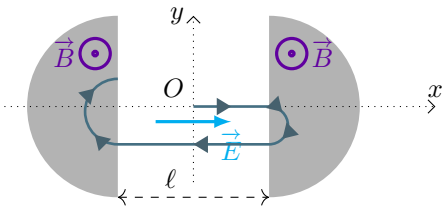
Corrigé de l'exercice M11.6 : Effet Hall [***]

1. Un électron est soumis à la force électrique $-e.\vec{E}$ et à la force de frottements $-f.\vec{v}(t)$, donc le PFD indique que $m\vec{a}(t) = -e.\vec{E} - f.\vec{v}(t)$.
   En régime permanent, l'accélération est nulle et $\vec{v}(t) = -\frac{e}{f}\vec{E}$.
2. Les électrons avancent de $v.dt$ en une durée dt, donc les électrons qui vont traverser en dt sont ceux situés dans le pavé de section S et de hauteur $\frac{-eE_0 dt}{f}$, il y en a $n\frac{-eE_0 Sdt}{f}$ et ils ont une charge totale $-en\frac{-eE_0 Sdt}{f} = \frac{ne^2E_0}{f}dt$ d'où un courant $I = \frac{ne^2S}{f}E_0$.
3. Le champ $\overrightarrow{E_0}$ est selon $+\vec{e}_x$, donc la vitesse des électrons selon $-\vec{e}_x$, donc $\vec{v} \wedge \vec{B}$ selon $+\vec{e}_y$, donc les électrons sont déviés selon $-\vec{e}_y$.
   Il apparaît donc des charges positives en $+\ell/2$ et négatives en $-\ell/2$, ce qui crée un champ dirigé du + vers le - donc selon $-\vec{e}_y$ donc $E_H < 0$.
4. $-eE_H\vec{e}_y - e\vec{v} \wedge \vec{B} = -eE_H\vec{e}_y - e\frac{-eE_0}{f}\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = (-eE_H - e^2\frac{E_0 B}{f})\vec{e}_y$ d'où on tire $E_H = -\frac{eE_0 B}{f}$
5. On sait que $\overrightarrow{E_H} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y$ donc en intégrant de $+\ell/2$ à $-\ell/2$ on trouve $\int_{\ell/2}^{-\ell/2}(-E_H)\text{d}y = V(x,-\ell/2,z) - V(x,+\ell/2,z) = U_H = -\frac{eE_0 B\ell}{f} = -\frac{BI}{neh}$ d'où on tire bien $R_H = -\frac{1}{ne}$.
   Pour un semi-conducteur, n est faible donc l'effet important. Pour des demi-conducteurs dopés p, il a le signe inverse car ce sont les trous positifs qui conduisent le courant.

Corrigé de l'exercice M11.7 : Cyclotron [***]

1. **Première phase : accélération**
   (a) $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y$ et la seule force est $q\vec{E} = \frac{qE_0}{m}\vec{e}_x$ donc le PFD, projeté sur $\vec{e}_x$, donne $\ddot{x}(t) = \frac{qE_0}{m}$
   On intègre : $\dot{x}(t) = qE_0 t$ et $x(t) = \frac{1}{2m}qE_0 t^2$
   (b) On résout $|x(t)| = \frac{\ell}{2}$ et on trouve $t_0 = \sqrt{\frac{m\ell}{qE_0}} = 299\,\text{ns}$
   (c) La vitesse aux bords vaut $v_0 = \dot{x}(t_0) = \sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}} = 2 \times 10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ donc $E_0 = \frac{\ell qE_0}{2}$
2. **Seconde phase : rotation**
   (a) La seule force qui s'applique sur la particule est la force magnétique, qui ne travaille jamais, donc le système est conservatif et $E_m = E_c = \text{cst}$ donc la norme de la vitesse est constante, égale à v_0.
   (b) L'étude cinématique en coordonnées cylindriques indique que $\vec{v} = r_1\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t)$ et comme la norme de al vitesse est constante, $\dot{\theta} = \text{cst}$. On a alors $\vec{a} = -r_1\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$. La seule force est la force magnétique $q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z = qr_1\dot{\theta}B\vec{e}_r$. Le PFD projeté selon $\vec{e}_r$ indique alors que $-mr_1\dot{\theta}(t)^2 = qr_1\dot{\theta}B$ soit $\dot{\theta}) = -\frac{qB}{m} = -\omega_c$ en posant $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$
   On en déduit alors la période $T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_c|}$ et le rayon $r_1 = -\frac{v_0}{\omega_c}$.
   (c) La particule passe sur le bord $x = \frac{\ell}{2}$ au bout d'un demi-tour, c'est-à-dire d'une demi-période : $t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{m\pi}{qB_0} = 4{,}7\,\mu\text{s}$. On voit que $t_1 > t_0$ (15 fois plus).
   (d) Lorsque la particule ressort, elle a fait demi-tour en se décalant de $2r_1$, donc $y(t_1) = -2\frac{v_0}{\omega_c} = -2\sqrt{\frac{\ell E_0 m}{qB_0^2}}$ et $v(t_1) = -v_0\vec{e}_x$.
3. **Troisième phase : accélération**
   Pendant cette phase, on a $\ddot{x}(t) = -\frac{qE_0}{m}$ donc $\dot{x}(t) = -v_0 - \frac{qE_0}{m}t = -\sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}} - \frac{qE_0}{m}t$ et $x(t) = \frac{\ell}{2} - \sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}}t - \frac{qE_0}{2m}t^2$.
   La particule sort de la zone lorsque $x(t_2) = -\frac{\ell}{2}$ soit $\frac{qE_0}{2m}t_2^2 + \sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}}t_2 - \ell = 0$. On résout cette équation : $\Delta = \frac{3\ell qE_0}{m}$ soit $t_2 = -\sqrt{\frac{\ell m}{qE_0}} + \sqrt{\frac{3\ell m}{qE_0}} = 219\,\text{ns}$
   On calcule alors la vitesse $v_2 = \dot{x}(t_2) = -\sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}} + \sqrt{\frac{\ell qE_0}{m}} - \sqrt{\frac{3\ell qE_0}{m}} = \sqrt{\frac{3\ell qE_0}{m}} = -\sqrt{3}v_0$ donc $E_2 = 3E_0 = \frac{3\ell qE_0}{2}$

4. **Quatrième phase : rotation**
   On a encore un demi-tour de durée $t_3 = t_1 = 4{,}7\,\mu s$ sur laquelle la vitesse change de sens mais pas de norme, donc l'énergie cinétique vaut $E_3 = \frac{3\ell q E_0}{2}$. À la fin, on a $x(t_3) = -\frac{\ell}{2}$ et $y(t_3) = y(t_1) + 2\frac{v_2}{\omega_c} = 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{\ell E_0 m}{qB_0^2}}$
5. La figure ci-dessous est pour un ion positif ; pour un ion négatif, la figure est symétrique par rapport à l'axe Oy.



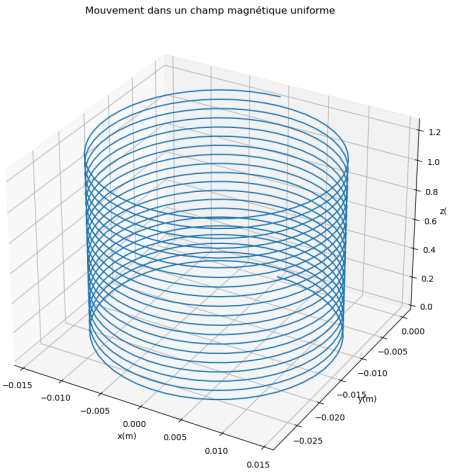
6. $t_0+t_1+t_2+t_3 = 9{,}8\,\mu s$ et $\frac{2\pi m}{eB_0} = 9{,}3\,\mu s$; on a 5 % d'écart sur le premier tour, mais ensuite, la particule va aller de plus en plus vite, et les temps de passage dans la zone centrale seront de plus en plus faibles. Par conséquent, pour que le champ électrique soit synchronisé avec les passages de l'ion, il faut le faire osciller à $f = \frac{qB_0}{2\pi m} = 107\,kHz$
7. À chaque passage, l'énergie cinétique augmente de $qE_0\ell$ donc $E_f = \left(N - \frac{1}{2}\right) qE_0\ell \approx NqE_0\ell$ et $v_f \approx \sqrt{\frac{2NqE_0\ell}{m}}$.
   On a donc $r_f = \frac{v_f}{\omega_c} \approx \sqrt{\frac{2NmE_0\ell}{qB_0^2}} = \sqrt{\frac{2E_f m}{q^2B_0^2}}$ donc $E_f = \frac{q^2B_0^2r_f^2}{2m}$
8. $E_{max} = \frac{q^2B_0^2R^2}{2m} = 3{,}1\times10^{-14}\,J = 194\,keV$
9. On peut jouer sur 3 paramètres :
   — augmenter le rayon, car E_{max} dépend de R^2 ; mais ça prend vite beaucoup de place
   — augmenter le champ magnétique, mais avec des aimants permanents on est vite limité
   — augmenter q ; pour cela on accélère l'ion dans un premier cyclotron, dont il ressort à grande vitesse, puis on l'envoie dans un « éplucheur » qui l'ionise plus fortement, et il entre alors dans un second cyclotron. En France, cela se fait au GANIL à Caen, avec des énergies en sortie de l'ordre de la centaine de MeV.

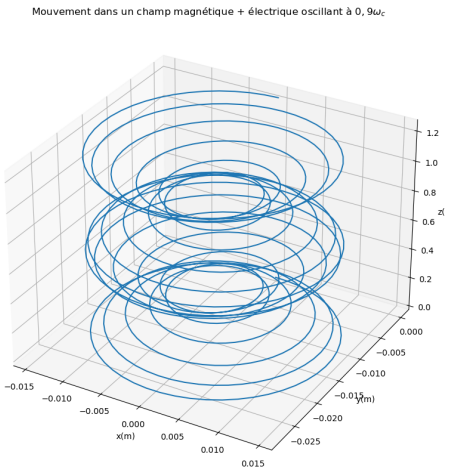
   On peut aussi choisir des ions moins lourds, mais alors la synchronisation du cyclotron devient plus délicate.

Réponses aux TDs numériques

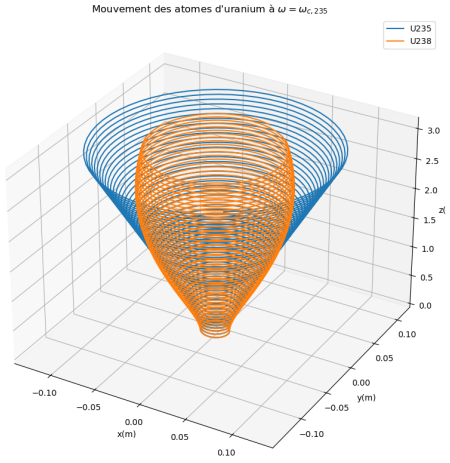
Réponses au TD d'info : Séparation isotopique par résonance cyclotron

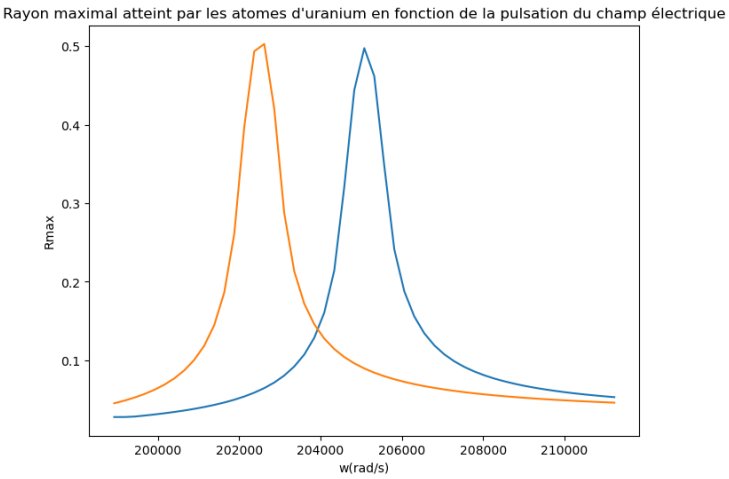
Avec un simple champ magnétique, l'ion décrit une hélice. Avec l'ajout d'un champ électrique, la courbe change d'allure, suivant la pulsation du champ électrique elle peut se mettre à se resserrer puis à s'écarter.





Mais au voisinage de $\omega = \omega_c$, il y a une résonance, et le rayon croît. Néanmoins les deux isotopes d'uranium résonant à des pulsations différentes, on peut trouver une pulsation à laquelle l'un des isotopes atteint de grands rayons et pas l'autre, et ainsi le récupérer.





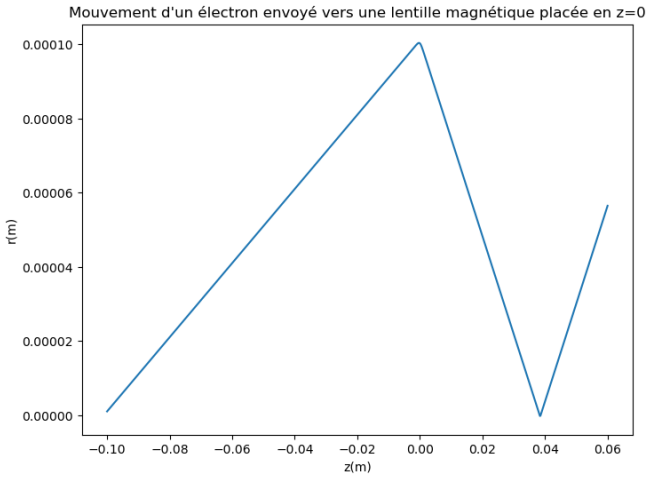
Il y a cependant des problèmes à cette technique :

— toute charge accélérée rayonne de l'énergie, ce qui est équivalent à une force de frottements et va élargir la courbe de résonance ; mais cet effet est faible

— si on veut isoler une quantité suffisante d'atomes, il faut mettre plusieurs ions d'un coup, alors ils se perturbent l'un l'autre et ça marche mal

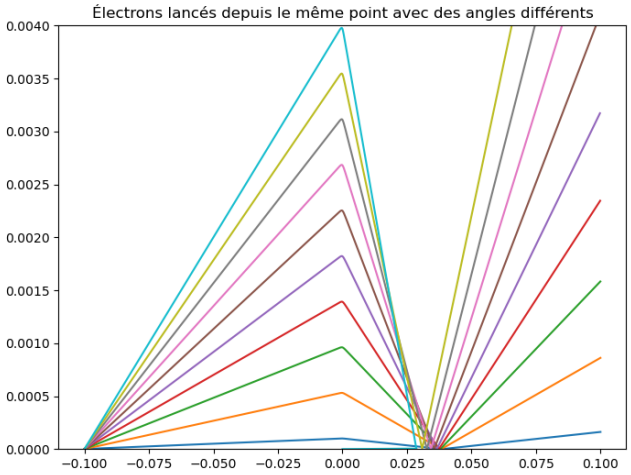
Réponses au TD d'info : Lentille magnétique

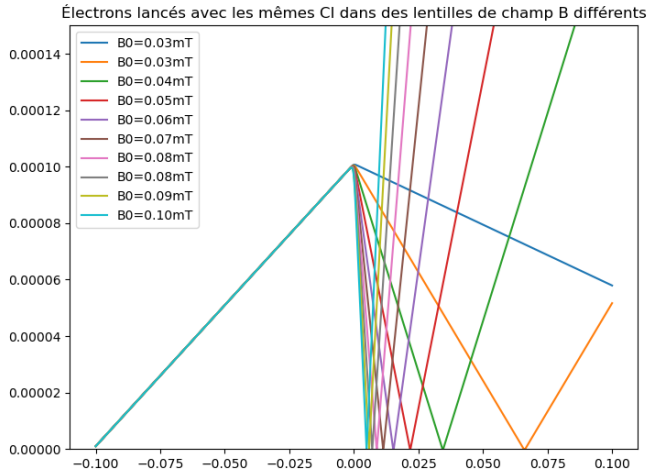
La simulation donne une courbe dans laquelle on voit l'électron avancer en ligne droite jusqu'à $z = 0$, puis changer de direction et repartir vers l'axe. Le « rebond » sur l'axe est dû au fait qu'on trace r qui est positif ; en fait la particule traverse l'axe en igne droite, mais la valeur absolue donne cet aspect de rebond. Sur la simulation ci-dessous par exemple, on mesure $Z = -10\,\text{cm}$ et $Z' = +4\,\text{cm}$ d'où on tire $f' = 2{,}86\,\text{cm}$; on retrouve la même valeur en modifiant Z.



Si on fait varier l'angle, on constate que pour de grands angles, le point de convergence est plus près de la lentille : c'est l'analogue de l'aberration sphérique avec les lentilles minces.

Si on fait varier le champ magnétique, on peut faire varier la distance focale de la lentille.

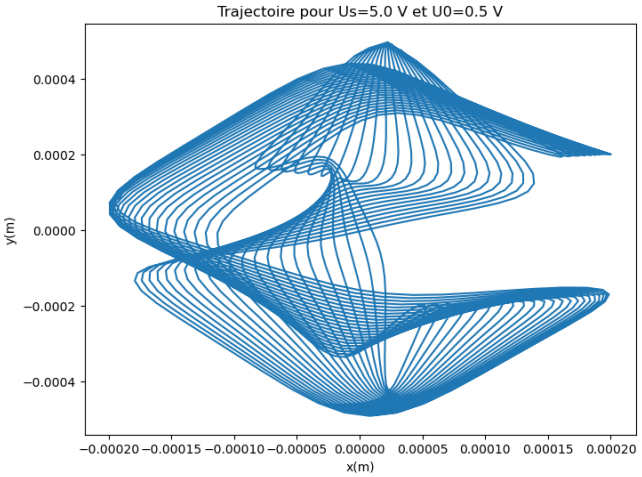


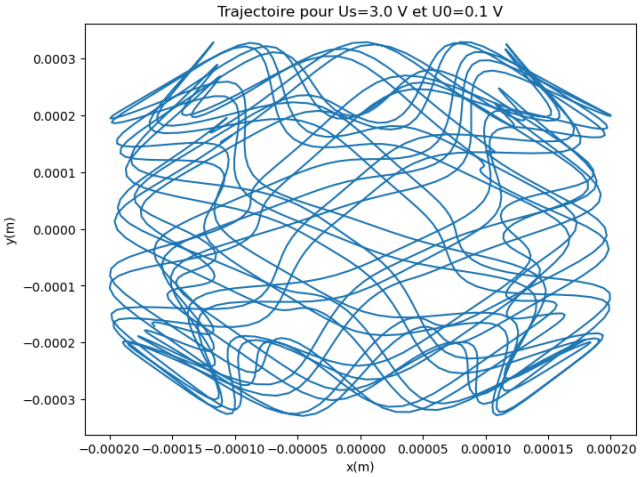


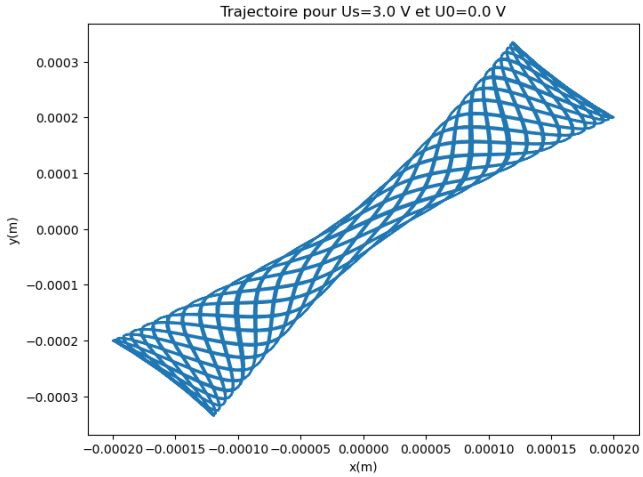
Réponses au TD d'info : Piège de Paul

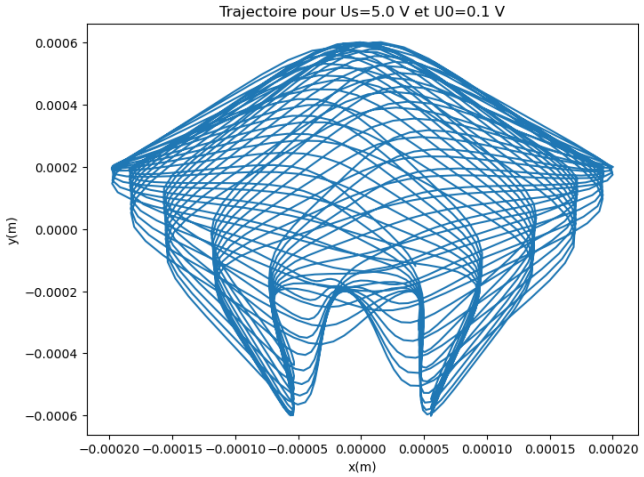
$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} = \frac{U(t)}{r_0^2}\left(-x\vec{e_x} + y\vec{e_y}\right)$ En appliquant le PFD on obtient donc les équations proposées avec $\alpha = \frac{e}{mr_0^2}$

Des simulations dans la zone stable donnent des trajectoires dessinant d'étranges figures :

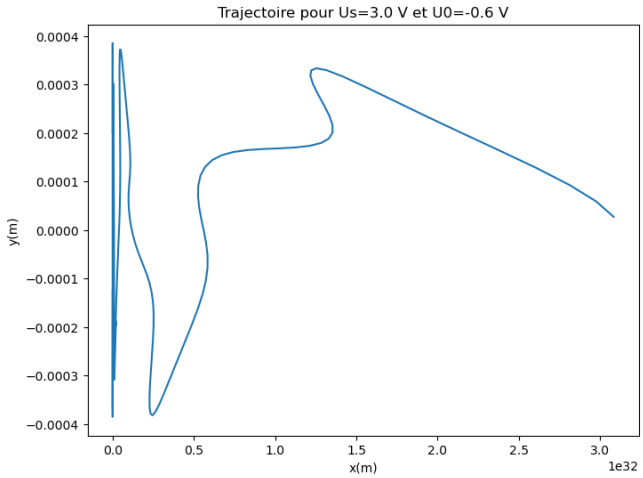


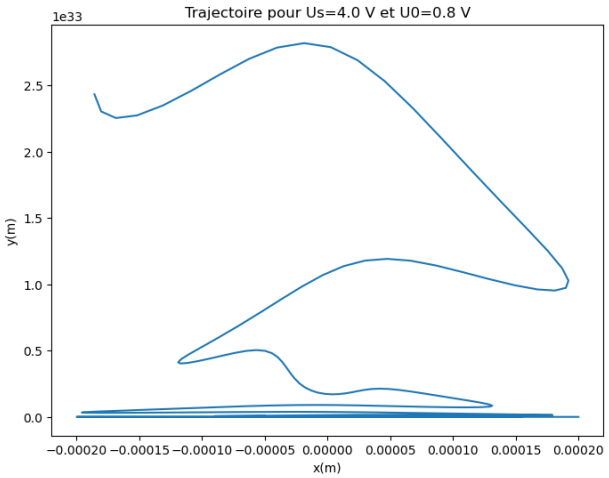


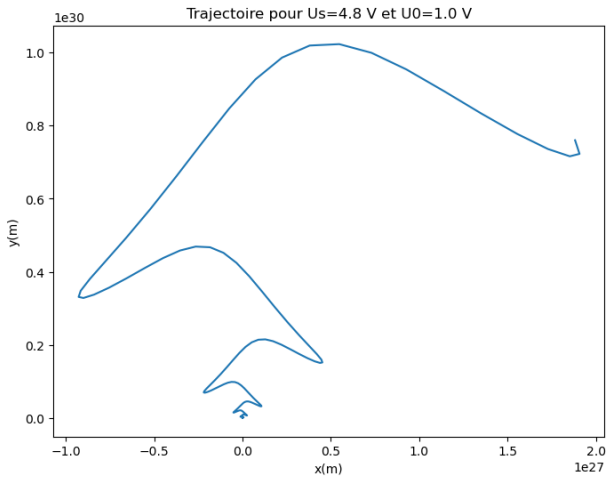


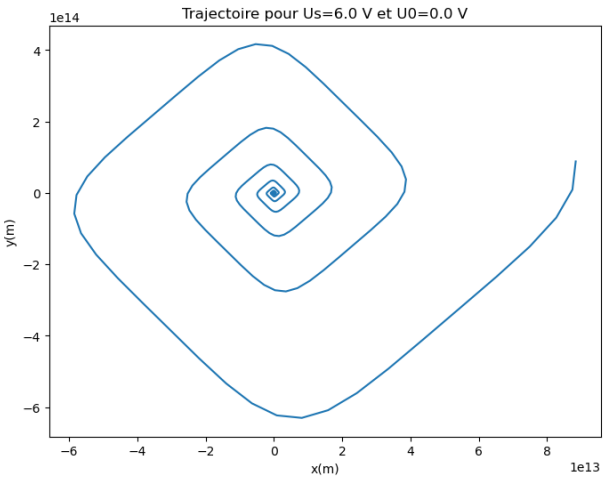


Dans la zone instable, l'électron part au loin avec des trajectoires très différentes et parfois étonnantes :









Électromagnétisme

Chapitre EM1 Champs magnétiques et courants

Programme p.1027

Conseils p.1028

Cours p.1014
- EM1.A. Généralités sur le champ magnétique
- EM1.B. Action d'un champ magnétique sur un courant

QCMs p.1029

Exercices p.1030

TDs numériques p.1033

EM1. Champs magnétiques et courants

Cours

Nous avons déjà parlé du champ magnétique lors du chapitre sur les MOUVEMENTS DE PARTICULES CHARGÉES. Nous y avons vu qu'un champ magnétique exerce sur une particule chargée une force magnétique de Lorentz.

Or nous avons vu au début de l'année qu'un courant électrique est un déplacement de charges électriques. Donc un courant placé dans un champ magnétique va ressentir une force magnétique aussi. Mais il va falloir faire attention à une différence majeure : dans le cas d'un courant qui circule dans un conducteur, le mouvement des charges et le mouvement du conducteur ne sont pas identiques, contrairement au cas de la particule qui se déplace.

EM1.A. Généralités sur le champ magnétique

A.1. Propriétés du champ magnétique

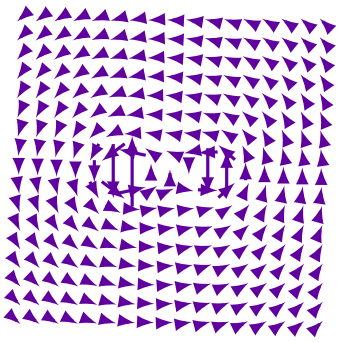
On va commencer par rappeler quelques propriétés qu'on a déjà vues.

Propriété : Champ magnétique

On admet qu'en tout point de l'espace il existe un champ vectoriel appelé **champ magnétique**, noté $\vec{B}$, qui se mesure en Tesla T. Ce champ est produit par des courants ou par des particules chargées en mouvement.

Remarque : Le Tesla est une unité très grande ; un champ d'1 T est très puissant. On utilise donc souvent le mT, mais on trouve aussi parfois le Gauss : $1\,\text{G} = 1 \times 10^{-4}\,\text{T}$.

Pour représenter un champ vectoriel comme un champ magnétique, on peut représenter une carte de champ, comme ci-contre, qui consiste à calculer en différents points d'un maillage le vecteur $\vec{B}$, puis à le représenter par une flèche. On voit alors apparaître, en suivant ces flèches, des sortes de lignes courbes qui se dessinent ; on voit aussi apparaître des chevauchements dus à la difficulté de choisir une échelle pour les flèches, dont la longueur varie sur ce schéma d'un facteur supérieur à 50. Il est en réalité plus pratique de travailler uniquement avec les lignes imaginaires : on ne tracera donc pas une carte de champ, mais une carte de lignes de champs.



Définition : Ligne de champ

On représente un champ vectoriel par une carte de lignes de champs. Une ligne de champ est une courbe orientée qui, en tout point, est tangente au champ représenté.

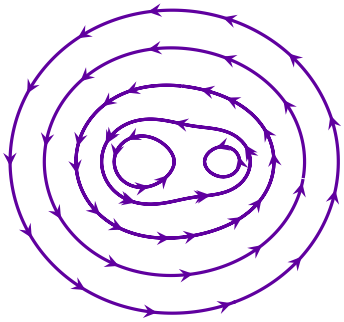
La figure EM1.1 montre un exemple de lignes de champ créées par deux fils parallèles. On y voit aussi la visualisation expérimentale des lignes de champ à l'aide de limaille de fer.

Propriété : Observation des lignes de champ magnétique

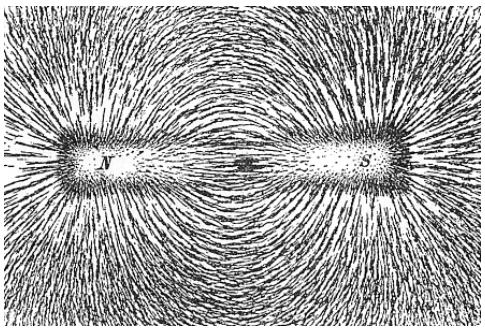
Si on saupoudre de la limaille de fer (petits morceaux de fer allongés obtenus en limant un morceau de fer) sur une feuille et qu'on applique un champ magnétique, les morceaux de fer s'alignent et font apparaître les lignes de champ magnétique.

Chaque champ vectoriel a des propriétés qui lui sont propre, et qui aident à lire une carte de lignes de champ. Le champ magnétique a une propriété fondamentale qui dérive d'une équation que vous verrez l'an prochain : l'équation de Maxwell-Thomson.

FIGURE EM1.1 : Exemple de carte de lignes de champ magnétique.



(a) Calcul théorique du champ créé par deux fils



(b) Observation à l'aide de limaille de fer des lignes de champ créées par un aimant droit. (Crédit : N.H.Black/Wikipedia)

Propriété : Lignes de champ et intensité du champ magnétique

L'intensité (ou la norme) du champ magnétique est reliée à la géométrie de ses lignes de champ :

- lorsque les lignes de champ magnétique se resserrent, la norme du champ magnétique augmente
- lorsque les lignes de champ magnétique s'écartent, la norme du champ magnétique diminue
- lorsque les lignes de champ magnétique sont parallèles, la norme du champ magnétique est constante, le champ est uniforme

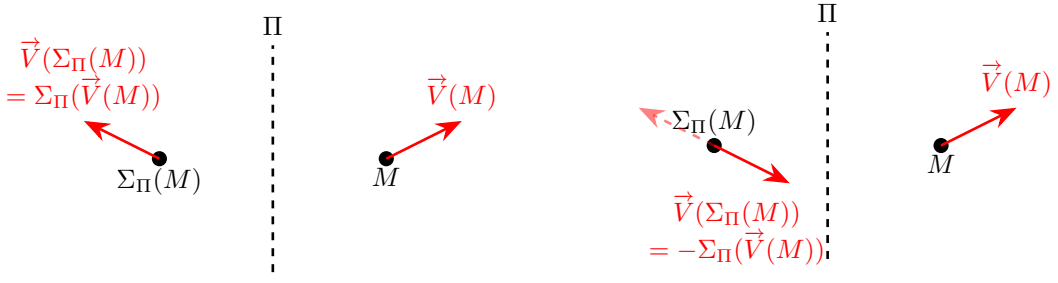
Enfin, on peut noter que les propriétés géométriques des courants se retrouvent dans le champ magnétique qu'elles créent. Cela concerne deux propriétés, les invariances et les symétries. On va dire un mot seulement des secondes. Si on considère un plan Π, alors on peut définir mathématiquement la symétrie par rapport à Π, notée Σ_Π. Cette symétrie peut laisser une figure inchangée : Π est alors un plan de symétrie de la figure. Dans le cas d'un champ vectoriel, comme le courant ou le champ magnétique, c'est un peu différent, il peut exister deux cas de figures.

Définition : Plans de symétrie et d'antisymétrie

Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel, et Π un plan :

- on dit que Π est un plan de symétrie du champ $\vec{V}$ si l'action de la symétrie Σ_Π laisse le champ inchangé ; autrement dit, pour tout point M, on a $\vec{V}(\Sigma_\Pi(M)) = \Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ (figure EM1.2(a))
- on dit que Π est un plan d'antisymétrie du champ $\vec{V}$ si l'action de la symétrie Σ_Π donne l'opposé du champ initial ; autrement dit, pour tout point M, on a $\vec{V}(\Sigma_\Pi(M)) = -\Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ (figure EM1.2(b))

FIGURE EM1.2 : Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un champ vectoriel.



(a) Plan de symétrie

(b) Plan d'antisymétrie

Pour un point appartenant à un plan de (anti)symétrie, cela a des conséquences :

Propriété : Champ vectoriel sur un plan d'(anti)symétrie

Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel, et Π un plan :

— si Π est un plan de symétrie de $\vec{V}$, alors pour tout point $M \in \Pi$, $\vec{V}(M) /\!/ \Pi$

— si Π est un plan d'antisymétrie de $\vec{V}$, alors pour tout point $M \in \Pi$, $\vec{V}(M) \perp \Pi$

Démonstration

On le voit facilement sur la figure EM1.2 : si $M \in \Pi$ alors $\Sigma_\Pi(M) = M$ donc

— si Π est un plan de symétrie, $\vec{V}(M) = \Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ donc $\vec{V}(M)$ appartient au noyau de $\Sigma_\Pi - \mathrm{Id}$ qui est le plan Π

— si Π est un plan d'antisymétrie, $\vec{V}(M) = -\Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ donc $\vec{V}(M)$ appartient au noyau de $\Sigma_\Pi + \mathrm{Id}$ qui est la droite orthogonale à Π

On admet alors les propriétés de symétrie du champ magnétique :

Propriété : Symétries du champ magnétique

Soit Π un plan :

— si Π est un plan de symétrie des courants, alors c'est un plan d'antisymétrie du champ magnétique créé par ces courants ; en tout point de ce plan, $\vec{B} \perp \Pi$

— si Π est un plan d'antisymétrie des courants, alors c'est un plan de symétrie du champ magnétique créé par ces courants ; en tout point de ce plan, $\vec{B} /\!/ \Pi$

Remarque : Cette seconde propriété se déduit de l'équation de Maxwell-Ampère que vous verrez l'année prochaine.

A.2. Champ magnétique créé par des courants

Il est bon de connaître les principales méthodes pour créer un champ magnétique, à l'aide de courants ou d'aimants permanents. Nous allons voir quelques géométries simples, en n'oubliant pas que le champ magnétique vérifie le principe de superposition :

Propriété : Principe de superposition

Pour déterminer le champ créé par plusieurs sources de champ (courants ou aimants), on peut simplement sommer le champ créé par chacune d'elles.

Fil rectiligne

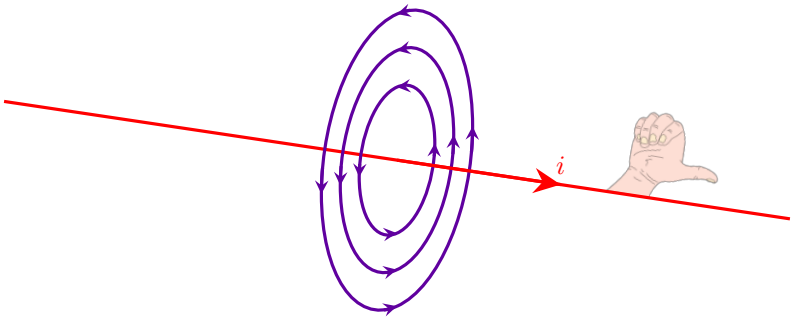
Soit un fil rectiligne parcouru par un courant I. Tout plan contenant le fil est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}$; de même tout plan orthogonal au fil est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de $\vec{B}$, donc le champ magnétique est compris dans les plans orthogonaux au fil.

Propriété : Champ magnétique créé par un fil

Le champ s'enroule en cercles autour du fil ; il est proportionnel à i, inversement proportionnel à la distance r en coordonnées cylindriques ; sa valeur vaut $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Son sens est donné par la règle de la main droite : si on place le pouce de la main droite dans le sens du courant, l'enroulement des 4 autres doigts indique le sens de $\vec{B}$.

Remarque : Ce champ est très très faible : pour un fil parcouru par 1 A, à une distance de 10 cm cela donne $B = 2 \times 10^{-6}$ T. Pour avoir plus de champ magnétique, il faut mettre plusieurs fils dont les effets s'ajoutent : c'est ainsi qu'on va enrouler du fil pour former une bobine.

FIGURE EM1.3 : Champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant



Bobines

Définition : Spire et bobine

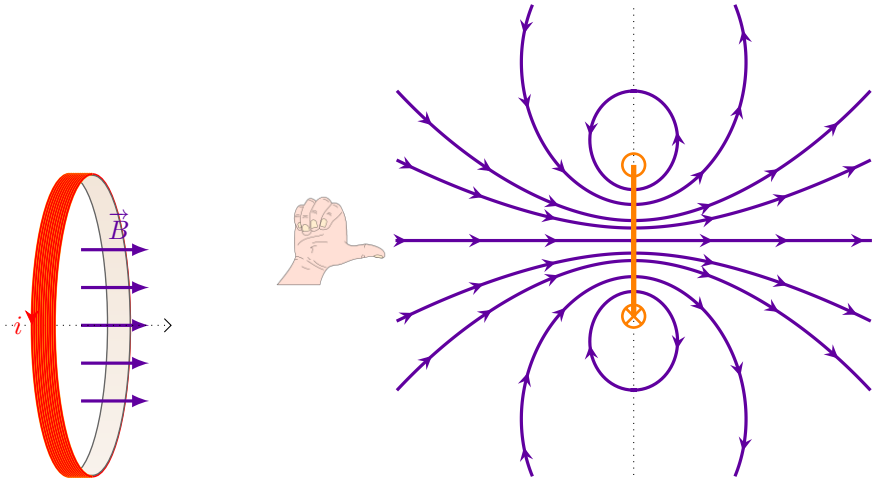
Une spire (de courant) est un circuit refermé (une boucle) parcouru par un courant ; elle ne fait qu'un seul tour. Une bobine est un enroulement de plusieurs spires.

Le plan de la spire est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}$, tandis que tous les plans contenant l'axe de la spire sont plans d'antisymétrie des courants, donc plans de symétrie de $\vec{B}$.

Propriété : Champ magnétique créé par une spire

Le champ traverse la spire selon la règle de la main droite : si on place la main de manière à ce que le courant tourne dans le même sens que l'enroulement des 4 doigts, alors le pouce indique la direction de $\vec{B}$. Il est proportionnel à i.

FIGURE EM1.4 : Champ magnétique créé par une spire circulaire ou par une bobine plate circulaire (coupe dans un plan médiateur de la spire).



Remarque : La figure EM1.4 montre le champ créé par une spire. On voit que le champ est maximal au centre de la spire, et décroît quand on s'éloigne. On peut montrer que le champ au centre vaut $\frac{\mu_0 i}{2R}$ ce qui est aussi faible que pour un fil. Mais si on effectue N tours, alors par principe de superposition, le champ au centre vaut $B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$. Ainsi, en mettant beaucoup de tours, on peut avoir un champ plus fort. Mais le fil prend de la place. Tant que N n'est pas trop grand, on parle encore de « bobine plate », mais si on met trop de fil, la bobine devient épaisse et son champ est légèrement modifié par rapport à la spire plate.

Si on veut un champ très fort, il ne suffit pas de mettre beaucoup de tours : par exemple, pour une IRM, il faut un champ magnétique pouvant aller jusqu'à 7 T. En plus de faire beaucoup de spires, il faut faire passer un fort courant. Pour éviter de faire fondre les fils, on s'oriente alors vers des bobines supraconductrices.

Le champ magnétique créé par une bobine n'est absolument pas uniforme. Or on a souvent besoin de champs magnétiques uniformes. Il existe alors deux géométries privilégiées :

— les bobines de Helmholtz sont un dispositif simple constitué de deux bobines de même rayon R, parcourues par le même courant i, écartées d'une distance R. Une simulation du champ magnétique créé (figure EM1.5) montre alors une zone de champ uniforme dans la zone à l'intérieur des bobines.

— le solénoïde est une bobine très longue, avec des spires régulièrement espacées. Une simulation du champ magnétique créé (figure EM1.6) montre alors que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme ; on admettra qu'un vaut $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ avec N le nombre de spires et ℓ la longueur du solénoïde ; il est très faible en dehors du solénoïde.

FIGURE EM1.5 : Champ magnétique créé par des bobines de Helmholtz.

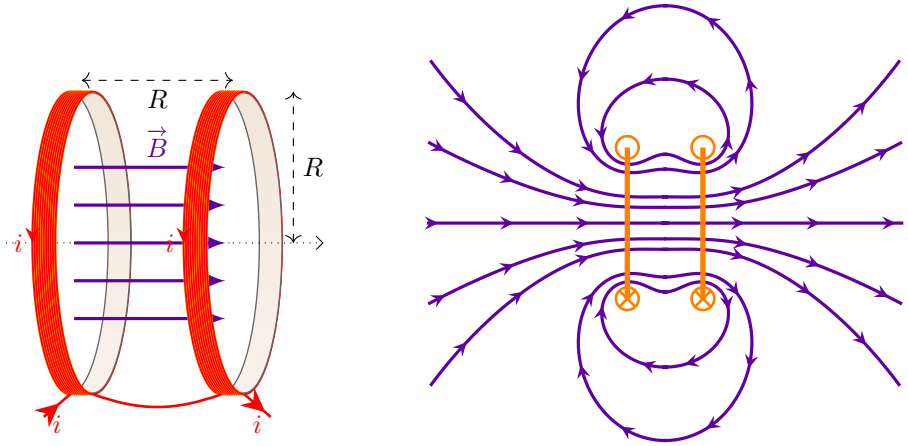
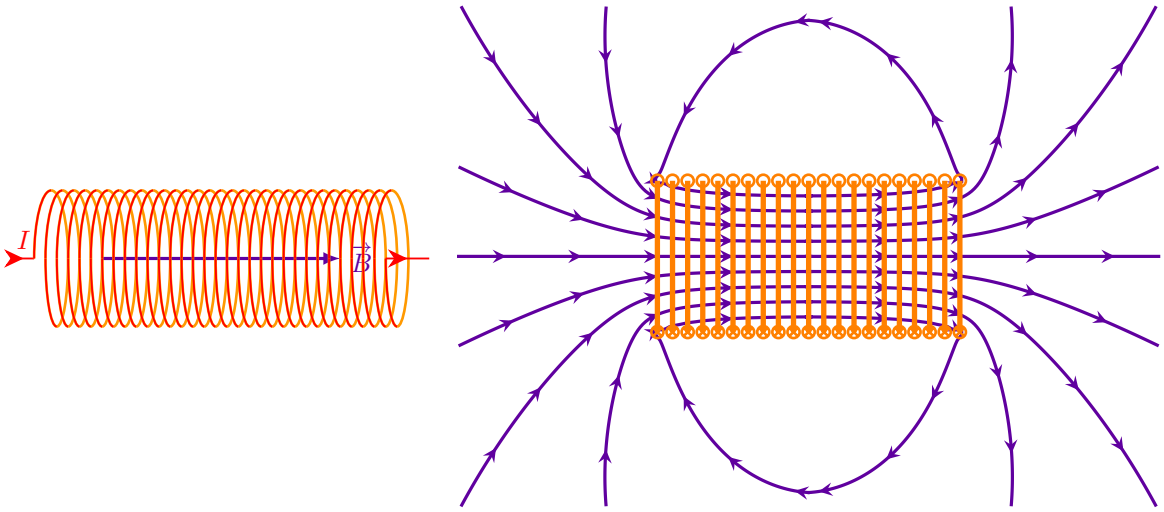


FIGURE EM1.6 : Champ magnétique créé par un solénoïde.



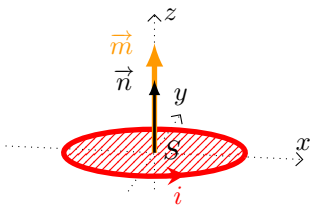
Aimants permanents

Définition : Dipole magnétique

Une spire de courant vue à grande distance est appelée un dipôle magnétique.
On lui associe un moment dipolaire magnétique

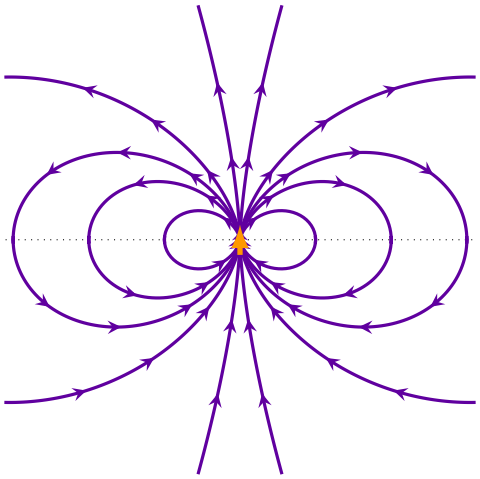
$$\vec{m} = S.i.\vec{n} \qquad \text{(EM1.1)}$$

où S représente sa surface, i le courant qui circule, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface. $\vec{m}$ se mesure en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$ ou en $\mathrm{J} \cdot \mathrm{T}^{-1}$.
On admet que le champ créé à grande distance ne dépend que de $\vec{m}$ et non pas de la forme de la spire, et que sa norme décroît comme $1/r^3$. La carte de champ magnétique est représentée sur la figure EM1.7.



Remarque : Si le circuit est constitué de N spires, le moment magnétique est multiplié par N.

FIGURE EM1.7 : Champ magnétique créé par un dipôle.



Or à l'échelle atomique, il existe deux types de moments dipolaires magnétiques :

— les électrons qui tournent autour des noyaux des atomes créent un **moment dipolaire orbital**. On peut l'évaluer par un modèle classique d'un atome d'hydrogène formé d'un noyau fixe de charge $+e$ autour duquel tourne un électron de charge $-e$ et de masse m_e. Le moment cinétique de l'électron vaut $L = m_e r^2 \dot{\theta}$ en coordonnées cylindriques. Or l'électron tourne autour du noyau avec une période $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$, ce qui correspond à une intensité $i = \frac{-e}{T} = \frac{-e\dot{\theta}}{2\pi}$ soit un moment dipolaire magnétique $m = \pi r^2 i = \frac{-e\dot{\theta}r^2}{2}$. Ainsi, on voit que $m = \frac{-e}{2m_e}L$. Or selon la théorie quantique, le moment cinétique d'un atome d'hydrogène est quantifié et vaut un multiple entier de $\hbar$. Donc le moment magnétique orbital vaut un multiple entier de $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}3 \times 10^{-24}\,\mathrm{A \cdot m^2}$ appelé **magnéton de Bohr**.

— les électrons tournent sur eux-mêmes : c'est le **spin**, qui se traduit par un moment cinétique $S = \pm\frac{\hbar}{2}$. Là encore, le moment magnétique est relié au moment cinétique, mais avec un facteur 2 : $m = \frac{-e}{m_e}S$ ce qui redonne le magnéton de Bohr : c'est le **moment dipolaire de spin**.

Ces moments magnétiques sont importants : une mole de magnéton de Bohr correspond à un moment magnétique $m = 5{,}6\,\mathrm{A \cdot m^2}$ qui est équivalent à un courant de 5,6 A tournant autour d'une surface de $1\,\mathrm{m^2}$.

Et pourtant, dans la plupart des matériaux, on n'observe aucun effet magnétique. En effet, en mécanique quantique, les électrons occupent les états électroniques par paires de spins opposés : leurs moments magnétiques s'annulent alors. Il en va de même pour le magnétisme orbital. Mais pour les éléments avec des couches électroniques à demi pleines (métaux de transition, terres rares), ce n'est pas le cas, et des effets magnétiques apparaissent avec des atomes comme le chrome, manganèse, fer, cobalt, nickel par exemple pour les métaux de transition, ou pour les terres rares (lanthanides) qui ont des effets magnétiques très forts.

À l'échelle microscopique, ces éléments ont donc des moments magnétiques non nuls. Mais l'agitation thermique a tendance à les orienter dans tous les sens, ce qui fait qu'un morceau de fer quelconque par exemple ne produit pas de champ magnétique[1]. Mais si on chauffe un morceau de fer au-dessus de sa **température de Curie** (770 °C), alors un champ magnétique très faible suffit à aligner tous les moments dipolaires dans le même sens. On le refroidit ensuite, les moments magnétiques se figent tous dans la même direction, et on a obtenu un aimant. Néanmoins cela ne fonctionne pas avec tous les matériaux : il faut qu'il y ait une interaction à l'échelle microscopique, d'origine quantique, qui incite les atomes voisins à s'orienter dans la même direction. De tels matériaux s'appellent des matériaux *ferromagnétiques*.

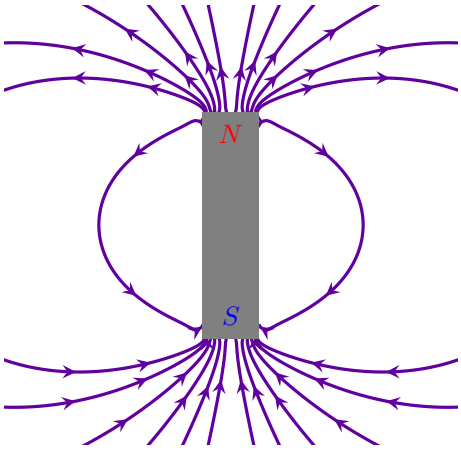
Définition : Aimant

Un aimant est un matériau possédant un moment dipolaire macroscopique non nul. Il est caractérisé par son **aimantation** M, qui représente le moment dipolaire par unité de volume, en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$.
Un aimant possède un pôle Nord (par où sortent les lignes de champ) et un pôle Sud (par où rentrent les lignes de champ).
Si on approche deux aimants, les pôles identiques se repoussent tandis que les pôles opposés s'attirent.

Remarque : On admettra que $\mu_0 M$ est homogène à un champ magnétique, il donne l'ordre de grandeur du champ magnétique créé au voisinage de l'aimant. Il vaut quelques dixièmes de Tesla pour des aimants en ferrite, plus d'un Tesla pour un aimant néodyme fer bore.

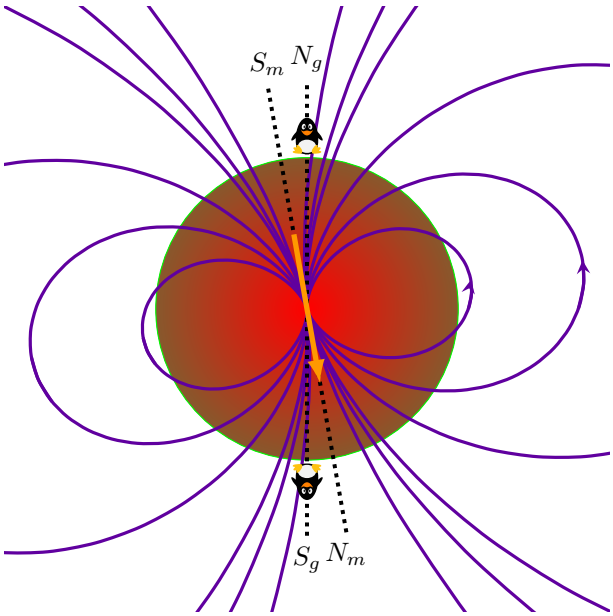
1. C'est un peu plus compliqué que cela. À l'échelle microscopique, on observe dans un morceau de fer des zones magnétiques, les *domaines magnétiques*, mais qui sont orientés aléatoirement dans toutes les directions.

FIGURE EM1.8 : Champ magnétique créé par un aimant droit



Remarque : Le champ magnétique terrestre est dû à la présence en son centre d'un noyau de fer parcouru par des courants très puissants, qui créent un champ magnétique approximativement dipolaire, avec le pôle sud magnétique au pôle nord géographique, et vice-versa (figure EM1.9). La valeur du champ magnétique en surface est de 47 µT au centre de la France.

FIGURE EM1.9 : Champ magnétique terrestre.



EM1.B. Action d'un champ magnétique sur un courant

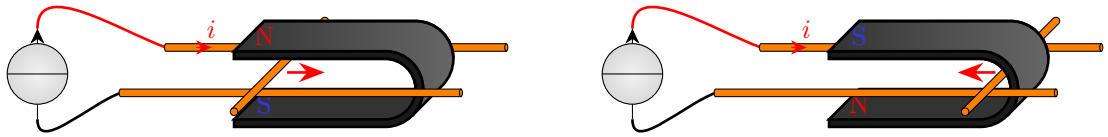
B.1. Force de Laplace

Le champ magnétique créé par un courant est faible ; réciproquement, l'effet d'un champ magnétique sur un courant est lui aussi faible. Pour le mettre en évidence, l'idéal est d'utiliser un dispositif particulier où un conducteur peut se déplacer librement en roulant sur les autres : le rail de Laplace, décrit sur la figure EM1.10. Dans cette expérience, on alimente avec un générateur de courant pouvant débiter plusieurs Ampères, un circuit constitué uniquement de fils de cuivre de faible résistance. Mais l'un des fils est en fait un tube de cuivre qui peut rouler sur les autres tout en maintenant le contact électrique. Ainsi, ce conducteur peut bouger sous l'effet d'une force assez faible.

Lorsqu'on place ce conducteur entre les pôles d'un aimant en U (qui crée un champ vertical de N vers S), on constate que, lorsqu'un courant circule, le tube se déplace perpendiculairement à la fois à la direction du courant et à

celle du champ magnétique (figure EM1.10).

FIGURE EM1.10 : Expérience du rail de Laplace.



De plus, on constate qu'on peut inverser le sens du mouvement :

— en inversant le sens du courant

— en inversant le sens du champ magnétique

Ces résultats expérimentaux peuvent être expliqué à l'aide de la force de Laplace :

Propriété : Force de Laplace

Sur une portion de conducteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ parcourue par un courant i, soumise à une force $\vec{B}$, s'exerce une force $\mathrm{d}\vec{F} = i.\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.
Sur un fil AC parcouru par i et soumis à un champ $\vec{B}$ s'exerce une force

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = \int_A^C i.\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \qquad \text{(EM1.2a)}$$

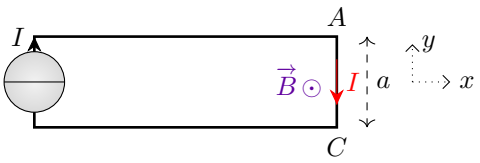
si le champ est uniforme alors

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = i.\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B} \qquad \text{(EM1.2b)}$$

Remarque : Cette année, on se contentera le plus souvent de champs uniformes et la forme globale sera la plus utilisée.

Exemple : Force sur le rail de Laplace — À connaître

On modélise l'expérience du rail de Laplace vue de dessus :



Exprimez la force de Laplace sur AC. AN pour $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$, $I = 6\,\mathrm{A}$ et $a = 6\,\mathrm{cm}$.

La portion de conducteur considérée est AC avec $\overrightarrow{AC} = -a\vec{e}_y$, parcourue par I, dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. La force de Laplace qui s'exerce dessus est $\vec{F} = I.(-a\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_z = -IaB\vec{e}_x$.
On trouve $F = 36\,\mathrm{mN}$: c'est très faible.

Propriété : Point d'application de la force de Laplace

Si un conducteur **rectiligne** AC parcouru par un courant i est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ **uniforme**, alors tout se passe comme si la force de Laplace $i.\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$ s'appliquait au point situé au milieu du segment $[AC]$.

Démonstration

Cette démonstration n'est pas à connaître, il faut seulement retenir la propriété.
On prend l'axe $\vec{e}_x$ parallèle à $\overrightarrow{AC}$; on note $a = AC$ et H le milieu de $[AC]$; on note aussi $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$.
Soit P un point situé sur le fil entre A et C, repéré par $\overrightarrow{HP} = x\vec{e}_x$ avec $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$. Le petit morceau

$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x$ autour de P subit une force de Laplace $\mathrm{d}\vec{F} = i.\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge \vec{B}$ qui a un moment par rapport à l'origine O qui vaut $\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathrm{d}\vec{F}$ (dans ce chapitre, on évite d'utiliser la notation $\vec{\mathcal{M}}$ pour les moments de forces, pour ne pas confondre avec les moments magnétiques). Le moment total par rapport à O vaut donc

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \int_A^C \mathrm{d}\vec{\Gamma} = \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{OP} \wedge \left(i.\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) \\
&= \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{OH} \wedge \left(i.\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) + \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{HP} \wedge \left(i.\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) \text{ (relation de Chasles)} \\
&= \overrightarrow{OH} \wedge \left(\int_{-a/2}^{+a/2} i.\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) + \int_{-a/2}^{+a/2} x\,\vec{e}_x \wedge (i.\mathrm{d}x.B_y\,\vec{e}_z - i.\mathrm{d}x.B_z\,\vec{e}_y) \\
&= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap} + i\int_{-a/2}^{+a/2} x.\mathrm{d}x\,(-B_y\,\vec{e}_y - B_z\,\vec{e}_z) \\
&= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap} + i\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a/2}^{+a/2} (-B_y\,\vec{e}_y - B_z\,\vec{e}_z) \\
&= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap}
\end{aligned}$$

La force de Laplace ressemble à celle de Lorentz, pourtant elle est différente. En particulier, la force magnétique de Lorentz ne travaille jamais, alors que la force de Laplace travaille.

Définition : Flux du champ magnétique à travers un circuit

Soit un circuit fermé orienté, de surface S et de normale $\vec{n}$. Le flux de $\vec{B}$ à travers ce circuit est défini par

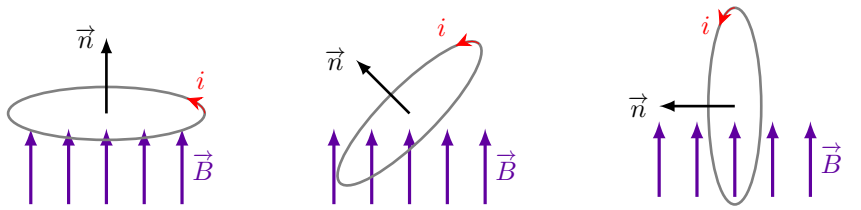
$$\Phi_{\vec{B}} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad \text{(EM1.3a)}$$

en $\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2$ ou en Weber (Wb) ; il caractérise la « quantité de champ $\vec{B}$ qui traverse le circuit ».
Si $\vec{B}$ est uniforme, l'expression se simplifie :

$$\Phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{n}S \qquad \text{(EM1.3b)}$$

Il faut imaginer le flux à travers un circuit comme si le circuit était une épuisette qui essayait d'attraper du champ magnétique. Sur la figure EM1.11, sur le premier schéma, on attrape du champ ; sur le second, un peu moins, et sur le troisième plus du tout.

Figure EM1.11 : Flux de $\vec{B}$ à travers une surface.



(a) Surface orthogonale à $\vec{B}$ (b) Surface inclinée (c) Surface parallèle à $\vec{B}$

Remarque : C'est le courant qui oriente le circuit et donne le sens du vecteur $\vec{n}$, par la règle de la main droite.

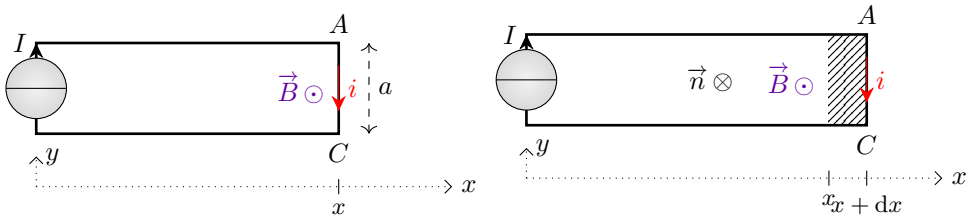
Remarque : Si le circuit est constitué de N spires, le flux est multiplié par N.

Propriété : Puissance des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé

Soit un circuit fermé orienté placé dans un champ magnétique **constant**. Soit $\Phi_{\vec{B}}$ le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit. Alors la puissance des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit vaut $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t}$

Démonstration

On va démontrer ce résultat dans le cas du rail de Laplace, en faisant un bilan entre t et $t+\mathrm{d}t$.



On a déjà montré que la force de Laplace s'écrit $\vec{F} = -ia\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = -iaB\vec{e}_x$. Entre t et $t+\mathrm{d}t$, si le rail s'est déplacé de $\mathrm{d}x$, le travail vaut $\delta W = -iaB.\mathrm{d}x$ donc la puissance de la force vaut $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = -iaB\dot{x}$.
Or entre l'instant t et l'instant $t+\mathrm{d}t$, le circuit a gagné la surface hachurée, ce qui correspond à un flux gagné $\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}} = -B \times$ surface hachurée $= -B.a.\mathrm{d}x$; pourquoi le signe $-$? car le circuit est orienté par i, qui tourne ici dans le sens horaire, donc le vecteur normal $\vec{n}$ est rentrant, opposé à $\vec{B}$. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}}{\mathrm{d}t} = -aB\dot{x}$.
On vérifie donc bien que $\mathcal{P} = i\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t}$.

Remarque : Pour le moment, cette propriété ne sert pas beaucoup, mais le flux sera très important dans le chapitre suivant.

B.2. Action d'un champ uniforme sur un circuit fermé

Les circuits électriques sont fermés pour que le courant y circule. Dans certains cas, le champ magnétique qui s'y applique n'est pas uniforme ; par exemple dans le cas du rail de Laplace, l'aimant ne couvre pas tout le circuit ; néanmoins il existe de nombreux cas où le circuit fermé baigne entièrement dans un champ magnétique à peu près uniforme : c'est le cas des dipôles, mais aussi des moteurs électriques tournants.

Remarque : La définition du moment magnétique $\vec{m} = i.S.\vec{n}$ fonctionne pour tout circuit fermé plan, même s'il est de grande taille. Si on a une bobine avec N tours, il suffit de multiplier le moment magnétique d'un spire par N.

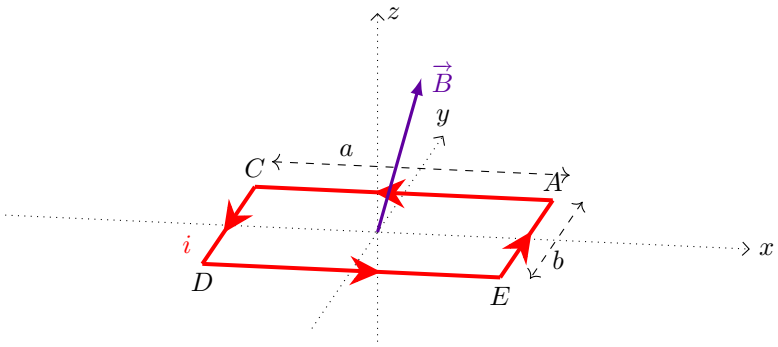
Propriété : Action d'un champ magnétique uniforme sur un moment magnétique

Si on plonge un circuit fermé de moment magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, alors le circuit (pris dans son ensemble) subit :

- une force de Laplace totale **nulle** : $\vec{F}_{\text{Laplace}} = \vec{0}$
- un couple de moment $\vec{\Gamma}_{\text{Laplace}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

Démonstration

On va faire le calcul sur le cas d'une spire rectangulaire de dimensions $a \times b$ comme sur le schéma ci-dessous. Pour avoir la force qui s'applique sur le circuit, on somme les forces sur chaque côté : $\vec{F}_{\text{Laplace}} = \vec{F}_{\to AC} + \vec{F}_{\to CD} + \vec{F}_{\to DE} + \vec{F}_{\to EA} = i.\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B} + i.\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B} + i.\overrightarrow{DE} \wedge \vec{B} + i.\overrightarrow{EA} \wedge \vec{B} = i.\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.



On procède de même pour le calcul du moment. On a vu précédemment que, dans un champ magnétique uniforme, la force de Laplace s'applique au milieu d'un segment rectiligne. On l'applique aux 4 segments, en notant $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$:

$$\vec{\Gamma}_{\to AC} = \frac{b}{2}\vec{e}_y \wedge \left(-i.a\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) = \frac{b}{2}\vec{e}_y \wedge (-i.a.B_y\vec{e}_z + i.a.B_z.\vec{e}_x) = -\frac{iab}{2}B_y\vec{e}_x$$
$$\vec{\Gamma}_{\to CD} = -\frac{a}{2}\vec{e}_x \wedge \left(-i.b\vec{e}_y \wedge \vec{B}\right) = -\frac{a}{2}\vec{e}_x \wedge (i.b.B_x\vec{e}_z - i.b.B_z.\vec{e}_x) = \frac{iab}{2}B_x\vec{e}_y$$
$$\vec{\Gamma}_{\to DE} = -\frac{b}{2}\vec{e}_y \wedge \left(i.a\vec{e}_x \wedge \vec{B}\right) = -\frac{b}{2}\vec{e}_y \wedge (i.a.B_y\vec{e}_z - i.a.B_z.\vec{e}_x) = -\frac{iab}{2}B_y\vec{e}_x$$
$$\vec{\Gamma}_{\to EA} = \frac{a}{2}\vec{e}_x \wedge \left(i.b\vec{e}_y \wedge \vec{B}\right) = \frac{a}{2}\vec{e}_x \wedge (-i.b.B_x\vec{e}_z + i.b.B_z.\vec{e}_x) = \frac{iab}{2}B_x\vec{e}_y$$
On somme : $\vec{\Gamma} = i.a.b.\,(B_x\vec{e}_y - B_y\vec{e}_x)$.
Or $\vec{m} = i.a.b.\vec{e}_z$ donc $\vec{m} \wedge \vec{B} = i.a.b.\vec{e}_z \wedge (B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z) = i.a.b.\,(B_x\vec{e}_y - B_y\vec{e}_x)$.

Remarque : Ce couple a un moment nul lorsque $\vec{m} /\!\!/ \vec{B}$: c'est la position d'équilibre, qui est atteinte à ce moment-là. Une étude plus précise permettrait de montrer que le moment magnétique $\vec{m}$ tend à s'aligner parallèlement à $\vec{B}$ et dans la même direction.



C'est ce couple qui oriente une boussole vers le nord. C'est ce même couple qui oriente la limaille de fer selon les lignes de champ. Et c'est surtout ce couple qui va permettre de construire des moteurs tournants.

Propriété : Énergie potentielle

On admet qu'un moment magnétique $\vec{m}$ placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme possède une énergie potentielle $E_{p,\text{magn}} = -\vec{m}.\vec{B}$

B.3. Exemple : moteur synchrone

On a vu que la force de Laplace tend à faire tourner un circuit fermé de manière à ce qu'il soit orthogonal au champ magnétique (c'est-à-dire $\vec{n}$ parallèle à $\vec{B}$). Si on arrive à faire tourner le champ magnétique, alors le circuit va essayer de le suivre et va se mettre à tourner : c'est le principe du moteur synchrone.

Comment créer un champ tournant ? Un champ magnétique de norme B_0 tournant à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$ dans le plan Oxy a pour coordonnées $\vec{B}(t) = \begin{vmatrix} B_0\cos(\omega t) \\ B_0\sin(\omega t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_0\cos(\omega t) \\ B_0\cos(\omega t - \pi/2) \end{vmatrix}$. On peut donc le créer avec 2 bobines placées perpendiculairement, l'une d'axe Ox, l'autre d'axe Oy, et traversées par des courants déphasés de $\pm\frac{\pi}{2}$ (fig. EM1.12).

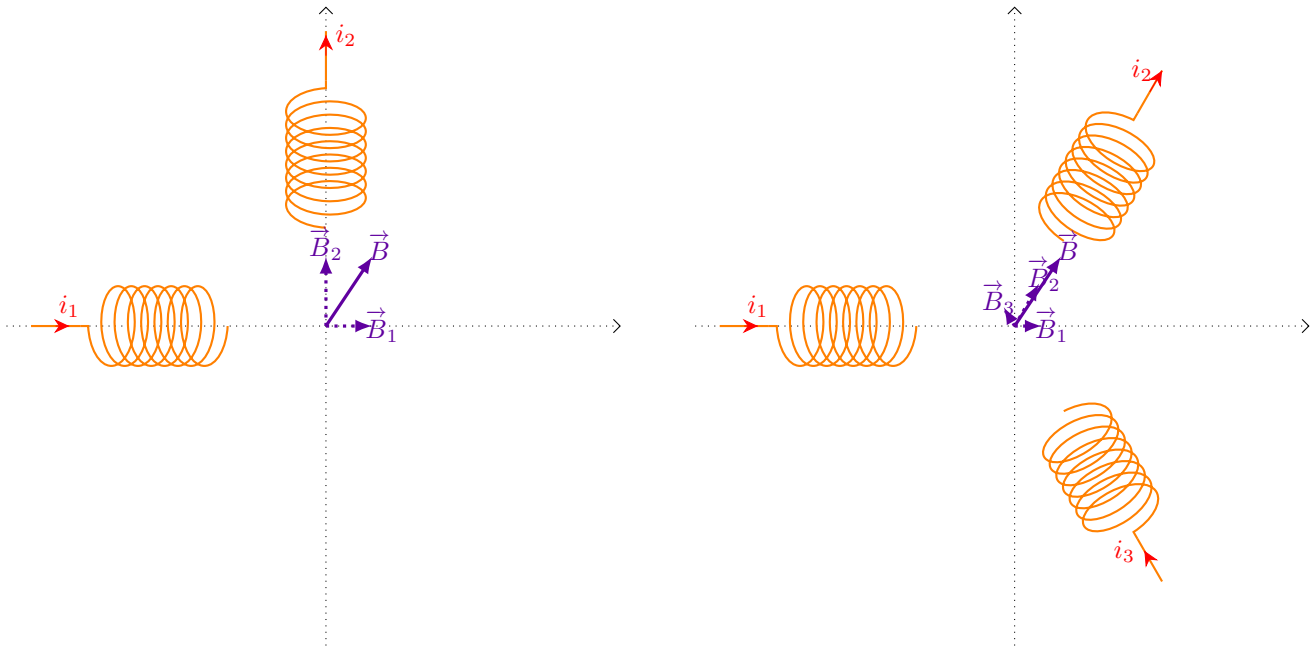
Néanmoins, le champ créé n'est pas uniforme, et cela va créer des vibrations du moteur. On préfère donc une structure à 3 bobines en triphasé, c'est-à-dire orientées à $120° = \frac{2\pi}{3}$ l'une par rapport à l'autre et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$.

Calcul : Champ créé par 3 bobines alimentées en triphasé

Notons $\vec{B}_1 = B_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$ le champ magnétique créé par la bobine 1.
La bobine 2 crée un champ déphasé de $\frac{2\pi}{3}$ et incliné du même angle, donc en projetant on obtient
$\vec{B}_2 = B_0\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right) = B_0\left(-\frac{1}{2}\cos\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right).\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right)$
$= B_0\left(\frac{1}{4}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\omega t\right)\vec{e}_x + B_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t + \frac{3}{4}\sin\omega t\right)\vec{e}_y$
De même la bobine 3 crée un champ $\vec{B}_3 = B_0\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right)$
$= B_0\left(\frac{1}{4}\cos\omega t - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\omega t\right)\vec{e}_x + B_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t + \frac{3}{4}\sin\omega t\right)\vec{e}_y$
Quand on fait la somme des trois champs, certains termes s'éliminent et il reste

$$\vec{B} = \frac{3}{2}B_0\left(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y\right)$$

FIGURE EM1.12 : Création d'un champ tournant.

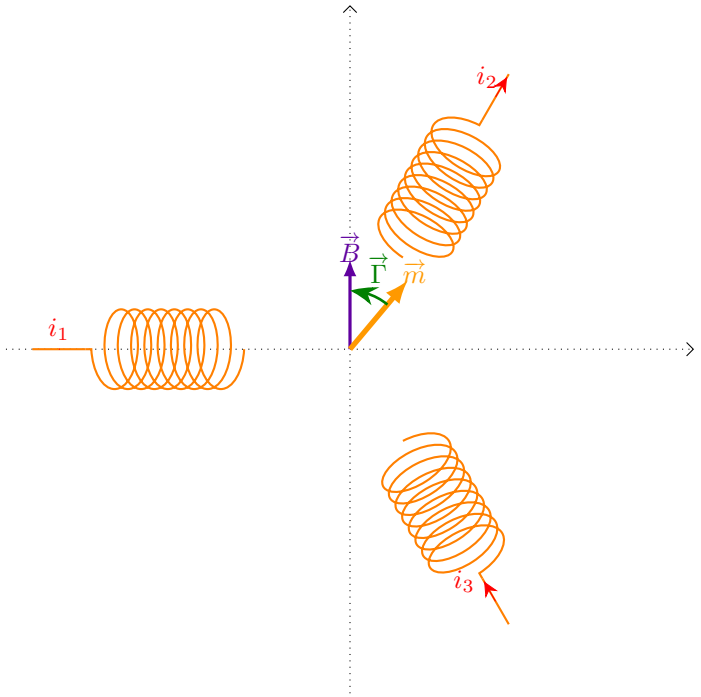


(a) Création d'un champ tournant avec 2 bobines

(b) Création d'un champ tournant avec 3 bobines

Le principe d'un moteur synchrone est alors simple : on place un moment magnétique $\vec{m}$ (soit un aimant permanent, soit une bobine alimentée en courant) appelé **rotor** dans une zone ou on crée un champ magnétique tournant à l'aide d'un **stator**. Le moment magnétique cherche à s'aligner sur $\vec{B}$ (figure EM1.13). Si on arrive à le lancer en rotation à la même vitesse que $\vec{B}$, alors il va tourner à la poursuite de $\vec{B}$ en faisant un angle qu'on va noter $\theta = \widehat{(\vec{m}, \vec{B})}$. Alors le couple exercé par le champ magnétique sur $\vec{m}$ a pour norme $\left\|\vec{m} \wedge \vec{B}\right\| = \|\vec{m}\| \,.\, \left\|\vec{B}\right\| \,.\, \sin\theta$.

FIGURE EM1.13 : Principe d'un moteur synchrone.



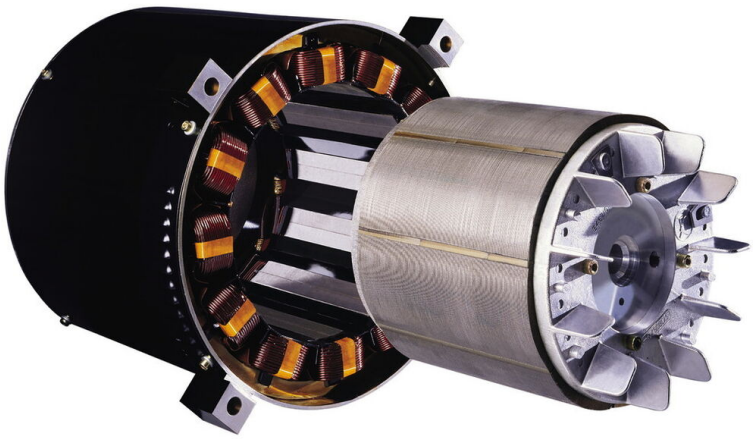
La valeur du couple Γ va dépendre de la charge du moteur, c'est-à-dire du couple qu'il doit fournir. Si on le fait tourner à vide, il n'y a que les frottements à compenser, et l'angle θ sera presque nul. Si on fait faire un effort au moteur, on lui demande plus de couple, et θ augmente. Le couple maximal est atteint pour $\theta = 90°$ et vaut $\Gamma_{max} = \|\vec{m}\| \,.\, \left\|\vec{B}\right\|$;

au-delà, le moteur décroche.

Les moteurs synchrones sont très puissants, mais il faut les démarrer. On peut le faire, soit avec un moteur asynchrone (qu'on verra plus tard) placé sur le même axe, soit avec des moteurs autosynchrones dans lesquels la vitesse de rotation du champ magnétique augmente lentement au démarrage. C'est ce genre moteurs qui équipe par exemple les bogies de TGV de dernière génération (les AGV).

Le principe décrit ici est celui d'un rotor à 2 pôles, mais on peut construire des moteurs avec plus de pôles, comme sur la figure EM1.14.

FIGURE EM1.14 : Rotor et stator d'un moteur synchrone multipôles. *(Crédit : Leroy-Somer)*



EM1. Champs magnétiques et courants

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.
Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le Différencier le champ magnétique extérieur subi du cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et exploiter l'expression de la résultante et de la puissance des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	
Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	

EM1. Champs magnétiques et courants

Quelques conseils

✎ Il est bon de retenur le champ magnétique créé par un solénoïde infini de N spires de longueur ℓ : $\frac{\mu_0 N i}{\ell}$ selon l'axe.

✎ Il faut bien distinguer les actions de la force de Laplace d'un champ magnétique uniforme sur :

— une portion de circuit : force $\int i\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$, application au milieu si c'est un segment

— un circuit fermé : force nulle, moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

✎ Dans les problèmes d'induction, il est essentiel de commencer par **orienter le circuit** (courant i et normale $\vec{n}$, reliés par la règle de la main droite).

EM1. Champs magnétiques et courants

QCMs

réponses page 1035

✓ QCM : ✗

Q1. Les lignes de champ magnétique créé par un fil ont la forme :

(a). de droites
(b). de courbes quelconques
(c). de cercles

Q2. La champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde :

(a). vaut $\mu_0 \frac{N}{\ell} I$
(b). est nul
(c). est proportionnel au courant
(d). est uniforme

Q3. Un moment magnétique a pour unité :

(a). A
(b). $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$
(c). T
(d). $\mathrm{A \cdot m^{2}}$

Q4. Le champ magnétique terrestre vaut, en France :

(a). 4,7 T
(b). 47 µT
(c). 4,7 mT
(d). 4,7 µT

Q5. La force de Lorentz et la force de Laplace sont la même chose :

(a). Vrai
(b). Faux

Q6. La force de Laplace exercée par un champ magnétique uniforme peut déplacer un circuit fermé :

(a). Faux
(b). Vrai

EM1. Champs magnétiques et courants

Exercices

réponses page 1036

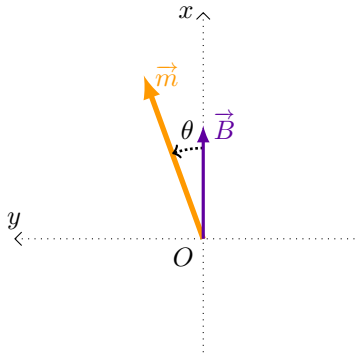
Exercice EM1.1 : Force entre deux fils parallèles [*]

Deux fils très longs parallèles, séparés par $d = 1\,\text{cm}$, sont parcourus tous les deux par un courant de 1 A de même sens.
On prend des coordonnées cylindriques, l'axe étant le premier fil, et I orienté suivant $\vec{e}_z$.

1. À l'aide de la formule vue en cours, calculez le champ magnétique créé par le premier fil au niveau du second.
2. Déduisez-en la norme de la force exercée sur 1 m du second fil ; commentez.
3. Dans les installations électriques classiques, le courant dans deux fils voisins est plutôt en sens opposé. Que peut-il se passer en cas de court-circuit ?

Exercice EM1.2 : Oscillations d'une boussole [**]

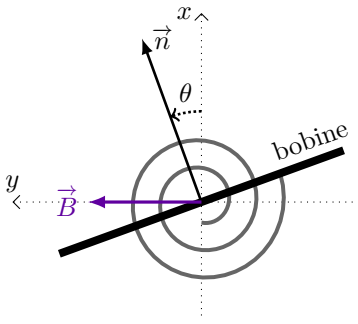
Une boussole est un aimant qui est libre de tourner autour d'un axe vertical. Sous l'effet du champ magnétique terrestre, elle s'aligne avec le Nord. Néanmoins, avant d'atteindre cette position, on la voit osciller autour de sa position d'équilibre.
On pose une base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ vertical vers le haut et $\vec{e}_x$ horizontal vers le nord. Le champ magnétique s'écrit alors $\vec{B} = B_h \vec{e}_x + B_v \vec{e}_z$. On repère par θ l'angle entre la boussole et l'axe $\vec{e}_x$. On note $M = \|\vec{m}\|$ la norme du moment magnétique de la boussole.



1. Exprimez le moment par rapport à l'axe Oz du couple exercé par le champ magnétique sur la boussole, en fonction de θ et des constantes.
2. Soit I le moment d'inertie de la boussole par rapport à cet axe. Déterminer l'ED vérifiée par θ, et exprimer la période des petites oscillations en fonction de M, B_h et I.

Exercice EM1.3 : Galvanomètre [**]

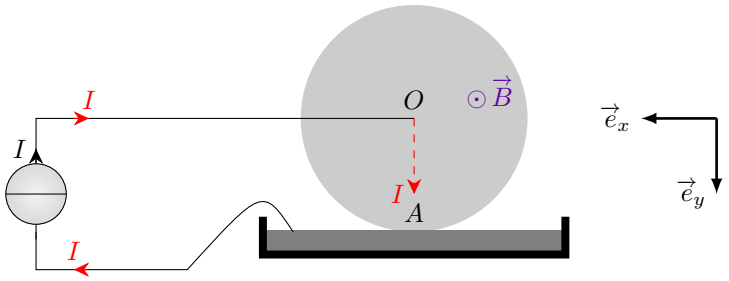
Le galvanomètre, inventé en 1820, est le premier type d'ampèremètre qui a été construit. Il est constitué d'une bobine de surface S et de N tours, dans lequel circule le courant i qu'on veut mesurer. Cette bobine peut tourner autour d'un axe horizontal Oz passant par son centre de masse ; on note J son moment d'inertie. L'axe est soutenu par un ressort spiral qui cherche à ramener la bobine à la position $\theta = 0°$ en exerçant un couple de rappel $\Gamma_r = -C.\theta$ avec C une constante ; la rotation produit aussi un couple de frottements $-f.\dot{\theta}$. Le tout est placé dans l'entrefer d'un aimant produisant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$.



1. Exprimez le moment magnétique $\vec{m}$ de la bobine dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
2. Déduisez-en le moment du couple exercé par la force de Laplace.
3. En appliquant le Théorème du Moment Cinétique, déterminez l'équation différentielle vérifiée par θ. Quelle équation vérifie θ à l'équilibre ? Comment se simplifie cette expression pour de petits angles ? commentez.
4. On construit un galvanomètre tel que $S = 8\,\text{cm}^2$, $N = 50$, $B = 0{,}1\,\text{T}$ et $C = 3\,\mu\text{N}\cdot\text{m}$. Si l'angle d'équilibre vaut 1°, que vaut i ? Commentez la sensibilité de cet instrument.

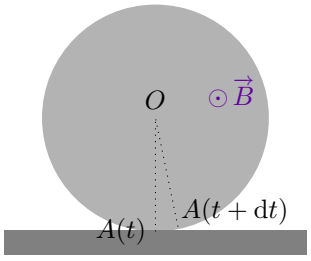
Exercice EM1.4 : Roue de Barlow [**]

La roue de Barlow est un moteur électrique rudimentaire. Une roue métallique de rayon R est libre de tourner autour de son axe. Sa partie inférieure trempe dans du mercure, qui est un métal liquide. On fait alors circuler un courant I dans le disque : il entre par l'axe et ressort par le mercure. On place un aimant qui englobe le disque ; on considérera pour simplifier que le champ $\vec{B}$ est uniforme sur tout le disque, de valeur $B\vec{e}_z$.



Pour simplifier, on suppose que le courant I circule en ligne droite dans la roue, de O vers A. On note ω la vitesse de rotation de la roue, J son moment d'inertie par rapport à son axe, et on suppose que le mercure exerce sur la roue un couple de frottements $-\Gamma\omega$.

1. **Étude par les forces**
   (a) Exprimez la force de Laplace sur le segment OA et précisez son point d'application ; déduisez-en le moment M de cette force par rapport à l'axe Oz.
   (b) *Question optionnelle* : retrouvez ce moment par intégration :
   — soit P un point situé entre O et A à une ordonnée y ; écrivez la force $\mathrm{d}\vec{F}$ de Laplace qui s'exerce sur un petit morceau de courant autour de ce point P. Déduisez-en le moment $\mathrm{d}M$ de cette force par rapport à l'axe Oz.
   — déduisez-en le moment total dû aux forces de Laplace par intégration.
   (c) Par application du TMC, établissez l'équation différentielle vérifiée par ω.
   (d) Pour $I = 1{,}2\,\mathrm{A}$, $B = 0{,}2\,\mathrm{T}$, $R = 10\,\mathrm{cm}$, on trouve que la vitesse du disque se stabilise à 1 tour en $0{,}8\,\mathrm{s}$.
   Calculez numériquement Γ.
2. **Étude par l'énergie**
   (a) On se place à un instant t : le courant va en ligne droite selon OA ; à l'instant $t + \mathrm{d}t$, si la roue a tourné d'un angle $\mathrm{d}\theta$, le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit a changé.



   Évaluez, à partir du schéma, la puissance des forces de Laplace.
   Remarque : il y a ensuite une seconde phase : le courant change de trajet pour se remettre selon la droite OA. Cette modification du trajet du courant ne joue pas de rôle ici, mais ce n'est pas évident à justifier.
   (b) Par application du TEC, déduisez-en de nouveau l'équation différentielle vérifiée par ω.
3. La roue de Barlow est un moteur qui a un couple très faible. Expliquez ce qui, dans la conception, fait que ce couple est faible, par rapport à un moteur classique (courant continu, synchrone,…).
4. Le mercure est toxique. Par quoi peut-on le remplacer ici ?

Exercice EM1.5 : Précession dans un champ magnétique [***]

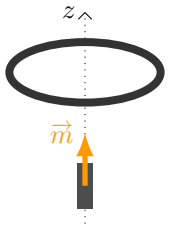
Un électron a une masse m_e, porte une charge $-e$; il possède aussi un moment magnétique $\mu_B = 9{,}2 \times 10^{-24}\,\mathrm{J \cdot T^{-1}}$. Pour conprendre ce moment, on peut considérer que l'étectron tourne sur lui-même comme une toupie. Il possède alors un moment cinétique non nul par rapport à son centre, dirigé suivant son axe de rotation. Si on note $\vec{L}$ le moment cinétique de l'électron par rapport à son centre, et $\vec{\mathcal{M}}$ son moment dipôlaire, alors des calculs montrent qu'ils sont reliés par la relation $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{g}{2}\frac{e}{m_e}\vec{L}$ avec $g \approx 2$.
De plus, on a la relation $\left\|\vec{L}\right\| = \frac{\hbar}{2}$ avec $\hbar \approx 1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

On place un électron dans un champ magnétique constant $\vec{B}$; on néglige toutes les autres forces.

1. En écrivant le TMC, trouvez l'équation différentielle vérifiée par $\vec{L}$.
2. Pour résoudre, on prend des coordonnées cartésiennes telles que $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On note $\vec{L} = L_x(t)\vec{e}_x + L_y(t)\vec{e}_y + L_z(t)\vec{e}_z$.
   Projetez l'équation précédente sur les trois axes, et résolvez. Pour les CI, on considérera que $L_y(0) = 0$ et θ_0 est l'angle entre $\vec{L}(0)$ et $\vec{e}_z$, soit $L_x(0) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta_0$ et $L_z(0) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta_0$.
   Indication : pour la résolution, inspirez-vous du mouvement d'une charge dans un champ magnétique uniforme.
3. Décrivez le mouvement de $\vec{L}$.

Exercice EM1.6 : Force d'un aimant sur une spire [***]

Un aimant, ramené à un moment magnétique $\vec{m} = m\vec{e}_z$, est placée à l'origine O ; une spire circulaire de rayon a, parcourue par un courant I, est placé à une distance d au-dessus.



1. Soit P un point de la spire repéré par ses coordonnées cylindriques (a, θ, d).
   Exprimez $\overrightarrow{OP}$ puis la distance OP.
2. Le champ créé par l'aimant au point P s'écrit $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi OP^3}\left(3\frac{\vec{m}.\overrightarrow{OP}}{OP^2}\overrightarrow{OP} - \vec{m}\right)$
   Exprimez $\vec{B}(P)$ sur la base cylindrique.
3. Exprimez le déplacement élémentaire autour de P en coordonnées cylindriques. Déduisez-en l'expression de la force de Laplace élémentaire.
4. Par des considérations simples de symétries, dans quelle direction sera la force de Laplace totale ?
   Par intégration, calculez cette force.
5. Quel doit être le signe de I pour que la force soit de sens opposé au poids (supposé selon $-z$) ?
   AN : $I = 4\,\mathrm{A}$, $a = 1\,\mathrm{cm}$, $\mu_0 m = 1{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$, $d = 2\,\mathrm{cm}$: quelle doit être la masse de la spire pour que la force de l'aimant lui permette de léviter ?

EM1. Champs magnétiques et courants

TDs numériques

réponses page 1038

TD numérique : Champs magnétiques

plot(champ) $\int f(x).\mathrm{d}x$

1. **Champ magnétique créé par une spire**

On considère une spire circulaire de rayon R et d'axe Oz parcourue par un courant I. On admet qu'en un point $P(x,0,z)$ du plan de la feuille, elle crée un champ magnétique

$$\vec{B}(x,0,z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R\left(z\cos\theta\,\vec{e}_x + (R - x\cos\theta)\,\vec{e}_z\right)}{\left(R^2+x^2+z^2-2Rx\cos\theta\right)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

On va calculer ce champ pour $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$USI, $R = 3\,\mathrm{cm}$, $I = 1\,\mathrm{A}$, $-10\,\mathrm{cm} \leq x \leq 10\,\mathrm{cm}$ et $-10\,\mathrm{cm} \leq z \leq 10\,\mathrm{cm}$

(a) Il faut commencer par créer la grille sur laquelle on va calculer le champ magnétique :

```
tab_x=np.linspace(-xmax,xmax,Nx) # tableau 1D des abscisses
tab_z=np.linspace(-zmax,zmax,Nz) # tableau 1D des ordonnées
mesh_x,mesh_z=np.meshgrid(tab_x,tab_z) # grille des abscisses et des ordonnées
```

avec par exemple 20x20 points pour commencer. On dispose alors de deux matrices indiquant, pour chaque point de la grille, l'abscisse et l'ordonnée.

(b) Définissez les fonctions `fx(x,z,theta)` et `fz(x,z,theta)` renvoyant les fonctions à intégrer, l'une pour avoir le champ magnétique selon $\vec{e}_x$, l'autre selon $\vec{e}_z$.

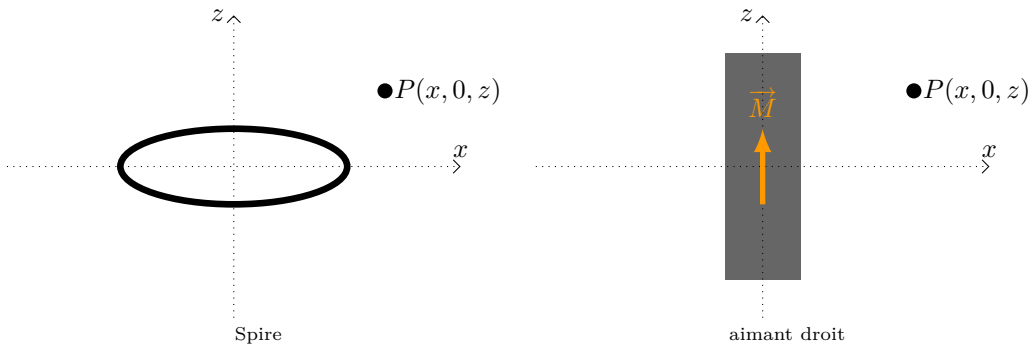
(c) Par une méthode des rectangles (avec 100 rectangles c'est suffisant), calculez alors le champ magnétique en tout point de la grille. Vous devez obtenir deux matrices `mesh_Bx` et `mesh_Bz`.

Indication : pour créer des matrices de même dimensions que `mesh_x`, on peut utiliser `mesh_Bx=np.zeros_like(mesh_x)`

(d) Tracez une carte de champ à l'aide du programme suivant ; commentez.

```
plt.figure()
plt.quiver(mesh_x,mesh_z,mesh_Bx,mesh_Bz)
plt.show()
```

(e) Remplacez `quiver` par `streamplot` et observez la carte de lignes de champ.



2. **Champ magnétique créé par un aimant droit**

On considère maintenant un aimant droit d'aimantation M comme sur la figure, de dimensions ℓ_x par ℓ_z. Son champ magnétique en un point $P(x,0,z)$ est donné par (attention aux minuscules et majuscules) :

$$\vec{B}(x,0,z) = \int_{X=-\frac{\ell_x}{2}}^{+\frac{\ell_x}{2}}\int_{Z=-\frac{\ell_z}{2}}^{+\frac{\ell_z}{2}} \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\left(2(z-Z)^2-(x-X)^2\right)\vec{e}_z + 2(x-X)(z-Z)\vec{e}_x}{\left((x-X)^2+(z-Z)^2\right)^{5/2}}\mathrm{d}Z\mathrm{d}X$$

Procédez de même pour calculer le champ magnétique créé par un aimant tel que $\ell_x = 1\,\mathrm{cm}$, $\ell_z = 6\,\mathrm{cm}$ et $\mu_0 M = 0{,}2\,\mathrm{USI}$ grâce à une double boucle d'intégration.

Remarque : à l'intérieur de l'aimant, ça fait un peu n'importe quoi. On peut cacher cela en ajoutant

```
from matplotlib.patches import Rectangle
plt.gca().add_patch(Rectangle((-lx/2,-lz/2), lx, lz,color="black"))
```

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM :

Q1.(c)
Q2.(a) ET (c) ET (d)
Q3.(d)
Q4.(b)
Q5.(b)
Q6.(a)
Si le champ est uniforme et le circuit fermé, alors la force est nulle. Par contre elle peut le faire tourner.

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice EM1.1 : Force entre deux fils parallèles [*]

1. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_\theta = 2\times10^{-5}\,\mathrm{T}\times\vec{e}_\theta$
2. $\left\|\vec{F}\right| = I\times 1\,\mathrm{m}\times\left\|\vec{B}\right\| = 2\times10^{-5}\,\mathrm{N}$: la force est attractive, et très faible.
3. Le sens étant opposé, la force devient répulsive. De plus, la force totale varie comme I^2. En cas de court-circuit, le courant peut devenir très intense (quoique brièvement si le coupe-circuit fonctionne). Il peut arriver que la force entre les fils les arrache à leur support.

Corrigé de l'exercice EM1.2 : Oscillations d'une boussole [**]

1. Le champ magnétique exerce un couple $\left(\vec{M}(t)\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{e}_z = (M(\cos\theta(t)\vec{e}_x+\sin\theta(t)\vec{e}_y)\wedge(B_h\vec{e}_x+B_v\vec{e}_z))\cdot\vec{e}_z.$
$= -MB_h\sin\theta(t)$
2. Les autres forces s'exerçant sur la boussole (poids et réaction du support) sont verticales et de moment nul. Donc Le Théorème du Moment Cinétique appliqué à la boussole donne simplement $I\ddot{\theta}(t) = -MB_h\sin\theta(t)$.
Pour de petits angles, on a donc des oscillations de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MB_h}}$

Corrigé de l'exercice EM1.3 : Galvanomètre [**]

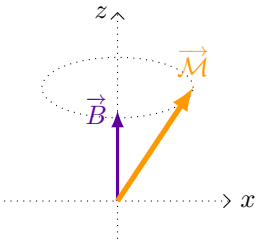
1. $\vec{m}(t) = iSN\vec{n}(t) = iSN.(\cos\theta(t)\vec{e}_x+\sin\theta(t)\vec{e}_y)$
2. $\Gamma_{Lap}(t) = \vec{\Gamma}(t)\cdot\vec{e}_z = (iSN.(\cos\theta(t)\vec{e}_x+\sin\theta(t)\vec{e}_y)\wedge B\vec{e}_y)\cdot\vec{e}_z = iSNB\cos\theta(t)$
3. La bobine a pour moment cinétique $J\dot{\theta}(t)$ et est soumise à $\Gamma_{Lap}(t) = iSNB.\cos\theta(t)$, à $\Gamma_f = -f\dot{\theta}(t)$ et à $\Gamma_r = -C\theta(t)$. Donc d'après le Théorème du Moment Cinétique : $J\ddot{\theta}(t) = iSNB\cos\theta(t) - C\theta(t) - f\dot{\theta}(t)$
À l'équilibre : $iSNB\cos\theta(t) = C\theta(t)$. Pour de petits angles, $\cos\theta\approx 1$ donc $\theta = \frac{SNB}{C}i$ est proportionnel au courant mesuré.
4. Si on mesure $\theta = 1° = \frac{\pi}{180}$rad, alors le courant vaut $i = \frac{C\theta}{SNB} = 13\,\mu\mathrm{A}$: c'est un instrument très sensible.

Corrigé de l'exercice EM1.4 : Roue de Barlow [**]

1. **Étude par les forces**
   (a) Pour un segment rectiligne dans un champ uniforme, la force vaut $I\overrightarrow{OA}\wedge\vec{B} = IR\vec{e}_y\wedge B\vec{e}_z = IRB\vec{e}_x$ et s'applique au milieu du segment, donc son moment vaut $M = \frac{R}{2}\vec{e}_y\wedge IRB\vec{e}_x = -\frac{IR^2B}{2}\vec{e}_z$.
   (b) La force infinitésimale vaut $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}y\vec{e}_y\wedge B\vec{e}_z = IB\mathrm{d}y\vec{e}_x$ donc $\mathrm{d}M = (y\vec{e}_y\wedge IB\mathrm{d}y\vec{e}_x).\vec{e}_z = -IBy\mathrm{d}y$
   On intègre : $M = \int_0^R -IBy\mathrm{d}y = -\frac{IBR^2}{2}$
   (c) La roue de moment cinétique $J\omega(t)$ est soumise au couple de frottements $-\Gamma\omega(t)$ et au couple de Laplace $-\frac{IBR^2}{2}$ donc d'après le TMC : $J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\Gamma\omega(t) - \frac{IBR^2}{2}$
   (d) $\Gamma = \frac{IBR^2}{2\omega} = 1{,}5\times10^{-4}\,\mathrm{USI}$
2. **Étude par l'énergie**
   (a) La surface gagnée par le circuit est une portion de cercle de rayon R et d'angle $\omega(t).\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}S = \pi R^2\frac{\omega(t).\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{R^2.\omega(t).\mathrm{d}t}{2}$, donc $\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}} = -\frac{B.R^2.\omega(t).\mathrm{d}t}{2}$ d'où on tire $\mathcal{P} = I\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}}{\mathrm{d}t} = -I\frac{R^2}{2}\omega(t)B$
   (b) La roue, d'énergie cinétique $\frac{1}{2}J\omega(t)^2$, est soumise à la force de Laplace, et au couple résistance de puissance $-\Gamma.\omega(t)^2$, donc d'après le TEC : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega(t)^2\right) = -I\frac{R^2}{2}\omega(t)B - \Gamma.\omega(t)^2$ ce qui redonne $J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\Gamma\omega(t) - \frac{IBR^2}{2}$ après simplification.
3. Il n'y a qu'un seul tour dans le circuit.
4. Une solution ionique (de l'eau salée par exemple).

Corrigé de l'exercice EM1.5 : Précession dans un champ magnétique [***]

1. $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{\mathcal{M}}(t) \wedge \vec{B} = -\frac{e}{m_e}\vec{L}(t) \wedge \vec{B}$.
2. On obtient les équations :
$$\begin{cases} \dot{L}_x(t) &= -\omega_c L_y(t) \\ \dot{L}_y(t) &= \omega_c L_x(t) \\ \dot{L}_z(t) &= 0 \end{cases} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{eB}{m_e}$$
L'équation sur z donne $L_z = \text{cst} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta_0$. Pour x et y, on pose $\underline{u}(t) = L_x(t) + iL_y(t)$, et on trouve $\dot{\underline{u}}(t) = i\omega_c \underline{u}(t)$ soit $\underline{u}(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta_0 e^{i\omega_c t}$. On prend la partie réelle pour x et la partie imaginaire pour y, et on trouve
$$\begin{cases} L_x(t) &= \frac{\hbar}{2}\sin\theta_0\cos\omega_c t \\ L_y(t) &= \frac{\hbar}{2}\sin\theta_0\sin\omega_c t \\ L_z(t) &= \frac{\hbar}{2}\cos\theta_0 \end{cases}$$
3. La composante de $\vec{L}(t)$ dans le plan xOy tourne donc à la pulsation ω_c, tandis que la composante suivant z est constante. Le mouvement complet est ce qu'on appelle un mouvement de précession : l'axe de $\vec{L}$ tourne autour de l'axe Oz du champ magnétique, comme une toupie sur une table.



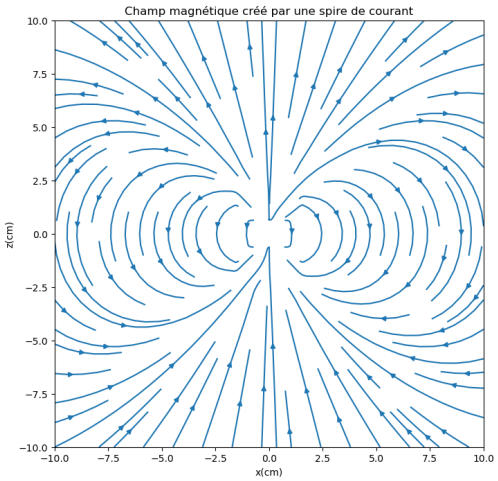
Corrigé de l'exercice EM1.6 : Force d'un aimant sur une spire [***]

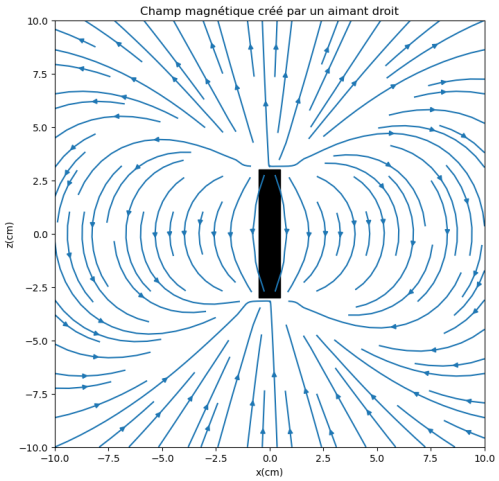
1. $\overrightarrow{OP} = d\vec{e}_z + a\vec{e}_r$ donc $OP = \sqrt{a^2+d^2}$
2. On remplace : $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi(a^2+d^2)^{3/2}}\left(3\frac{d}{a^2+d^2}(a\vec{e}_r + d\vec{e}_z) - \vec{e}_z\right)$
3. $\mathrm{d}\vec{F} = Ia\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 mIa}{4\pi(a^2+d^2)^{3/2}}\left(3\frac{d}{a^2+d^2}(-a\vec{e}_z + d\vec{e}_r) - \vec{e}_r\right)\mathrm{d}\theta$
4. Si on fait tourner le système autour de l'axe z, rien ne change. On en déduit que la force totale ne peut être que sur $\vec{e}_z$ (seul axe inchangé lors de cette rotation).
Or $\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{e}_z = -\frac{3\mu_0 mIa^2 d}{4\pi(a^2+d^2)^{5/2}}\mathrm{d}\theta$. La force totale est obtenue en intégrant θ entre 0 et 2π, ce qui donne
$$\vec{F} = -\frac{3\mu_0 mIa^2 d}{2\left(a^2+d^2\right)^{5/2}}$$
5. Il faut $I < 0$.
AN : $F = 2{,}6 \times 10^{-3}$ N soit une masse de 0,26 g : pas énorme.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Champs magnétiques

Il n'y a pas de difficultés particulières dans ce TD :





Chapitre EM2 Phénomènes d'induction

Programme p.1048

Conseils p.1049

Cours p.1040
- EM2.A. Les lois de l'induction
- EM2.B. Inductances

QCMs p.1050

Exercices p.1051

TDs numériques p.1055

EM2. Phénomènes d'induction

Cours

Nous avons terminé le chapitre précédent sur un paradoxe : comment se fait-il que la force magnétique sur une charge électrique ne travaille jamais, mais la force magnétique sur un courant électrique (beaucoup de charges en mouvement) travaille ? Est-ce que beaucoup de fois 0 peut faire autre chose que 0 ?

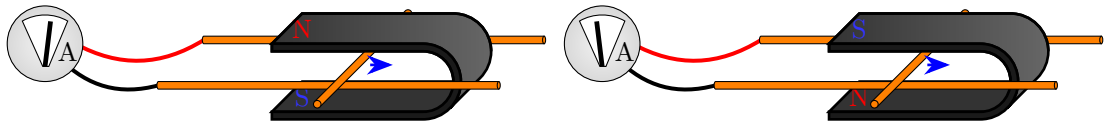
En fait, à l'échelle d'une particule, la force magnétique ne travaille pas. Mais à l'échelle macroscopique, l'énergie des charges peut se manifester de deux manières : électriquement (mouvement d'ensemble des charges, c'est-à-dire un courant) ou mécaniquement (mouvement d'ensemble du matériau qui porte les charges), et la force de Lorentz, qui conserve l'énergie, va pouvoir faire passer l'énergie d'une forme vers l'autre. Autrement dit, la force de Laplace n'est qu'une des deux composantes du phénomène de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique, et vice-versa.

EM2.A. Les lois de l'induction

A.1. Mise en évidence expérimentale

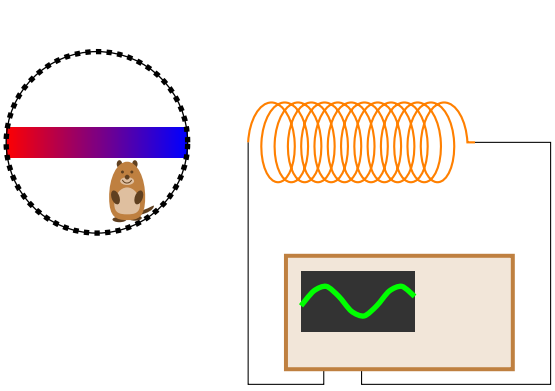
Reprenons le rail de Laplace, mais cette fois, on remplace le générateur de courant par un ampèremètre très sensible. Alors quand on fait bouger le rail mobile dans le champ magnétique, on observe un mouvement de l'aiguille de l'ampèremètre : un courant apparaît (figure EM2.1).

FIGURE EM2.1 : Expérience du rail de Laplace inversée : on déplace le rail, un courant apparaît.

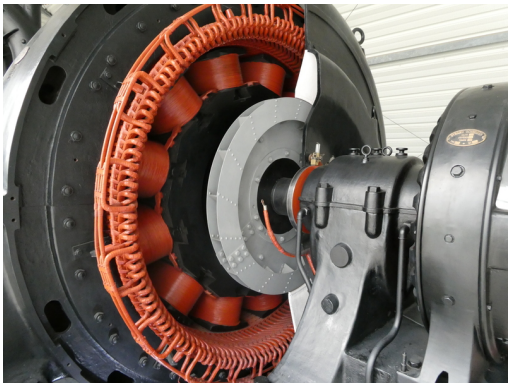


Ainsi le mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique aboutit à l'observation d'un courant très faible dans le circuit fermé. À l'inverse, si on modifie le champ magnétique vu par le circuit, par exemple en faisant tourner un aimant devant une bobine, on observe aux bornes de cette bobine l'apparition d'une tension alternative de même période que la rotation de l'aimant (figure EM2.2) : c'est le principe de l'alternateur.

FIGURE EM2.2 : Production d'électricité par rotation d'un aimant : l'alternateur.



(a) Observation de la tension induite à l'oscilloscope



(b) Alternateur industriel

Tous ces phénomènes ont été étudiés par Faraday puis d'autres après lui. Suivant la configuration du circuit et du champ magnétique, l'explication des phénomènes observés est plus ou moins compliquée et demande différents outils. Pour cette année, nous nous contenterons de circuits fermés, pour lesquels la loi de l'induction est assez simple.

A.2. Loi de Faraday

Définition : Flux du champ magnétique (rappel)

Soit un circuit fermé orienté, de surface S et de normale $\vec{n}$. Le flux de $\vec{B}$ à travers ce circuit est défini par $\Phi_{\vec{B}} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$. Si $\vec{B}$ est uniforme, l'expression se simplifie : $\Phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{n} S$.

Loi de Faraday

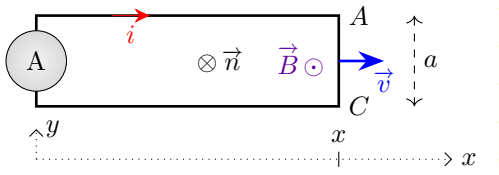
Soit un circuit fermé orienté par le sens conventionnel choisi pour le courant. Si le flux $\Phi_{\vec{B}}$ du champ magnétique à travers ce circuit varie, alors il apparaît dans le circuit une force électromotrice induite (ou tension induite) orientée dans le même sens que le courant

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(EM2.1)}$$

En pratique, cela signifie qu'on ajoute dans le circuit électrique un générateur idéal de tension de fem $e(t)$.

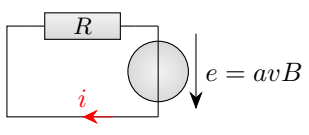
Exemple : Rail de Laplace — À connaître

On représente le circuit dans lequel on a placé le sens conventionnel i du courant, qui oriente le circuit avec une normale $\vec{n}$ rentrante. Ce circuit est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.



1. On suppose que le segment AC se déplace avec une vitesse $v(t)\vec{e}_x$. Exprimez $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t}$.
2. On modélise électriquement le circuit par une simple résistance R. Dessinez le circuit électrique équivalent (en tenant compte du phénomène d'induction) et déterminez le courant $i(t)$.
   AN pour $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$, $R = 4\,\mathrm{m\Omega}$, $v = 3\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ et $a = 6\,\mathrm{cm}$.

1. En $\mathrm{d}t$, le segment AC s'est déplacé de $v(t)\mathrm{d}t$ et le circuit a gagné une surface $\mathrm{d}S = av(t)\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}} = -av(t)\mathrm{d}t \times B$ soit $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = -av(t)B$.
   Autre solution : $\Phi_{\vec{B}}(t) = -Bx(t)a$ donc $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = -B\dot{x}(t)a = -Bv(t)a$.
2. D'après la loi de Faraday : $e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = av(t)B$. On redessine donc le circuit en remplaçant les fils par leur résistance et en ajoutant le générateur de fem e.
   Les lois de l'électricité indiquent alors facilement que $i = \frac{avB}{R} = 4{,}5\,\mathrm{mA}$



Remarque : La loi de l'induction de Faraday indique l'apparition d'une **tension**. Si le circuit est fermé, cette tension va entraîner un courant, mais le courant n'est qu'une conséquence de la tension induite.

Remarque : Le flux $\Phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{n} S$ est défini pour un circuit plat ; pour une bobine de N spires, le flux est multiplié par N, donc les phénomènes d'induction sont plus importants.

A.3. Aspect énergétique

Propriété : Bilan énergétique d'un couplage inductif par un champ magnétique constant

La force de Laplace et l'induction sont deux phénomènes couplés qui permettent une transformation entre énergie mécanique et énergie électrique ; si le champ magnétique n'est pas variable, ce transfert conserve l'énergie :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{induction}} = \mathcal{P}_{\text{Lorentz}} = 0$$

Démonstration

La fem induite est orientée dans le même sens que i, donc le produit $e.i$ représente la puissance électrique *fournie* par l'induction au circuit. On a donc $\mathcal{P}_{\text{induction}} = -i.\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$ si le champ magnétique est constant.

EM2.B. Inductances

La loi de l'induction indique que toute modification du flux du champ magnétique qui traverse un circuit entraîne l'apparition d'une tension induite. Si le circuit est fermé, cette tension entraîne l'apparition d'un courant induit $i_{\text{induit}}(t)$ qui va créer un champ magnétique $\vec{B}_{\text{induit}}(t)$, qui lui-même va créer une modification du flux du champ magnétique ; cette modification du flux crée une nouvelle tension induite, etc. On va d'abord énoncer une loi qualitative quand à ce flux, puis définir la notion qui va permettre de traiter ce flux propre : l'inductance.

Loi de Lenz

La tension induite tend à créer un courant qui va créer un champ magnétique s'opposant à la variation du flux.

Par exemple dans le rail de Laplace vu en exercice juste au-dessus, si $v(t) > 0$, le flux diminue (car la surface augmente mais $\vec{B}$ est opposé à $\vec{n}$.). La tension $e(t)$ sera donc positive, le courant $i(t)$ aussi, ce qui, d'après la règle de la main droite, crée un champ magnétique orienté selon $\vec{n}$, donc une réaugmentation légère du flux.

B.1. Inductance propre d'un circuit

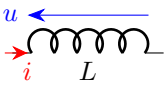
Définition : Inductance propre

Soit un circuit fermé parcouru par un courant i. Ce courant crée un champ magnétique propre proportionnel à i ; le flux du champ magnétique propre à travers le circuit, noté $\Phi_{\vec{B},\text{propre}}$, est lui aussi proportionnel à i : on note L le coefficient de proportionnalité, appelé **inductance propre du circuit**, en Henry :

$$\Phi_{\vec{B},\text{propre}} = L.i \qquad \text{(EM2.2)}$$

Considérons de nouveau le rail de Laplace. Le mouvement du conducteur crée une variation du flux $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = -a.v(t).B$; mais il faut y ajouter le flux propre : $\Phi_{\vec{B},\text{propre}}(t) = L(t).i(t)$ donc $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B},\text{propre}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(L(t).i(t))}{\mathrm{d}t}$. La force électromotrice induite totale vaudra donc en fait $e = a.v(t).B - \frac{\mathrm{d}(L(t).i(t))}{\mathrm{d}t}$. En modélisant le reste du circuit par une résistance R, la loi des mailles permet d'obtenir $R.i(t) = e(t)$ soit $a.v(t).B = R.i(t) + \frac{\mathrm{d}(L(t).i(t))}{\mathrm{d}t}$: le dernier terme montre que l'inductance propre se comporte comme un composant qu'on aurait introduit dans le circuit et dont l'équation électrique serait $u = \frac{\mathrm{d}(L(t).i(t))}{\mathrm{d}t}$; dans le cas d'un circuit indéformable, cela se ramène à une équation bien connue :

Loi électrique d'une inductance constante

Dans un circuit d'inductance propre **constante** L, on tient compte de l'auto-induction du circuit (due au flux propre du circuit) en ajoutant dans le modèle électrique un composant 

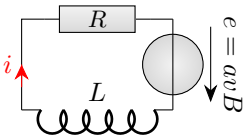
caractérisé **en convention récepteur** par la relation

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(EM2.3)}$$

Remarque : À cause de la loi de Lenz, une inductance propre est toujours positive.

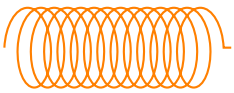
Remarque : Le $-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en convention générateur est devenu $+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en convention récepteur.

Remarque : Seul le flux propre est compris dans l'inductance propre ; les flux dus à des champs extérieurs continuent à être intégrés dans le générateur de fem induite. Par exemple, dans le cas du rail de Laplace vu ci-dessus, si on tient compte du flux propre, le modèle électrique devient comme le schéma ci-contre. Néanmoins, le rail de Laplace étant un circuit déformable, L varie au cours du temps, ce qui complique le modèle.



Calcul : Inductance propre et résistance d'un solénoïde

Considérons un solénoïde formé de N spires circulaires de rayon a, parcouru par un courant i. Il crée en son intérieur un champ magnétique $B_{\text{propre}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ où ℓ est sa longueur. Ce champ crée à travers chaque spire (de surface πa^2) un flux $\Phi_{\vec{B},\,1\,\text{spire}} = \pi a^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i$, donc le flux total créé à travers le solénoïde complet s'écrit $\Phi_{\vec{B},\,\text{propre}} = N\Phi_{\vec{B},\,1\,\text{spire}} = L.i$ avec $L = \frac{N^2 \pi a^2 \mu_0}{\ell}$: il est proportionnel à N^2.



Ce solénoïde est fabriqué en enroulant une longueur $N.2\pi a$ de fil, donc sa résistance, qui est proportionnelle à la longueur de fil, varie proportionnellement à N.

Propriété : Rapport inductance propre/résistance d'un circuit

Dans une bobine de N tours, le rapport $\frac{L}{R}$ varie proportionnellement à N. Donc si on compare l'impédance $jL\omega$ de l'inductance propre à la résistance R, on constate que :

- à fréquence fixée, si N est faible, l'inductance propre sera négligeable devant la résistance ; si N est grand, la résistance sera négligeable devant l'inductance propre.
- à N fixé, les effets inductifs apparaîtrons à haute fréquence, la fréquence de coupure $\frac{R}{L}$ variant proportionnellement à $\frac{1}{N}$.

Enfin, on peut augmenter l'importance de l'inductance propre en introduisant à l'intérieur de la bobine un noyau de matériau magnétique (souvent du **fer doux**) qui augmente considérablement la valeur de μ_0.

Remarque : Dans le cas du rail de Laplace par exemple, on néglige L car il n'y a qu'un seul tour.

Propriété : Énergie emmagasinée par un circuit

Un circuit possédant une inductance propre L et parcouru par un courant i possède une énergie

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 \qquad \text{(EM2.4)}$$

Démonstration

Déjà vu : la puissance reçue par l'inductance vaut $\mathcal{P}(t) = u(t).i(t) = L.i(t).\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li(t)^2\right)$

B.2. Inductance mutuelle de 2 circuits

Considérons maintenant deux circuits fixes, indéformables, proches l'un de l'autre. Chaque circuit, parcouru par un courant, crée un champ magnétique qui aura un flux non nul à travers lui-même, mais aussi à travers l'autre circuit.

Définition : Inductances propre et mutuelle

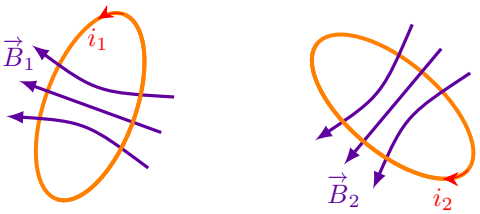
Soit deux circuits fixes, fermés, indéformables, orientés par des courants i_1 et i_2.

Le courant i_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1$ qui crée :

- un flux $\Phi_{\vec{B},1\to1} = L_1 i_1$ à travers lui-même (circuit 1)
- un flux $\Phi_{\vec{B},1\to2} = M_{12} i_1$ à travers le circuit 2

De même le courant i_2 crée un champ magnétique $\vec{B}_2$ qui crée :

- un flux $\Phi_{\vec{B},2\to2} = L_2 i_2$ à travers lui-même (circuit 2)
- un flux $\Phi_{\vec{B},2\to1} = M_{21} i_2$ à travers le circuit 1



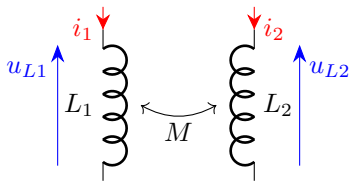
On admettra que $M_{12} = M_{21}$, qu'on notera simplement M, appelé **inductance mutuelle** des deux circuits, et que $|M| < \sqrt{L_1 L_2}$.

Par conséquent, on peut écrire (en convention récepteur) :

$$\begin{cases} \Phi_{\vec{B},1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_{\vec{B},2} = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases} \qquad \text{(EM2.5a)}$$

donc

$$\begin{cases} u_{L1}(t) = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M.\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_{L2}(t) = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \qquad \text{(EM2.5b)}$$

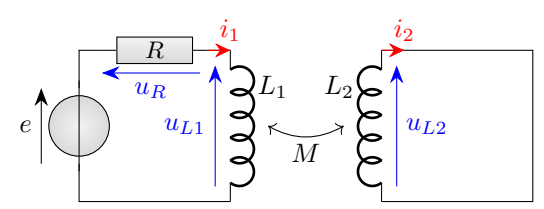


Remarque : Une inductance propre est toujours positive, mais pas forcément une inductance mutuelle, cela dépend des orientations des circuits : si on change le sens conventionnel d'un des courants, on change le signe de M.

Remarque : Pour tenir compte aussi des résistances propres des circuits, il faut ajouter des termes $R_1 i_1$ et $R_2.i_2$ aux deux tensions.

Exemple : Exemple de deux circuits couplés par inductance mutuelle

On considère les deux circuits suivants couplés par inductance mutuelle :



1. En appliquant la loi des mailles à la maille de gauche, établissez une ED reliant i_1, i_2 et e.
2. En appliquant la loi des mailles à la maille de droite, établissez une autre ED reliant i_1 et i_2. Déduisez-en une relation entre i_1 et i_2 si tous les courants sont nuls à $t = 0$.
3. Déduisez-en l'ED vérifiée par i_1.
4. La tension e, nulle à $t = 0$, passe à $E = \text{cst}$ à $t > 0$. Exprimez $i_1(t)$ puis $i_2(t)$.

1. $e(t) - u_R(t) - u_{L1}(t) = 0$ donc $e(t) - Ri_1(t) - L_1.\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$
2. $u_{L2}(t) = 0$ donc $L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. On intègre : $L_2 i_2(t) + Mi_1(t) = \text{cst}$ et cette constante est nulle d'après les conditions initiales.
3. En remplaçant $i_2(t)$ par $-\frac{M}{L_2}i_1(t)$ on obtient $e(t) - Ri_1(t) - L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{M^2}{L_2}\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $\tau\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + i_1(t) = \frac{e(t)}{R}$ avec $\tau = \frac{L_1 - \frac{M^2}{L_2}}{R}$: le couplage mutuel modifie le temps caractéristique par rapport au circuit RL classique.
   Remarque : pour que le système soit stable, il faut que $L_1 \geq \frac{M^2}{L_2}$ soit $M^2 \leq L_1 L_2$.
4. On résout et on trouve $i_1(t) = \frac{e}{R}\exp^{-t/\tau}$ puis $i_2(t) = -\frac{M}{L_2}\frac{e}{R}\exp^{-t/\tau}$.

Propriété : Énergie magnétique de circuits couplés

L'énergie magnétique de deux circuits couplés par inductance mutuelle vaut

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2 \qquad \text{(EM2.6)}$$

Démonstration

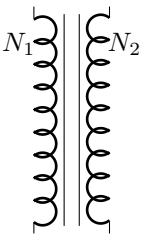
La puissance reçue par l'ensemble des deux circuits vaut (avec des notations évidentes) :

$$\mathcal{P}(t) = u_{L1}(t)i_1(t) + u_{L2}(t)i_2(t) = L_1 i_1(t)\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + Mi_1(t)\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + Mi_2(t)\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + L_2 i_2(t)\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1(t)^2 + Mi_1(t)i_2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2(t)^2\right)$$

B.3. Transformateur électrique

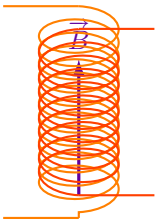
Définition : Transformateur idéal

Un transformateur est formé de deux bobines, contenant N_1 et N_2 spires, en induction totale, c'est-à-dire que toute ligne de champ magnétique traversant l'une traverse aussi l'autre. Par conséquent $M^2 = L_1 L_2$: le couplage est maximal.
On le symbolise avec 2 bobines séparées par deux traits verticaux.



Démonstration

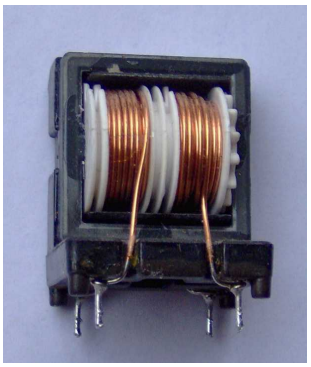
Considérons deux bobines imbriquées comme sur le schéma ci-contre. Notons $\vec{B}_1$ le champ magnétique créé par la bobine 1, et $\vec{B}_2$ le champ magnétique créé par la bobine 2. Soit $\Phi_{\vec{B},1s}$ le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers **une** spire ; alors $\Phi_{\vec{B},1\to1} = N_1\Phi_{\vec{B},1s}$ et $\Phi_{\vec{B},1\to2} = N_2\Phi_{\vec{B},1s}$ donc on a $\frac{L_1}{M} = \frac{\Phi_{\vec{B},1\to1}}{\Phi_{\vec{B},1\to2}} = \frac{N_1}{N_2}$. On procède de même avec le flux créé par la bobine 2 pour trouver $L_2 = \frac{N_2}{N_1}M$. En multipliant les deux, on trouve $L_1L_2 = M^2$.



Remarque : Les bobines 1 et 2 sont souvent appelées *primaire* et *secondaire* du transformateur.

En pratique, on utilise un noyau de fer doux pour canaliser les lignes de champ électrique à travers les bobines. La géométrie la plus courante est celle de la figure EM2.3, dans laquelle deux bobines sont enroulées sur l'axe central d'un noyau en fer en forme de ⊟.

FIGURE EM2.3 : Transformateur.



Propriété : Lois des tensions et des intensités pour un transformateur idéal

Considérons un transformateur idéal (sans pertes) avec N_1 spires au primaire et N_2 spires au secondaire. On note $m = \frac{N_2}{N_1}$, appelé **rapport de transformation**. Alors :

— si la tension aux bornes du primaire vaut $u_1(t)$ alors la tension aux bornes du secondaire vaut

$$u_2(t) = \frac{N_2}{N_1}u_1(t) = mu_1(t) \qquad \text{(EM2.7a)}$$

— si l'intensité à travers le primaire vaut $i_1(t)$ alors l'intensité à travers le secondaire vaut

$$i_2(t) = \frac{N_1}{N_2}i_1(t) = \frac{1}{m}i_1(t) \qquad \text{(EM2.7b)}$$

Démonstration

Soit $\phi(t)$ le flux total traversant chaque spire, alors la bobine 1 est traversée par un flux $\Phi_{\vec{B},1}(t) = N_1\phi(t)$ donc $u_1(t) = N_1\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$ (en convention récepteur) ; de même, $u_2(t) = N_2\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$. On en déduit que $\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$ sauf si $\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ (régime continu).
Si le transformateur est idéal, on néglige ses pertes, alors la puissance en entrée du primaire est égale à la puissance fournie dans le secondaire : $u_1(t)i_1(t) = u_2(t)i_2(t)$ donc $\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{1}{m}$.
En pratique, suivant les orientations des circuits, il peut y avoir un signe $-$ qui apparaît dans ces relations.

Remarque : Ces lois ne fonctionnent pas en trop basse fréquence, en particulier en continu ; En effet, en base fréquence, on ne peut plus négliger les résistances des deux bobines. Mais quelle que soit la fréquence, ces lois restent approchées, car le transformateur réel a de nombreuses sources de pertes ; les principales sont :

— les pertes dues à la résistance des fils (effet Joule)

— les pertes dues au matériau magnétique qui constitue le noyau (chaque fois qu'un matériau s'aimante puis se désaimante, cela dissipe de l'énergie)

— les pertes dues au courants induits dans le matériau magnétique (on les diminue en prenant un matériau « feuilleté », constitué de plusieurs couches)

— les pertes dues au champ magnétique qui ne suit pas exactement le noyau de fer.

De manière générale, on peut retenir deux règles pratiques :

— les pertes deviennent prépondérantes en basse fréquence (l'effet Joule surtout) et à haute fréquence (les pertes dans le noyau essentiellement). Un transformateur a donc une plage d'utilisation qui dépend de sa conception. Plus on veut l'utiliser en BF, plus il faut que $L_1\omega$ soit grand devant la résistance des fils, ce qui impose des noyaux magnétiques lourds et encombrants.

— les pertes dans le transformateur ont une importance relative plus faible lorsqu'on demande un fort courant en sortie.

Le transformateur est un composant essentiel de l'électricité et de l'électronique. Voici quelques utilisations courantes (cf. figure EM2.4) :

— isoler électriquement un circuit : on utilise un transformateur de rapport $m = 1$ appelé **transformateur d'isolement**. La tension au secondaire est la même qu'au primaire, mais l'avantage du transformateur c'est qu'il n'y a aucun contact entre les fils des deux circuits. On s'en sert pour résoudre les problèmes de masse, ou pour des questions de sécurité.

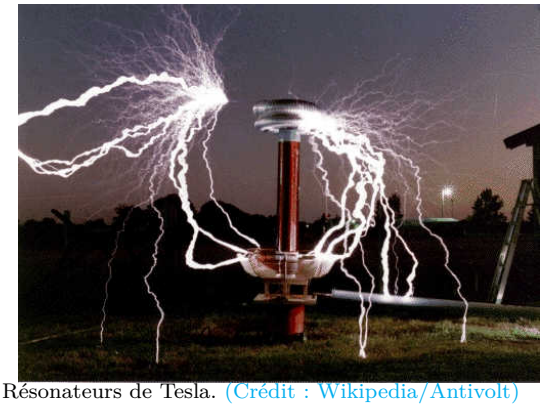
— abaisser une tension : pour alimenter les appareils électriques qui fonctionnement en basse tension (ordinateur, chargeur, …) on utilise une alimentation qui contient un transformateur qui abaisse le 220 V en une tension plus basse, ainsi que des étages de hachage/lissage qui transforment la tension alternative en une tension continue.

— élever une tension : en combinant un circuit RLC résonant, un transformateur et un second circuit résonant, les résonateurs de Tesla permettent d'obtenir des tensions colossales capables de générer des éclairs de plusieurs dizaines de mètres de long.

FIGURE EM2.4 : Quelques utilisations des transformateurs.



(a) Alimentation 15 V.



(b) Résonateurs de Tesla. (Crédit : Wikipedia/Antivolt)



(c) Transformateur très haute tension. (Crédit : Wikipedia/M. Koch)



(d) Soudage à l'arc ; la température atteint 3000 °C. (Crédit : Wikipedia/Mgschuler)

— diminuer le courant : lors du transport de l'électricité depuis le lieu où elle est produite jusque chez vous, il y a des fils dont la résistance dissipe beaucoup d'énergie par effet Joule. Pour diminuer ces pertes, on élève la tension d'un facteur 2000, jusqu'à 400 000 V, ce qui diminue l'intensité d'un facteur 2000 donc les pertes par effet Joule d'un facteur 2000^2. En bout de ligne, différents transformateurs rabaissent la tension jusqu'à 220 V pour alimenter les maisons.

— augmenter le courant : un poste de soudage à l'arc est un transformateur abaisseur de tension. L'arc qu'on voit n'est pas une étincelle due à une forte tension, au contraire, la tension est faible, mais quand on touche la pièce à souder avec la baguette de soudure, un courant de plusieurs centaines d'Ampères se met à circuler, qui fait fondre la soudure.

EM2. Phénomènes d'induction

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps	
Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ».
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

EM2. Phénomènes d'induction

Quelques conseils

✎ Encore une fois, dans un problème d'induction, on commence par **orienter le circuit** (i et $\vec{n}$).

✎ L'inductance propre d'un circuit tient compte du flux propre créé par le circuit lui-même, mais pas du flux créé par les sources extérieures.

✎ Dans la loi d'une bobine couplée avec une autre bobine, il y a un terme qui fait apparaître le courant de l'autre bobine. C'est perturbant au début, mais c'est cela le phénomène d'induction. Par conséquent, on ne peut plus définir une inductance pour la bobine, puisque la tension dépend désormais de 2 courants différents.

EM2. Phénomènes d'induction

QCMs

réponses page 1056

✓ QCM : ✗

Q1. Un champ magnétique qui traverse un circuit crée une tension induite :

(a). Vrai (b). Faux

Q2. Un champ magnétique variable qui traverse un circuit crée un courant induit :

(a). Faux (b). Vrai

Q3. Le flux du champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant i à travers lui-même vaut :

(a). $M.i$ (b). $L.i$
(c). $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (d). L

Q4. Soit un circuit parcouru par un courant i, d'inductance propre L, et un circuit voisin parcouru par i_2 et ayant une inductance mutuelle avec le premier circuit. Alors dans le premier circuit on fait apparaître une bobine de tension $u_L =$

(a). $L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ (b). $Li_1 + Mi_2$
(c). $L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ (d). $Mi_1 + Li_2$

Q5. Dans un transformateur idéal de facteur de transformation m, on a les relations (aux signes près) :

(a). $u_2 = m.u_1$ (b). $u_2 = \frac{1}{m}.u_1$
(c). $i_2 = m.i_1$ (d). $i_2 = \frac{1}{m}.i_1$

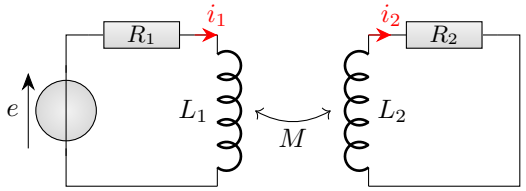
EM2. Phénomènes d'induction

Exercices

réponses page 1057

Exercice EM2.1 : Étude de deux circuits couplés par inductance mutuelle [**]

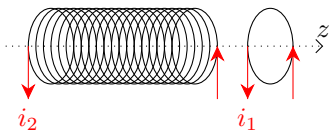
On considère les deux circuits ci-dessous, couplés par inductance mutuelle :



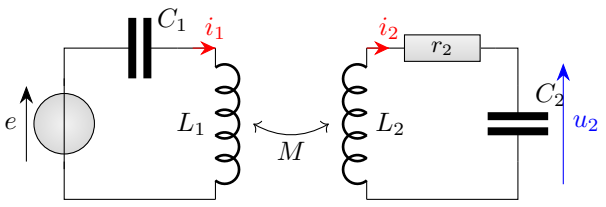
1. En appliquant la loi des mailles et les lois des composants à chaque circuit, établissez deux équations couplées vérifiées par i_1 et i_2.
2. Déduisez-en une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par i_2, en fonction de $\dot{e}$ et des constantes. Quelle inégalité peut-on en déduire sur L_1, L_2 et M ?
3. Initialement, le générateur est éteint et aucun courant ne circule. À $t = 0$ on allume le générateur : $e = E = \text{cst}$. Déterminez $i_2(t)$.
   Données : $L_1 = 40\,\text{mH}$, $L_2 = 23\,\text{mH}$, $M = 12\,\text{mH}$, $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$ et $E = 10\,\text{V}$.
4. On met maintenant un GBF : $e(t) = E\cos\omega t$ avec $E = 10\,\text{V}$ et $\omega = 100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminez les caractéristiques de $i_2(t)$.
5. Que vaut le rapport $\frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}$ en RSF ? À quel type de comportement cela correspond-il ?

Exercice EM2.2 : Induction couplée à une résonance [**]

On considère une spire de rayon a placée juste au bout d'un solénoïde de même rayon a, contenant N spires sur une longueur ℓ.



1. Le solénoïde crée en son intérieur un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2 \vec{e}_z$. En supposant que ce champ est celui qui traverse la spire seule, exprimez le flux $\Phi_{\vec{B},1}$ de ce champ à travers la spire seule. En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M.
2. Exprimez de même le flux de $\vec{B}$ à travers le solénoïde (formé de N spires), puis l'inductance propre L_2 du solénoïde.
   On admettra dans la suite que $L_1 = \frac{M}{N} = \frac{L_2}{N^2}$.
3. La spire seule de résistance $r_1 \approx 0$ est alimentée par un générateur de tension alternative $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ en série avec un condensateur de capacité C_1. Le solénoïde, de résistance interne r_2, est rebouclé sur un condensateur de capacité C_2. Le circuit équivalent est alors :

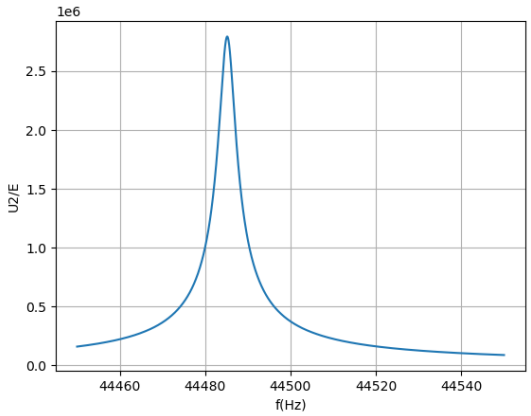


   À l'aide de la maille de gauche, exprimez une relation entre $\underline{e}$, $\underline{i_1}$ et $\underline{i_2}$.

4. En appliquant la loi des mailles à droite, exprimez une seconde relation entre $\underline{i_1}$ et $\underline{i_2}$. Montrez alors que

$$\underline{u_2}(\omega) = \frac{\underline{i_2}(\omega)}{jC_2\omega} = \frac{-\frac{jM\omega}{jL_1\omega+\frac{1}{jC_1\omega}}}{1 + jr_2C_2\omega - L_2C_2\omega^2 + \frac{jC_2M^2\omega^3}{jL_1\omega+\frac{1}{jC_1\omega}}}\underline{e}(\omega)$$

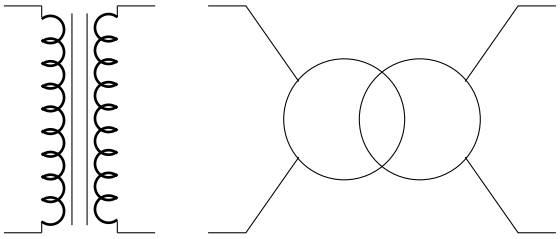
5. On trace la courbe de l'amplitude de u_2 en fonction de la fréquence pour $r_2 = 8\,\Omega$, $L_2 = 80\,\text{mH}$, $C_1 = 20\,\mu\text{F}$, $N = 500$, et C_2 choisi de manière à ce que $L_1C_1 = L_2C_2$:



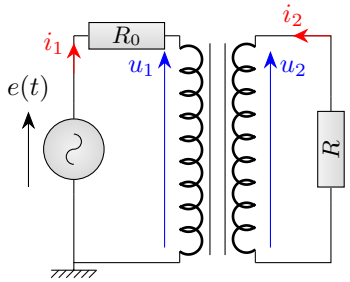
Commentez.

Exercice EM2.3 : Transformateur électrique [**]

Deux bobines d'inductances propres L_1 et L_2, placées proches l'une de l'autre, sont reliées par une inductance mutuelle M vérifiant $M < \sqrt{L_1L_2}$. On définit alors le coefficient de couplage $K = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} < 1$. Si $K = 1$, on dit que le couplage est total : les deux bobines forment alors un transformateur idéal.



Symboles d'un transformateur idéal



Circuit électrique étudié

On considère un transformateur placé dans le circuit de la figure ci-dessus. On travaille en RSF. Le bobinage primaire comprend N_1 spires, le secondaires N_2 spires. On note $m = \frac{N_2}{N_1}$ le rapport de transformation.

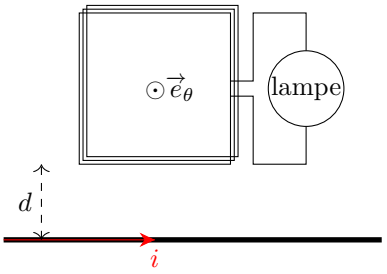
1. On admet que toutes les spires (du primaire ou du secondaire) sont traversées par le même flux $\phi(i_1, i_2)$ du champ magnétique.
   En supposant que seul le courant i_1 circule, reliez le rapport $\frac{L_1}{M}$ à m.
   De même, avec i_2, reliez $\frac{L_2}{M}$ à m.
   Vérifiez que $K = 1$, et exprimez $\frac{L_2}{L_1}$ en fonction de m.
2. Écrire l'ED reliant u_1 à i_1 et i_2 ; passez-la en complexes. De même reliez $\underline{u_2}$ à $\underline{i_1}$ et $\underline{i_2}$.
   Montrez que $\frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = m$
3. À partir de l'écriture de la loi des mailles dans la maille de droite, exprimez $\frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}$. Dans quelles conditions expérimentales a-t-on $\frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = \pm\frac{1}{m}$?
4. Dans ces conditions, montrez que $\underline{u_1} = \frac{1}{m^2}R\underline{i_1}$. Que peut-on en conclure sur l'effet d'un transformateur par rapport aux impédances placées en sortie ?

5. Dans ces mêmes conditions, montrez que l'ensemble formé du générateur, de R_0 et du transformateur est vu par la résistance R comme un générateur de Thévenin de fem et de résistance interne à préciser. Expliquez l'intérêt de cela, par exemple dans le cas de la soudure à l'arc.
6. On se replace dans le cas général.

   La puissance moyenne en entrée du primaire vaut $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{i_1}\,\underline{u_1^*}\right]$. Exprimez la puissance moyenne en sortie du secondaire $\mathcal{P}_2$, en fonction de $\underline{i_1}$, $\underline{u_1^*}$, m, R et L_2.
7. On sait qu'on peut écrire $\underline{i_1}\,\underline{u_1^*} = I_1 U_1 e^{j\phi_1}$ avec ϕ_1 le déphasage entre intensité et tension d'entrée ($\cos\phi_1$ est le facteur de puissance) et I_1, U_1 les amplitudes de $\underline{u_1}$ et $\underline{i_1}$. Reécrivez $\mathcal{P}_1$ en fonction de I_1, U_1, ϕ_1. Montrez que $\mathcal{P}_2 = \frac{U_1 I_1}{2}\cos\psi\cos(\phi_1 - \psi)$ avec $\psi = \arctan\frac{R}{L_2\omega}$.
   Ces deux puissances sont égales. Vérifiez que $\phi_1 = \psi$ permet de vérifier cette condition.
   Dans quel cas particulier u_1 et i_1 sont-ils en phase ?
8. Pour un transformateur donné on a : $L_1 = 0{,}4\,\text{H}$, $m = 1/5$, et on choisit $R = 25\,\Omega$ et $f = 50\,\text{Hz}$. Calculez numériquement le déphasage ϕ_1 en entrée du primaire.

Exercice EM2.4 : Allumage d'une lampe par induction [***]

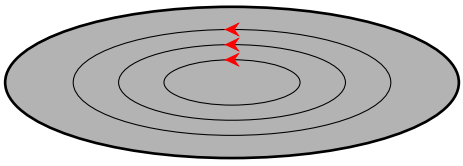
On dispose d'une lampe qui s'allume si la tension efficace à ses bornes dépasse $U_s = 1{,}5\,\text{V}$.
Pour l'allumer, on la relie à une bobine constituée d'un enroulement de $N = 200$ spires carrées de côté $a = 2{,}5\,\text{cm}$ (cf. ci-contre) et on approche l'ensemble à une distance d d'un fil parcouru par un courant alternatif i d'intensité efficace $I_{eff} = 8\,\text{A}$ et de fréquence $f = 50\,\text{kHz}$. Ce fil crée un champ magnétique qui vaut $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques, avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.



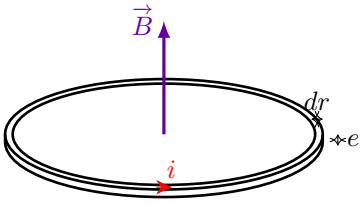
1. Le champ magnétique n'étant pas uniforme, il va falloir intégrer pour trouver le flux à travers le circuit. Commencez par poser l'intégrale du flux à travers 1 seule spire ; on remarquera que le vecteur normal vaut $\vec{e}_\theta$, que l'élément de surface vaut $\text{d}S = \text{d}r.\text{d}z$, et on posera les bornes nécessaires pour r et z (on pourra considérer que le côté gauche du circuit est à $z = 0$). Intégrez ensuite par rapport à z (intégration triviale) puis par rapport à r.
2. Déduisez-en la fem créée aux bornes de la lampe.
3. À quelle distance d faut-il approcher la lampe du fil pour qu'elle s'éclaire ?
4. Pour détecter si du courant passe dans un fil d'une installation domestique, il existe des lampe test de ce genre qui s'allument si on les place près d'un fil sous tension.
   Pensez-vous qu'elles fonctionnent selon le principe de cet exercice ?

Exercice EM2.5 : Chauffage par induction [***]

Un fond de casserole, assimilé à un disque conducteur de rayon $R = 9\,\text{cm}$, d'épaisseur $e = 6\,\text{mm}$, de conductivité électrique $\gamma = 1{,}5 \times 10^6\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$, est plongé dans un champ magnétique variable $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e}_z$ avec $B_0 = 1{,}4\,\text{mT}$ et $\omega = 2\pi \times 25\,000\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Les courants induits dans la casserole vont la chauffer, ainsi que les aliments qu'elle contient.



Courants dans le fond de la casserole



Une spire de taille dr

On admet qu'il crée des courants qui décrivent des cercles d'axe Oz.

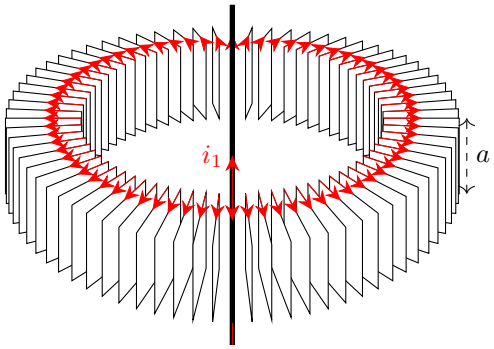
1. On va découper par la pensée le fond de la casserole en une multitude de spires concentriques, de rayon $r < R$ et de section $e \times dr$.

Déterminez la fem induite dans cette spire. Sachant que sa résistance s'écrit $\frac{2\pi r}{\gamma e dr}$ avec γ la conductivité électrique de l'acier, déduisez-en la puissance moyenne $d\mathcal{P}$ dissipée par cette spire, par effet Joule.

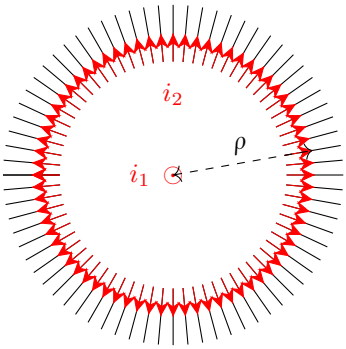
2. En intégrant antre 0 et R, déterminez la puissance totale $\mathcal{P}$ dissipée par effet Joule dans le fond de la casserole.

Exercice EM2.6 : Pince ampèremétrique [**]

Les ampèremètres usuels ne supportent pas les fortes intensités (en général, $I_{max} = 10\,\text{A}$). Pour mesurer des intensités supérieures, on utilise une pince ampèremétrique, dont on va étudier le principe.
Un fil rectiligne infini d'axe (Oz) est parcouru par un courant (c'est le courant à mesurer) d'intensité $i_1(t) = I_1 \cos \omega t$. On entoure le fil d'un bobinage constitué d'un tore de section carrée de côté a et de rayon moyen $\rho \gg a$, sur lequel sont régulièrement enroulées un grand nombre de spires N.
Ce bobinage est fermé sur un ampèremètre, le circuit ainsi réalisé a une résistance totale R et est parcouru, par induction, par un courant sinusoïdal $i_2(t) = I_2 \cos \omega t$



Vue de côté



Vue de dessus (toutes les spires sont en série)

1. Le fil crée un champ $\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. En supposant que la taille des spires est suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme uniforme, exprimez le flux total $\Phi_{\vec{B},1}$ créé par le champ magnétique du fil, à travers les spires du solénoïde.
2. Le solénoïde crée un champ magnétique qui vaut $\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}$ en son intérieur. En déduire le flux $\Phi_{\vec{B},2}$ dû au champ propre du solénoïde.
3. On suppose que la résistance R du circuit est négligeable ; la tension aux bornes du solénoïde est donc nulle.
   Exprimez le rapport $\frac{I_2}{I_1}$. Commenter.

EM2. Phénomènes d'induction

TDs numériques

réponses page 1060

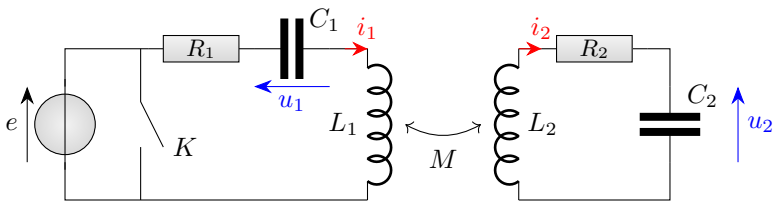
TD numérique : Résonateur de Tesla

A.X=B EDO

Les résonateurs de Tesla sont des systèmes électriques mis au point par Nicolas Tesla pour créer des décharge électriques surpuissantes ; ils sont capables de créer des différences de potentiel de plusieurs centaines de milliers de Volts. Ils fonctionnent suivant 3 étages :

- un premier étage contient un des condensateurs et des bobines avec un hacheur rotatif qui coupe régulièrement une branche du circuit, provoquant une surtension aux bornes des bobines. On obtient alors une tension alternative très forte
- un deuxième étage consiste en un transformateur survolteur
- un troisième étage consiste en un RLC résonant où se crée l'arc électrique

Le schéma de l'étude est représenté ci-dessous :



Valeurs numériques : $L_1 = 20\,\mu\text{H}$, $L_2 = 50\,\text{mH}$, $M = 0.7\sqrt{L_1 L_2}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$ et $C_2 = 5\,\text{pF}$.

1. Calculez la fréquence théorique de résonance f_0 du second circuit.
   Calculez la valeur de C_1 pour que le premier circuit résonne à la même fréquence.
2. On considère pour le moment l'ensemble comme un filtre d'entrée e et de sortie u_2.
   Écrivez 4 équations différentielles reliant u_1, u_2, i_1 et i_2 (2 lois des mailles, et 2 lois des condensateurs). Passez-les en complexes, et déduisez-en un systèmes de 4 équations à 4 inconnues sous la forme

$$A \cdot \begin{pmatrix} \underline{u_1} \\ \underline{u_2} \\ \underline{i_1} \\ \underline{i_2} \end{pmatrix} = B$$

   où A est une matrice 4 par 4 et B un vecteur 4 par 1.
3. Résolvez ce système à l'aide de `numpy.linalg.solve` pour $f = 100\,\text{kHz}$ et $\underline{e}(0) = 1\,\text{V}$.
4. Tracez la courbe de $|\underline{u_2}|$ en fonction de f entre $f_0/2$ et f_0. Pour quelle fréquence a lieu la résonance ? Mesurez son facteur de qualité Q.
5. On s'intéresse maintenant à la dynamique du circuit : le condensateur C_1 se charge, puis une fois une tension $U_0 = 10\,000\,\text{V}$ atteinte, l'interrupteur K se ferme.
   Au secondaire, il apparaît une telle surtension que des étincelles vont apparaître aux bornes du condensateur ; cette étincelle agit comme un conducteur ohmique entre les deux bornes, dont la résistance R_e varie en fonction de la tension u_2 selon la loi :

$$\begin{cases} R_e = \infty \text{ si } |u_2| < U_e = 5 \times 10^4\,\text{V} \\ R_e = \dfrac{D}{|u_2| - U_e} \text{ sinon, avec } D = 3 \times 10^8\,\Omega \cdot \text{V} \end{cases}$$

   Résolvez alors l'évolution du système pour $u_1(0) = U_0$ et les autres CI nulles. Déterminez le nombre d'éclairs, et leur durée.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM :

Q1.(b)
Ce n'est vrai que si le flux varie.
Q2.(a)
Il crée une tension induite, qui va crée un courant uniquement si le circuit est fermé.
Q3.(b)
Avec L l'inductance propre du circuit.
Q4.(c)
Q5.(a) ET (d)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice EM2.1 : Étude de deux circuits couplés par inductance mutuelle [**]

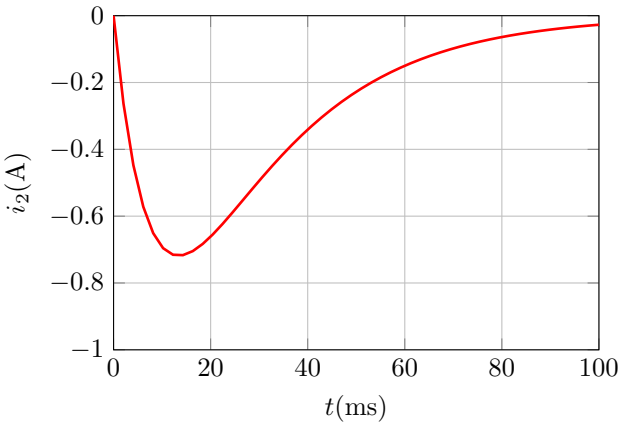
1. $\begin{cases} R_1 i_1(t) + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = e(t) \\ R_2 i_2(t) + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$

2. On isole dans la seconde $\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_2}{M} i_2(t) - \frac{L_2}{M}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$; en dérivant la première on trouve $R_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + L_1 \frac{\mathrm{d}^2 i_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + M\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ soit $R_1\left[-\frac{R_2}{M} i_2(t) - \frac{L_2}{M}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right] + L_1\left[-\frac{R_2}{M}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{L_2}{M}\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] + M\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$; on en tire

$$\left(L_1 L_2 - M^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(L_1 R_2 + L_2 R_1\right)\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + R_1 R_2 i_2(t) = -M\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

   Les solutions ne peuvent pas croître spontanément, ce qui montre que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

3. Numériquement : $776.10^{-6}\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + 126.10^{-3}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + 4 i_2(t) = 0$. On trouve $\Delta = 3{,}5 \times 10^{-3}$, les racines valent donc $r_1 = -119\,\mathrm{s}^{-1}$ et $r_2 = -43\,\mathrm{s}^{-1}$. Les solutions sont de la forme $i_2(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.
   Pour les conditions initiales, la continuité de i_2 donne $i_2(0^+) = 0 = A + B$ et donc $u_{R_2}(0^+) = 0$ d'où on tire $L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = -M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)$; de plus $E = R_1 i_1(0^+) + L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \left[-\frac{L_1 L_2}{M} + M\right]\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}(0^+)$ donc $\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{-EM}{L_1 L_2 - M^2} = Ar_1 + Br_2$. De ces deux relations on tire $A = -B = \frac{-EM}{(L_1 L_2 - M^2)(r_1 - r_2)} = 2{,}0\,\mathrm{A}$.
   On trouve alors $i_2(t) = 2{,}0e^{-119t} - 2e^{-43t}$ en A avec t en secondes.



4. $\underline{i_2}(t) = \frac{-jM\omega E}{R_1 R_2 + j(L_1 R_2 + L_2 R_1)\omega - (L_1 L_2 - M^2)\omega^2} e^{j\omega t}$ donc $\underline{i_2}(0)$ a pour module 0,91 et pour phase à l'origine 2,85 rad. Donc $i_2(t) = 0{,}91\cos(100t + 2{,}85)$A.

5. $\frac{\underline{i_2}(\omega)}{\underline{i_1}(\omega)} = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$: filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{R_2}{L_2} = 87\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice EM2.2 : Induction couplée à une résonance [**]

1. Le flux vaut le champ magnétique multiplié par la surface donc $\Phi_{\vec{B},1} = \pi a^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$ soit $M = \frac{\pi a^2 \mu_0 N}{\ell}$ (peu importe le signe ici, on le prend positif sans indications autres).

2. Même chose multipliée par le nombre de spires : $L_2 = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2}{\ell}$

3. Par la loi des mailles et la loi d'Ohm on trouve facilement $\underline{e}(\omega) = \left(jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}\right)\underline{i_1}(\omega) + jM\omega\underline{i_2}(\omega)$.

4. De même, $0 = L_2 j\omega\underline{i_2}(\omega) + Mj\omega\underline{i_1}(\omega) + r_2\underline{i_2}(\omega) + \frac{1}{jC_2\omega}\underline{i_2}(\omega)$. On tire de la première équation $\underline{i_1}(\omega) = \frac{\underline{e}(\omega)}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} - \frac{jM\omega\underline{i_2}(\omega)}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}$ puis $\frac{-jM\omega\underline{e}(\omega)}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} = L_2 j\omega\underline{i_2}(\omega) - Mj\omega\frac{jM\omega\underline{i_2}(\omega)}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} + r_2\underline{i_2}(\omega) + \frac{1}{jC_2\omega}\underline{i_2}(\omega)$ d'où on tire l'intensité $\underline{i_2}(\omega) = \frac{-\frac{jM\omega}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}}{\frac{1}{jC_2\omega} + r_2 + jL_2\omega + \frac{M^2\omega^2}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}}\underline{e}(\omega)$ et ensuite $\underline{u_2}(\omega) = \frac{\underline{i_2}(\omega)}{jC_2\omega} = \frac{-\frac{jM\omega}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}}{1 + jr_2C_2\omega - L_2C_2\omega^2 + \frac{jC_2M^2\omega^3}{jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}}\underline{e}(\omega)$.

5. On observe une résonance énorme au voisinage de 44 485 Hz. Cette résonance est la combinaison des résonances des deux oscillateurs LC (qui sont accordés à la même fréquence) et du transformateur de rapport N. Les tensions obtenues sont énormes et permettre la génération d'éclairs. Néanmoins la résonance est très étroite, et le réglage d'un tel dispositif demande beaucoup de précision.

Corrigé de l'exercice EM2.3 : Transformateur électrique [**]

1. Par définition : $\Phi_{\vec{B},1} = L_1 i_1 + M i_2$ et $\Phi_{\vec{B},2} = L_2 i_2 + M i_1$. De plus, $\Phi_{\vec{B},1} = N_1\phi$ et $\Phi_{\vec{B},2} = N_2.\phi$. Donc $\frac{\Phi_{\vec{B},2}}{\Phi_{\vec{B},1}} = \frac{N_2}{N_1} = m$.
   Si $i_1 \neq 0$ et $i_2 = 0$, alors on obtient $\frac{\Phi_{\vec{B},2}}{\Phi_{\vec{B},1}} = \frac{M i_1}{L_1 i_1} = \frac{M}{L_1}$ donc $\frac{L_1}{M} = \frac{1}{m}$.
   De même si $i_I = 1$ et $i_2 \neq 0$ alors $\frac{\Phi_{\vec{B},2}}{\Phi_{\vec{B},1}} = \frac{L_2}{M} = m$.
   En faisant le produit on obtient $\frac{L_1}{M}.\frac{L_2}{M} = 1$ soit $K = 1$.
   En faisant le quotient on trouve $\frac{L_2}{L_1} = m^2$.
2. On sait que $u_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $\underline{u_1}(\omega) = jL_1\omega\underline{i_1}(\omega) + jM\omega\underline{i_2}(\omega)$. De même $\underline{u_2}(\omega) = jM\omega\underline{i_1}(\omega) + jL_2\omega\underline{i_2}(\omega)$.
   On en déduit que $\frac{\underline{u_2}(\omega)}{\underline{u_1}(\omega)} = \frac{jM\omega\underline{i_1}(\omega)+jL_2\omega\underline{i_2}(\omega)}{jL_1\omega\underline{i_1}(\omega)+jM\omega\underline{i_2}(\omega)} = \frac{M\underline{i_1}(\omega)+L_2\underline{i_2}(\omega)}{L_1\underline{i_1}(\omega)+M\underline{i_2}(\omega)} = \frac{mL_1\underline{i_1}(\omega)+mM\underline{i_2}(\omega)}{L_1\underline{i_1}(\omega)+M\underline{i_2}(\omega)} = m$
3. $\underline{u_2}(\omega) = jM\omega\underline{i_1}(\omega) + jL_2\omega\underline{i_2}(\omega) = -R\underline{i_2}(\omega)$ donc $\frac{\underline{i_2}(\omega)}{\underline{i_1}(\omega)} = \frac{-jM\omega}{R+jL_2\omega} = -\frac{1/m}{1-j\frac{R}{L_2\omega}}$ qui vaut environ $-\frac{1}{m}$ lorsque $L_2\omega \gg R$: il faut soit être en haute fréquence, soit avoir une résistance faible en sortie.
4. On a alors par la loi d'Ohm : $\underline{u_2}(\omega) = -R\underline{i_2}(\omega)$ avec $\underline{u_2}(\omega) = m\underline{u_1}(\omega)$ et $\underline{i_2}(\omega) = -\frac{1}{m}\underline{i_1}(\omega)$ donc on trouve bien $\underline{u_1}(\omega) = \frac{1}{m^2}R\underline{i_1}(\omega)$: pour le bloc d'alimentation à gauche, l'ensemble formé du transfo et de la résistance R apparaît comme une résistance $\frac{R}{m^2}$.
5. Dans la maille de gauche : $\underline{e}(\omega) = \underline{u_1}(\omega) + R_0\underline{i_1}(\omega)$ donc $\underline{u_1}(\omega) = \underline{e}(\omega) - R_0\underline{i_1}(\omega)$ soit $\underline{u_2}(\omega) = m\underline{u_1}(\omega) = m\underline{e}(\omega) + m^2R_0\underline{i_2}(\omega)$: le bloc formé par le générateur et le transfo apparaît, du point de vue de la résistance R, comme un générateur de Thévenin de fem $m.\underline{e}$ et de résistance interne m^2R_0 (le $-$ vient de la convention récepteur en sortie).
   Dans le cas de la soudure à l'arc, $m \ll 1$ donc la résistance interne du Thévenin équivalent est très très faible, ce qui permet d'obtenir de forts courants.
6. $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{i_2}(\omega)\underline{u_3}^*(\omega)\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\frac{\underline{i_1}(\omega)\underline{u_1}^*(\omega)}{1-j\frac{R}{L_2\omega}}\right]$
7. $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[I_1.U_1.e^{-j\phi_1}\right] = \frac{U_1I_1}{2}\cos\phi_1$
   $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\frac{I_1U_1e^{-j\phi_1}}{1-j\frac{R}{L_2\omega}}\right]$. Or $1 - j\frac{R}{L_2\omega} = \left|1 - j\frac{R}{L_2\omega}\right| e^{j\arg\left(1-j\frac{R}{L_2\omega}\right)} = \sqrt{1+\left(\frac{R}{L_2\omega}\right)^2}e^{-j\arctan\frac{R}{L_2\omega}}$.
   En posant $\psi = \arctan\frac{R}{L_2\omega}$ on obtient $\sqrt{1+\left(\frac{R}{L_2\omega}\right)^2} = \sqrt{1+\tan^2\psi} = \frac{1}{\cos\psi}$ donc l'expression de la puissance en sortie devient $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[I_1U_1e^{-j\phi_1}\cos\psi e^{j\psi}\right] = \frac{U_1I_1}{2}\cos\psi\cos(\phi_1-\psi)$
   Si $\psi = \phi_1$ alors $\mathcal{P}_2 = \frac{I_1U_1}{2}\cos\phi_2\cos 0 = \mathcal{P}_1$.
   u_1 et i_1 sont en phase si $\phi_1 = 0$ soit $\psi = 0$ soit $\frac{R}{L_2\omega} = 0$ ce qui est atteint à la limite d'une très petite résistance en sortie.
8. $\phi_1 = \psi = 78{,}6°$

Corrigé de l'exercice EM2.4 : Allumage d'une lampe par induction [***]

1. $\Phi_{\vec{B}} = \int_{r=d}^{d+a}\int_{z=0}^{a}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\mathrm{d}z.\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\int_{r=d}^{d+a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$
2. Le flux total vaut N fois cela : $\Phi_{\vec{B},\text{total}}(t) = \frac{N\mu_0\sqrt{2}I_{eff}\cos(2\pi ft)a}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$
   Donc la fem vaut $e(t) = \frac{N\mu_0\sqrt{2}I_{eff}2\pi f\sin(2\pi ft)a}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$
   Sa valeur efficace vaut $E_{eff} = N\mu_0 I_{eff} fa\ln\frac{d+a}{d}$
3. $E_{eff} = U_s \Leftrightarrow \ln\frac{d+a}{d} = \frac{U_s}{N\mu_0 I_{eff} fa}$ d'où on tire $d = \frac{a}{\exp\left(\frac{U_s}{N\mu_0 I_{eff} fa}\right)-1} = 3\,\text{cm}$
4. D'abord, ces testeurs sont des testeurs de tension ; ici, c'est une intensité qui crée le champ magnétique.
   Ensuite, ils fonctionnent avec du 50 Hz, soit une fréquence 1000 fois plus faible qu'ici, donc l'effet d'induction est 1000 fois plus faible, donc non détectable.
   Ces testeurs fonctionnent donc sur un principe différent : par couplage capacitif.

Corrigé de l'exercice EM2.5 : Chauffage par induction [***]

1. $\Phi_{\vec{B}}(t) = \pi r^2 B_0 \cos\omega t$ donc $e(t) = \pi r^2 B_0 \omega \sin\omega t$. La puissance dissipée par la petite spire comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$ vaut alors $\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\langle e(\omega,t)^2\rangle}{résistance} = \frac{\pi^2 r^4 B_0^2 \omega^2 \gamma e \mathrm{d}r}{2\pi r} \langle \sin^2 \omega t \rangle$. La moyenne d'un sinue carré vaut 1/2 donc $\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\pi r^3 B_0^2 \omega^2 \gamma e \mathrm{d}r}{4}$
2. Par intégration : $\mathcal{P} = \frac{\pi R^4 B_0^2 \omega^2 \gamma e}{16} = 5{,}6\,\mathrm{kW}$

Corrigé de l'exercice EM2.6 : Pince ampèremétrique [**]

1. Pour une spire, $B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\rho}$ et $S = a^2$. Donc à travers N spires $\Phi_{\vec{B},1} = \frac{N\mu_0 i_1 a^2}{2\pi\rho}$
2. De même $\Phi_{\vec{B},2} = \frac{N^2\mu_0 i_2 a^2}{2\pi\rho}$ avec la même approximation.
3. La fem totale aux bornes du solénoïde vaut donc $e(t) = -\frac{N\mu_0 a^2}{2\pi\rho}\left(\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right)$. Si elle est quasiment nulle, alors $\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $\omega I_1 \sin\omega t + N I_2 \omega \sin\omega t = 0$ d'où on tire $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{N}$: on a donc divisé le courant par N, et on peut le mesurer avec un ampèremètre classique.

Il existe d'autres pinces ampèremétriques fonctionnant sur un principe légèrement différent, et même en continu.

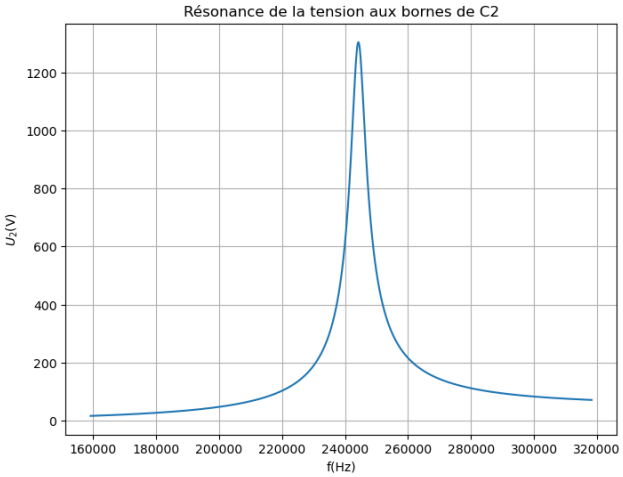
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Résonateur de Tesla

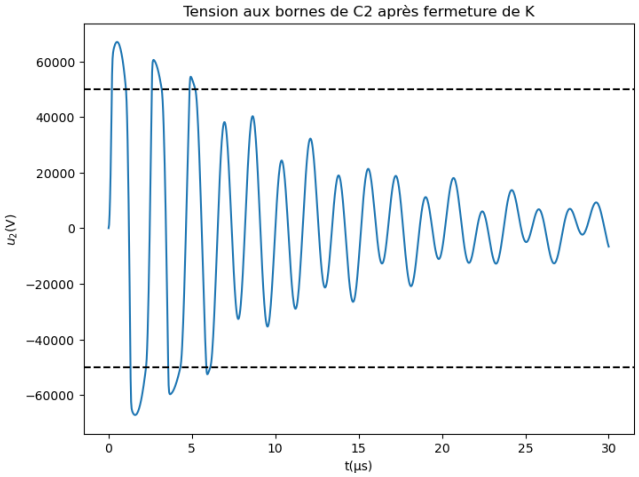
On choisit $C_1 = 12{,}5\,\text{nF}$ pour une résonance à $f_0 = 318\,\text{kHz}$.

À partir des lois des mailles et des condensateurs, on obtient le système $\begin{cases} u_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e \\ u_2 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \\ i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} \\ i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} \end{cases}$

On trace une courbe de résonance centrée en 244 kHz et de largeur à $-3\,\text{dB}$ égale à 4,7 kHz, d'où $Q = 52$.



La résolution dynamique du système d'équations différentielles $\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{Mu_2 + MR_2 i_2 - L_2 u_1 - L_2 R_1 i_1}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{Mu_1 + MR_1 i_1 - L_1 u_2 - L_1 R_2 i_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{i_1}{C_1} \\ \frac{du_2}{dt} = \begin{cases} \frac{i_2}{C_2} \text{ si } |u_2| < U_e \\ \frac{i_2}{C_2} - \frac{u_2}{R_e C_2} \text{ sinon avec } R_e = \frac{D}{|u_2| - U_e} \end{cases} \end{cases}$ donne des oscillations non-linéaires amorties, avec 6 éclairs en 8 µs environ.



Chapitre EM3 Systèmes électromécaniques

Programme p.1067

Conseils p.1068

Cours p.1062

EM3.A. Systèmes électromécaniques en translation

EM3.B. Systèmes électromécaniques en rotation

Exercices p.1069

TDs numériques p.1074

EM3. Systèmes électromécaniques

Cours

Les deux chapitres précédents nous ont donné les deux équations des couplages électromécaniques :

— le champ magnétique agit sur les circuits traversés par des courants par l'intermédiaire de la **force de Laplace** et modifie leur mouvement ;

— le mouvement du circuit dans le champ magnétique crée une tension induite par la **loi de Faraday** qui modifie le courant.

Dans le cas d'un circuit fixe et indéformable, il n'y a pas d'effet mécanique, donc l'étude électrique suffit ; mais pour des circuits mobiles et/ou déformables, ces deux phénomènes sont couplés. Ainsi, pour résoudre désormais un problème électromécanique de façon globale, il va toujours falloir procéder de la même manière :

Méthode : Résolution d'un problème d'induction avec un circuit mobile et/ou déformable

— ORIENTER LE CIRCUIT si ce n'est pas fait dans l'énoncé, en plaçant le sens conventionnel du courant ;

— dessiner le circuit électrique équivalent et appliquer la loi des mailles pour trouver une équation différentielle électrique ;

— appliquer une loi de mécanique (théorème de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ou de l'énergie cinétique) pour trouver une équation différentielle mécanique.

Les deux derniers points se font dans l'ordre voulu. Ensuite, suivant ce que demande l'énoncé, on va combiner les deux ED pour en former une seule, soit électrique, soit mécanique.

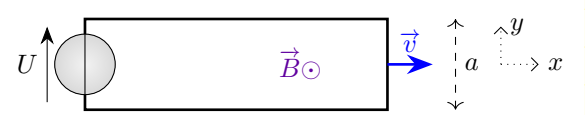
Dans ce chapitre, nous allons étudier un seul exemple simple, puis donner quelques notions sur les applications ; les calculs détaillés seront vus en exercices.

EM3.A. Systèmes électromécaniques en translation

On commence par un exemple assez basique et théorique, mais qui permet de bien montrer le principe d'étude d'un circuit mobile ou déformable.

Exemple : Rail de Laplace

On étudie le rail de Laplace déjà observé expérimentalement, mais alimenté cette fois par une tension constante U. On note R sa résistance interne et L son inductance propre. Le côté de droite, de masse m, se déplace avec une vitesse $v\vec{e}_x$; le champ magnétique $B\vec{e}_z$ est supposé uniforme.

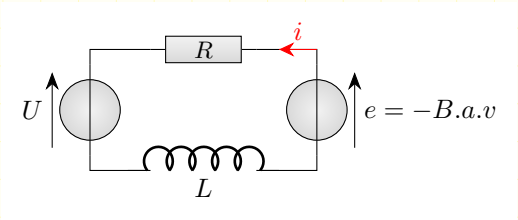


1. **ORIENTEZ LE CIRCUIT** en plaçant le sens conventionnel du courant.
2. Exprimez la fem induite en fonction de v, B et des données. Dessinez le schéma équivalent du circuit, et déduisez-en l'équation électrique reliant i et v.
3. Exprimez la force de Laplace sur le segment mobile (segment de droite). Par application du PFD, établissez l'équation mécanique.
4. On suppose que l'inductance propre du circuit est très faible. Simplifiez l'équation électrique, isolez i, puis déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on fera l'AN pour $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$, $a = 6\,\mathrm{cm}$, $m = 45\,\mathrm{g}$ et $R = 3\,\mathrm{m\Omega}$.
5. *Première expérience* : allumage brusque de la tension

À $t<0$, tout est éteint. On allume la tension, qui vaut donc $U=\text{cst}$ à $t>0$.
Exprimez $v(t)$ puis $i(t)$.

6. *Seconde expérience* : freinage par courants de Foucault
Il n'y a pas de tension imposée : $U=0$. A $t=0$ on lance la partie mobile avec une vitesse v_0. Exprimez $v(t)$ puis $i(t)$.

1. Ici je choisis le sens trigo par exemple ; $\vec{n}$ est donc sortant.
2. Le flux vaut $\Phi(t)=B.a.x(t)$ donc $e(t)=-\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=-Bav(t)$. Le schéma électrique équivalent est donc :

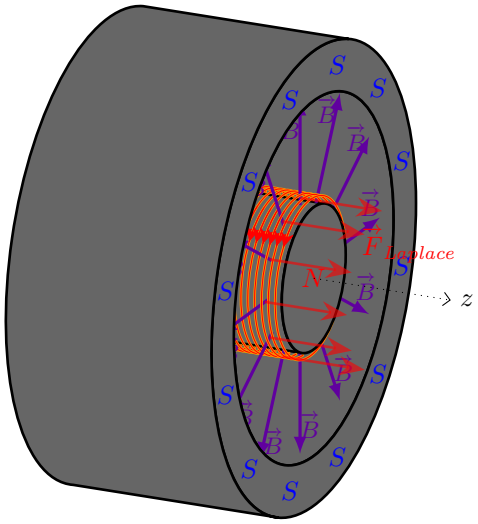


donc $U-Bav(t)-Ri(t)-L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=0$

3. On a déjà fait ce calcul : $\vec{F}(t)=i(t).a\vec{e}_y\wedge B\vec{e}_z=i(t)aB\vec{e}_x$. Comme on a un mouvement de translation, on va utiliser le théorème de la quantité de mouvement projeté sur $\vec{e}_x$: $m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=i(t)aB$
4. Si $L=0$ alors $i(t)=\frac{U-Bav(t)}{R}$ donc $m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2a^2}{R}v(t)=\frac{UaB}{R}$
On peut poser $\tau=\frac{mR}{B^2a^2}=3{,}75\,\text{s}$ et alors l'équation s'écrit $\tau\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+v(t)=\frac{U}{Ba}$
5. La solution particulière vaut $v=\frac{U}{Ba}$ donc après quelques calculs on trouve $v(t)=\frac{U}{aB}\left[1-e^{-t/\tau}\right]$ puis $i(t)=\frac{U}{R}e^{-t/\tau}$
6. Cette fois la solution particulière est nulle donc on trouve $v(t)=v(0)e^{-t/\tau}$ puis $i(t)=-\frac{Bav(0)}{R}e^{-t/\tau}$
C'est une propriété générale : dans un système essentiellement résistif, le couplage électromécanique a tendance à freiner le mouvement en l'absence de sources de tension ou de courants : on parle de *freinage par courants de Foucault*.

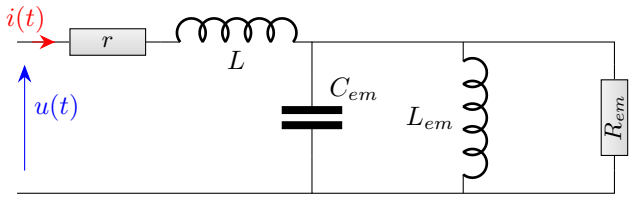
En remplaçant la tension par une tension sinusoïdale, on peut faire vibrer la tige ; mais c'est peu efficace, car le rail de Laplace ne contient qu'une seule spire. Pour avoir plus d'effet, et produire un son en faisant vibrer une membrane, on construit un haut-parleur électrodynamique sur le principe de la figure EM3.1 : une bobine coulisse autour du pôle central d'un aimant de forme bien particulière produisant un champ magnétique radial. En coordonnées cylindriques, le champ magnétique est selon $\vec{e}_r$, le courant circule dans la bobine selon $\vec{e}_\theta$, donc la force de Laplace est selon $\vec{e}_z$. En collant une membrane au bout de la bobine, on peut la faire vibrer, et transmettre une vibration à l'air.

FIGURE EM3.1 : Principe d'un haut-parleur électrodynamique.



Ceci est l'aspect mécanique ; mais il y a aussi un aspect électrique : la bobine est solidaire de la membrane qui agit comme un ressort, ce qui donne un oscillateur harmonique. Le mouvement de cet oscillateur donne en retour, par induction, une fem qui modifie les caractéristiques électriques du haut-parleur. Sans effets inductifs, le haut-parleur serait une simple bobine, représentée par une résistance r en série avec une inductance L ; avec les effets inductifs, le haut-parleur devient équivalent au schéma de la figure EM3.2.

FIGURE EM3.2 : Schéma électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique.



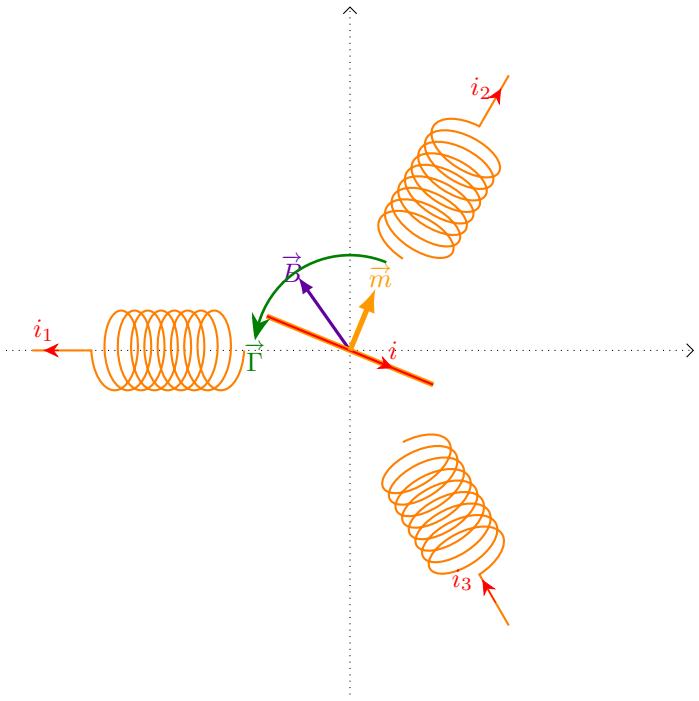
D'autres applications mettent en œuvre des mouvements de translation, par exemple les trains à sustentation magnétique : un puissant champ magnétique repousse le train et le fait léviter par un effet appelé *diamagnétisme* ; mais comme le train ne touche plus le sol, la seule solution pour le propulser est d'utiliser une force de Laplace grâce à un second champ magnétique variable.

EM3.B. Systèmes électromécaniques en rotation

Nous avons déjà vu un premier moteur rotatif : le moteur synchrone. Son principe est de créer un champ magnétique tournant et de faire tourner un moment magnétique permanent à la poursuite de ce champ. Mais ce moteur ne démarre pas seul : il faut d'abord le lancer à la bonne vitesse de rotation.

Pour faire un moteur qui démarre seul, on se tourne vers le moteur asynchrone. Dans celui-ci, le stator produit encore un champ magnétique tournant, mais cette fois, le rotor est un simple circuit rebouclé sur lui-même, passif, de résistance R et d'inductance L. Au départ, le rotor ne bouge pas ; le champ magnétique tournant va alors créer, par induction, un courant induit dans le rotor, qui va acquérir un moment magnétique non nul, et produire un couple de forces de Laplace qui va mettre le rotor en mouvement (figure EM3.3).

FIGURE EM3.3 : Principe d'un moteur asynchrone, le rotor tournant à une vitesse angulaire égale à la moitié de celle du champ magnétique.

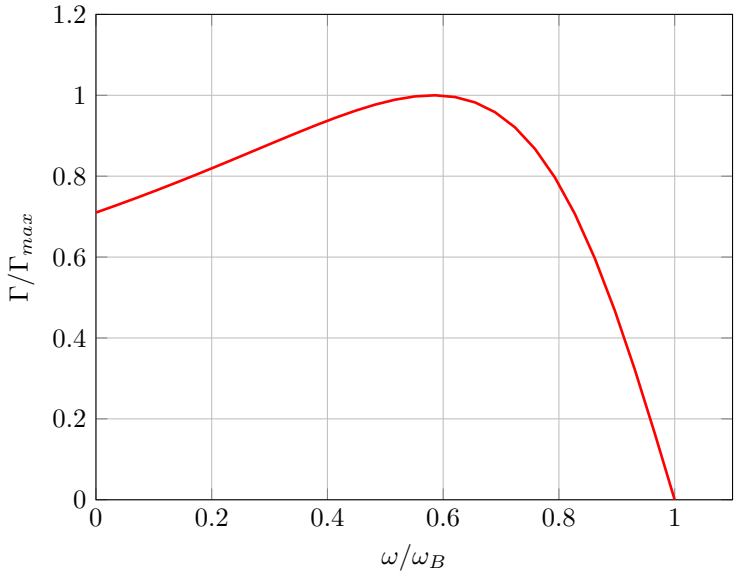


Ensuite, c'est un peu compliqué : le champ magnétique tourne, le rotor aussi, les effets inductifs varient donc au cours du temps, et le couple moteur aussi ; des calculs montrent qu'en moyenne, le couple moteur est non nul, il varie selon la loi

$$\langle\Gamma\rangle(\omega) = \frac{\Phi_{\vec{B},max} L(\omega_B - \omega)^2}{2\left(R^2 + L^2(\omega_B - \omega)^2\right)}$$

où ω est la vitesse de rotation du rotor, ω_B celle du champ magnétique et $\Phi_{\vec{B},max}$ le flux maximal du champ magnétique à travers le rotor ; le profil est représenté sur la figure EM3.4.

FIGURE EM3.4 : Couple d'un moteur asynchrone en fonction de la vitesse de rotation ; ω_B est la vitesse de rotation du champ magnétique.



Les moteurs asynchrones peuvent être très puissants eux aussi. Ils équipent par exemple les TGV Atlantiques ou certains modèles de voitures électriques.

Ces deux types de moteurs (synchrone et asynchrone) ont des avantages, mais nécessitent tous les deux une tension d'alimentation alternative ; de plus, le réglage de la vitesse de rotation n'est pas toujours simple. Au contraire, le moteur à courant continu (MCC) ne nécessite qu'une tension continue, et permet un réglage simple de la vitesse de rotation ; il est plutôt utilisé dans des applications de puissance faible ou moyenne.

Dans un moteur à courant continu, le champ magnétique est statique — créé le plus souvent par un aimant permanent. Si on place une spire, elle va tourner pour s'orienter afin d'avoir son moment magnétique parallèle au champ magnétique ; puis plus rien ne se passe. L'astuce consiste alors à utiliser un système de balais collecteurs (ou charbons) pour inverser le sens du courant dans la spire : celle-ci se retrouve alors dans la configuration la plus défavorable — son moment magnétique est opposé à $\vec{B}$ — et elle fait à nouveau demi-tour pour s'aligner avec le champ ; et ainsi de suite.

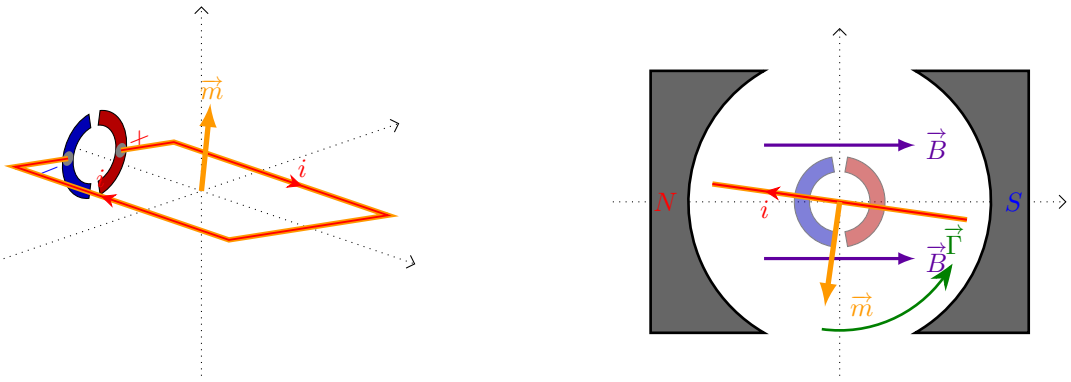
Le principe est illustré sur la figure EM3.5 avec une seule spire ; en pratique, on met plusieurs spires décalées en angle, de manière à obtenir un mouvement plus régulier.

On peut montrer (voir les exercices) que le couple de la force de Laplace est proportionnel au courant : $\Gamma(t) = \Phi_0 i(t)$ où Φ_0 représente le flux maximal du champ à travers les spires du rotor. En même temps, l'induction crée une force contre-électromotrice $\Phi_0\omega(t)$. On établit alors les lois du moteur à courant continu alimenté par une tension $u(t)$, traversé par un courant $i(t)$ et tournant à la vitesse angulaire $\omega(t)$:

$$\begin{cases} J\dot{\omega}(t) = \Phi_0 i(t) - \lambda\omega(t) - C_u \\ u(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \Phi_0\omega(t) \end{cases}$$

où C_u représente le couple utile (fourni par le moteur) et λ est un coefficient de frottements. En régime continu, on obtient alors $\begin{cases} 0 = \Phi_0 I - \lambda\Omega - C_u \\ U = RI + \Phi_0\Omega \end{cases}$ d'où on tire $\Omega = \dfrac{U - \frac{RC_u}{\Phi_0}}{\Phi_0 + \frac{\lambda R}{\Phi_0}}$: la vitesse de rotation est, à charge constante, une fonction affine de la tention appliquée aux bornes du moteur à courant continu. Ainsi, on peut contrôler la vitesse de rotation en contrôlant la tension d'alimentation.

FIGURE EM3.5 : Principe d'un moteur à courant continu.



(a) Principe des balais collecteurs

(b) Vue selon l'axe

Le moteur à courant continu, comme le moteur synchrone, peut être inversé : si on fait tourner l'axe, on produit de l'électricité. L'inverse du moteur synchrone est l'alternateur, qui produit une tension sinusoïdale ; l'inverse du moteur à courant continu est la dynamo, qui produit une tension continue.

EM3. Systèmes électromécaniques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique	
Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation.
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique	
Moteur à courant continu à entrefer plan	Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace. Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.

EM3. Systèmes électromécaniques

Quelques conseils

✎ **Orientez les circuits !** Oui, ça fait 3 fois que je le répète, mais malheureusement, ça ne suffit pas.

✎ Il faut bien comprendre comment on trouve l'équation électrique et l'équation mécanique ; ensuite, il faut lire l'énoncé qui vous guidera sur la façon d'utiliser ces deux équations afin d'en déduire soit les caractéristiques électriques du système, soit ses caractéristiques mécaniques.

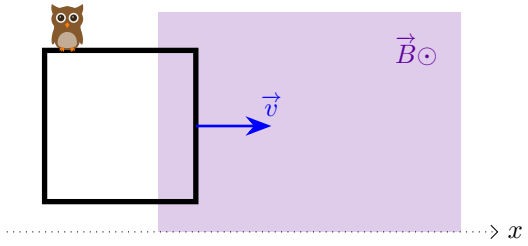
EM3. Systèmes électromécaniques

Exercices

réponses page 1076

Exercice EM3.1 : Freinage par courants de Foucault [**]

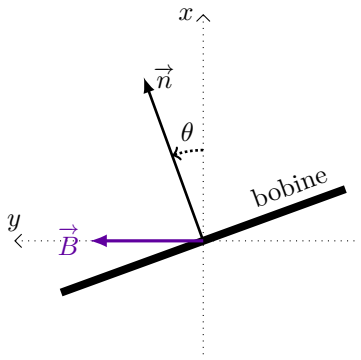
Un circuit carré de côté a se déplace horizontalement avec une vitesse $v(t)\vec{e}_x$; on ne s'intéressera pas aux mouvements verticaux. On note m sa masse, R sa résistance électrique, et on néglige son inductance propre. Il pénètre dans une zone $x > 0$ où règne un champ magnétique $B\vec{e}_z$ uniforme et constant. On note v_0 sa vitesse initiale au moment où il pénètre dans le champ. On repère le circuit par la position x de son côté avant :



Après avoir orienté le circuit, établissez ses équations mécanique et électrique tant que le circuit se trouve partiellement dans le champ magnétique ($0 < x < a$). Déduisez-en $v(t)$, puis $v_1 - v_0$ où v_1 est la vitesse lorsque le circuit est entièrement dans le champ magnétique.
AN pour $m = 130\,\text{g}$, $a = 10\,\text{cm}$, $B = 0{,}8\,\text{T}$ et $R = 0{,}03\,\Omega$.

Exercice EM3.2 : Freinage d'une bobine en rotation [**] EDO

On considère une bobine de surface S et de N tours, d'inductance propre L et de résistance r, rebouclée sur elle-même ; on note i le courant qui la traverse. Cette bobine peut tourner sans frottements autour d'un axe vertical Oz passant par son centre de masse ; on note J son moment d'inertie. Le tout est placé dans l'entrefer d'un aimant produisant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$.

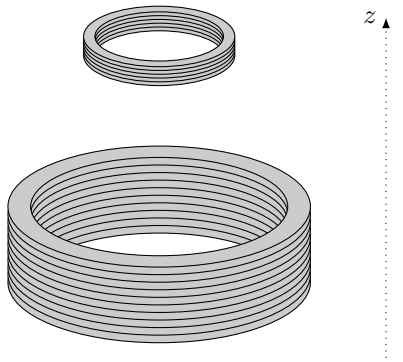


1. Par application du TMC, établir une équation différentielle reliant θ à i.
2. Exprimer la force électromotrice induite dans la bobine ; en déduire une équation différentielle vérifiée par i faisant intervenir $\dot{\theta}$.
3. À quelle condition (portant sur N) L est-il négligeable ? Dans ce cas, montrer que la vitesse de rotation est amortie en faisant apparaître un temps caractéristique τ à exprimer.
4. Résoudre numériquement $\theta(t)$ et $i(t)$ pour les valeurs : $\theta(0) = 0°$, $\dot{\theta}(0) = 1000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, $i(0) = 0\,\text{A}$, $S = 8\,\text{cm}^2$, $N = 20$, $L = 4\,\mu\text{H}$, $r = 0{,}9\,\text{m}\Omega$, $B = 8\,\text{mT}$ et $J = 4\times10^{-6}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$; tracez les courbes de $i(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

Exercice EM3.3 : Lévitation magnétique [***]

On place l'une au-dessus de l'autre deux bobines circulaires différentes. La bobine du bas est fixe, et alimentée par un générateur de tension sinusoïdale, de pulsation ω. L'axe de la bobine est l'axe Oz vertical vers le haut. On admet que le champ magnétique créé par cette bobine au voisinage de son axe s'écrit en coordonnées cylindriques $\vec{B}(t) = B_r(z,r,t)\vec{e}_r + B_z(z,t)\vec{e}_z$ avec $B_z(z,t) = \frac{\mu_0 N_1 a_1^2 i_1(t)}{2(z^2+a_1^2)^{3/2}}$ ($i_1(t) = I_1\cos\omega t$ est le courant dans

la bobine, a_1 son rayon, N_1 son nombre de spires) et $B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z}$.



La seconde bobine est formée de N_2 spires de rayon a_2, parcourues par un courant i_2 orienté suivant $\vec{e}_\theta$; elle a une résistance R_2, une inductance propre L_2, et est refermée sur elle-même. On note m_2 sa masse, et z_2 son altitude qui peut varier.

1. Exprimez B_r.
2. On suppose que z_2 est constant ; on posera $d = \sqrt{z_2^2 + a_1^2}$ pour simplifier les calculs.
   Exprimez $\underline{i_2}$, image complexe de $i_2(t)$.
3. Exprimez la projection sur $\vec{e}_z$ de la force de Laplace totale s'exerçant sur la bobine 2, en fonction de i_1, i_2 et les données.
4. Exprimez la force de Laplace moyenne suivant z, notée F_z, en fonction de $\underline{i_1}$, $\underline{i_2}$ et les données.
   À partir du résultat de la question 2, montrez que

$$F_z = \frac{3\mu_0^2\pi^2 N_1^2 a_1^4 N_2^2 a_2^4 z_2}{4d^8} I_{1eff}^2 \frac{L_2\omega^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}$$

5. On choisit les caractéristiques suivantes : $a_1 = 6\,\text{cm}$, $N_1 = 1000$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{USI}$, $I_{1eff} = 1{,}5\,\text{A}$, $z_2 = 5\,\text{cm}$, $a_2 = 4\,\text{cm}$, $N_2 = 1$, $R_2 = 0{,}24\,\text{m}\Omega$, $L_2 = 0{,}63\,\mu\text{H}$.
   Calculez F_z à 50 Hz. Quelle masse peut-on soulever ?
6. Comment modifier l'expérience pour améliorer la lévitation ?

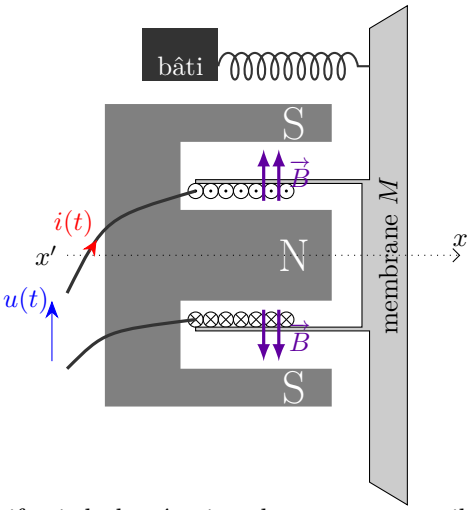
Exercice EM3.4 : Modèle électrique équivalent du haut-parleur (CCP) [***]

On se propose de déterminer un modèle électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique en régime sinusoïdal.
Un haut-parleur électrodynamique est un système à symétrie cylindrique constitué :

— d'un aimant annulaire, d'axe $x'x$, créant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_r$ radial et de norme constante dans la région de l'entrefer ;

— d'un solénoïde indéformable de même axe $x'x$, comportant N spires, de rayon ρ, placé dans l'entrefer de l'aimant ;

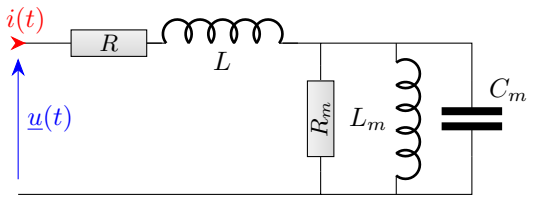
— d'une membrane M perpendiculaire à l'axe $x'x$ solidaire du solénoïde, et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre $x = 0$, grâce à un système élastique qu'on modélisera par un ressort de raideur k.



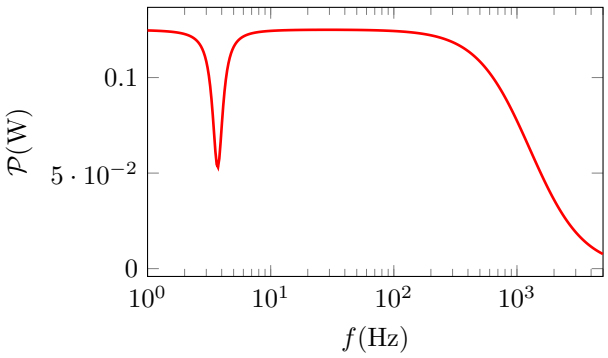
Pour cette étude, on ne tiendra compte, ni du poids du dispositif, ni de la réaction du support, car ils se compensent.
On travaillera en coordonnées polaires d'axe $x'x$, c'est à dire avec les vecteurs : $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_x$.
Le courant $i(t)$ est compté positif lorsqu'il circule suivant $\vec{e}_\theta$.
La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide

$\vec{F} = -f.\vec{v}$, opposée à la vitesse $\vec{v}$ de la membrane ($f > 0$), dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.
La bobine est assimilable à une inductance pure L, en série avec une résistance R. Elle est alimentée par un amplificateur qui délivre une tension $u(t)$ à ses bornes.

1. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées à l'ensemble (bobine + membrane). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ qui traduit le comportement mécanique du dispositif (bobine + membrane) de masse m.
2. On admet que le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine s'écrit $\Phi_{\vec{B}}(t) = -2\pi\rho NBx(t) + \text{cst}$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ qui traduit le comportement électrique du système.
3. Dans le cas où la tension $u(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω, toutes les grandeurs physiques sont des fonctions harmoniques du temps. On peut, donc, définir une impédance complexe : $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(\omega,t)}{\underline{i}(\omega,t)}$ où $\underline{u}(\omega,t)$ et $\underline{i}(\omega,t)$ sont les fonctions complexes associées aux fonctions réelles $u(t)$ et $i(t)$
   Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}(\omega)$ en fonction de L, R, ω et des éléments mécaniques du dispositif.
4. Montrer qu'on peut adopter comme modèle électrique du haut-parleur le schéma équivalent suivant. On exprimera chacun des éléments L_m, C_m et R_m de l'impédance motionnelle en fonction de B, m, f, N, ρ et k.
   AN : $B = 0{,}15\,\text{T}$, $m = 40\,\text{g}$, $f = 1{,}1\,\text{USI}$, $k = 22\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $\rho = 8\,\text{mm}$ et $N = 20$; calculer R_m, L_m et C_m.



5. Exprimer la puissance moyenne reçue par le haut-parleur en fonction de U_{eff} et des constantes.
   On a tracé ci-dessous la courbe donnant la puissance reçue en fonction de la fréquence, avec $R = 8\,\Omega$ et $L = 1\,\text{mH}$; commentez.

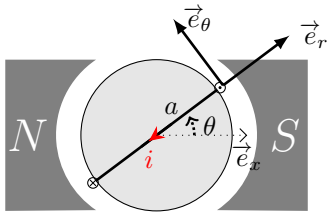


Exercice EM3.5 : Étude d'un moteur à courant continu (E3A) [***]

Le moteur à courant continu (MCC) étudié dans ce problème possède, au point nominal de fonctionnement, les caractéristiques suivantes :

— tension nominale d'induit : $U_{nom} = 12\,\text{V}$
— intensité du courant dans l'induit : $I_{nom} = 2{,}5\,\text{A}$
— fréquence de rotation : $N_{nom} = 3000\,\text{tr/min}$

Le *rotor*, ou *induit*, du MCC est constitué de n spires rectangulaires enroulées sur un cylindre de rayon a et de longueur b. L'ensemble tourne à la vitesse angulaire Ω autour de son axe zz' en restant dans l'entrefer d'un aimant permanent (*stator* ou *inducteur*) qui crée un champ magnétique. Normalement, ce champ est plutôt radial, mais pour pouvoir l'étudier avec nos connaissances, on va le prendre uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Les spires sont connectées à l'extérieur par un système balai-collecteur en restant dans la configuration de la figure de gauche.



Rotor et stator du moteur

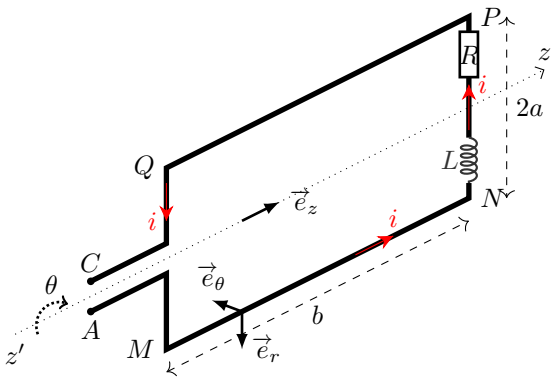
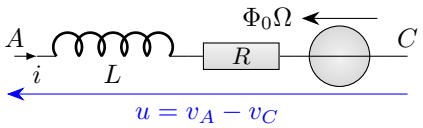


Schéma d'une spire

Le rotor est équilibré pour minimiser les vibrations (c'est-à-dire que son centre de masse est sur l'axe). Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe du moteur est $J = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$; les pertes fer (dans le circuit magnétique) et mécaniques (frottements solides) sont négligés. Lors de sa rotation, le cylindre est soumis à une force de frottements fluides, de couple $C_f = -\beta\Omega$ par rapport à l'axe de rotation, avec $\beta = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$.
L'induit possède une résistance $R = 0{,}24\,\Omega$ et une inductance propre L supposées constantes. Un générateur de tension constante $V_A - V_C = U$ (avec $U > 0$) alimente le moteur. À l'instant t de l'étude, la branche MN est située dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et la branche PQ dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

1. Soit une spire à un instant t, à un angle θ, orientée de A vers C. Exprimer le flux ϕ de $\vec{B}$ à travers cette spire. En déduire la force électromotrice induite aux bornes de cette spire.
2. En réalité, il y a n spires, réparties entre $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = +\frac{\pi}{2}$, placées de telle sorte que leurs fem s'ajoutent. Sachant que la valeur moyenne de $\cos\theta$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ vaut $\frac{2}{\pi}$, exprimer la fem induite totale ; on la mettra sous la forme $e = -\Phi_0\Omega$, avec Φ_0 à exprimer.
3. En déduire que le moteur se comporte, du point de vue électrique, selon le schéma équivalent :

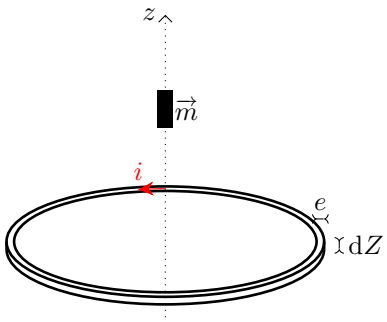


   En déduire l'équation reliant la tension $u(t)$ aux bornes du moteur, et $i(t)$.
4. Exprimer le couple par rapport à l'axe exercé par la force de Laplace sur la spire à l'angle θ. En déduire le couple total C_{em} exercé sur le rotor, en fonction de Φ_0 et i.
5. Écrire l'équation différentielle reliant J, Ω, i, Φ_0, β et C_u, le couple utile (c'est le couple que fournit le moteur ; par réaction, il s'exerce sur l'axe du moteur un couple $-C_u$).
6. On travaille maintenant au régime nominal, l'intensité est constante. À l'aide des données sur le régime nominal, calculer Φ_0.
7. En négligeant la faible tension aux bornes de la bobine L, déduire, à partir des deux équations électriques et mécaniques, l'équation différentielle vérifiée par Ω, en fonction de Φ_0, β, C_u, J, R et U. Déterminer le temps τ caractéristique de la mise en vitesse du moteur, et faire l'AN.

   Exprimer aussi la vitesse angulaire limite Ω_{lim}.
8. Calculer le couple utile C_u en régime nominal.
9. Que vaut le courant i_d dans l'induit lorsque le moteur est bloqué, si la tension d'induit est égale à la tension nominale ? Commenter.
10. Quelle est, au démarrage, la tension minimale U_{dmin} nécessaire pour entraîner le moteur ?

Exercice EM3.6 : Freinage de la chute d'un aimant [****]

Un aimant, représenté par un moment magnétique $\vec{m}$ supposé orienté selon l'axe vertical $\vec{e}_z$ ascendant, tombe dans un tube en cuivre de rayon $a = 8\,\text{mm}$ et d'épaisseur $e = 1\,\text{mm}$. On constate qu'il est freiné, et atteint une vitesse limite v_{lim} qu'on va chercher à exprimer.
Le schéma ci-contre illustre le calcul préliminaire qu'on va faire : l'aimant traverse simplement une spire de courant de rayon a.



On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

1. On considère l'aimant, de moment magnétique $\vec{m} = M\vec{e}_z$, à l'altitude z, avec une vitesse $\dot{z}$ (négative, mais peu importe). On admet qu'il crée un champ magnétique en un point P quelconque qui s'écrit

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}\right)\overrightarrow{AP} - \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2\vec{m}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^5}$$

   où A représente l'aimant.
   On se place en coordonnées cylindriques ; on note z l'altitude de l'aimant et Z celle de la spire. Soit $P(r,\theta,Z)$ un point de la spire ; exprimez le champ magnétique créé en P sur la base cylindrique.

2. Montrez que le flux du champ magnétique à travers la spire vaut

$$\Phi_{\vec{B}} = \frac{\mu_0 M}{2}\frac{a^2}{(a^2+(Z-z)^2)^{3/2}}$$

   Indication : pour avoir le petit élément de surface à intégrer, partez du petit déplacement en coordonnées cylindriques, et multipliez les normes des petits déplacements selon les deux variables qui varient.

3. Déduisez-en la fem induite dans la spire.
   Tracez la courbe de la fem pour $Z - z$ allant de $-10a$ à $10a$ en prenant pour le moment $\mu_0 M = 1\,\text{T}\cdot\text{m}^3$ et $\dot{z} = 1\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

4. On note $\sigma = 5{,}96 \times 10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ la conductivité électrique du cuivre ; on rappelle que la résistance d'un conducteur de longueur ℓ et de section S vaut $R = \frac{\ell}{\sigma S}$. Exprimez la puissance dissipée par effet Joule dans la spire, si on néglige son inductance propre.

5. On considère maintenant le tube complet, infiniment long, comme une juxtaposition de spires d'épaisseur $\text{d}Z$. Montrez que la puissance totale dissipée par le tube vaut $\mathcal{P} = k.\frac{\mu_0^2 M^2 \sigma e}{a^4}.\dot{z}^2$ avec k un facteur numérique à établir.
   Indication : en posant $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\text{d}u$, on admet que : $I_3 = \frac{3\pi}{8a^5}$; $I_4 = \frac{15\pi}{48a^7}$; $I_5 = \frac{105\pi}{384a^9}$; $I_6 = \frac{315\pi}{1280a^{11}}$.

6. Établir l'équation différentielle vérifiée par z si on suppose que la puissance électrique dissipée par induction compense la puissance mécanique de la force exercée par le champ induit sur l'aimant. Déduisez-en l'expression de v_{lim}.

7. AN : pour un aimant de masse $m = 35\,\text{g}$ on mesure $v_{lim} = 4{,}3\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire M.

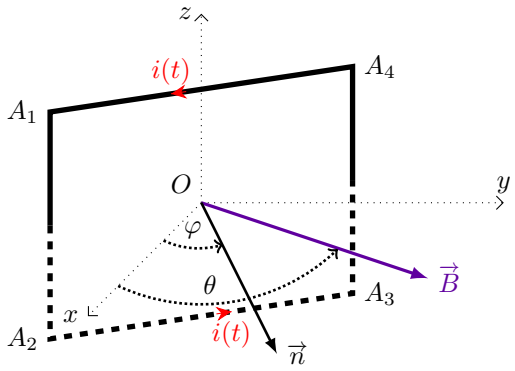
EM3. Systèmes électromécaniques

TDs numériques

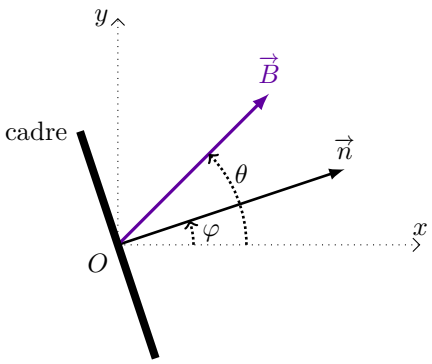
réponses page 1080

TD numérique : Moteur asynchrone $\underline{x} + i.y$

Un moteur asynchrone est constitué d'un rotor et d'un stator. Le stator est constitué d'un ensemble de bobines fixes destiné à créer un champ tournant dans une zone de l'espace, comme dans le moteur synchrone ; la différence est donc dans le rotor, qui n'est pas un dipôle magnétique permanent, mais un simple cadre conducteur rectangulaire de surface S, contenant N spires, mobile autour de l'axe Oz. On note $\vec{n}$ sa normale, et ω sa vitesse angulaire de rotation.
Ce cadre est placé dans le champ magnétique tournant qu'on supposera uniforme, de norme B. Les positions angulaires de $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont repérées par les angles $\theta(t) = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{B}}) = \omega_s t$ et $\varphi(t) = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{n}}) = \omega t$. Dans toute la suite, on supposera que $0 \leq \omega \leq \omega_s$.



Cadre en 3D



Cadre vu de dessus

Rappel : $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

1. Déterminer le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers les N spires du cadre, en fonction de B, N, S, $\omega_r = \omega_s - \omega$ et t. Que vaut sa valeur maximale Φ_M ?
2. En déduire la fem d'induction $e(t)$ qui apparaît dans le circuit, en fonction de Φ_M et ω_r.
3. On modélise le cadre en tenant compte de sa résistance R et de son inductance L. À l'aide d'un schéma électrique équivalent, exprimez l'image complexe du courant $\underline{i}$ en régime permanent en fonction de Φ_M, R, L et ω_r.
4. Que vaut le moment magnétique $\vec{m}$ du cadre en fonction de i ? Déduisez-en le couple électromagnétique $\gamma(t)$ en fonction de $i(t)$, Φ_M et ω_r.
5. Ce couple varie ; on rappelle que la valeur moyenne du produit de deux fonctions oscillantes vaut $\langle a(t).b(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{a}(\omega,t).\underline{b}^*(\omega,t)\right]$. En déduire l'expression de $\Gamma = \langle\gamma\rangle$.
6. On prend les valeurs suivantes : $R = 4{,}0\,\Omega$, $L = 127\,\text{mH}$, $\Phi_M = 5\,\text{T}\cdot\text{m}^2$ et $\omega_s = 2\pi \times 50\,\text{Hz}$.
   Tracez Γ pour ω variant entre 0 et ω_s. Mesurez le couple maximum.
7. Tracez sur la même figure la courbe de Γ avec $R = 20\,\Omega$. Commentez.
8. On définit le rendement $e = \frac{P_{meca}}{P_{meca}+P_J}$, avec P_{meca} la puissance mécanique fournie par le moteur et P_J la puissance dissipée par effet Joule.
   Tracez $e(\omega)$ dans les deux cas précédents. Commentez.
9. Tracez, pour R variant entre $1\,\Omega$ et $35\,\Omega$:
   - la courbe $\Gamma_0(R)$ où Γ_0 représente le couple au démarrage
   - la courbe $\omega_{max}(R)$ où ω_{max} représente la pulsation pour laquelle le couple maximal est atteint
   - la courbe $e_{max}(R)$ où e_{max} représente le rendement en ω_{max}.

   En pratique, on construit souvent des moteurs avec une résistance R faible, en ajoutant une résistance plus forte qui se met en série de la première au démarrage. Expliquez pourquoi.
10. Simulez l'évolution de la vitesse de rotation du moteur depuis son démarrage, avec les hypothèses suivantes :

— son moment d'inertie vaut $J = 2{,}4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$
— sa résistance R vaut $25\,\Omega$ tant que $\omega < 0,7\omega_s$ puis $4\,\Omega$ ensuite
— il est soumis à un couple de frottements $C_f = -2\times10^{-2}\omega - 3\times10^{-5}\omega^2$
— il soulève une charge $m = 30\,\text{kg}$ au bout d'une chaîne enroulée sur une poulie de diamètre $d = 12\,\text{cm}$

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice EM3.1 : Freinage par courants de Foucault [**]

Avec un circuit orienté dans le sens trigo :

— *Équation électrique* : $\Phi_{\bar{\mathfrak{B}}}(t) = x(t)aB$ donc la fem vaut $e(t) = v(t)aB$. On redessine un circuit équivalent avec la fem $e(t)$ et une résistance R, on applique la loi des mailles et la loi d'Ohm, et on trouve $-v(t)aB - Ri(t) = 0$

— *Équation mécanique* : La force de Laplace s'applique sur les côtés du haut, de droite et du bas ; seule celle sur le côté de droite est selon $\vec{e}_x$, et vaut $i(t)aB\vec{e}_x$; en appliquant le théorème de la quantité de mouvement au cadre (d'accélération $\dot{v}(t)\vec{e}_x$), projeté selon $\vec{e}_x$, on trouve $m\dot{v}(t) = i(t)aB$

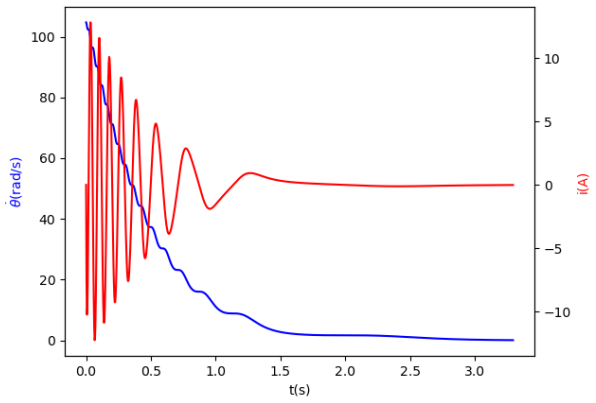
En combinant les deux : $i(t) = -\frac{aB}{R}v(t)$ donc $m\dot{v}(t) = -\frac{a^2B^2}{R}v(t)$ et finalement $\tau\dot{v}(t) + v(t) = 0$ avec $\tau = \frac{mR}{a^2B^2} = 0{,}6\,\text{s}$ et $v(t) = v_0e^{-t/\tau}$.

En intégrant : $x(t) = \tau v_0\,(1 - e^{-t\tau}) = \tau v_0 - \tau v(t)$; le temps de traversée t vérifie donc $e^{-t/\tau} = A - \frac{a}{v_0\tau}$ et on en déduit $v_1 - v_0 = -\frac{a}{\tau} = -16\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigé de l'exercice EM3.2 : Freinage d'une bobine en rotation [**]

1. On travaille par rapport à l'axe Oz. La bobine, de moment cinétique $J\dot{\theta}(t)$, est soumise à son poids et à la réaction de l'axe qui ont un moment nuls car ils passent par l'axe, et au couple magnétique $\left(i(t)SN\vec{n}\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{e}_z = i(t)SBN\cos\theta(t)$. Donc par le TMC : $J\ddot{\theta}(t) = i(t)SBN\cos\theta(t)$
2. Le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine vaut $SNB\sin\theta(t)$ donc la fem vaut $e(t) = -SNB\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$. On fait un schéma électrique équivalent avec L et R, et on trouve par la loi des mailles $L\frac{\text{d}i(t)}{\text{d}t} + ri(t) = -SNB\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$
3. Si N est faible alors $L\frac{\text{d}i(t)}{\text{d}t} \ll Ri(t)$. Dans ce cas $i(t) = -\frac{SNB\dot{\theta}(t)}{r}\cos\theta(t)$ et donc $J\ddot{\theta}(t) = -\frac{S^2N^2B^2}{r}\cos^2\theta(t)$ soit $\tau\ddot{\theta}(t) + \cos^2\theta(t)\dot{\theta}(t) = 0$ avec $\tau = \frac{Jr}{S^2B^2N^2}$. On a un amortissement non linéaire, et d'autant plus efficace que B est grand.
4.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
S,N,L,r,B,J=8e-4,20,4e-6,0.9e-3,8e-3,4e-6
tau=J*r/(S*N*B)**2
def derivee(inc,t):
    th,dth,i=inc
    ddth=i*S*B*N*np.cos(th)/J
    di=-S*B*N*dth*np.cos(th)/L-r*i/L
    return [dth,ddth,di]
ci=[0,1000*2*np.pi/60,0]
tab_t=np.linspace(0,15*tau,1000)
sol=odeint(derivee,ci,tab_t)
tab_dth=sol[:,1]
tab_i=sol[:,2]
plt.figure()
plt.plot(tab_t,tab_dth,color="blue")
plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel(r"$\dot\theta$(rad/s)",color="blue")
plt.twinx()
plt.plot(tab_t,tab_i,color="red")
plt.ylabel("i(A)",color="red")
plt.show()
```



Corrigé de l'exercice EM3.3 : Lévitation magnétique [***]

1. $B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z} = \frac{3\mu_0 N_1 i_1(t) a_1^2 rz}{4\left(a_1^2+z^2\right)^{5/2}}$
2. $\Phi_{\vec{B}}(t) = N_2\pi a_2^2 B_z(z_2,t)$ donc la tension induite vaut $e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3} N_2\pi a_2^2 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$
   Or la seconde bobine a pour résistance R_2 et pour inductance L_2 donc un schéma électrique équivalent montre que $e(t) = R_2 i_2(t) + L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$ donc $\underline{e}(\omega,t) = (R_2 + jL_2\omega)\,\underline{i_2}(\omega,t)$.
   Donc $\underline{i_2}(\omega,t) = \frac{-1}{R_2+jL_2\omega}\frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3}\pi a_2^2 j\omega \underline{i_1}(\omega,t)$.
3. Sur un petit morceau d'angle $\mathrm{d}\theta$ de la bobine 2 s'exerce une force $i_2 a_2 \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta \wedge (B_r(r,z_2,t)\vec{e}_r + B_z(z_2,t)\vec{e}_z) = -i_2(t)a_2 B_r(r,z_2,t)\mathrm{d}\theta\vec{e}_z + i_2 a_2 B_z(z_2,t)\mathrm{d}\theta\vec{e}_r$. On garde le terme sur $\vec{e}_z$, on intègre θ de 0 à 2π, et on obtient la force sur $\vec{e}_z$: $-2\pi i_2(t) a_2 \frac{3\mu_0 N_1 i_1(t) a_1^2 a_2 z_2}{4d^5}$.
4. Or ce terme est le produit (avec plein de constantes devant) de deux fonctions sinusoïdales $i_1(t)$ et $i_2(t)$, donc sa valeur moyenne vaut $\frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[\underline{i_1}(\omega,t).\underline{i_2}^*(\omega,t)\right]$. Donc
$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[2\pi\frac{3\mu_0 N_1 a_1^2 z_2 a_2^2}{4d^5}\frac{1}{R_2 - jL_2\omega}\frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3}\pi a_2^2(-j\omega)\underline{i_1}\,\underline{i_1}^*\right] \\ &= \frac{3\pi^2\mu_0^2 N_1^2 N_2 a_1^4 a_2^4 z_2}{8d^8}\left|\underline{i_1}\right|^2 \mathfrak{Re}\left[\frac{-j\omega}{R_2 - jL_2\omega}\right] \\ &= \frac{3\pi^2\mu_0^2 N_1^2 N_2 a_1^4 a_2^4 z_2}{4d^8} I_{1eff}^2 \frac{L_2\omega^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} \end{aligned}$$
5. Alors $F_z = 0{,}034\,\mathrm{N}$ soit la force nécessaire pour faire léviter 3,4 g : c'est faible.
6. La façon la plus efficace de procéder consiste à mettre un noyau de fer doux qui multiplie μ_0 par plus de 1000. On arrive alors sans problème à projeter l'anneau en l'air en branchant brusquement le courant.

Corrigé de l'exercice EM3.4 : Modèle électrique équivalent du haut-parleur (CCP) [***]

1. Je pase l'étude cinématique (à faire). Le système est soumis :
   — à la force de Laplace. Pour chaque spire, elle s'écrit $\int_0^{2\pi} i(t)\rho\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_r = -2\pi i\rho B\vec{e}_x$; on multiplie par le nombre N de spires.
   — à la force de rappel du ressort : $-kx(t)\vec{e}_x$
   — à la force de frottements $-f.\dot{x}(t)\vec{e}_x$
   Le Théorème de la Quantité de Mouvement appliqué à la membrane dans le référentiel terrestre indique donc que $m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = -2\pi N i(t)\rho B$
2. La loi des mailles indique que $u(t) - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - Ri(t) - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - 2\pi\rho N\dot{x}(t)$.
3. On tire de la première équation $\underline{x}(\omega,t) = \frac{-2\pi N\rho B}{-m\omega^2 + j\omega f + k}\underline{i}(\omega,t)$. On renvoie dans la seconde et on trouve $\underline{Z}(\omega) = R + jL\omega + \frac{4\pi^2\rho^2 N^2 B^2 j\omega}{-m\omega^2 + j\omega f + k}$
4. Le modèle proposé a pour impédance $R + jL\omega + \frac{jL_m\omega}{1 + j\frac{L_m}{R_m}\omega - L_m C_m\omega^2}$
   On identifie : $L_m = \frac{4\pi^2\rho^2 N^2 B^2}{k}$, $R_m = \frac{4\pi^2\rho^2 N^2 B^2}{f}$ et $C_m = \frac{m}{4\pi^2\rho^2 N^2 B^2}$
   AN : $L_m = 1\,\mathrm{mH}$, $R_m = 0{,}02\,\Omega$ et $C_m = 1{,}75\,\mathrm{F}$

5. La puissance moyenne reçue par le HP s'écrit $\mathcal{P} = U_{eff}^2 \mathfrak{Re}\left[\frac{1}{\underline{Z}(\omega)}\right]$
   La courbe montre que ce HP est efficace entre 8 Hz et 300 Hz environ : il est plutôt fait pour les basses.

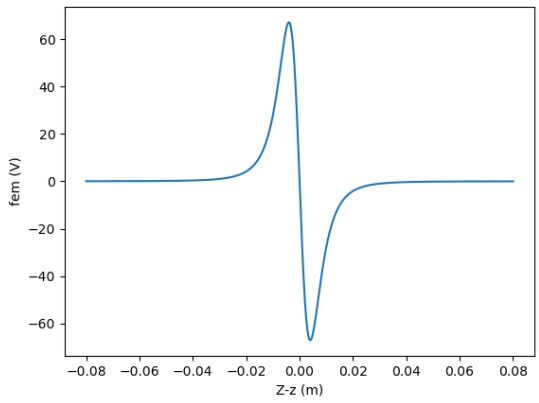
Corrigé de l'exercice EM3.5 : Étude d'un moteur à courant continu (E3A) [***]

Correction succinte, sans tout rédiger. Remarque : sur le schéma, R et L sont mal placés puisqu'ils sont définis pour l'ensemble des spires, et non pas pour une seule spire.

1. À partir de la figure de gauche, on voit que la normale à la spire vaut $-\vec{e}_\theta$ et $\vec{B} = B(\cos\theta(t)\vec{e}_r - \sin\theta(t)\vec{e}_\theta)$ donc le flux vaut $\phi(t) = 2abB\sin\theta(t)$ donc $e(t) = -2abB\cos\theta(t)\Omega(t)$.
2. La fem totale vaut donc $e_t(t) = \frac{4abB}{\pi}N\Omega(t)$ donc $\Phi_0 = \frac{4abBN}{\pi}$.
3. Évident en changeant le sens de la fem ; la loi d'additivité des tensions indique alors que $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + \Phi_0\Omega$.
4. Le moment du couple électromagnétique sur une spire placée à l'angle θ vaut $c(t) = i(t)S(\vec{n}(t)\wedge\vec{B}).\vec{e}_z = i(t)S\left((-\vec{e}_\theta)\wedge B(\cos\theta(t)\vec{e}_r - \sin\theta(t)\vec{e}_\theta)\right).\vec{e}_z = i(t)2abB\cos\theta(t)$.
   On somme sur l'ensemble des spires : $C_{em}(t) = \frac{4i(t)BabN}{\pi} = \Phi_0 i(t)$.
5. Le Théorème du Moment Cinétique donne $J\dot{\Omega}(t) = \Phi_0 i(t) - \beta\Omega(t) - C_u$
6. $U_{nom} = \Phi_0\Omega_{nom} + RI_{nom}$. On en tire $\Phi_0 = \frac{12-0{,}24\times2{,}5}{2\pi\times50} = 36{,}3\times10^{-3}\,\mathrm{V\cdot s}$
7. On a donc $U = Ri(t) + \Phi_0\Omega(t)$ et $J\dot{\Omega}(t) = \Phi_0 i(t) - \beta\Omega(t) - C_u$. On isole $i(t)$ dans la première et cela donne $J\dot{\Omega}(t) + \left(\beta + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\Omega(t) = \frac{\Phi_0 U}{R} - C_u$
   On trouve donc $\tau = \frac{J}{\beta+\Phi_0^2/R} = \frac{10^{-5}}{10^{-5}+0{,}0363^2/0{,}24} = 1{,}82\,\mathrm{ms}$
   On trouve aussi $\Omega_{lim} = \frac{\Phi_0 U/R - C_u}{\beta+\Phi_0^2/R}$
8. En régime nominal : $C_u = \frac{\Phi_0 U}{R} - \Omega_{lim}\left(\beta + \Phi_0^2/R\right) = 87\,\mathrm{mN\cdot m}$
9. Moteur bloqué : $\Omega = 0$ et $\dot{\Omega} = 0$ donc $U = Ri_d$ soit $i_d = 50\,\mathrm{A}$: c'est trop, le moteur va cramer.
10. Pour que le moteur démarre, il faut que $\frac{\Phi_0 U}{R} - C_u > 0$ donc $U_{dmin} = \frac{RC_u}{\Phi_0} = 0{,}58\,\mathrm{V}$.

Corrigé de l'exercice EM3.6 : Freinage de la chute d'un aimant [****]

1. $\overrightarrow{AP} = r\vec{e}_r + (Z-z)\vec{e}_z$ donc $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left(r^2 + (Z-z)^2\right)^{1/2}$.
   On en déduit que $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(Z-z)M\left(r\vec{e}_r+(Z-z)\vec{e}_z\right) - \left(r^2+(Z-z)^2\right)M\vec{e}_z}{\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{5/2}}$
2. On a donc
$$\begin{aligned}
\Phi_{\vec{B}} &= \iint_{\text{disque}} \vec{B}(P)\cdot\vec{e}_z\mathrm{d}S = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(Z-z)^2M - \left(r^2+(Z-z)^2\right)M}{\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{5/2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\int_{r=0}^{a}\left(3r(Z-z)^2\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{-5/2} - r\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{-3/2}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\left[-(Z-z)^2\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{-3/2} + \left(r^2+(Z-z)^2\right)^{-1/2}\right]_{r=0}^{a} \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\left(\frac{1}{\left(a^2+(Z-z)^2\right)^{1/2}} - \frac{(Z-z)^2}{\left(a^2+(Z-z)^2\right)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\left(\frac{a^2+(Z-z)^2}{\left(a^2+(Z-z)^2\right)^{3/2}} - \frac{(Z-z)^2}{\left(a^2+(Z-z)^2\right)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+(Z-z)^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$
   Remarque : il y a une petite arnaque lorsque $z = Z$; pour l'éviter, il faudrait intégrer sur une autre surface, une calotte sphérique, mais c'est plus compliqué et on obtient le même résultat.
3. C'est z qui dépent du temps dans $\Phi_{\vec{B}}$:
$$\mathrm{fem}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 M}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2(Z-z(t))\dot{z}(t)a^2}{\left(a^2+(Z-z(t))^2\right)^{5/2}} = -\frac{3\mu_0 M a^2(Z-z(t))}{2\left((Z-z(t))^2+a^2\right)^{5/2}}\dot{z}(t)$$

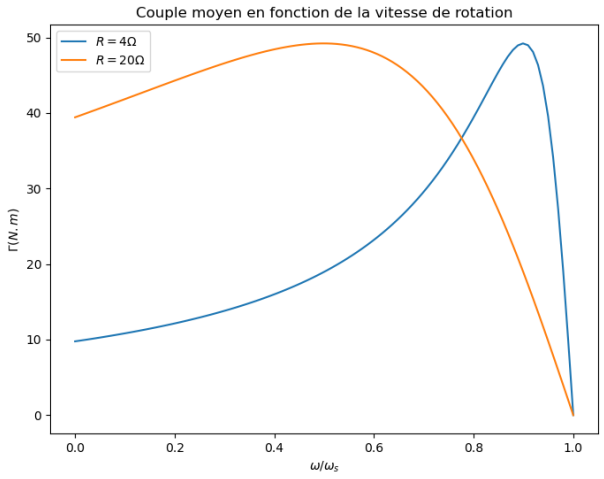


4. La résistance de la spire vaut $R = \frac{2\pi a}{\sigma e \mathrm{d}Z}$ et par un schéma électrique et une simple loi d'Ohm : $i(t) = \frac{\mathrm{fem}(t)}{R}$ puis $d\mathcal{P}(t) = \frac{\mathrm{fem}(t)^2}{R} = \mathrm{fem}(t)^2 \frac{\sigma e}{2\pi a}\mathrm{d}Z$
5. On intègre en posant $u = Z - z$:
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= \frac{9\mu_0^2 M^2 \sigma e a^3}{8\pi}\dot{z}(t)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{(u^2+a^2)^5}\mathrm{d}u \\ &= \frac{9\mu_0^2 M^2 \sigma e a^3}{8\pi}\dot{z}(t)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2+a^2-a^2}{(u^2+a^2)^5}\mathrm{d}u \\ &= \frac{9\mu_0^2 M^2 \sigma e a^3}{8\pi}\dot{z}(t)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(u^2+a^2)^4} - \frac{a^2}{(u^2+a^2)^5}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{9\mu_0^2 M^2 \sigma e a^3}{8\pi}\dot{z}(t)^2 \left(\frac{15\pi}{48a^7} - \frac{105\pi a^2}{384a^9}\right) \\ &= \frac{45\mu_0^2 M^2 \sigma e}{1024a^4}\dot{z}(t)^2\end{aligned}$$
donc $k = \frac{45}{1024}$.
6. Une rapide application du Théorème de l'Énergie Mécanique à l'aimant donne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 + mgz(t)\right) = -\mathcal{P}(t)$ (car la puissance des forces de Laplace sur l'aimant est l'opposé de la puissance Joule fournie par l'induction) soit $m\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + mg\dot{z}(t) = -\frac{45\mu_0^2 M^2 \sigma e}{1024a^4}\dot{z}(t)^2$; on simplifie et on trouve $\ddot{z}(t) + \frac{45\mu_0^2 M^2 \sigma e}{1024ma^4}\dot{z}(t) = -g$.
La vitesse limite vaut donc (en valeur absolue) $v_{lim} = \frac{1024ma^4 g}{45\mu_0^2 M^2 \sigma e}$
7. AN : $M = \sqrt{\frac{1024ma^4 g}{45\mu_0^2 \sigma e v_{lim}}} = 2{,}8\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$

Réponses aux TDs numériques

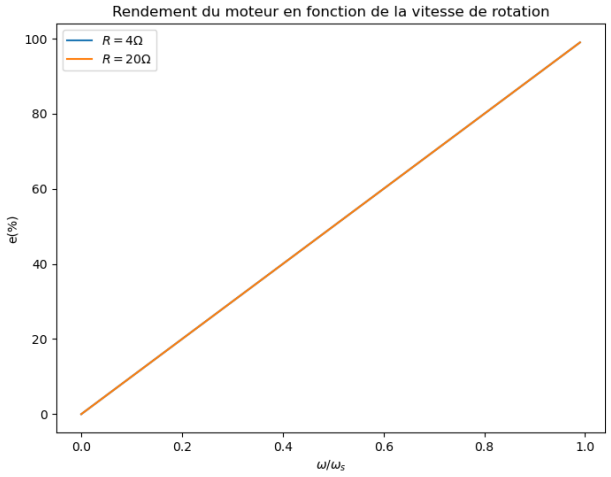
Réponses au TD d'info : Moteur asynchrone

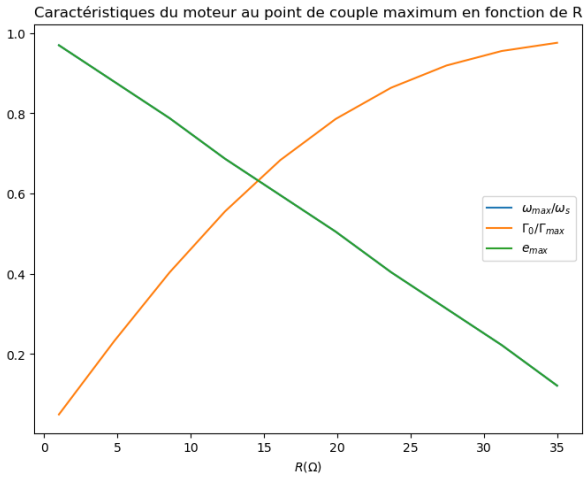
On a $\Phi = \Phi_M \cos(\omega_r t)$ avec $\Phi_M = BNS$ donc $e = \omega_r \Phi_M \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right)$. Par la loi des mailles passée en RSF, on obtient $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R+jL\omega_r} = \frac{-j\omega_r \Phi_M e^{j\omega_r t}}{R+jL\omega_r}$. Cela crée un moment magnétique et donc un couple $\gamma = i.\Phi_M.\cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right)$ soit un couple moyen $\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left[j\Phi_M \underline{i}(0)\right]$.



Ce couple passe par un maximum pour une vitesse de rotation située un peut avant ω_s. Par ailleurs, le moteur consomme une puissance moyenne $P_J = \frac{1}{2}R\left|\underline{i}\right|^2$ et restitue une puissance mécanique $P_{meca} = \Gamma\omega$. En traçant le rendement, on constate qu'il augmente avec la vitesse de rotation. En analysant les courbes en fonction de la résistance (la courbe bleue est confondue avec la verte), on constate donc que :

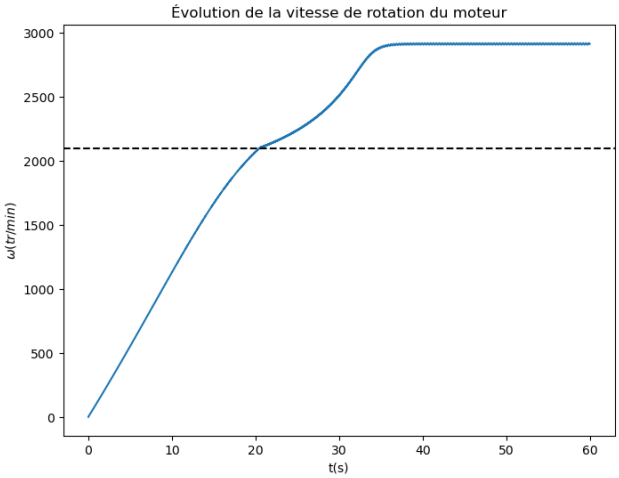
- le couple maximum ne dépend pas de R
- pour une résistance faible, le couple maximum est atteint pour une vitesse de rotation proche de ω_s, ce qui assure un bon rendement ; par contre le couple au démarrage est faible
- pour une résistance forte, le couple maximum est atteint pour une vitesse de rotation faible, ce qui donne un mauvais rendement ; par contre le couple au démarrage est fort

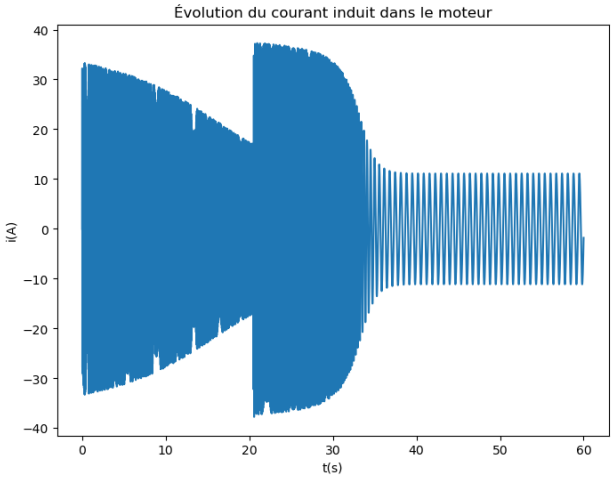




Pour résoudre temporellement le démarrage du moteur, on met ensemble les équations obtenues précédemment :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= \dfrac{i.\Phi_M.\sin(\omega_s t - \varphi) - C_f(\dot{\varphi}) - mg\frac{d}{2}}{J} \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{\Phi_M.(\omega_s - \dot{\varphi}).\sin(\omega_s t - \varphi) - R(\dot{\varphi}).i}{L} \end{cases}$$


Évolution de la vitesse de rotation du moteur
ω(tr/min)
t(s)
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
0
10
20
30
40
50
60


Évolution du courant induit dans le moteur
i(A)
t(s)
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
0
10
20
30
40
50
60

Thermodynamique

Chapitre T4 Changements d'état

Programme p.1096

Conseils p.1097

Cours p.1086
- T4.A. Description des transitions de phases / changements d'état d'un corps pur
- T4.B. Enthalpie de changement d'état

QCMs p.1098

Exercices p.1100

TDs numériques p.1104

T4. Changements d'état

Cours

Nous avons déjà étudié les phases condensées (solides et liquides) et les gaz. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux transformations permettant de passer d'une phase à une autre. Ces transformations mettront en jeu de grandes quantités d'énergie, et seront très utiles pour fabriquer des machines thermiques efficaces.

T4.A. Description des transitions de phases / changements d'état d'un corps pur

A.1. Description générale

Définition : Phase

On appelle phase une portion d'un système où toutes les variables intensives sont continues mathématiquement.

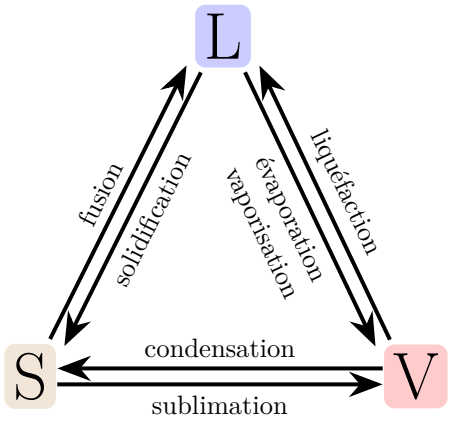
Par exemple, dans un verre d'eau, on voit clairement à l'œil la séparation entre l'eau, l'air au-dessus de l'eau, et le verre autour de l'eau. Pourquoi ? à cause de la réfraction des rayons lumineux, due à une discontinuité de l'indice optique, elle-même due à une discontinuité de la masse volumique au passage eau/air/verre. On a donc 3 phases différentes. Si on verse de l'huile dans l'eau, celle-ci forme une phase au-dessus de l'eau, et il y a une nouvelle discontinuité de masse volumique au passage eau/huile.

Mais dans cet exemple, on considère différents corps purs : eau, verre, air, huile. Même avec le même corps pur, on peut avoir plusieurs phases, qui correspondent à différents états de ce corps pur : solide, liquide, gaz ou vapeur, mais aussi d'autres états plus spécifiques comme les *formes allotropiques* qu'on n'abordera pas ici [1].

Remarque : Quand on étudie les changements d'état, en particulier les gaz susceptibles de devenir liquides, on parle de *vapeur* plutôt que de gaz ; mais au final, c'est quasiment la même chose.

Définition : Transition de phase / changement d'état

On appelle transition de phase ou changement d'état une transformation au cours de laquelle une partie du système change d'état.
Les changements d'état entre les états Solide/Liquide/Vapeur ont des noms qu'il faut connaître :



L'observation de l'eau, par exemple, nous montre que l'état d'un corps pur dépend des conditions dans lesquelles il se trouve, essentiellement sa température et sa pression. On peut alors observer pour plein de couples (T, P) quel est l'état qui est stable pour un corps pur donné, et noter cela dans un graphique.

1. Les formes allotropiques sont des façons différentes pour un solide de cristalliser ; par exemple, l'acier cristallise selon différentes structures selon la pression et la température, certaines étant plus dures que d'autres — d'où l'idée de tremper l'acier pour le figer dans une structure qui est normalement stable à une autre température. Mais en fait, il existe une quantité d'autres changements de phase. Par exemple, les cristaux liquides ont, dans la forme liquides, plusieurs phases : nématique, cholestique, smectique,... On trouve toute sorte de phases dans des systèmes plus complexes ; par exemple, le prix IgNobel 2025 de physique a été décerné à un article étudiant les différentes phases de la sauce *cacio e pepe* en fonction de la proportion de fromage *pecorino romano* et d'amidon.

Définition : Diagramme des phases

Le diagramme des phases (ou diagramme d'existence des phases) est la représentation dans le plan (T, P) de l'état stable à une température et une pression donnée. Il a la même allure pour tous les corps purs :

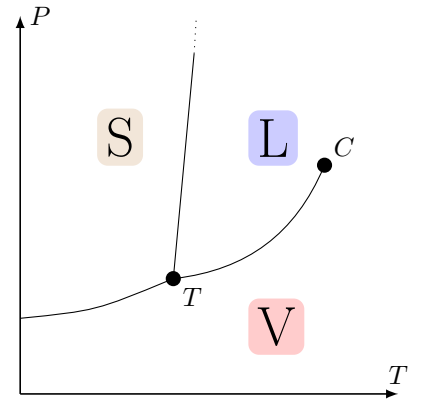


Diagramme des phases d'un corps pur normal

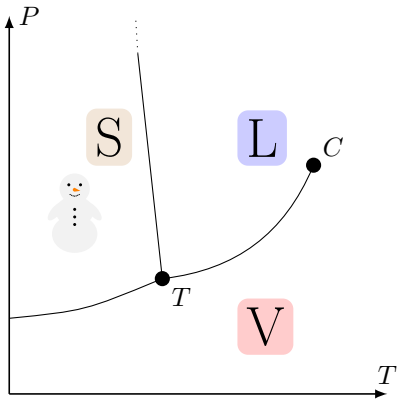


Diagramme des phases de l'eau

On remarque sur ce diagramme :

- 3 domaines correspondant aux domaines d'existence du solide, du liquide et de la vapeur
- 3 courbes qui séparent ces domaines : la frontière S/L s'appelle la **courbe de fusion** ; la frontière S/V s'appelle la **courbe de sublimation** ; la frontière L/V s'appelle la **courbe de vaporisation**
- les trois frontières se retrouvent un un seul point T appelé **point triple**. C'est le seul couple (T, P) pour lequel on peut retrouver les 3 états du corps pur à l'équilibre.
  Par exemple, pour l'eau : $T_T = 0{,}01\,°\text{C} = 273{,}16\,\text{K}$ (c'est la définition officielle du Kelvin) et $P_T = 611\,\text{Pa}$.
- la courbe de vaporisation s'arrête en un point C appelé **point critique**. Plus on s'approche de ce point critique, plus le liquide voit sa masse volumique diminuer tandis que celle du gaz augmente ; en C, les deux phases deviennent identiques.
  Par exemple, pour l'eau : $T_C = 374{,}15\,°\text{C}$ et $P_C = 221{,}2\,\text{bar}$.
- la courbe de fusion a une pente positive pour tous les corps purs sauf pour l'eau et quelques rares autres exceptions.

Remarque : Le diagramme précédent décrit l'état **à l'équilibre**. Mais on peut être hors de l'équilibre de deux manières :

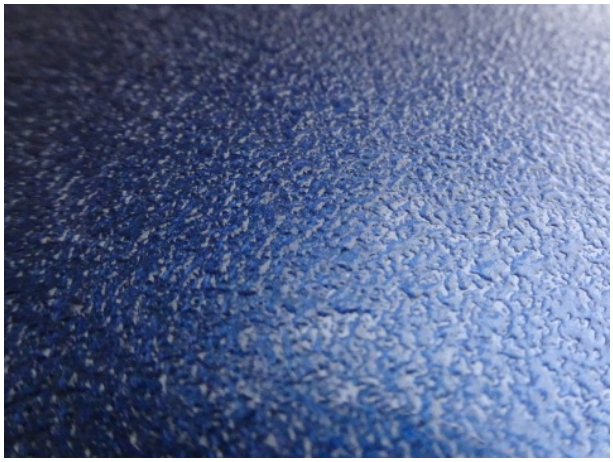
- d'abord pour des raisons *cinétiques* : le passage d'un état à l'autre prend du temps. Par exemple, si on pose un verre d'eau sur une table, il est à environ 298 K sous une pression faible (la pression qui compte est la pression partielle en vapeur d'eau dans l'air) : le diagramme des phases indique que l'eau devrait être sous forme de vapeur. Et effectivement, si on attend plusieurs jours, l'eau liquide va s'évaporer ; mais ce phénomène est suffisamment lent pour qu'on ait le temps de boire le verre avant que tout ne soit vaporisé.
- ensuite, pour des raisons *thermodynamiques* : l'état stable correspond à un minimum de l'énergie du système[2] Mais pour atteindre ce minimum, il peut y avoir sur le chemin une *barrière d'énergie* qui empêche le système d'évoluer (comme en chimie). Le système reste alors dans un état *métastable*, c'est-à-dire un minimum local d'énergie ; et il peut y rester longtemps.
  Par exemple, le bâtiment où je me trouve est dans un état métastable : il serait dans un état beaucoup plus stable s'il s'écroulait en un tas de ruines. Mais tant qu'on ne lui fournit pas l'énergie nécessaire pour surmonter la barrière d'énergie imaginée par les maçons qui l'ont construite, il restera dans cet état. Par contre, un bon coup d'explosif lui permettrait de franchir cette barrière et d'atteindre un état d'équilibre d'énergie finale plus basse.
  On retrouve la même chose avec les changements d'état : un corps pur peut se retrouver dans la zone où son état est instable, mais il y reste tant qu'on ne l'aide pas à franchir la barrière d'énergie. Trois exemples se rencontrent couramment :
  * l'eau surfondue : de l'eau à une température inférieure à 0 °C sous 1 bar devrait être solide, mais elle peut rester liquide quelques temps. Par exemple, on ouvre une bouteille d'eau minérale (pour avoir une eau très propre, sans poussières), et on la place au congélateur : elle reste liquide même en-dessous de 0 °C ; mais si on la verse, le choc donne l'énergie nécessaire à la transformer en glace. Voir par exemple cette vidéo.

2. En fait, de l'énergie libre, mais c'est une notion trop compliquée pour cette année.

C'est le même phénomène qui est responsable des pluie verglaçantes (figure T4.1(a)). Quand l'eau de pluie tombe sur un sol froid, elle a le temps le plus souvent de ruisseler avant de se solidifier, formant ainsi des plaques de glace, mais uniquement dans les creux. Par contre, quand de l'eau surfondue tombe du ciel, elle se solidifie instantanément là où elle touche le sol, provoquant un tapis continu de glace, même sur les pentes.

De même, le brouillard givrant est un brouillard de gouttelettes d'eau surfondue qui, dès qu'elles touchent un obstacle, gèlent, formant des aiguilles de diverses formes sur les plantes (figure T4.1(b)).

FIGURE T4.1 : Manifestation du phénomène d'eau surfondue.



(a) Pluie verglaçante sur une voiture



(b) Effet du brouillard givrant

* les traînées blanches laissées par les avions se forment lorsqu'il y a dans l'air de l'eau sous forme vapeur alors qu'elle devrait être solide ou liquide. Le passage de l'avion crée des tourbillons et lache des particules de suies, qui entraînent le changement d'état de l'eau.
* dans un four à micro-ondes, l'eau est chauffée par les ondes ; le centre des gouttes d'eau est plus chauffé que le bord. Du coup, une goutte d'eau peut se retrouver un surébullition : le centre devrait être vapeur, mais la transformation effective ne se fait que lorsque le bord de la goutte, en contact avec l'extérieur, atteint la température de vaporisation. À ce moment-là, la goutte se vaporise brutalement, provoquant des minuscules explosions.

Remarque : La pente inversée de la courbe S/L est due à un phénomène remarquable : l'eau est un des rares corps pur pour lequel la phase solide (la glace) est moins dense que la phase liquide ; c'est pour cela que les icebergs ou les glaçons flottent.

La conséquence est la suivante : quand on appuie sur de la glace pas trop froide, l'augmentation de pression fait passer le système dans le domaine du liquide. Quand on marche donc (ou qu'on roule) sur de la glace pas trop froide, la surface de la glace fond, et une pellicule d'eau liquide se forme sous notre pied. Résultat : au lieu que notre pied tienne bien sur le solide (glace) grâce aux lois de frottements de Coulomb, il se retrouve à glisser car le liquide ne le retient pas. Plus la glace est froide, moins ce passage vers le liquide est possible, et moins on glisse.

Remarque : L'ébullition est un phénomène différent de la vaporisation. Un verre d'eau à une température inférieure à 100 °C se vaporise (ou s'évapore) ; le phénomène de changement d'état n'a lieu qu'en surface, là où la pression partielle en vapeur d'eau est faible. Mais quand on atteint 100 °C, le point (100 °C, 1 bar) se retrouve sur la courbe de vaporisation : les bulles de vapeur d'eau qui se forment au fond de la casserole grossissent, et le passage L/V s'effectue dans tout le volume, donc bien plus rapidement.

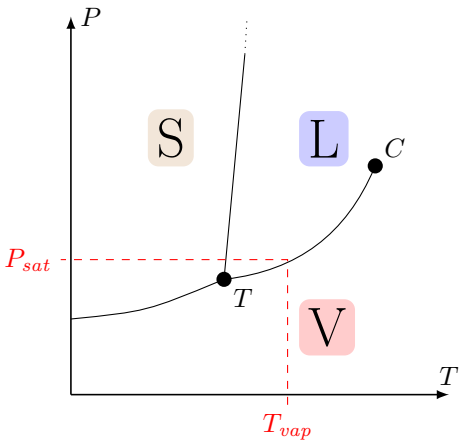
La courbe de vaporisation correspond aux couples (T, P) pour lesquels on peut avoir coexistence du liquide et de la vapeur à l'équilibre. Cette courbe est monotone, et définit donc une bijection de T vers P ou de P vers T.

Définition : Température de vaporisation

La température de vaporisation $T_{vap}(P)$ d'un corps pur à la pression P est la seule température pour laquelle le liquide et la vapeur peuvent coexister à l'équilibre sous la pression P.
On définit de même la température de fusion et la température de sublimation.

Remarque : Pour l'eau : $T_{vap}(1\,\text{bar}) = 100\,°\text{C}$ et $T_{fus}(1\,\text{bar}) = 0\,°\text{C}$.

FIGURE T4.2 : Pression de vapeur saturante et température de vaporisation.



Définition : Liquide saturant, vapeur saturante

Lorsque le liquide et la vapeur sont à l'équilibre, on dit qu'on a de la vapeur saturante et du liquide saturant.

Définition : Pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante $P_{sat}(T)$ d'un corps pur à la température T est la seule pression pour laquelle le liquide et la vapeur peuvent coexister à l'équilibre à la température T.
On définit la même chose pour la sublimation à des températures en-dessous du point triple. On peut aussi définir une pression de fusion pour l'équilibre solide/liquide.

Dans l'air, il y a un mélange de plusieurs gaz en quantités assez constantes (diazote, dioxygène, argon, ...) et aussi de la vapeur d'eau dont la proportion varie beaucoup en fonction de la météo. D'après la loi de Dalton, la fraction molaire de l'eau est proportionnelle à la pression partielle en eau dans l'air. C'est cette pression dont il faut tenir compte dans l'équilibre liquide/vapeur de l'eau, et non pas la pression atmosphérique totale.

Définition : Humidité relative de l'air

On définit l'humidité relative de l'air comme le quotient de la pression partielle en vapeur d'eau par la pression de vapeur saturante à la même température :

$$h = \frac{P_{eau}}{P_{sat}(T)} \qquad \text{(T4.1)}$$

Remarque : Il ne faut pas confondre l'humidité relative avec la fraction molaire $x = \frac{P_{eau}}{P_{totale}}$.

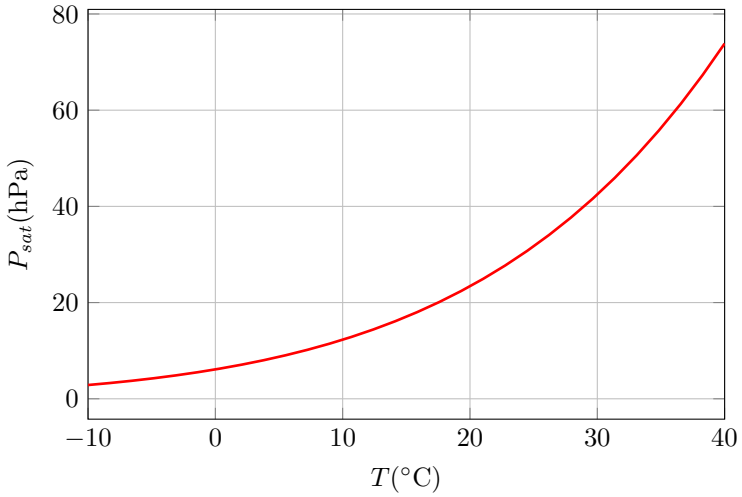
Cette notion sert à prévoir la formation de brouillard ou de nuages. Tant que l'humidité reste inférieure à 100 % on se trouve, dans le diagramme des phases, dans la zone où la vapeur est stable. S'il y a de l'eau liquide, elle va s'évaporer (lentement, certes, mais elle s'évapore). Quand l'humidité atteint 100 % on dit que l'air est saturé en humidité : l'eau gazeuse commence à se transformer en gouttes d'eau liquide, formant du brouillard ou des nuages suivant l'altitude (ou même des cristaux de glace à très hautes altitude, si la température passe en-dessous de celle du point triple). L'eau liquide ne s'évapore alors plus.

Il faut bien comprendre que, pour un taux d'humidité donné, la quantité d'eau présente dans l'air varie en fonction de la température. Comme le montre la figure T4.3, la pression de vapeur saturante augmente très fortement avec la température (c'est quasiment une fonction exponentielle). Du coup, de l'air à 80 % d'humidité à 30 °C contient quasiment 2 fois plus d'eau que de l'air avec le même taux d'humidité mais à 20 °C.

Cette évolution se traduit aussi dans les cyclones. Le moteur d'un cyclone, c'est la liquéfaction de l'eau contenue dans l'air qui libère une grande quantité d'énergie (cf. paragraphe T4.B.) ; plus l'air est chaud, plus il peut contenir d'eau, et de plus, plus la dynamique de l'évaporation est rapide. La puissance d'un cyclone augmente alors très fortement pour un seul degré Celsius de température en plus.

Remarque : On parle parfois de *vapeur sèche* pour de la vapeur à une pression inférieure à $P_{sat}(T)$.

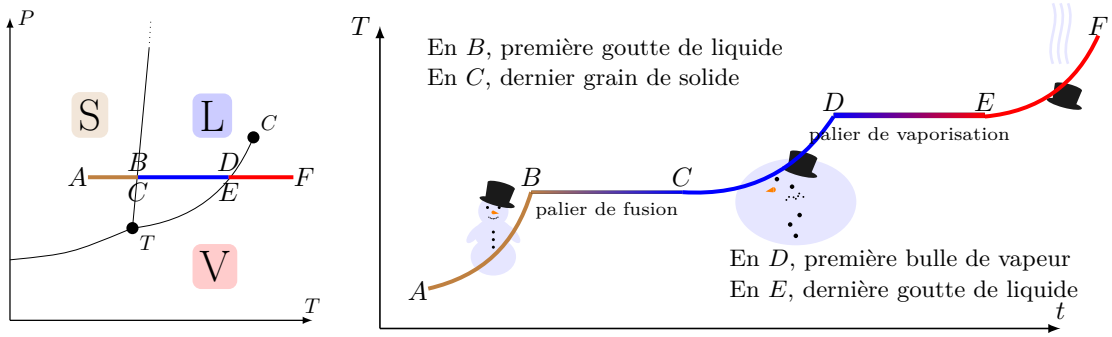
FIGURE T4.3 : Évolution de la pression de vapeur saturante de l'eau avec la température.



A.2. Changement d'état à pression constante

On a tous effectué un jour un changement d'état, en mettant de l'eau dans une casserole sur une plaque chauffante. On va ici considérer l'expérience plus complète où on part de glace (ou de solide en général) qu'on place sur une plaque chauffante qui apporte de l'énergie au système ; le système reste en permanence sous la même pression P. La figure T4.4 montre ce qui se passe.

FIGURE T4.4 : Évolution de la température lorsqu'on chauffe un solide à pression constante.



On constate que la courbe se découpe en différents morceaux :

— sur les portions AB, CD et EF, le système est sous forme d'une seule phase ; lorsqu'on le chauffe, sa température augmente.

— sur les portions BC et DE, on observe des *paliers*. En B par exemple, le solide a atteint sa frontière d'existence. Sa température ne peut plus augmenter, car sinon il se retrouve dans le domaine du liquide. Le solide commence donc à fondre. **L'apport d'énergie de la part de la plaque ne se traduit plus par une augmentation de température, mais par un changement d'état**. Tant que tout le solide n'est pas devenu du liquide, la température ne peut pas changer : on appelle cela le **palier de fusion**. De même, entre D et E on observe le palier de vaporisation.

Remarque : Quand on fait cuire des pâtes ou du riz, rien ne sert de chauffer à gros bouillons : quand l'eau bout, que ce soit à gros ou petit bouillon, elle est à $T_{vap}(P)$ et la cuisson des aliments dépend uniquement de la température. Si on veut cuire plus vite, il faut augmenter $T_{vap}(P)$, et pour cela il faut augmenter P : c'est le principe de la cocotte-minute. À l'inverse, à Mexico où la pression est faible, l'eau bout vers 80 °C et il faut faire cuire plus longtemps.

A.3. Changement d'état à température constante

On pense rarement à effectuer des changements d'état par variation de pression. Pourtant, on peut très bien changer l'état d'un corps pur en modifiant sa pression à température constante. On a déjà parlé des glissades sur la glace, dues à une augmentation de la pression qui transforme le solide en liquide. Une diminution de pression peut aussi, par exemple, entraîner la transformation de liquide en gaz ; c'est ce qui se passe quand on fait craquer ses doigts.

Pour étudier ces changements d'état dans le cas L/V, on enferme une quantité de fluide dans un cylindre baignant dans un bain thermostaté à la température T. Un piston permet de faire varier le volume du fluide, et on mesure sa pression. On note alors les couples de valeurs (P, V) et on les rapporte dans un **diagramme de Clapeyron**.

Quand on procède ainsi, on observe que les isothermes pour les températures inférieures à la température T_C du point critique ressemblent à celles de l'animation de la figure T4.5 qui permet de faire varier le volume à température constante, et d'observer la variation de la constitution du système dans le cylindre à droite, et le déplacement du point dans le diagramme de Clapeyron à gauche. On observe 3 parties sur cette courbe en partant de la droite :

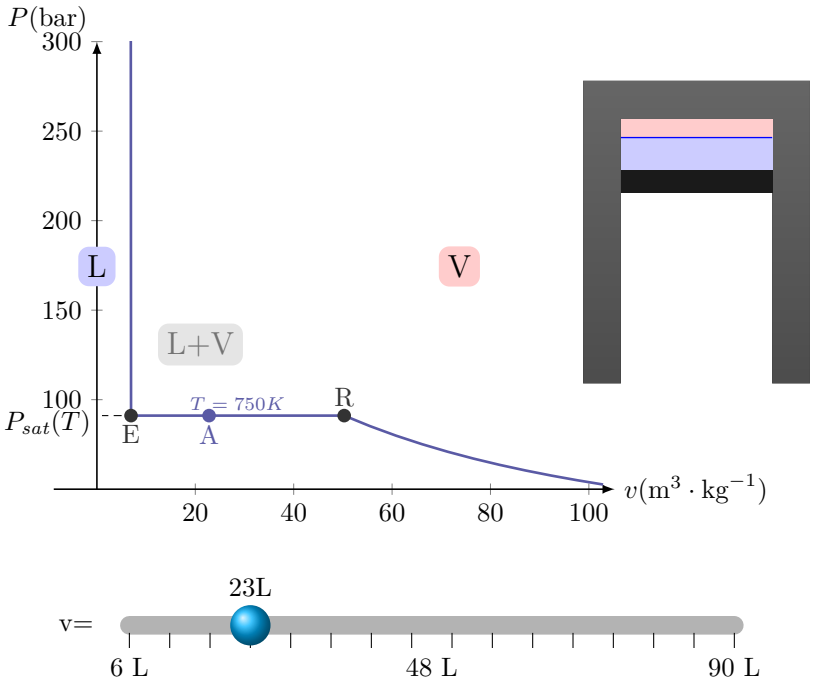
— tant que le volume est élevé, le système est composé uniquement de vapeur. Plus le volume diminue, plus la pression croît ;

— lorsque la pression augmente, elle atteint la pression de vapeur saturante à la température T. À partir de là, au point R (point de rosée), apparaît la première goutte de liquide ;

— quand on continue de diminuer le volume, de plus en plus de vapeur se liquéfie ; la pression ne varie pas : on a un *palier de liquéfaction* jusqu'au point E (point d'ébullition) où disparaît la dernière bulle de vapeur ;

— après le point E, la pression augmente très vite, traduisant le fait que le liquide est très peu compressible.

FIGURE T4.5 : Variation de la composition d'un système diphasé de 1 g diazote sous 750 K lorsqu'on fait varier son volume.



Il est important de comprendre, sur cette animation, que pour un point A situé sur le palier, ce point ne représente pas un état homogène, mais un mélange de deux états : du liquide dans l'état E (liquide saturant) et de la vapeur dans l'état R (vapeur saturante). La description du système nécessite alors de connaître les masses de liquide et de vapeur, ou plutôt les fractions molaires w_L de liquide et w_V de vapeur [3].

On remarque bien, sur l'animation, que, sur un palier, plus le point représentatif du système se trouve à gauche, près du domaine du liquide, plus il contient de liquide ; inversement, plus il est vers la droite, plus il contient de vapeur. On peut traduire cela par une loi quantitative.

Propriété : Volume massique de l'état A

Dans l'état A constitué de liquide saturant (LS) et de vapeur saturante (VS), le volume massique vaut la somme des volumes massiques du liquide et de la vapeur pondérés par leur fraction massique : $v = w_L v_{LS} + w_V v_{VS}$

Démonstration

Le volume est une grandeur extensive, donc en notant V le volume total, V_L le volume de liquide et V_V le volume de vapeur, on peut écrire $V = V_L + V_V$. Or le volume massique est défini par le rapport entre le volume

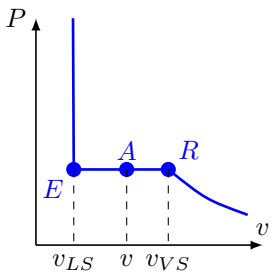
3. On pourra remarquer que, dans le cas d'un corps pur, fractions (ou titres) massiques et molaires sont identiques.

et la masse, donc $v = \frac{V}{m_{tot}}$ soit $V = m_{tot}v$ avec $m_{tot} = m_L + m_V$ la masse totale ; de même $V_L = m_L v_{LS}$ et $V_V = m_V v_{VS}$. Donc $(m_L + m_V)v = m_L v_{LS} + m_V v_{VS}$ ce qui donne bien la relation recherchée en divisant par $m_L + m_V$.

Loi des moments

Les fractions (ou titres) molaires/massiques de liquide et de vapeur dans l'état A de volume massique v peuvent se déduire géométriquement selon les lois

$$\begin{cases} w_L = x_L = \dfrac{v_{VS} - v}{v_{VS} - v_{LS}} = \dfrac{AR}{ER} \\ w_V = x_V = \dfrac{v - v_{LS}}{v_{VS} - v_{LS}} = \dfrac{EA}{ER} \end{cases} \quad \text{(T4.2)}$$

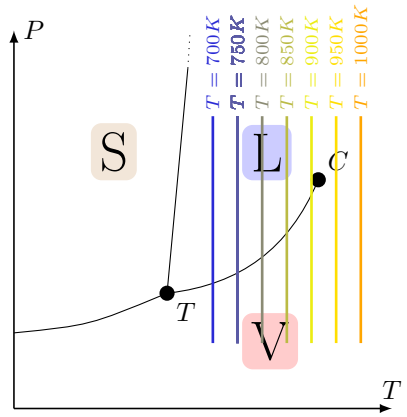


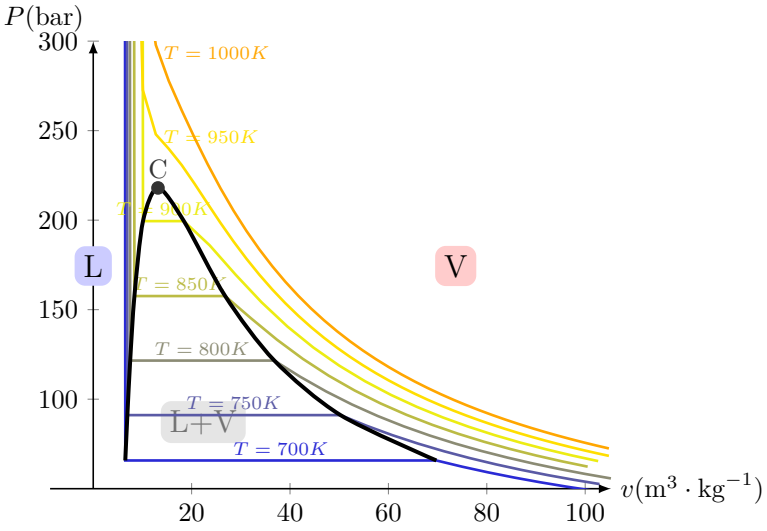
Démonstration

On a vu que $v = w_L v_{LS} + w_V v_{VS}$; de plus on sait que $w_L + w_V = 1$ (la somme des fractions de tous les constituants fait 1 par définition). Donc $w_V = 1 - w_L$ ce qui donne $v = w_L v_{LS} + (1 - w_L)v_{VS}$ donc $v - v_{VS} = w_V.(v_{LS} - v_{VS})$ d'où on tire $w_L = \frac{v - v_{VS}}{v_{LS} - v_{VS}}$ ce qui correspond bien à la formule proposée.
De même en remplaçant w_L par $1 - w_V$ on trouve la formule de w_V.

Propriété : Diagramme de Clapeyron d'un système diphasé L/V

Si on reporte dans le diagramme de Clapeyron les isothermes mesurées sur le fluide (on ne trace quasiment jamais l'état solide dans ce diagramme), il fait apparaître 3 zones : liquide, vapeur, et coexistence des deux phases, séparées par la **courbe de saturation**. Voici par exemple celui approché du diazote (modélisé par un gaz de Van der Waals) :

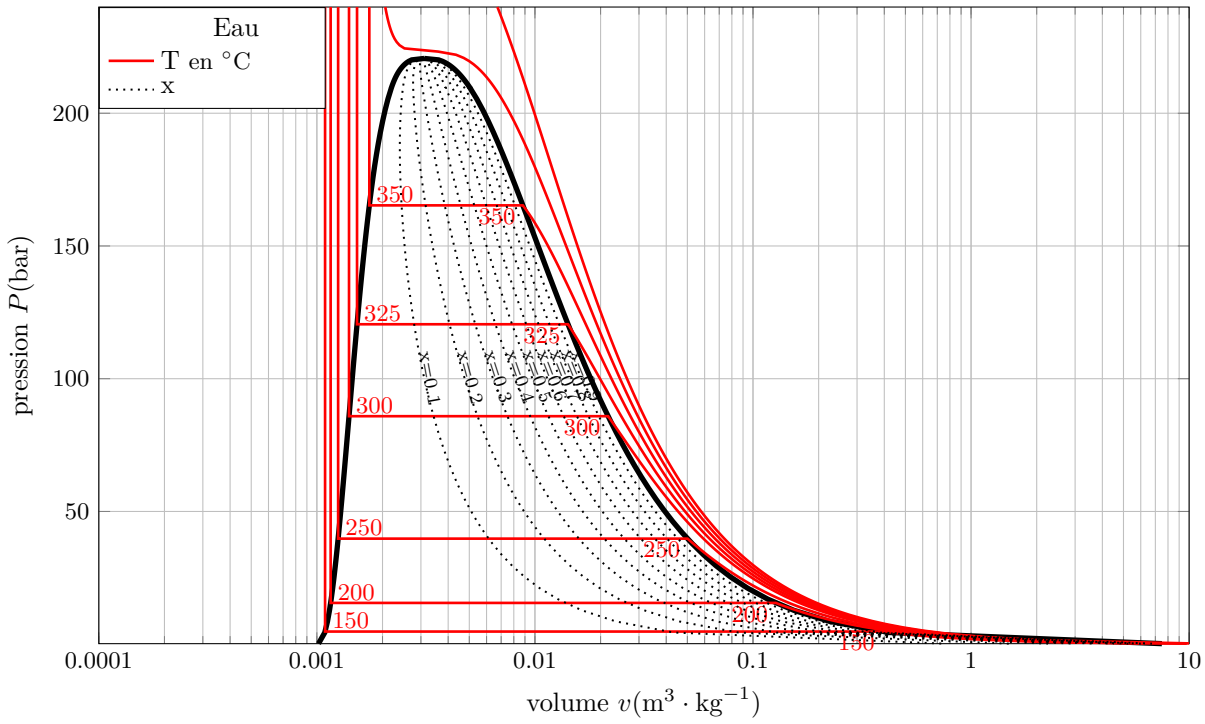




- chaque isotherme à une température T inférieure à la température T_C du point critique possède un palier à la pression $P_{sat}(T)$;
- l'ensemble des paliers pour différentes températures délimite la zone de coexistence L/V. Cette zone est limitée par une courbe en forme de cloche, appelée **courbe de saturation**. Le sommet de cette courbe est le **point critique** ; la partie à droite du point critique s'appelle la **courbe de rosée**, la partie de gauche la **courbe d'ébullition**.
- les isothermes de températures plus élevées sont situées plus haut dans la diagramme que les isothermes de température plus faible.
- les isothermes à une température supérieure à T_C ne présentent plus de palier : on passe continument de la vapeur au liquide. Le fluide situé au-dessus de C est appelé **fluide supercritique**.

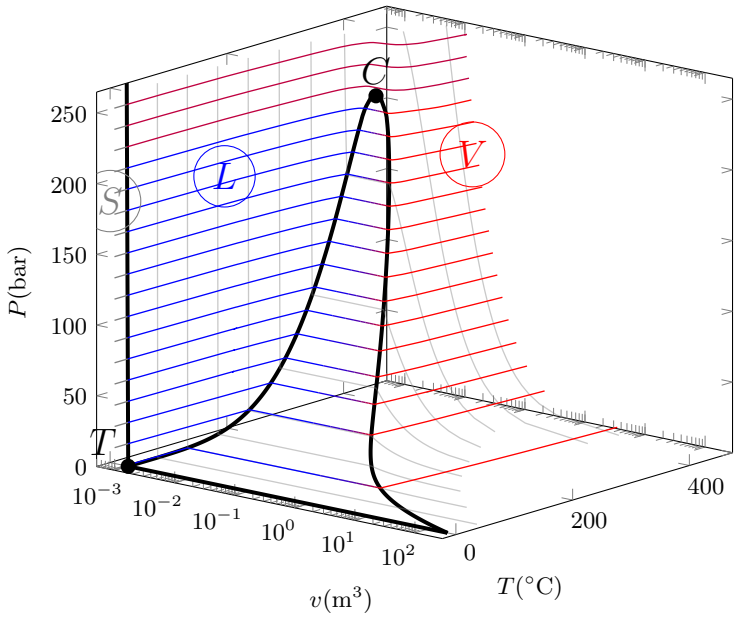
La figure T4.6 montre un exemple de véritable diagramme de Clapeyron liquide/vapeur tracé avec des données expérimentales : celui de l'eau. Pour des questions de lisibilité, l'échelle des abscisses est logarithmique, ce qui fait que la loi des moments n'est plus respectée.

FIGURE T4.6 : Diagramme de Clapeyron réel de l'équilibre liquide/vapeur de l'eau.



Remarque : En réalité, le diagramme des phases et le diagramme de Clapeyron ne sont que de projections du diagramme d'état en 3D du corps pur (figure T4.7).

FIGURE T4.7 : Diagramme des phases en 3D : on y retrouve la courbe de saturation S/L et L/V (entre S et L, le palier est trop petit pour être visible) ; on a aussi tracé des isobares et des isothermes.

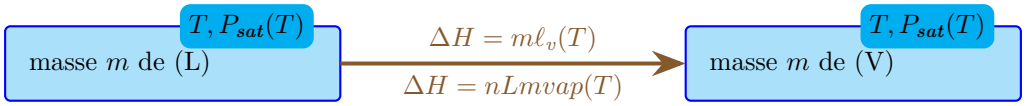


T4.B. Enthalpie de changement d'état

Les changements d'états à température constante sont aussi à pression constante. L'enthalpie est donc le bon outil pour décrire les échanges énergétiques lors des changements d'état.

Définition : Enthalpie (ou chaleur latente) de vaporisation/fusion/sublimation

On définit l'enthalpie (ou chaleur latente) massique (resp. molaire) de vaporisation d'un corps pur à la température T, noté ℓ_v (resp. $L_{v,m}$), comme la variation d'enthalpie d'un kilogramme (resp. 1 mole) de ce corps lorsqu'il passe de l'état liquide à l'état vapeur à la température constante T. Sa valeur dépend de la température.



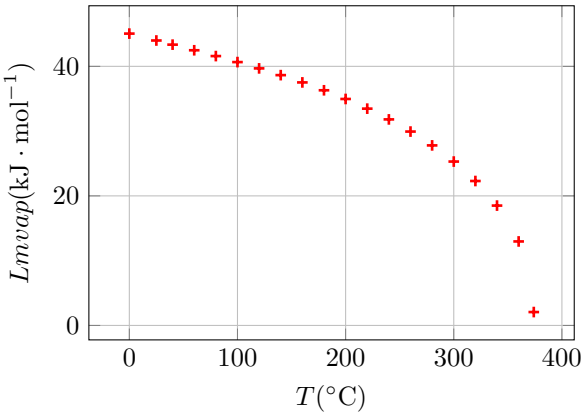
On définit de même les enthalpies de fusion ℓ_f et de sublimation ℓ_s.

Remarque : D'où vient ce nom de « chaleur latente » ? De ce que, le plus souvent, quand on veut vaporiser un liquide, on le chauffe à pression constante, dans une casserole par exemple. Dans ce cas, le premier principe appliqué à la transformation isobare indique que $\Delta H = Q$ (s'il n'y a pas d'autres travaux) donc $Q = m\ell_v$: ℓ_v indique la quantité de chaleur à fournir pour vaporiser 1 kg de liquide.

Remarque : Si on effectue les transformations dans l'autre sens (liquéfaction, solidification, condensation) alors la variation d'enthalpie interne est la même **au signe près**.

Remarque : La chaleur latente de vaporisation diminue lorsque la température augmente, et s'annule à la température critique (cf. figure T4.8).

FIGURE T4.8 : Chaleur latente de vaporisation de l'eau en fonction de la température (source : *CRC Handbook of Physics and Chemistry*).



Exemple : Solidification d'une brame d'acier

Une brame de 30 t d'acier liquide à 1400 °C qui se solidifie en restant à cette température, à pression constante. Calculez la chaleur Q qu'elle a reçu.
Données : $\ell_f, acier(1400\,°\text{C}) = 250\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Par le premier principe isobare appliqué à la brame lors de son refroidissement : $Q = \Delta H = -30\times10^3\times250 = -7\,500\,000\,\text{kJ} = -7{,}5\,\text{GJ}$

À partir de maintenant, il faut faire attention pour calculer une variation d'enthalpie, car on dispose de deux formules :

— $\Delta H = C_p\Delta T$ si le système change de température sans changer d'état
— $\Delta H = m\ell$ si le système change d'état sans changer de température

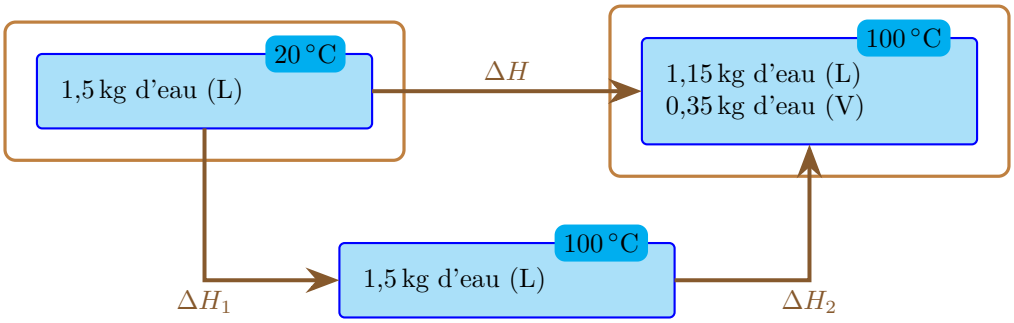
Si la température et l'état changent, il faut décomposer en étapes élémentaires.

Méthode : Calculs de ΔH avec changement d'état

Si un système évolue et voit son état **et** sa température changer, alors il faut inventer un chemin fictif passant par des étapes intermédiaires, telles que, dans chaque transformation, un seul des paramètres change.

Exemple : De l'eau dans une casserole

On prend 1,5 kg d'eau à 20 °C, et on les fait bouillir à 100 °C sous 1 bar ; on constate qu'à la fin il reste 1,15 kg d'eau dans la casserole, le reste s'est évaporé. Calculez la chaleur apportée à ce système, sachant qu'il n'y a pas de travail utile à côté.
Données : $\ell_v(100\,°\text{C}) = 2260\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$; $c_{p,eau\ L} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$



D'après le premier principe isobare appliqué à l'eau pendant la transformation : $Q = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 1{,}5 \times 4{,}2 \times (100 - 20) + 0{,}35 \times 2260 = 1295\,\text{kJ}$

T4. Changements d'état

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transition de phase	
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).
Équilibre liquide-vapeur de l'eau en présence d'une atmosphère inerte. Humidité relative.	Utiliser la notion de pression partielle pour étudier les conditions de l'équilibre liquide-vapeur en présence d'une atmosphère inerte.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation. Variation d'entropie associée à une transition de phase.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases.

T4. Changements d'état

Quelques conseils

✎ Ce chapitre est très descriptif, mais il est important de bien comprendre comment fonctionnent les équilibres et les transitions entre phases pour pouvoir traiter les machines thermiques avec plusieurs phases. La notion de palier et de courbe de saturation dans le diagramme de Clapeyron sont essentiels.

✎ Pour calculer une variation ΔH lors d'une transformation où la température **et** l'état changent, il faut décomposer en étapes où soit la température varie, soit l'état, mais pas les deux en même temps. Cependant il y a une autre contrainte : si l'énoncé donne la chaleur latente de changement d'état à une certaine température, alors le changement d'état doit être fait absolument à cette température si on veut pouvoir faire l'AN.

✎ Pour une petite transformation pendant une durée $\mathrm{d}t$, on aura $\mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T$ si la température change, et $\mathrm{d}H = \ell \mathrm{d}m$ si l'état change (où $m(t)$ est la masse de l'état qui apparaît). Ainsi, on pourra obtenir soit une ED portant sur $T(t)$, soit une équation portant sur $m(t)$.

T4. Changements d'état

QCMs

réponses page 1106

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. Le passage de liquide à gaz s'appelle

(a). l'ébullition
(b). la sublimation
(c). la vaporisation
(d). la gazéification

Q2. Le diagramme qui représente les états d'équilibre d'un corps pur en fonction de P et T s'appelle :

(a). le diagramme des phases
(b). le diagramme de Clapeyron
(c). le diagramme d'état
(d). le diagramme d'équilibre

Q3. Qu'est-ce que de l'eau surfondue ?

(a). de l'eau liquide chaude
(b). de l'eau liquide à des températures < 0 sous $1bar$
(c). de l'eau en équilibre avec la glace
(d). de l'eau issue de la fonte d'un glaçon

Q4. Qu'est-ce que le point triple d'un corps pur ?

(a). un état qui apparaît 3 fois de suite
(b). le couple (P,T) où les 3 phases coexistent
(c). le point où le corps pur a triplé de volume
(d). le triplet (P,T,V) où les 3 phases coexistent

Q5. Qu'est-ce que le point critique d'un corps pur ?

(a). le couple (P,T) où les 3 phases coexistent
(b). le couple (P,T) au-delà duquel la différence liquide/vapeur disparaît
(c). le couple (P,T) au-delà duquel le système explose
(d). l'état de masse volumique maximal

Q6. Qu'est-ce que de la vapeur saturante ?

(a). de la vapeur qui s'est transformée en liquide
(b). de la vapeur qui remplit tout le système
(c). de la vapeur d'eau
(d). de la vapeur en équilibre avec son liquide

Q7. À la pression P, la température d'équilibre solide/liquide s'appelle :

(a). la température de fusion
(b). la température de soliquidation
(c). la température de liquide saturant
(d). la température de vaporisation

Q8. Dans le diagramme de Clapeyron, quelles sont les courbes qui présentent un plateau sous la courbe de saturation ?

(a). les courbes de rosée
(b). les isobares $P = \text{cst}$
(c). les isovolumes $V = \text{cst}$
(d). les isothermes $T = \text{cst}$

Q9. Qu'est-ce qu'un fluide supercritique ?

(a). un fluide avec des pouvoirs spéciaux
(b). un fluide ultra léger
(c). un fluide à la pression supérieure à celle du point critique
(d). un fluide qui coule sans viscosité

Q10. Dans le diagramme de Clapeyron, plus une isotherme correspond à une température élevée,

(a). plus elle est basse
(b). plus son palier est long
(c). plus son palier est court
(d). plus elle est haute

✓ QCM : Variations d'enthalpie (changements d'état) ✗

Données concernant le mercure sous 1 bar :

masse molaire	$200{,}6\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
T_{fus}	$-38{,}84\,^\circ\text{C}$
$L_{f,m}$	$2{,}295\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
T_{vap}	$356{,}73\,^\circ\text{C}$
$L_{v,m}$	$59{,}11\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
$C_{p,m,liq}$	$28{,}0\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Q11. 1 kg de mercure liqude à 356,7 °C s'évapore entièrement sous 1 bar pour donner de la vapeur de mercure à la même température. La variation d'enthalpie de ce système vaut :

(a). 294,7 J
(b). 59,1 J
(c). 59,1 kJ
(d). 294,7 kJ

Q12. 3 mol de vapeur de mercure à 356,7 °C se liquéfient entièrement sous 1 bar pour donner du mercure liquide à la même température. La variation d'enthalpie de ce système vaut :

(a). 177,3 J
(b). −177,3 J
(c). −177,3 kJ
(d). 177,3 kJ

Q13. On place 50 g de mercure liquide à 356,7 °C dans une enceinte sous 1 bar ; 23 g de mercure s'évaporent, le reste demeure liquide, sous 1 bar. La variation d'enthalpie de ce système (mercure total) vaut :

(a). 8,0 kJ
(b). 6,8 kJ
(c). 14,7 kJ
(d). 3,9 kJ

Q14. On met dans une enceinte à 356,7 °C, sous 1 bar : 45 g de mercure liquide et 65 g de vapeur de mercure. Après transformation, il reste 70 g de liquide et 40 g de vapeur, sous 1 bar. La variation d'enthalpie de ce système (mercure total) vaut :

(a). 30,2 kJ
(b). −7,4 kJ
(c). −11,8 kJ
(d). 11,8 kJ

T4. Changements d'état

Exercices

réponses page 1107

Exercice T4.1 : Changements d'état de l'eau [*]

Calculez la variation d'enthalpie d'1 kg d'eau initialement liquide à 25 °C, lorsqu'on l'amène à l'état suivant (la pression vaut toujours 1 bar ; on considère la vapeur comme un gaz parfait) :

1. 1 kg d'eau liquide à 5 °C
2. 300 g d'eau liquide et 700 g de glace, en équilibre
3. 1 kg de glace à −10 °C
4. 1 kg de vapeur d'eau à 150 °C

Données :

— Capacité calorifique de la glace : $c_p^s = 2{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

— Capacité calorifique de l'eau liquide : $c_p^l = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

— Capacité calorifique de l'eau vapeur : $c_p^v = 2{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

— Chaleur latente de fusion de l'eau sous 1 bar à 0 °C : $\ell_{fus} = 334\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

— Chaleur latente de vaporisation de l'eau sous 1 bar à 100 °C : $\ell_{vap} = 570\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Exercice T4.2 : Chauffage de l'eau dans une casserole [*]

On chauffe 150 g d'eau liquide à 20 °C sous 1 bar. On dispose pour cela d'une source de chaleur pouvant transférer une puissance thermique $\mathcal{P} = 2000\,\text{W}$.
Sachant que $c_{p,eau\ L} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $\ell_V\,(100\,°\text{C}) = 2260\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, calculez le temps mis pour obtenir de l'eau vaporisée à 100 °C.



Exercice T4.3 : Fusion de la glace par un métal chaud [**]

On plonge un morceau de fer de masse 500 g à 40 °C dans un mélange de 300 g d'eau liquide et 20 g de glace, sous 1 bar.
Calculez la température d'équilibre en supposant que toute la glace fond et que le système est isolé.
Données : $\ell_{fus,eau}\,(0\,°\text{C}) = 334\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$; $c_{fer} = 0{,}449\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; $c_{eau\ liq} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

Exercice T4.4 : Solidification de l'aluminium [**]

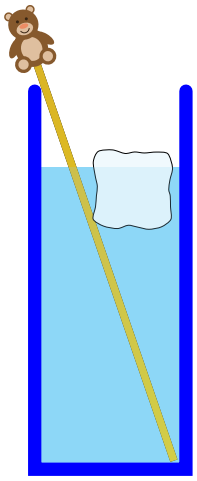
Une fois fabriqué par électrolyse, l'aluminium sort sous forme liquide à 1000 °C. Pour le refroidir, on verse dessus de l'eau liquide à 20 °C. L'eau s'échauffe jusqu'à sa température de vaporisation sous 1 bar, qui vaut $T_{vap,eau} = 100\,°\text{C}$, puis se vaporise, tandis que l'aluminium se refroidit jusqu'à 100 °C tout en se solidifiant.
Données :

— $c_{p,eau\ L} = 4{,}18\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; $\ell_{v,eau}(100\,°\text{C}) = 2260\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

— $c_{p,alu\ S} = 879\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; $c_{p,alu\ L} = 1176\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; $L_{f,m,alu}(660\,°\text{C}) = 10{,}71\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M_{\text{Al}} = 27{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Calculez la masse d'eau nécessaire pour amener 1 kg d'aluminium à la température de 100 °C, si on suppose la transformation isobare et adiabatique.

Exercice T4.5 : Fusion d'un glaçon [**]



1. On met un glaçon de 20 g à −15 °C dans un verre d'eau liquide de 200 g à 20 °C ; on suppose que le glaçon fond entièrement et rapidement, la transformation est donc isobare et adiabatique. Calculez la température de l'état final.
   On donne :
   - $c_{p_L} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
   - $c_{p_S} = 2{,}0\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
   - $\ell_f\,(T_{fus} = 0\,°\text{C}) = 330\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
2. Même question avec un glaçon de 50 g ; que penser de la température obtenue ? Déterminez alors le véritable état final.

Exercice T4.6 : Un bonhomme de neige sous la pluie [**]

Un bonhomme de neige (2,4 kg de glace à −3 °C en moyenne) est attaqué par de la pluie (eau liquide à 7 °C). En deux heures d'averse, il reçoit 1,3 L d'eau sur la tête. On suppose que :



- l'eau de pluie se refroidit au contact du bonhomme jusqu'à 0 °C
- une masse m du bonhomme de neige fond et s'écoule sous forme d'eau liquide à 0 °C tandis que le reste est toujours glacé à −3 °C
- les échanges thermiques sont négligeables, on supposera donc l'ensemble comme isolé.

Calculez la masse m de bonhomme de neige qui a fondu.

- $\ell\text{fus},\,eau\,(0\,°\text{C}) = 334\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
- $c_{p,liq} = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
- $c_{p,sol} = 2{,}0\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Exercice T4.7 : Liquéfaction du diazote par compression [**]

On place 71,4 mol de diazote (soit 1 kg) dans une enceinte maintenue à 104 K.
Le diazote gazeux est modélisé par un gaz parfait diatomique.

1. Initialement, la pression vaut 1 bar. On comprime de façon réversible le diazote à l'aide d'un piston ; la température reste tout le temps égale à 104 K.
   (a) Pour quelle pression la première goutte de diazote liquide apparaît-elle ?
   (b) Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le diazote entre le début et l'apparition du liquide.
2. On continue à comprimer le système de façon isotherme, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que du liquide.
   Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le diazote au cours de cette seconde étape. On considérera pour le calcul de W que le volume final du liquide est tellement petit, qu'on peut le prendre nul sans faire trop d'erreur.

Données pour le diazote : $P_{sat}(104\,\text{K}) = 10\,\text{bar}$; $L_{vap,m}(104\,\text{K}) = 4482\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice T4.8 : Temps de fusion d'un glaçon [**]

On considère un verre contenant initialement $m_0 = 145\,\text{g}$ d'eau liquide en équilibre avec $m_1 = 18\,\text{g}$ de glace, à $0\,^\circ\text{C}$. On suppose que le système échange de la chaleur avec l'extérieur à $T_e = 20\,^\circ\text{C}$ via son enveloppe de résistance thermique totale R_{th}, c'est-à-dire que la puissance thermique reçue par le glaçon vaut $\mathcal{P}_{th}(t) = \frac{T_e - T(t)}{R_{th}}$.

Données : $\ell_f(0\,^\circ\text{C}, 1\,\text{bar}) = 330\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ pour la glace

1. On note $m(t)$ la masse de glace à l'instant t. Par application du premier principe entre t et $t+\text{d}t$, montrez que m obéit à l'équation différentielle $\frac{\text{d}m}{\text{d}t} = -K$ avec K une constante à préciser.
2. On constate que le glaçon met 169 s à fondre complètement. Déduisez-en R_{th}.

Exercice T4.9 : Mesure d'une chaleur latente [**] random

On place sur une balance un récipient calorifugé contenant de l'eau, maintenue en ébullition par une résistance électrique parcourue par un courant constant. La vapeur s'échappe par un orifice dans l'atmosphère extérieure dont la pression est normale. La balance indique l'évolution de la masse de l'ensemble {récipient+eau liquide}.

1. La tension aux bornes de la résistance vaut $V_1 = 5\,\text{V}$ et l'intensité qui la traverse vaut $I_1 = 2{,}5\,\text{A}$. On constate qu'en une durée $t_1 = 400\,\text{s}$, la masse a diminué de $m_1 = 2\,\text{g}$. Calculez l'enthalpie massique de vaporisation ℓ_v de l'eau à $100\,^\circ\text{C}$, en négligeant les pertes de chaleur.
2. Les intensités sont mesurées à $1\times10^{-3}\,\text{A}$ près, les tensions à $1\times10^{-2}\,\text{V}$ près, les masses à $1\times10^{-3}\,\text{g}$ près et les temps à 2 s près ; à l'aide d'une modélisation de Monte-Carlo, déterminez l'incertitude-type sur ℓ_v.
3. On tient maintenant compte de pertes thermiques ; on suppose que la puissance thermique correspondant à la fuite de chaleur est constante, donc que le système reçoit un transfert thermique $\mathcal{P}_{th} < 0$ par unité de temps.

   On effectue alors une deuxième expérience, pour laquelle $V_2 = 6\,\text{V}$, $I_2 = 3\,\text{A}$, et au bout d'un temps $t_2 = 269\,\text{s}$ la masse a diminué de $m_2 = 2\,\text{g}$.

   À l'aide des résultats des deux expériences, donnez une nouvelle évaluation de ℓ_v, plus précise.

Exercice T4.10 : Système diphasé [**]

On introduit 1 kg d'eau dans un récipient fermé de volume V. On porte l'ensemble à $180\,^\circ\text{C}$
On constate qu'à l'équilibre, il reste 640 g de liquide.

1. Déduisez-en le volume V du récipient.
2. Que vaut la pression dans l'enceinte ? L'eau gazeuse se comporte-t-elle comme un gaz parfait ?

Données :

— $P_{sat}(180\,^\circ\text{C}) = 10\,\text{bar}$
— $\rho_{liq}(180\,^\circ\text{C}, 10\,\text{bar}) = 887\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$
— $\rho_{vap}(180\,^\circ\text{C}, 10\,\text{bar}) = 5{,}15\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$
— masse molaire de l'eau : $18{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

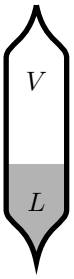
Exercice T4.11 : Système diphasé liquide-vapeur [***]

On introduit 1 kg d'eau dans une enceinte indéformable de volume égal à 10 L. Calculez la masse d'eau liquide et d'eau vapeur à $20\,^\circ\text{C}$, puis à $60\,^\circ\text{C}$.
Données : la masse volumique de l'eau liquide sera prise constante et égale à $1\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$; l'eau vapeur sera assimilée à un gaz parfait en première approximation ; la pression de vapeur saturante de l'eau vaut 2340 Pa à $20\,^\circ\text{C}$ et 19 900 Pa à $60\,^\circ\text{C}$; la masse molaire de l'eau vaut $M_e = 18\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
Indication : commencez par faire une hypothèse sur l'état final, par exemple qu'il reste du liquide et de la vapeur. Vous avez alors une information sur la pression. Calculez alors les masses de liquide et de vapeur, puis vérifier que c'est cohérent (pas de masse négative !). Si c'est incohérent, l'hypothèse de départ est fausse, donc on suppose autre chose, par exemple qu'il n'y a plus que de la vapeur ; on calcule alors la pression, et on vérifie

que c'est cohérent.

Exercice T4.12 : Tubes de Natterer [**]

Un tube de Natterer est un tube scellé, de volume constant, qui contient une masse m d'un corps pur sous forme liquide et/ou gazeuse. En changeant la température de ce tube, on modifie les proportions de liquide et de gaz.
Dans ce TD, on prendra comme corps pur du mercure. La masse volumique du liquide sera pris constante sur la plage de température atteinte, égale à $13{,}4\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Le gaz de mercure sera considéré comme un gaz parfait, de masse molaire $200{,}6\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
On s'intéresse à un tube de Natterer de volume $20\,\mathrm{cm^3}$ dans lequel on a introduit 20 mg de mercure.



On donne les pressions de vapeur saturante de mercure pour quelques températures :

T(°C)	42,0	76,6	120,0	175,6	250,3	355,9
P_{sat}(Pa)	1	10	1×10^2	1×10^3	1×10^4	1×10^5

1. Le tube est porté à la température de 76,6 °C ; l'équilibre est atteint. On cherche à déterminer les masses m_L et m_V de liquide et de vapeur, à l'équilibre.
   On fait pour cela une hypothèse : le liquide et le gaz coexistent dans le tube.
   (a) À l'aide de la loi de conservation de la masse, écrivez une première relation entre m_L et m_V.
   (b) Que vaut la pression du gaz ? Calculez donc le volume massique du gaz dans le tube.
   (c) À l'aide de l'extensivité du volume, écrivez alors une seconde relation entre m_L et m_V.
   (d) Calculez m_L et m_V.
2. On porte le tube à 175,6 °C ; calculez les nouvelles masses de liquide et de vapeur.
3. On porte maintenant le tube à 355,9 °C.
   (a) Appliquez le calcul précédent et montrez qu'on aboutit à une aberration.
   (b) Quelle est l'hypothèse à revoir ? Quelle hypothèse plausible peut-on faire à la place ?
   (c) Calculez alors la pression dans le tube. L'hypothèse est-elle valide ?
4. Le chauffage d'un tube de Natterer n'aboutit pas forcément à un état final où il ne reste plus que du gaz ; parfois, il ne reste que du liquide. On peut le prévoir grâce au diagramme de Clapeyron.
   (a) Dessinez l'allure de la courbe d'équilibre liquide-vapeur dans le diagramme de Clapeyron. Placez le point critique ; on appelle v_c son volume massique.
   Données : pour le mercure, la température critique vaut 1750 °C, la pression critique vaut 1720 bar et le volume massique critique vaut $0{,}214\,\mathrm{cm^3\cdot g^{-1}}$.
   (b) Le système initial est un système diphasé : il contient la phase liquide et la phase vapeur. Dans quelle zone du diagramme de Clapeyron se situe son point représentatif ?
   (c) Calculez le volume massique du système étudié précédemment. Placez alors le point initial dans le diagramme de Clapeyron ; sans chercher à être précis, vous ferez attention à bien placer le volume massique initial par rapport à v_c.
   Tracez alors l'évolution du point représentatif du système lorsqu'on chauffe.
   Indication : quelle grandeur de ce diagramme reste constante lorsqu'on chauffe ?
   (d) Déduisez-en vers quel état va évoluer le tube à haute température ; est-ce en accord avec le calcul précédent ?
   (e) Quelle est la condition sur la masse et le volume initial du système pour qu'il devienne entièrement gazeux à haute température ? pour qu'il devienne entièrement liquide ? pour qu'il passe par l'état critique ?

T4. Changements d'état

TDs numériques

réponses page 1112

TD numérique : Formation des nuages

ipt EDO

Ce TD est assez difficile.

Lorsqu'une masse d'air s'élève dans l'atmosphère, elle se se détend car la pression P décroît avec l'altitude. En première approximation, on peut admettre qu'elle subit une détente adiabatique (car rapide) et réversible (équilibre des pressions). On va considérer comment cela explique la formation des nuages.

On admet que, à l'équilibre, l'atmosphère voit sa pression diminuer avec l'altitude z selon la loi :

$$P_{atm}(z) = P_0\,(1-\alpha.z)^{\beta} \text{ avec } P_0 = 1\,\text{bar},\ \alpha = 22{,}5\times10^{-6}\,\text{m}^{-1} \text{ et } \beta = 5{,}2 \tag{1}$$

et sa température varie selon la loi

$$T_{atm}(z) = T_0(1-\alpha z) \text{ avec } T_0 = 300\,\text{K} \tag{2}$$

On modélise l'air par un GP ; on note μ sa masse volumique et $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ sa masse molaire.

1. **Air sec**

   On considère pour le moment une mole d'air sec, au sol, à la pression P_0, mais chauffée à la température $T_1 = 310\,\text{K}$. On le considérera comme un GP diatomique de capacité calorifique molaire à volume constant $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

   Lorsque l'air s'élève, sa pression varie selon la loi (1). L'ascension est rapide mais pas trop, donc on la considérera adiabatique et réversible.

   (a) Écrivez le premier principe appliqué à 1 mol pendant une transformation infinitésimale, reliant la variation de température $\text{d}T$ à la variation de volume molaire dV_m ; déduisez-en $\frac{\text{d}T}{\text{d}P}$ en fonction de $\frac{\text{d}\mu}{\text{d}P}$.

   (b) La loi du GP indique que $\mu = \frac{PM}{RT}$; en dérivant par rapport à la pression, exprimez $\frac{\text{d}\mu}{\text{d}P}$ en fonction de M, R, T, P et $\frac{\text{d}T}{\text{d}P}$.

   (c) En déduire le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\text{d}T}{\text{d}P} = \dfrac{T}{P + \frac{\mu^2 RT^2 C_{vm}}{PM^2}} \\ \dfrac{\text{d}\mu}{\text{d}P} = \dfrac{\frac{M}{RT}}{1 + \frac{P^2M^2}{\mu^2RT^2C_{vm}}} \end{cases}$$

   (d) À l'aide d'un schéma d'Euler, calculez la température et la masse volumique pour P variant de P_0 à $\frac{P_0}{2}$ par pas de $-\frac{P_0}{1000}$. Calculez aussi, à partir du tableau des pressions obtenu, le tableau des altitudes par la formule inversée $z = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\beta}$. Tracez alors $T(z)$ et $\mu(z)$ au cours de l'ascension, ainsi que $T_{atm}(z)$ et $\mu_{atm}(z)$.

   À quelle hauteur cet air va-t-il arrêter son ascension ?

2. **Air humide**

   On considère maintenant de l'air sec contenant en plus un peu de vapeur d'eau à la même température T_1 et la même pression P_0. La quantité d'eau contenue dans l'air est tellement petite qu'on considèrera que :

   — la capacité calorifique molaire n'est quasiment pas modifiée

   — la variation de masse volumique apportée par cette vapeur d'eau est négligeable aussi

   La pression de vapeur saturante de l'eau est modélisée en fonction de la température par la loi

$$P_{sat}(\text{bar}) = e^{(14{,}49-\frac{5350}{T})} \tag{3}$$

   L'enthalpie de vaporisation molaire à la température T est donnée approximativement par

$$L_{v,m}(\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}) = 49{,}92 - 6{,}64\times10^{-5}.T^2 \tag{4}$$

   À une température T, la fraction molaire d'eau à saturation est donc donnée par $x_{sat} = \frac{P_{sat}}{P}$. On considère que l'air est chargé initialement de 30 % d'humidité, c'est-à-dire que $x_1 = 0{,}3x_{sat}(T_1)$.

(a) Calculez x_1.

(b) Au cours de l'ascension, T diminue donc $P_{sat}(T)$ diminue, par conséquent x_{sat} aussi. Si x devient égal à x_{sat}, l'air est saturé en humidité, et l'eau va se liquéfier pour former des gouttelettes : un nuage se forme.

À partir des tableaux obtenus avec l'air sec, tracez $x_{sat}(z)$. Déduisez-en l'altitude où le nuage va se former.

(c) On va maintenant simuler l'évolution de T et μ ainsi que x lors de la détente. On admet que les équations sont les suivantes :

— si $x < x_{sat}(T)$ alors rien ne change : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P}$ et $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}$ sont identique à l'air sec et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}P} = 0$

— sinon, une partie de l'eau se liquéfie, ce qui réchauffe l'air ; les équations deviennent alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} = \dfrac{T + \frac{P_{sat}(T).(L_{vm}(T)-RT).\mu^2RT^2}{P^3M^2}}{P + \frac{\mu^2RT^2C_{vm}}{PM^2} + \frac{5350P_{sat}(T).(L_{vm}(T)-RT).\mu^2R}{P^2M^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P} = \dfrac{M}{RT} - \dfrac{PM}{RT^2}.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}P} = P_{sat}(T).\left(\dfrac{5350}{PT^2}.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} - \dfrac{1}{P^2}\right) \end{cases}$$

Simulez la nouvelle détente et tracez les deux courbes (air sec + air humide) sur le même schéma. Commentez.

3. Lorsque l'air est chauffé au sol, sa masse volumique est plus faible que la masse volumique $\mu_{atm} = \frac{P_{atm}M}{RT_{atm}}$ de l'atmosphère qui l'entoure. Il monte alors jusqu'à ce que ces deux masses volumiques deviennent égales.

Tracez sur un même graphique la masse volumique de l'atmosphère, de l'air sec et de l'air humide. Déterminez dans chaque cas l'altitude d'équilibre atteinte. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c)
Q2.(a)
Q3.(b)
Q4.(b)
Q5.(b)
Q6.(d)
Q7.(a)
Q8.(d)
Q9.(c)
Q10.(c) ET (d)

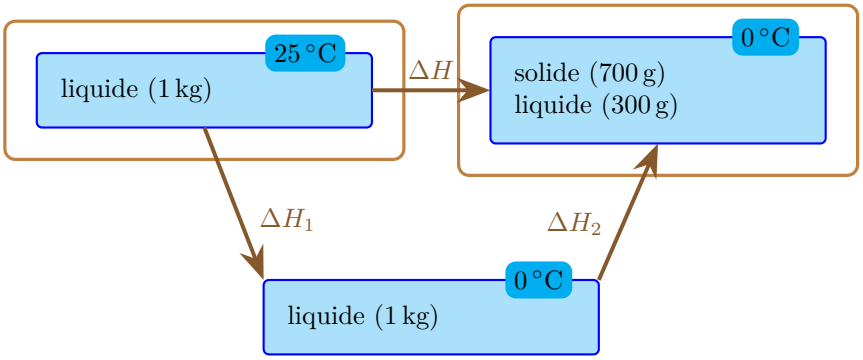
Réponses au QCM : Variations d'enthalpie (changements d'état)

Q11.(d)
Q12.(c)
Q13.(b)
Q14.(b)
Le bilan net est le suivant : 25 g de mercure se sont liquéfiés (soit 0,124 mol).

Réponses aux exercices

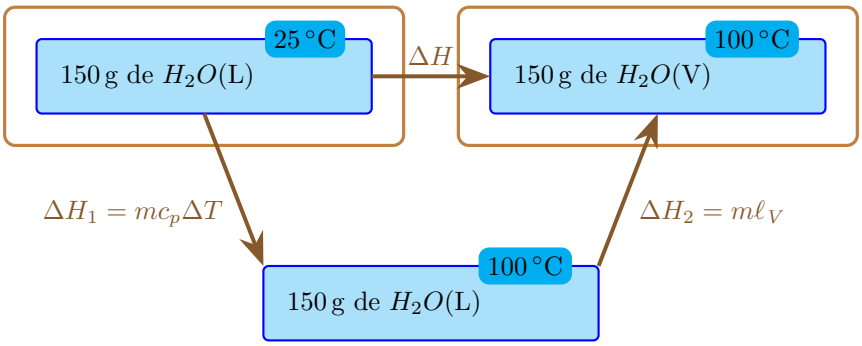
Corrigé de l'exercice T4.1 : Changements d'état de l'eau [*]

1. Il n'y a pas de changement d'état ici, seulement un changement de température. Pour un liquide (a priori incompressible et indilatable), on a simplement $\Delta H = m \times c_p^l \times (5-25) = -84\,\text{kJ}$
2. L'eau se solidifie sous 1 bar à la température 0 °C. Il faut donc d'abord descendre à cette température, ce qui implique une variation d'enthalpie $\Delta H_1 = 1 \times c_p^l \times (0-25) = -105\,\text{kJ}$; puis on solidifie 700 g d'eau, ce qui correspond à une variation d'énthalpie $\Delta H_2 = -0{,}7 \times \ell_{fus} = -234\,\text{kJ}$. En tout, on a donc $\Delta H = -339\,\text{kJ}$



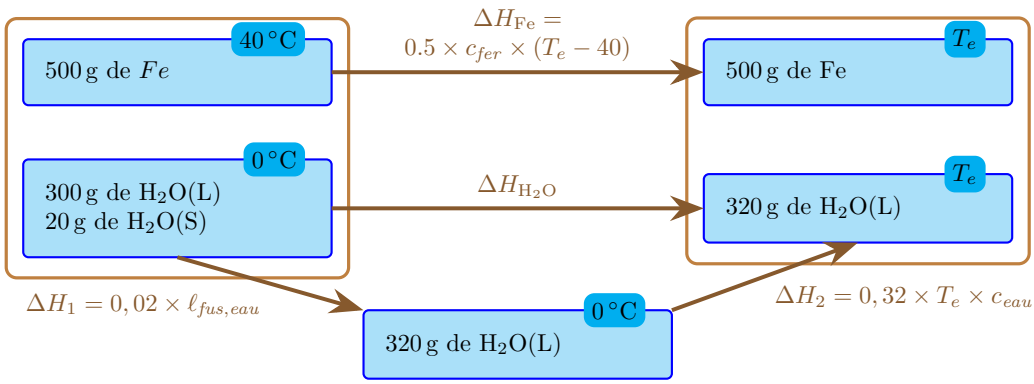
3. Même principe, en trois étapes : $\Delta H = 1 \times c_p^l \times (0-25) - 1 \times \ell_{fus} + 1 \times c_p^s \times (-10-0) = -460\,\text{kJ}$
4. Même principe : $\Delta H = 1 \times c_p^l \times (100-25) + 1 \times \ell_{vap} + 1 \times c_p^v \times (150-100) = 990\,\text{kJ}$

Corrigé de l'exercice T4.2 : Chauffage de l'eau dans une casserole [*]



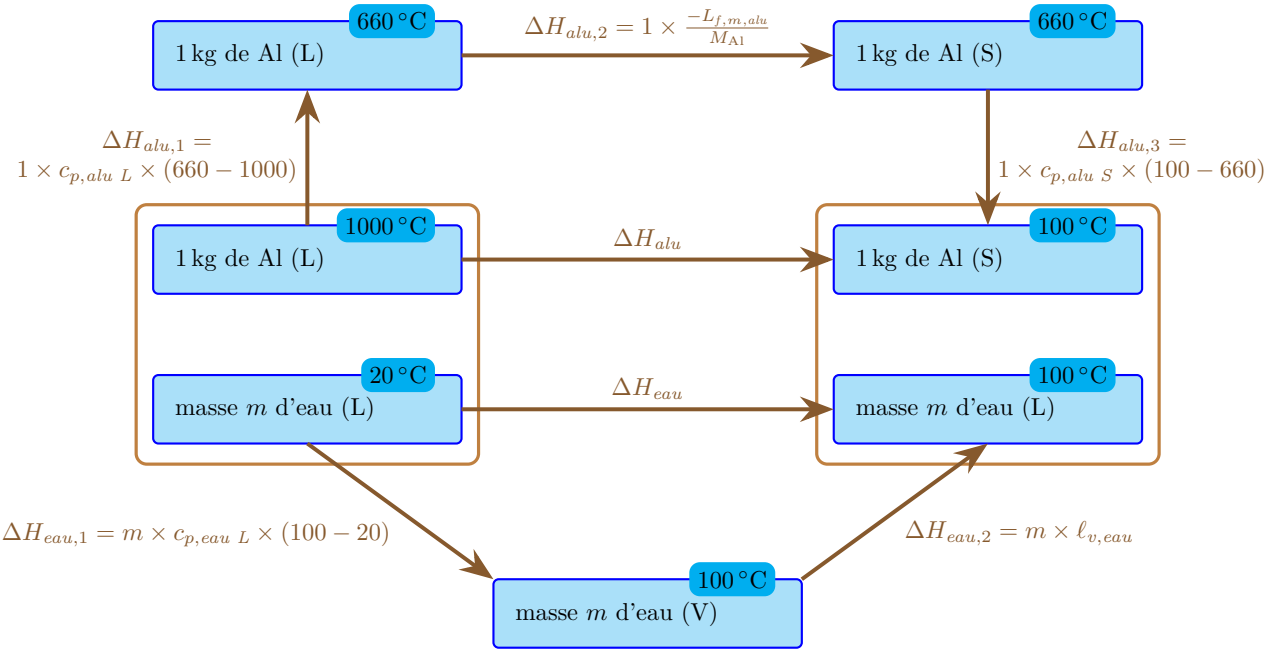
Le premier principe isobare appliqué à l'eau pendant la transformation donne $\Delta H_1 + \Delta H_2 = \mathcal{P}.t$
On en tire $t = \frac{mc_p\Delta T + m\ell_V}{\mathcal{P}} = 3\,\text{min}15\,\text{s}$

Corrigé de l'exercice T4.3 : Fusion de la glace par un métal chaud [**]



Le premier principe isobare appliqué au système {eau+fer} pendant la transformation donne $\Delta H = \Delta H_{\text{Fe}} + \Delta H_{\text{H}_2\text{O}} = W' + Q = 0$; on en tire $T_e = \frac{-0{,}02\times 334 + 0{,}5\times 0{,}449\times 40}{0{,}32\times 4{,}2 + 0{,}5\times 0{,}449} = 1{,}5\,^\circ\text{C}$

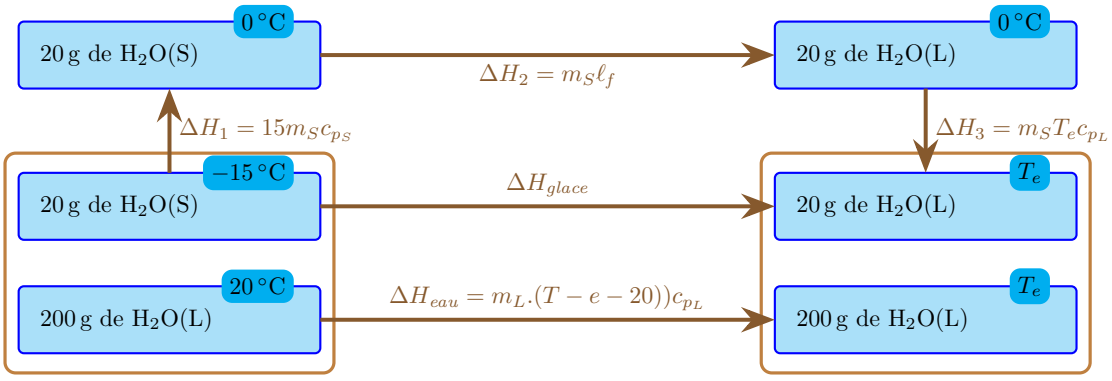
Corrigé de l'exercice T4.4 : Solidification de l'aluminium [**]



Si la transformation est isobare, adiabatique et sans travail utile, alors $\Delta H = 0$ pour le système formé de l'eau et de l'aluminium, donc $\Delta H_{eau} + \Delta H_{alu} = 0$ soit $c_{p,alu\ L} \times (660 - 1000) + \frac{-L_{f,m,alu}}{M_{\text{Al}}} + c_{p,alu\ S} \times (100 - 660) + m\,(c_{p,eau\ L} \times (100 - 20) + \ell_{v,eau}) = 0$ d'où on tire $m = \frac{c_{p,alu\ L}\times(1000-660) + \frac{L_{f,m,alu}}{M_{\text{Al}}} + c_{p,alu\ S}\times(660-100)}{c_{p,eau\ L}\times(100-20)+\ell_{v,eau}} = 0{,}5\,\text{kg}$

Corrigé de l'exercice T4.5 : Fusion d'un glaçon [**]

1.



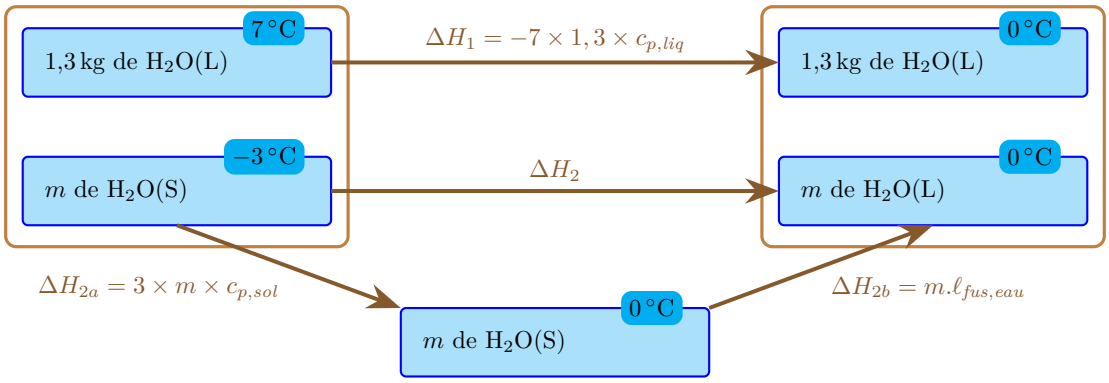
Par application du premier principe isobare au système {eau+glace} durant la transformation, on trouve $\Delta H = Q = 0$; comme l'enthalpie est extensive, $\Delta H_{eau} + \Delta H_{glace} = 0$ d'où on tire $T_e = \frac{m_L c_{p_L} 20 - m_S c_{pS} 15 - m_S \ell_f}{m_S c_{p_L} + m_L c_{p_L}} = 10{,}4\,^\circ\text{C}$

2. Le même calcul donne $T_e = -1{,}3\,^\circ\text{C} < T_{fus}$ ce qui est impossible : l'hypothèse que le glaçon fond entièrement est fausse.

   On suppose qu'il reste une masse m de glace non fondue ; à la fin, il y a coexistence de glace et d'eau liquide à l'équilibre sous 0 °C donc $\Delta H = m_S c_{pS} 15 + (m_s - m)\ell_f - m_L c_{p_L} 20 = 0$ d'où on tire $m = 3{,}6\,\text{g}$.

Corrigé de l'exercice T4.6 : Un bonhomme de neige sous la pluie [**]

La masse 2,4 kg $-$ m de bonhomme de neige qui ne fond pas ne joue aucun rôle ici :



Le premier principe isobare appliqué au système {bohomme + pluie} isolé donne $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = W' + Q = 0$; on en tire $m = \frac{1,3\times4,2\times7}{4,2\times3+334} = 0,11\,\text{kg}$

Corrigé de l'exercice T4.7 : Liquéfaction du diazote par compression [**]

1. (a) Le liquide apparaît lorsqu'on atteind la pression de vapeur saturante, soit 10 bar.
   (b) L'évolution est réversible, donc $P = P_{ext}$ et $T = 104\,\text{K} = \text{cst}$. On a donc $W = \int -P\text{d}V = \int -P\text{d}\left(\frac{nRT}{P}\right) = nRT\int\frac{\text{d}P}{P}$ donc $W = nRT\ln\frac{P_{finale}}{P_{initiale}} = 142\,\text{kJ}$
   De plus, $\Delta U = 0$ car le gaz est considéré comme parfait, et la température ne varie pas. Donc par le premier principe appliqué au diazote durant la compression, $Q = \Delta U - W = -142\,\text{kJ}$: la chaleur est évacuée vers l'extérieur.
2. Cette fois, l'évolution est isobare : pendant tout le temps où mélange liquide/vapeur existe, la pression intérieure vaut $P_{sat} = 10\,\text{bar}$, et comme l'évolution est réversible, c'est aussi la pression extérieure. Or on liquéfie 71,4 mol à température et pression constante, donc $\Delta H = -71,4\times4,482 = -320\,\text{kJ}$. On en déduit par le premier principe isobare appliqué au diazote pendant la liquéfaction que $Q = \Delta H = -320\,\text{kJ}$.
   Pour ce qui est du travail, comme c'est isobare, $W = -P\Delta V \approx +P_{sat}V_{vapeur} = nRT = 61,7\,\text{kJ}$.

Corrigé de l'exercice T4.8 : Temps de fusion d'un glaçon [**]

1. Premier principe isobare appliqué au glaçon pendant une durée dt : $\text{d}H = \delta W' + \delta Q = \frac{T_e - T(t)}{R_{th}}dt$. Ici $dH = \ell_f \times \delta m_{fondu}$ or la masse qui fond est de la masse de glace perdue, donc $\delta m_{fondu} = -\text{d}m$ d'où $\frac{\text{d}m}{\text{d}t} = \frac{T-T_e}{\ell_f R_{th}}$ qui est bien constant puisque $T = 0\,°\text{C}$ tant que le glaçon n'a pas entièrement fondu.
2. On a donc $m(t) = m_1 + \frac{T-T_e}{\ell_f R_{th}}t$. Le glaçon est fondu lorsque $m = 0$ soit $R_{th} = \frac{t(T_e-T)}{m_1\ell_f} = 0,57\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$

Corrigé de l'exercice T4.9 : Mesure d'une chaleur latente [**]

1. Le premier principe appliqué au récipient + son contenu + la résistance pendant la durée t_1 donne $\Delta H = m_1.\ell_v = U_1 I_1 t_1$ donc $\ell_v = 2500\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
2.
```
import numpy as np
m,um=2e-3,1e-6
V,uV=5,1e-2
I,uI=2.5,1e-3
t,ut=400,2
N=10000
rnd_m=np.random.normal(m,um,N)
rnd_V=np.random.normal(V,uV,N)
rnd_I=np.random.normal(I,uI,N)
rnd_t=np.random.normal(t,ut,N)
```

```
tab_lv=rnd_V*rnd_I*rnd_t/rnd_m
print(np.mean(tab_lv))
print(np.std(tab_lv))
```

On trouve $u(\ell_v) = 13{,}5\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

3. On a maintenant $m_1\ell_v = U_1I_1t_1 - P_{th}t_1$ et $m_2\ell_v = U_2I_2t_2 - P_{th}t_2$, où P_{th} est la puissance des pertes. On élimine P_{th} : $l_v\left(\frac{m_1}{t_1} - \frac{m_2}{t_2}\right) = U_1I_1 - U_2I_2$ d'où $\ell_v = 2260\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
   Cette seconde évaluation est plus éloigné de la première valeur que $2u(\ell_v)$. Ainsi, dans le premier cas, la source principale d'erreur était une erreur due à l'approximation (adiabatique) plus qu'une erreur de mesure. On voit ainsi qu'avant de faire des calculs d'incertitude compliqués, il faut d'abord éliminer les sources d'erreur dans les expériences.

Corrigé de l'exercice T4.10 : Système diphasé [**]

1. Il y a donc 360 g d'eau sous forme de vapeur. En divisant par la masse volumique, on trouve que le liquide occupe 0,72 L et la vapeur 69,90 L, d'où un volume total $V = 70{,}6\,\text{L}$.
2. Il y a coexistence de liquide et de gaz à l'équilibre, donc la pression vaut la pression de vapeur saturante : 10 bar. On calcule alors pour la vapeur : $PV = 7{,}0\times10^4\,\text{J}$ tandis que $nRT = \frac{360}{18}\times8{,}3\times(273+180) = 7{,}5\times10^4\,\text{J}$ soit une différence de 7 % environ.

Corrigé de l'exercice T4.11 : Système diphasé liquide-vapeur [***]

Ici, on a comme inconnue les masses m_l et m_v. On peut écrire :

— la conservation de la masse : $m_l + m_v = 1\,\text{kg}$

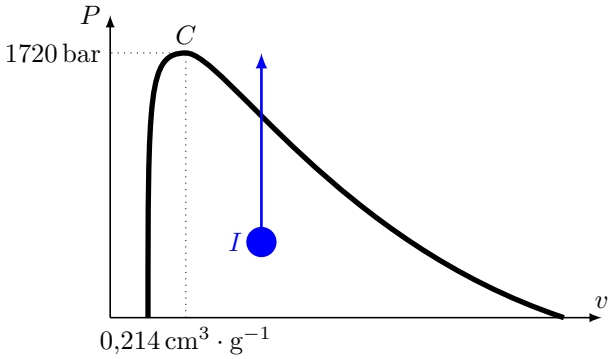
— l'équation sur le volume : le volume total de l'eau liquide et vapeur doit valoir $10\,\text{L} = 0{,}01\,\text{m}^3$. Le volume d'eau liquide vaut $\frac{m_l}{1000}$ en m^3. Le volume de vapeur est donné par $\frac{m_vRT}{M_eP}$; or il y a coexistence de liquide et de vapeur, donc la pression vaut forcément la pression de vapeur saturante. Si on prend 20 °C par exemple, on trouve $57{,}9m_v$. Donc $m_l + 57\,900m_v = 10$

On en déduit que $m_v = 0{,}0017\,\text{kg}$ et $m_l = 0{,}998\,\text{kg}$ à 20 °C.
De même, on trouve $m_v = 0{,}013\,\text{kg}$ et $m_l = 0{,}98\,\text{kg}$ à 60 °C.

Corrigé de l'exercice T4.12 : Tubes de Natterer [**]

1.
   (a) $m_L + m_V = 2\times10^{-5}$ en kilogrammes
   (b) Par définition, si le liquide et le gaz coexistent à 76,6 °C, la pression vaut forcément $P_{sat}(76{,}6\,°\text{C}) = 10\,\text{Pa}$
   Par la loi du GP : $v_V = \frac{V}{m} = \frac{nRT}{mP} = \frac{RT}{MP} = 1450\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$
   (c) Soit V_L le volume de liquide et V_V celui de vapeur, alors $V_L + V_V = 2\times10^{-5}$. Or $V_L = \frac{m_L}{\rho_L} = \frac{m_L}{13\,400}$ et $V_V = m_V.v_V = 1450m_V$. Donc $\frac{m_L}{13\,400} + 1450m_V = 2\times10^{-5}$.
   (d) En combinant les deux équations et en éliminant m_L par exemple, on trouve $m_V = \frac{2\times10^{-5} - \frac{2\times10^{-5}}{13\,400}}{1450 - \frac{1}{13\,400}} = 1{,}4\times10^{-8}\,\text{kg} = 0{,}014\,\text{mg}$
   On a donc $m_L \approx 20\,\text{mg}$.
2. La pression vaut désormais 1000 Pa donc $v_V = 18{,}6\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$. On en tire par les mêmes calculs : $m_V = 1{,}1\,\text{mg}$ et $m_L = 18{,}9\,\text{mg}$
3.
   (a) On trouve par le même calcul : $m_V = 80\,\text{mg}$ et $m_L = -60\,\text{mg}$: c'est problématique
   (b) On a supposé qu'il y avait coexistence du liquide et du gaz ; ce n'est plus vrai, il semble qu'il n'y a plus que du gaz : $m_L = 0\,\text{mg}$ et $m_V = 20\,\text{mg}$
   (c) Du coup la pression n'est plus égale à la pression de vapeur saturante, mais elle est donnée par la loi du GP : $P = \frac{mRT}{MV} = 26\,000\,\text{Pa} < P_{sat}(355{,}9\,°\text{C})$ donc l'hypothèse (comme quoi il ne reste que du gaz) est validée.

4. Réponse d'un seul coup à toutes les sous-questions à l'aide de ce schéma :



Le volume massique moyen du système est $\frac{20}{20} = 1\,\mathrm{cm^3 \cdot mg^{-1}} = 1000\,\mathrm{cm^3 \cdot g^{-1}}$ donc le point initial I est à droite de C, sous la courbe de saturation (mélange L+V). Quand on chauffe, le volume total ne change pas, pas plus que la masse totale, donc v ne change pas, donc le point représentant le système monte à la verticale. Au bout d'un moment, il sort de la courbe de saturation et arrive à l'état vapeur.

Si on était parti d'un état tel que $v < 0{,}214\,\mathrm{cm^3 \cdot g^{-1}}$ alors on aurait obtenu une ampoule pleine de liquide.

Réponses aux TDs numériques

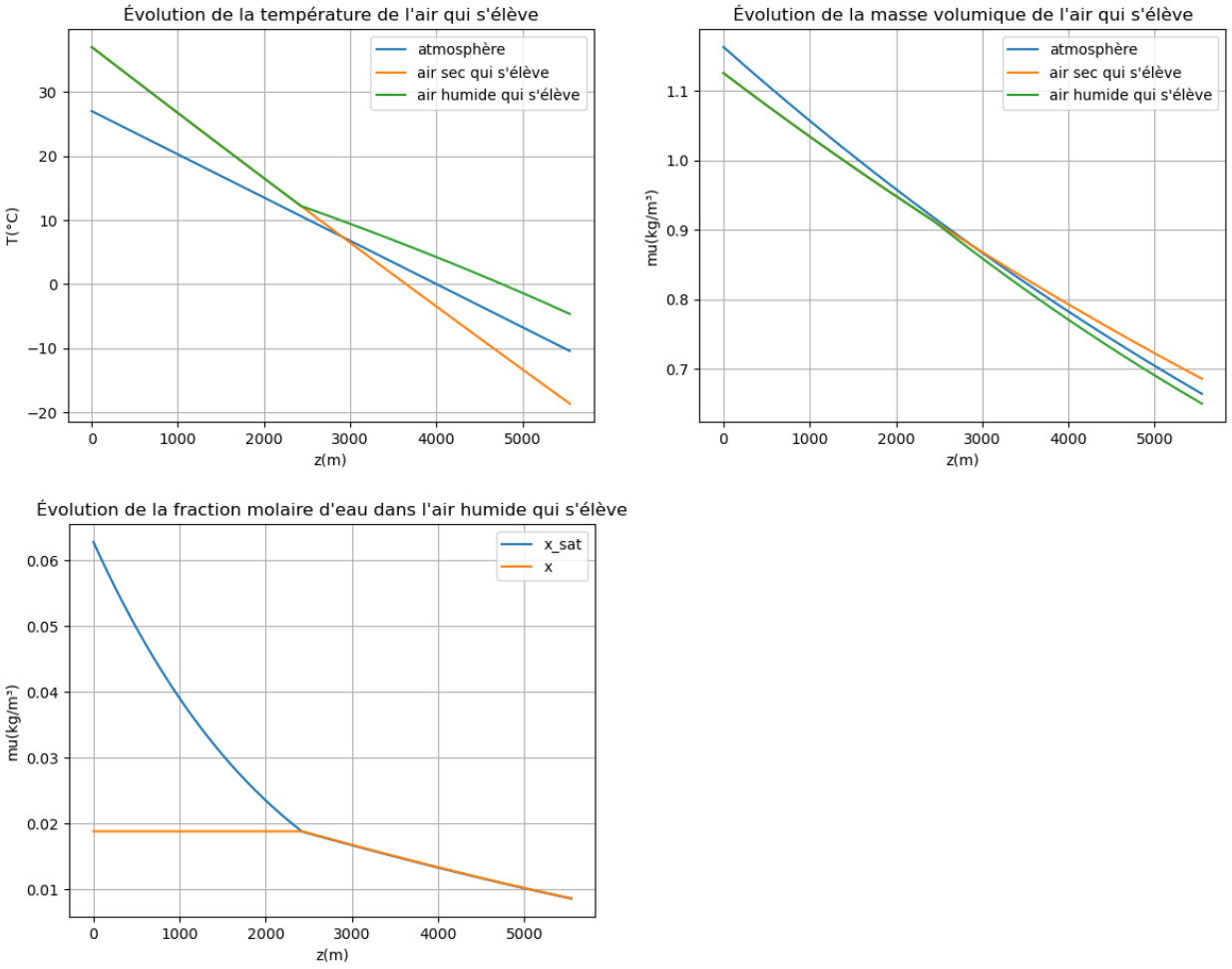
Réponses au TD d'info : Formation des nuages

Pour l'air sec, le premier principe s'écrit $C_{vm}\mathrm{d}T = -P\mathrm{d}V_m$ d'où on tire $C_{vm}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} = \frac{PM}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}$

La dérivation de la loi du GP indique que $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P} = \frac{M}{RT} - \frac{PM}{RT^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P}$ car T varie avec P.

En combinant les deux, on trouve le système d'équations demandé qu'on résout par la méthode d'Euler ou par `odeint`.

De même, on résout le cas de l'air humide en ajoutant un troisième tableau pour x. Les résultats comparés sont ci-dessous :



L'air sec monte et se refroidit, et sa masse volumique se rapproche de celle de l'atmosphère à l'équilibre. Il continue de monter (à cause de la poussée d'Archimède) dans qu'il est plus léger que l'air environnant, mais on voit sur la courbe qu'il s'arrête vers 2900 m.

Pour l'air humide, on constate que l'eau commence à se condenser à 2400 m environ ; c'est l'altitude où se forme le bas du nuage. À partir de là, la condensation de l'eau libère de la chaleur qui réchauffe l'air, qui du coup se refroidit moins vite. Ainsi, on voit que cet air va pouvoir continuer à s'élever. À partir de 4700 m, la température devient inférieure à 0,1 °C, température du point triple de l'eau, et la vapeur d'eau va directement se condenser en glace : le modèle est alors à changer.

Chapitre T5 Machines thermiques

Programme p.1126

Conseils p.1127

Cours p.1114

T5.A. Avancement historique de l'étude des machines thermiques

T5.B. Le second principe de la thermodynamique

QCMs p.1128

Exercices p.1131

TDs numériques p.1138

T5. Machines thermiques

Cours

La thermodynamique a connu sa première véritable théorie sur les machines thermiques avec les Réflexions sur la puissance motrice du feu de Sadi Carnot. Néanmoins, lorsque ce mémoire fut publié en 1824, il ne connut que peu de retentissement, car les connaissances de l'époque concernant les lois de la thermodynamique étaient trop peu avancées pour en tirer tout son potentiel. Mais nous avons désormais les outils en main pour exploiter les raisonnements de Carnot.

Pour étudier les machines thermiques, il est nécessaire de définir la notion de thermostat :

Définition : Thermostat

Un thermostat est un système thermodynamique en contact thermique avec le système étudié, qui échange donc de la chaleur avec le système étudié, mais dont la température reste constante :

— soit parce qu'il a une capacité thermique beaucoup plus grande que celle du système étudié, de telle sorte que les échanges thermiques influent peu sur sa température

— soit parce que sa température est maintenue constante par un élément extérieur

Par exemple, l'air atmosphérique sera souvent pris comme un thermostat dans nos études : sa température varie peu sous l'effet de la chaleur dégagée par un simple moteur, car l'atmosphère est très grande, elle appartient donc à la première catégorie des thermostats. Dans la seconde catégorie, on peut citer le foyer d'une machine à vapeur, dans lequel la combustion du charbon maintient une température constante.

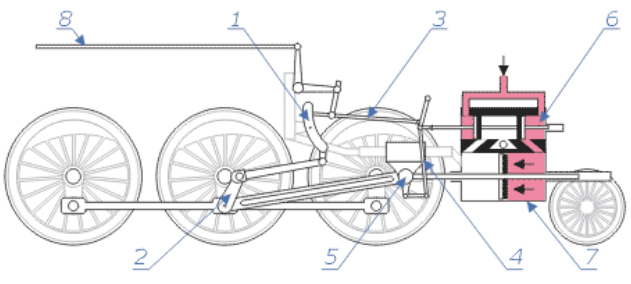
T5.A. Avancement historique de l'étude des machines thermiques

! Tous les raisonnements de cette section sont présentés pour leur intérêt historique, et aussi pour rendre moins abstrait le second principe qu'on va introduite ci-après ; mais ils ne sont pas à connaître, hormis le calcul du rendement de la machine de Carnot.

A.1. Les idées de Carnot sur les machines à feu

Du temps de Carnot, on avait déjà construit des machines à feu, principalement des machines à vapeur, qui étaient employées essentiellement pour les mines. Dans de telles machines, on trouve un foyer où on brûle le charbon. Ce foyer sert à chauffer de l'eau et à former de la vapeur d'eau sous pression. Elle est alors envoyée vers un cylindre où elle pousse un piston, provoquant un mouvement qui va être utilisé pour faire tourner une roue, par exemple (cf. figure T5.1). Ces machines sont **cycliques**, c'est-à-dire qu'elles décrivent un cycle qui se répète.

FIGURE T5.1 : Animation d'une machine à vapeur. C'est par le tiroir (6) que la vapeur est admise dans le cylindre (7) et agit alternativement sur chacune des faces du piston. La tige de piston actionne la bielle couplée au train de roues motrices par l'intermédiaire de la crosse articulée (5). Les roues couplées deviennent toutes motrices. Par l'intermédiaire de la contre-manivelle (2) calée à 90° de la manivelle motrice, une bielle fait osciller la coulisse (1) de distribution dans laquelle glisse la bielle de commande de tiroir (3) couplée au levier d'avance (4). (Crédit : Wikipedia/Panther)



Une telle machine, perfectionnée par différents ingénieurs donc le célèbre James Watt, était analysée ainsi : la combustion du charbon produit de la chaleur, et la machine à vapeur convertit cette chaleur en travail. Les questions qui se posaient alors étaient :

— quel est le meilleur gaz pour produire le plus possible de travail ?

— quelle est la meilleure géométrie (sections, courses,...) pour produire le plus de travail ?

— quel est travail maximal qu'on peut tirer d'une certaine quantité de charbon ?

L'analyse révolutionnaire de Carnot provient d'abord du repérage d'un élément essentiel : l'atmosphère. Alors qu'on analysait simplement le fonctionnement de la machine à vapeur comme :

— le foyer (thermostat) communique de la chaleur à la machine

— la machine produit du travail

formant ce qu'on appellera bientôt une **machine cyclique monotherme**, Carnot insiste sur l'importance de l'atmosphère dans laquelle on rejette la vapeur une fois détendue. Il y a donc non pas 1 mais 2 thermostats (**machine cyclique ditherme**), et c'est le transfert de chaleur du thermostat chaud vers le thermostat froid qui permet de produire du travail [1]. Ainsi, avec les notations qui sont les nôtres, on peut décrire le fonctionnement d'une machine à vapeur comme sur la figure T5.2 (où les sens des flèches indiquent le sens réel des échanges) :

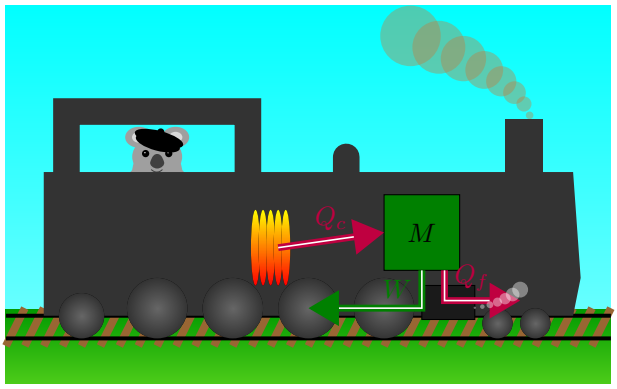
— la machine reçoit une quantité de chaleur Q_c de la part du foyer

— elle produit un travail W qui fait avancer la locomotive, par exemple

— elle rejette une quantité de chaleur Q_f dans l'atmosphère.

ces grandeurs étant considérées sur 1 cycle de la machine.

FIGURE T5.2 : Machine à vapeur de locomotive.



(a) Schéma des échanges (non algébriques)



(b) Locomotive à vapeur ; on distingue bien la cheminée d'où sort la fumée de combustion du charbon, et les cylindres en bas d'où s'échappe la vapeur d'eau.

Dans cette machine à vapeur, on fournit du charbon ; du point de vue thermodynamique, on fournit Q_c, c'est ce que cela nous coûte ; et en retour, la machine nous fournit un travail W. On peut donc définir le rendement de cette machine comme

$$r = \left|\frac{\text{ce qu'on récupère}}{\text{ce qu'on fournit}}\right| = \left|\frac{W}{Q_c}\right|$$

Autrement dit, au cours d'un cycle, on fournit une quantité de chaleur Q_c, on en transforme une quantité rQ_c en travail (cela, c'est utile) et on en rejette le reste $Q_f = (1-r)Q_c$ dans l'atmosphère (cela, c'est perdu, sauf pour chauffer les oiseaux en hiver).

Maintenant, la question est : comment maximiser r ? Peut-on le rendre aussi proche que possible de 1 ?

1. Carnot avait des notions inexactes sur la nature de la chaleur. En fait, on verra un peu plus loin qu'il ne s'agit pas d'un transfert de chaleur, mais d'entropie.

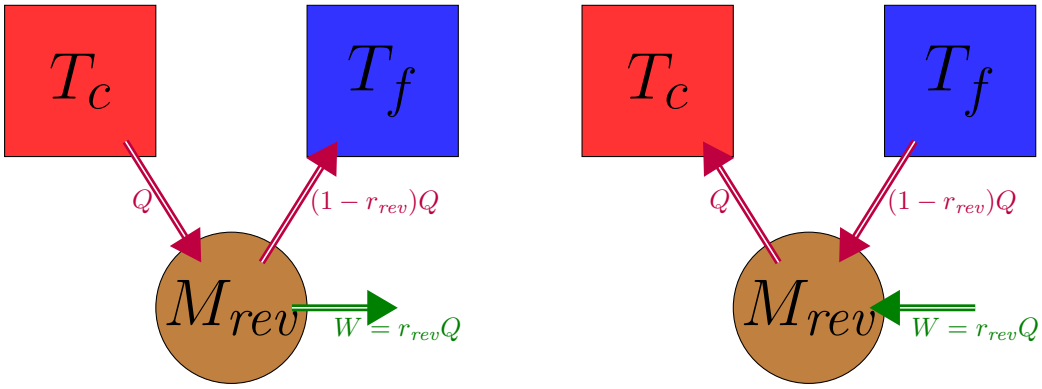
Pour cela, il faut d'abord analyser rapidement ce qui se passe dans la machine à vapeur : on chauffe la vapeur d'eau pour augmenter sa pression ; elle se détend alors dans le cylindre en poussant sur le piston, ce qui produit la force motrice ; elle se refroidit alors au contact de l'atmosphère. En inversant le principe, Carnot imagine la première machine frigorifique : si, dit-il, on prend de l'eau à une pression suffisamment faible pour que sa température de vaporisation soit, disons, de 10 °C ; on la met en contact thermique avec l'atmosphère à 20 °C, elle s'évapore en refroidissant l'atmosphère ; on la comprime alors, elle s'échauffe, et avec cette vapeur d'eau très chaude, on revient chauffer le foyer. On a donc pu, en fournissant un travail, transférer de la chaleur du thermostat froid (l'atmosphère) vers le thermostat chaud (le foyer), à l'encontre du cours naturel des choses. C'est le principe de la climatisation, du réfrigérateur,…

Maintenant, imaginons que toutes ces transformations se fassent avec des différences de températures entre le gaz et les thermostats très petites : c'est la notion de **réversibilité** que Carnot introduit. Alors cette machine **réversible** peut fonctionner dans les deux sens ; en notant r_{rev} son rendement, on a deux possibilités (figure T5.3) :

— fonctionnement comme **moteur** : elle reçoit une quantité de chaleur Q de la part du thermostat chaud, produit un travail $W = r_{rev}Q$ et rejette une quantité de chaleur $(1 - r_{rev})Q$ dans le thermostat froid ;

— fonctionnement comme **récepteur** : elle reçoit un travail $r_{rev}Q$, prélève une quantité de chaleur $(1 - r_{rev})Q$ dans le thermostat froid, et rejette une quantité de chaleur Q dans le thermostat chaud.

FIGURE T5.3 : Machine réversible de Carnot (échanges non algébriques).



(a) Fonctionnement moteur (b) Fonctionnement récepteur

Imaginons alors, propose Carnot, une seconde machine qui fonctionne comme un moteur **entre les mêmes thermostats** ; notons r son rendement, et supposons que $r > r_{rev}$. Alors, en les mettant ensemble, on peut réaliser le fonctionnement de la figure T5.4 :

— On fait fonctionner un cycle du moteur de rendement r ; il prélève une quantité de chaleur Q au thermostat chaud de température T_c, produit un travail rQ et réchauffe le thermostat froid de température T_f d'une quantité $(1 - r)Q$.

— On prélève une partie $r_{rev}Q$ du travail fourni pour faire fonctionner un cycle de la machine réversible à l'envers. Elle prélève alors une quantité de chaleur $(1 - r_{rev})Q$ au thermostat froid et rejette une quantité Q dans le thermostat chaud.

À la fin de ces opérations :

— les machines M et M_{rev} ont effectué un cycle, elles sont revenues dans leur état initial ;

— le thermostat chaud a regagné la chaleur qu'il avait fournie, il est revenu dans son état initial ;

— le thermostat froid a perdu une quantité de chaleur $(r - r_{rev})Q$;

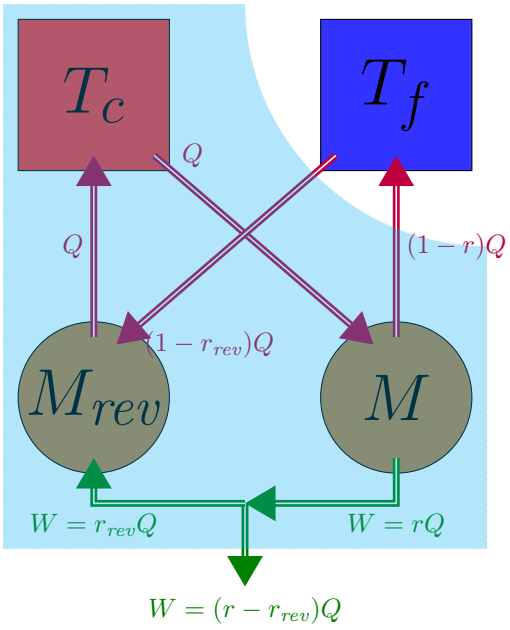
— un travail $W = (r - r_{rev})Q$ a été récupéré.

Mettons les deux machines et le thermostat chaud dans une grosse boîte : on a fabriqué une machine $\{M + M_{rev} + T_c\}$ qui décrit un cycle, et qui, au cours de ce cycle, produit du travail. Ce travail, elle l'a puisé simplement dans le thermostat froid. Super, allons breveter ça : un moteur qui fait avancer notre voiture, et pour cela se contente de refroidir l'atmosphère ! Eh bien, non, depuis Galilée, on ne croit plus à l'existence du **mouvement perpétuel**, de cette machine géniale qui permettrait de produire tout le travail qu'on veut sans source de chaleur particulière [2].

Le théorème de Carnot est donc la traduction en thermodynamique du postulat sur l'impossibilité du mouvement perpétuel. Il dit que, dans le cas qui nous a intéressé, la condition $r > r_{rev}$ est impossible ; on a donc obligatoirement

2. Plus précisément, sans différence de température.

FIGURE T5.4 : Démonstration du théorème de Carnot (échanges non algébriques).



$r \leq r_{rev}$; et si la seconde machine est réversible elle aussi, alors l'égalité peut être renversée, ce qui implique que $r = r_{rev}$.

Théorème de Carnot

Le rendement d'une **machine cyclique ditherme** est toujours inférieur à un rendement maximal (appelé parfois *rendement de Carnot*) r_C qui ne dépend que des températures des deux thermostats.
Toute machine cyclique ditherme **réversible** fonctionnant entre ces deux thermostats a pour rendement le rendement maximal r_C.
Toute machine cyclique ditherme **irréversible** fonctionnant entre ces deux thermostats a un rendement strictement inférieur à r_C.

Remarque : Tous les termes sont importants : pour que le théorème s'applique, la machine doit être :

— cyclique : il existe plein de machines à mouvement quasiment perpétuel, dont le fonctionnement est presque cyclique, mais pas exactement. La plupart sont basée sur des aimants, car on omet de dire que, lors du fonctionnement, les aimants se désaimantent lentement.

— ditherme : tous les moteurs ne fonctionnent pas forcément entre deux thermostats ; par exemple, dans un moteur à explosion, la chaleur est apportée directement par la combustion de l'essence.

— entre les mêmes thermostats : si on change les thermostats, on change le rendement maximal.

Carnot est allé aussi loin qu'il a pu pour essayer de trouver ce rendement. Il a postulé qu'il doit augmenter avec la différence de températures $T_c - T_f$. Il a aussi proposé une machine imaginaire pour réaliser ce cycle ; la machine de Carnot. Il n'avait pas les outils pour calculer son rendement, mais nous, nous les avons.

Exemple : Machine de Carnot — À connaître

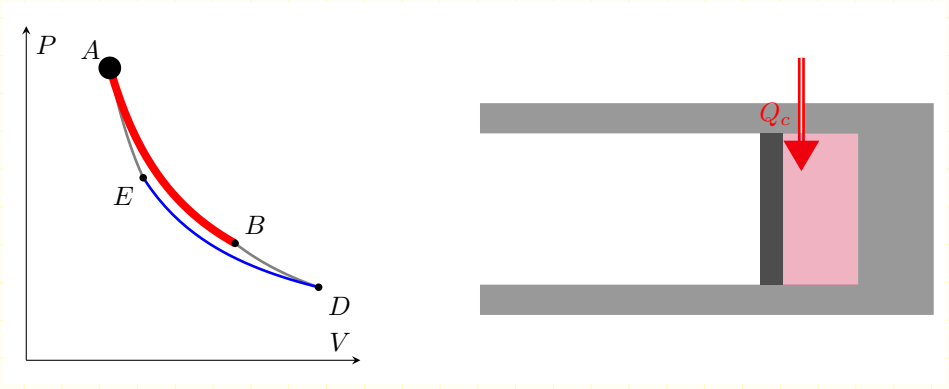
La machine de Carnot est une machine imaginaire constituée d'un gaz parfait qui décrit le cycle $ABDE$ suivant :

— de A à B : détente isotherme à T_c ;

— de B à D : détente adiabatique réversible ;

— de D à E : compression isotherme à T_f ;

— de E à A : compression adiabatique réversible ;



1. Exprimez les quantités de chaleur reçues par le gaz lors des 4 phases, en fonction de n, T_c, T_f, et des volumes V_A, V_B, V_D et V_E.
2. Quelle est la phase où le gaz reçoit de la chaleur ? En déduire Q_c.
   En appliquant le premier principe à un cycle, exprimez W en fonction des quantités de chaleur précédentes. Quel est son signe ?
3. On définit $r_C = -\frac{W}{Q_c}$. Montrez que $r_C = 1 + \frac{T_f}{T_c}\frac{\ln \frac{V_E}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$
4. En appliquant deux fois les lois de Laplace, reliez $\frac{V_D}{V_E}$ à $\frac{V_A}{V_B}$. Déduisez-en que le rendement de la machine de Carnot vaut
$$r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} \qquad \text{(T5.1)}$$

1. AB est isotherme à T_c, donc $Q_{AB} = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$
   DE est isotherme à T_f, donc $Q_{DE} = nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}$
   BD et EA sont des adiabatiques donc $Q_{BD} = Q_{EA} = 0$
2. $V_B > V_A$ et $V_D > V_E$ donc $Q_{AB} > 0$ et $Q_{DE} < 0$. Le gaz reçoit donc de la chaleur dans la phase AB, donc $Q_c = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$.
   Sur un cycle, $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état. Le travail W reçu au cours du cycle vérifie donc $W + Q_{AB} + Q_{BD} + Q_{DE} + Q_{EA} = 0$ soit $W = -nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} - nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}$. Il est négatif car le cycle est moteur (rotation dans le sens horaire dans le diagramme de Watt).
3. On en déduit donc facilement que $r_C = \frac{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}}{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 + \frac{T_f}{T_c}\frac{\ln \frac{V_E}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$
4. Les transformations BD et EA sont adiabatiques et réversibles, donc on peut appliquer les lois de Laplace : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}$ et $T_B V_B^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$. Or $T_A = T_B = T_c$ et $T_D = T_E = T_f$ (à cause des isothermes) donc en divisant terme à terme les deux équations, on trouve $\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_E}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ ce qui implique que $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_E}{V_D}$. On en déduit que $\ln \frac{V_B}{V_A} = -\ln \frac{V_E}{V_D}$ ce qui donne bien $r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

On analysera ce résultat plus loin, une fois qu'on l'aura réétabli à partir des principes de la thermodynamique.

A.2. Analyse par Clausius des résultats de Carnot

Plusieurs autres physiciens ont analysé les résultats de Carnot ; celui qui a laissé son nom associé à une formule est Clausius. Dans les années 1860, les connaissance de la thermodynamique sont suffisamment avancées pour ressembler à ce que nous connaissons maintenant. Dans son livre Théorie mécanique de la chaleur, Clausius établit alors une formule traduisant en termes mathématiques l'impossibilité du mouvement perpétuel introduit par Carnot. Nous ne pouvons pas reprendre exactement son raisonnement, assez complexe, mais nous supposerons que nous connaissons l'expression du rendement maximal de Carnot : $r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ pour un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre deux thermostats T_f et $T_c > T_f$.

Calcul : Inégalité de Carnot-Clausius

On considère un moteur cyclique ditherme **recevant** (en convention thermodynamique) au cours d'un cycle :

- une quantité de chaleur $Q_c > 0$ de la part de la source chaude
- une quantité de chaleur $Q_f < 0$ de la part de la source froide
- un travail $W < 0$

D'après le théorème de Carnot, $\left|\frac{W}{Q_c}\right| = -\frac{W}{Q_c} < 1 - \frac{T_f}{T_c}$. Or d'après le premier principe appliqué à un cycle : $W + Q_c + Q_f = \Delta U = 0$ car U est une fonction d'état. Donc $W = -Q_c - Q_f$.
On en déduit que $\frac{Q_c+Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ d'où $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$. On peut transformer cette équation sous la forme $\frac{Q_f}{T_f} \leq -\frac{Q_c}{T_c}$ et en déduire l'inégalité de Carnot-Clausius :

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \qquad \text{(T5.2)}$$

Remarque : Clausius a généralisé cette équation à plusieurs thermostats : si au cours d'un cycle, un système échange des quantités de chaleur Q_i avec des thermostats à la température T_i, alors $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

T5.B. Le second principe de la thermodynamique

B.1. Le second principe

Le terme 0 qui apparaît à droite dans l'inégalité de Carnot-Clausius peut s'interpréter comme la variation d'une fonction d'état sur le cycle. Mais quelle fonction d'état ? Pas l'énergie, puisque les termes $\frac{Q_i}{T_i}$ n'ont pas l'unité d'une énergie. Il faut donc en introduire une nouvelle, ce que Clausius a fait en 1865.

Propriété : Second principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une **fonction d'état extensive** S appelée **entropie**, en $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$. Lorsqu'un système fermé évolue entre deux états d'équilibre en recevant des quantités de chaleur Q_i de la part de thermostats à la température T_i, sa variation d'entropie vaut

$$\Delta S = S_{éch} + S_{cr} \text{ avec } S_{éch} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \text{ (entropie échangée) et } S_{cr} \geq 0 \text{ (entropie créée)} \qquad \text{(T5.3)}$$

L'entropie créée est nulle si et seulement si la transformation est réversible.

Remarque : Le second principe se démarque du premier par cette propriété fondamentale : **l'énergie se conserve**, tandis que **l'entropie se crée et n'est jamais détruite**. C'est l'entropie qui est responsable de toute irréversibilité dans l'univers. Si, au cours d'une transformation, de l'entropie est créée, alors la transformation n'est pas réversible, car sinon on détruirait de l'entropie en la renversant.

Propriété : Sources de création d'entropie (admis)

En pratique les principales sources de création d'entropie sont :

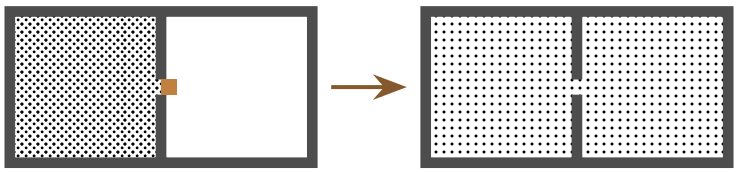
- les échanges thermiques entre deux objets à des températures différentes ; plus la différence de température est grande, plus l'entropie créée est importante
- les frottements mécaniques, qui se traduisent pas un non-équilibre des forces de pression de chaque côté d'une paroi mobile
- d'autres qu'on ne verra pas cette année : cycles d'aimantation, mélanges, ...

Remarque : Lors d'une transformation adiabatique réversible, $S_{cr} = 0$ (réversible) et $S_{éch} = 0$ (adiabatique) donc $\Delta S = 0$: une telle transformation est **isentropique**. Dans le cas d'un gaz parfait, les lois de Laplace s'appliquent.

Remarque : L'entropie se crée, mais elle **s'échange** aussi. Cet échange peut être un gain ou une perte d'entropie. Dans beaucoup de magazines de vulgarisation (peu) scientifique, on lit souvent ceci : « l'entropie d'un système augmente toujours ». Eh bien, si vous lisez ça, jetez le livre au feu, car son auteur n'a rien compris :

— l'entropie d'un système isolé augmente (car alors $S_{éch} = 0$)
— l'entropie d'un système isolé thermiquement augmente (car alors $S_{éch} = 0$)
— l'entropie d'un système qui échange de la chaleur peut augmenter et diminuer

Les énoncés faux sur l'entropie sont souvent accompagnés d'explications fumeuses : « l'entropie, c'est le désordre ». C'est un peu plus compliqué que ça. Sans entrer dans les détails, on peut dire que l'entropie a été reliée par Boltzmann à **un manque d'information sur le système**. Reprenons par exemple la détente de Joule-Gay Lussac :



Dans l'état de gauche, il y a un gaz à la température T, dans un volume V, à la pression P : c'est l'état macroscopique. À cet état macroscopique correspondent beaucoup d'états microscopiques ; et moi, je suis incapable de savoir lequel de ces états microscopiques est l'état réel du système : cela correspond à un manque d'information. En réduisant la description du système à T, V, P, on a énormément perdu d'informations sur le système. Boltzmann, intuitant à l'avance la théorie de l'information et l'entropie statistique introduites par Shannon dans les années 1940, a prouvé que l'entropie correspond, à une constante près (la constante de Boltzmann), au logarithme du nombre d'états microscopiques possibles correspondant à l'état macroscopique du système. Plus il y a d'états microscopiques possibles, plus l'entropie est grande, et cela traduit le fait que je ne sais pas grand chose sur mon système. Ainsi, en **physique statistique**, on redémontre les équations de la thermodynamique en dénombrant le nombre d'états microscopiques de manière à calculer l'entropie du système, et on en déduit toutes ses propriétés.

Une fois la détente effectuée, le gaz a pris plus de volume. Les particules peuvent occuper plus d'espace, elles ont donc encore plus d'états possibles. Le nombre d'états microscopiques possibles du système est donc encore plus grand, donc l'entropie est plus grande : $\Delta S > 0$. Or $S_{éch} = 0$ ici (car le système est calorifugé) donc $S_{cr} > 0$: cette transformation est irréversible.

Dans un système isolé, on perd de l'information, et l'entropie augmente. Si on veut gagner de l'information, il faut faire un effort : recevoir du travail, qu'on évacue sous forme de chaleur une fois utilisé. Recevoir du travail n'échange aucune entropie ; l'évacuation de chaleur, par contre, évacue de l'entropie, et au final, on a perdu de l'entropie donc gagné de l'information sur le système.

Dans tous les cas, il ne faut pas trop chercher, pour une première étude de la thermodynamique, à comprendre les secrets de l'entropie. Il faut surtout retenir l'expression du second principe, ses conséquences et son utilisation.

Si vous comprenez bien l'anglais, je vous conseille les excellents films de George Porter : The Laws of Disorder (épisode 1 : Entropy — épisode 2 : The 2nd law of thermodynamics — épisode 3 : Molecules at works — épisode 4 : Equilibrium.

Étudions maintenant les conséquences du second principe sur les machines thermiques.

B.2. Étude des machines thermiques cycliques monothermes

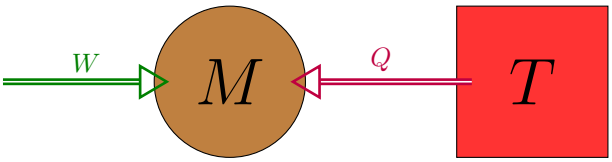
Définition : Machine cyclique monotherme

Une machine cyclique monotherme décrit un cycle au cours de laquelle elle n'échange de la chaleur qu'avec un seul thermostat. Elle reçoit une quantité de chaleur Q et un travail W (figure T5.5).

Énoncé de Kelvin du second principe

Il est impossible de construire un moteur cyclique monotherme.

Figure T5.5 : Machine cyclique monotherme (notations algébriques).



Démonstration

Sur un cycle, $\Delta U = 0$, $\Delta E_{macro} = 0$ et $\Delta S = 0$ car ce sont des fonctions d'état. En appliquant le premier et le second principe, cela implique que $W + Q = 0$ et $\frac{Q}{T} + S_{cr} = 0$. Donc $Q = -TS_{cr} \leq 0$ puisque l'entropie créée est toujours positive. On en déduit donc que $W = -Q \geq 0$: la machine reçoit forcément du travail.

Remarque : Attention aux hypothèses de l'énoncé :

— il existe des moteurs monothermes, mais non cyclique ; par exemple, une bombe qui explose produit du travail, mais elle n'est pas cyclique.

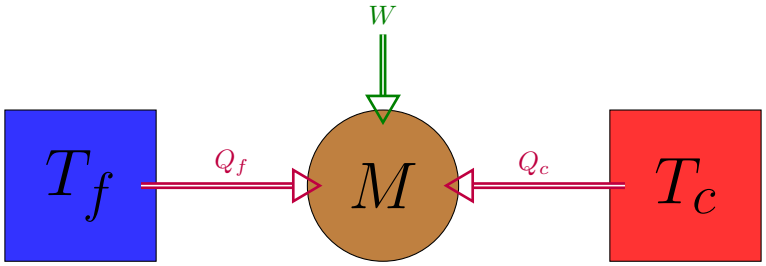
— il existe des machines cycliques monothermes, mais ce sont des récepteurs ; par exemple, une résistance chauffante.

B.3. Étude des machines thermiques cycliques dithermes

Définition : Machine cyclique ditherme

Une machine cyclique ditherme décrit un cycle au cours de laquelle elle échange de la chaleur avec deux thermostat : un thermostat chaud de température T_c et un thermostat froid de température T_f. Elle reçoit des quantités de chaleur Q_c et Q_f, et un travail W (figure T5.6).

FIGURE T5.6 : Machine cyclique ditherme.



Commençons par un résultat général :

Énoncé de Clausius du second principe

Il est impossible de construire une machine cyclique ditherme qui prend de la chaleur à une source froide pour la transmettre à une source chaude sans recevoir du travail.

Démonstration

Considérons un cycle : comme U et S sont des fonctions d'état, on peut écrire $\Delta U = \Delta E_{macro} = 0$ et $\Delta S = 0$. Par le premier et le second principe, $W + Q_c + Q_f = 0$ et $S_{éch} + S_{cr} = 0$ d'où $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$. On a donc $Q_c \leq -\frac{T_c}{T_f} Q_f$ et $W = -Q_c - Q_f \geq \left(\frac{T_c}{T_f} - 1\right) Q_f$. Comme $T_c > T_f$, la parenthèse est positive, donc si on veut prendre de la chaleur à la source froide, il faut que $Q_f > 0$ et donc $W > 0$: la machine ne peut pas être un moteur, elle doit recevoir du travail.

Étudions maintenant plus en détails les machines cycliques dithermes possibles :

Définition : Diagramme de Raveau

Un diagramme de Raveau représente les quantités de chaleurs échangées par une machine cyclique ditherme au cours d'un cycle dans un diagramme (Q_c, Q_f) (figure T5.7). On y traduit :

— le second principe sous forme d'une *zone interdite*

— le premier principe sous forme d'une séparation entre les moteurs et les récepteurs

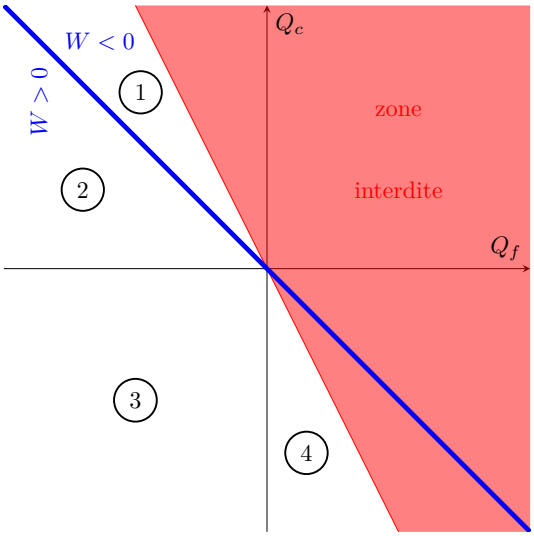
Démonstration

Le second principe s'écrit, sur un cycle, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{cr} = \Delta S = 0$, car l'entropie est une fonction d'état. Donc $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ puisque l'entropie créée est positive. On en déduit que $Q_c \leq -\frac{T_c}{T_f} Q_f$ ce qui correspond, dans le diagramme de Raveau, à être en-dessous de la droite d'équation $y = -\frac{T_c}{T_f} x$ qui est une droite de pente inférieure à -1.

Le premier principe s'écrit, sur un cycle, $W+Q_c+Q_f=\Delta U=0$ car l'énergie interne est une fonction d'état [a]. Donc $W=-Q_c-Q_f$. La machine est un moteur si et seulement si $W<0$ soit $Q_c+Q_f>0$ soit encore $Q_c>-Q_f$, ce qui correspond, dans le diagramme de Raveau, à être situé au-dessus de la droite d'équation $y=-x$.

a. $\Delta E_{macro}=0$ également.

FIGURE T5.7 : Diagramme de Raveau.



On voit apparaître alors 4 zones distinctes dans la partie autorisée du diagramme. On va les étudier.

Zone ① : les moteurs

Théorème de Carnot pour un moteur cyclique ditherme

Le rendement $r=\left|\frac{W}{Q_c}\right|$ d'un moteur cyclique ditherme est inférieur à

$$r_C=\frac{T_c-T_f}{T_c}=1-\frac{T_f}{T_c} \qquad \text{(T5.4)}$$

Ce maximum est atteint si le moteur est réversible.

Démonstration

Dans la zone ①, on a un moteur ($W<0$) qui prend de la chaleur à la source chaude ($Q_c>0$) et en renvoie dans la source froide ($Q_f<0$). Ce qui nous intéresse, c'est le travail ; ce qui nous coûte, c'est la chaleur Q_c. On définit donc le rendement comme $r=\left|\frac{W}{Q_c}\right|=\frac{-W}{Q_c}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $W=-Q_c-Q_f$ donc $r=\frac{Q_c+Q_f}{Q_c}=1+\frac{Q_f}{Q_c}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c}+\frac{Q_f}{T_f}=-S_{cr}\leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c}\leq-\frac{Q_f}{T_f}$. On manipule cette expression en faisant bien attention aux signes : $T_f>0$ et $Q_c>0$ donc on peut écrire $\frac{T_f}{T_c}\leq-\frac{Q_f}{Q_c}$ soit $\frac{Q_f}{Q_c}\leq-\frac{T_f}{T_c}$. On en déduit donc que $r\leq 1-\frac{T_f}{T_c}$.

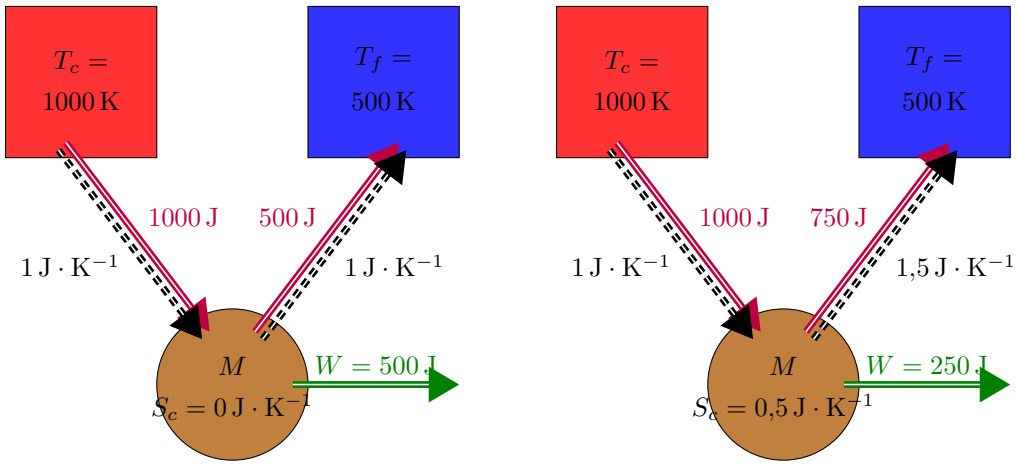
Remarque : Les températures sont en Kelvins ! sinon, si le thermostat chaud est un glaçon, il y a un problème….

Remarque : Pourquoi le rendement maximal n'est-il pas égal à 1 ? Pourquoi est-il impossible de transformer toute la chaleur en travail ? C'est à cause de l'entropie. Observons la figure T5.8. Sur la figure de gauche, on a un fonctionnement réversible entre des thermostats à 500 K et 1000 K. Supposons que la machine prélève 1000 J au thermostat chaud ; alors elle prélève aussi $1\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ d'entropie. Or, au bout d'un cycle, la machine doit être revenue à son état initial, donc elle doit avoir évacué cette entropie. Pour cela, il faut la renvoyer dans la source froide. Comme celle-ci est à 500 K, il suffit de lui renvoyer 500 J et cela correspond bien à $1\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ d'entropie évacuée. Il reste alors 500 J disponibles pour être transformés en travail, d'où un rendement de $\frac{500}{1000}=50\,\%$ qui correspond bien au rendement maximal entre ces deux thermostats.

Sur le schéma de droite, on suppose que la machine n'est pas réversible : elle crée $0{,}5\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ d'entropie par cycle. Il faut désormais évacuer $1{,}5\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ d'entropie dans la source froide, au moyen de 750 J de chaleur ; du coup, il ne reste que 250 J disponibles pour le travail : le rendement n'est plus que de 25 %.

Si la machine est fortement irréversible (frottements,…) et produit trop d'entropie, alors elle a trop d'entropie à évacuer vers la source froide, et elle s'arrête de tourner.

FIGURE T5.8 : Deux exemples de machines fonctionnant entre les mêmes thermostats (échanges non algébriques).



(a) Moteur réversible (b) Moteur non réversible

Remarque : Le plus souvent, on prend l'atmosphère comme source froide, fixée à environ 300 K (pour les ordres de grandeur). Pour avoir le meilleur rendement possible, il faut alors avoir la source chaude la plus chaude possible.

Le tableau T5.1 donne les rendements théoriques de différents types de centrales électriques thermiques (plus les éoliennes et les barrages pour comparer). On constate que, plus la température chaude est élevée, plus le rendement maximal est élevé. Les machines qui tirent leur énergie du soleil sont donc celles qui ont le plus de potentiel, car le soleil atteint une température irréalisable sur terre (sauf peut-être dans les centrales à fusion). Néanmoins, dans ces domaines, on est loin d'avoir atteint les meilleurs rendements. Les centrales solaires à concentration, comme THEMIS, ont été le plus souvent abandonnée du fait de la difficulté à trouver des matériaux qui résistent aux fortes températures ; les panneau photovoltaïques sont encore en progrès, des rendements records de près de 50 % ont été atteint avec une cellule très complexe, mais la plupart des panneaux actuels ont un rendement aux alentours de 20 %.

Pour les centrales thermiques, fonctionnant sur des cycles bien connus de production de vapeur / turbine, on voit que le rendement réel atteint est de l'ordre de 2/3 du rendement maximal théorique. C'est une règle utile à retenir : dans beaucoup de domaines, les rendements atteints sont de l'ordre de 2/3 du rendement théorique.

Pourquoi ne s'approche-t-on pas plus du rendement maximal ? Pour s'en approcher, il faut une machine fortement réversible ; or on a vu qu'une transformation réversible est très lente. Si on veut avoir de la puissance en sortie, il ne faut pas aller trop lentement. Tout est donc une affaire de compromis : pas trop lent pour avoir de la puissance, pas trop rapide pour avoir un bon rendement.

TABLEAU T5.1 : Ordre de grandeur des rendements de différentes centrales électriques ; la puissance maximale correspond approximativement à celle de la centrale la plus puissance actuellement installée.

Type	T_c	Rendement de Carnot	Rendement max. atteint	Puissance max.
À charbon	600°C	66%	45%	≈7GW
À gaz (cycle combiné)	1500°C	85%	60%	≈7W
Nucléaire	320°C	52%	34%	≈8GW
Géothermique	150°C	29%	20%	≈2GW
Four solaire	1000°C	77%	25%	≈350MW
Centrale photovoltaïque	6000K	95%	≈50%	≈100MW
Éolienne [a]	–	59%	50%	≈300MW
Hydroélectrique	–	>90%	85%	≈20GW

[a] Limite de Betz : cette limite due aux lois de mécanique des fluides n'a rien à voir avec le théorème de Carnot, car une éolienne n'est pas une machine thermique.

Remarque : Le rendement défini par $r = \left|\frac{W}{Q_c}\right|$ est un rendement purement thermodynamique. Du point de vue de

la thermodynamique, Q_f est perdue ; mais pour l'ingénieur qui conçoit le système, cette chaleur peut être utilisée à bon escient. À Pierrelatte, par exemple, l'eau chaude qui sort de la centrale du Tricastin, au lieu d'être simplement rejetée dans le Rhône, sert à chauffer des serres de culture. Dans d'autres endroits, des unités de cogénération en ville produisent de l'électricité à partir de biomasse, et le surplus de chaleur est rejeté dans le circuit de chauffage urbain.

Remarque : On définit le rendement à partir du rapport d'énergies échangées pendant 1 cycle, mais on pourrait de même le définir comme un rapport d'énergies échangées pendant $1s$, c'est-à-dire de puissances : en définissant la puissance mécanique $\mathcal{P}_{méca} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$, la puissance thermique échangée avec la source chaude $\mathcal{P}_c = \frac{\delta Q_c}{\mathrm{d}t}$ et la puissance thermique échangée avec la source froide $\mathcal{P}_f = \frac{\delta Q_f}{\mathrm{d}t}$, on aurait $r = \left|\frac{\mathcal{P}_{méca}}{\mathcal{P}_c}\right|$.

Zone ②

Dans la zone ②, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour prendre de la chaleur à la source chaude ($Q_c > 0$) et la rejeter dans la source froide ($Q_f < 0$). C'est assez peu utile, puisque la chaleur va déjà naturellement des températures les plus élevées vers les températures les plus basses.

Zone ③

Dans la zone ③, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour chauffer la source chaude ($Q_c < 0$) et la source froide ($Q_f < 0$). Deux bonnes résistances chauffantes ou des frottements ont le même effet, inutile de créer une machine thermique ditherme compliquée.

Zone ④

Dans la zone ④, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour chauffer la source chaude ($Q_c < 0$) en prenant de la chaleur à la source froide ($Q_f > 0$). C'est intéressant, car c'est le contraire du sens normal de circulation de la chaleur. On peut en tirer deux utilisations.

Théorème de Carnot pour un réfrigérateur cyclique ditherme

Un réfrigérateur (ou une climatisation) est une machine cyclique qui reçoit du travail pour refroidir une source déjà froide en évacuant de la chaleur vers une source déjà chaude. Son efficacité $\eta = \left|\frac{Q_f}{W}\right|$ est inférieure à

$$\eta_{max} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \tag{T5.5}$$

Ce maximum est atteint si la machine est réversible.

Démonstration

Pour un réfrigérateur, on a $W > 0$, $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$. On a donc $\eta = \left|\frac{Q_f}{W}\right| = \frac{Q_f}{W}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $W = -Q_c - Q_f$ donc $\eta = -\frac{Q_f}{Q_f+Q_c} = \frac{1}{-1-\frac{Q_c}{Q_f}}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$. Or $Q_f > 0$ donc $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$ soit $-1 - \frac{Q_c}{Q_f} \geq -1 + \frac{T_c}{T_f}$. En prenant l'inverse : $\eta \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f}-1} = \frac{T_f}{T_c-T_f}$.

Théorème de Carnot pour une pompe à chaleur cyclique ditherme

Une pompe à chaleur est une machine cyclique qui reçoit du travail pour réchauffer une source déjà chaude en prenant de la chaleur dans une source froide. Son efficacité $\eta = \left|\frac{Q_c}{W}\right|$ est inférieure à

$$\eta_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \tag{T5.6}$$

Ce maximum est atteint si la machine est réversible.

Démonstration

Pour une pompe à chaleur, on a $W > 0$, $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$. On a donc $\eta = \left|\frac{Q_c}{W}\right| = -\frac{Q_c}{W}$.
D'après le premier principe sur un cycle : $W = -Q_c - Q_f$ donc $\eta = \frac{Q_c}{Q_c+Q_f} = \frac{1}{1+\frac{Q_f}{Q_c}}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$. Or $-Q_c > 0$ donc $-\frac{T_f}{T_c} \leq \frac{Q_f}{Q_c}$ soit $1 + \frac{Q_f}{Q_c} \geq 1 - \frac{T_f}{T_c}$. En prenant l'inverse : $\eta \leq \frac{1}{1-\frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c-T_f}$.

Remarque : Pompe à chaleur et réfrigérateur / climatisation sont en fait la même machine thermique ; la seule chose qui change, c'est l'utilisation qu'on en fait : soit on est au chaud dans notre maison l'hiver et on veut encore chauffer l'intérieur ; soit on est au frais l'été (ou bien nos aliments sont au frais dans le réfrigérateur) et on veut encore refroidir cette source froide.

Remarque : On parle plutôt pour ces machines d'efficacité et que de rendement, car il ne s'agit pas de transformer du travail en chaud ou en froid, mais de se servir du travail pour pomper de la chaleur d'une source vers une autre. Du coup, il n'y a pas de problème à ce que cette efficacité soit supérieure à 1. En pratique, les efficacités théoriques maximum de Carnot sont souvent très grandes (supérieures à 10), mais les systèmes réels atteignent des efficacités de $2,5$ environ pour les réfrigérateurs, et $3,5$ environ pour les pompes à chaleur.

T5. Machines thermiques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Deuxième principe, bilans d'entropie	
Fonction d'état entropie.	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie, entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$ avec $S_{\text{éch}} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$.	Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité.
Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat. Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération.

T5. Machines thermiques

Quelques conseils

✎ Pour retrouver le rendement maximal d'une machine thermique cyclique ditherme, il faut : 1) bien définir le rendement en repérant ce qui nous coûte et ce qu'on récupère ; 2) écrire le premier et le second principe appliqués sur un cycle ; 3) remplacer W dans le rendement grâce au premier principe, faire apparaître le rapport $\frac{Q_c}{Q_f}$ ou $\frac{Q_f}{Q_c}$ et le remplacer grâce au second principe.

Si l'énoncé demande de calculer le rendement maximal, on peut travailler avec l'égalité $S_{cr} = 0$ plutôt qu'une inégalité, on risque moins de faire d'erreurs.

✎ Les énoncés décrivant des machines thermiques sont souvent longs et contiennent beaucoup d'informations. Il faut prendre le temps de bien les lire, et de résumer le cycle en notant les caractéristiques de chaque état et de chaque transformation.

✎ Quand on dessine un cycle dans le diagramme de Watt ou de Clapeyron, il faut se poser une question essentielle : y a-t-il un gaz pur, ou y a-t-il des changements d'état liquide/vapeur ? S'il y a des changements d'état, il faut tracer la courbe de saturation.

✎ Souvent, à la fin des problèmes sur des machines thermiques, il y a des questions à propos de puissance. Il suffit d'appliquer la définition : une puissance est un échange d'énergie (W, Q_c ou Q_f, à voir selon l'énoncé) divisé par un temps. Parfois, ce calcul fait intervenir un débuit massique : il s'agit d'une masse par unité de temps.

T5. Machines thermiques

QCMs

réponses page 1140

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'entropie a pour unité :

(a). J
(b). $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
(c). $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$
(d). K

Q2. L'entropie créée est toujours positive :

(a). Vrai
(b). Faux

Q3. L'entropie échangée reçue par un système vaut :

(a). 0 pour une évolution adiabatique
(b). $W - Q$
(c). $\frac{Q}{T_{système}}$
(d). $\sum_{thermostats\ i} \frac{Q_i}{T_{thermostat\ i}}$

Q4. Une machine thermique monotherme ne peut pas être un moteur.

(a). Vrai
(b). Faux

Q5. Un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre deux thermostats de températures 300 K et 900 K peut avoir comme rendement :

(a). 74 %
(b). 33 %
(c). 67 %
(d). 42 %

Q6. Le diagramme de Raveau représente le fonctionnement d'une machine cyclique ditherme dans le plan :

(a). Q_c en ordonnées, W en abscisses
(b). Q_c en ordonnées, Q_f en abscisses
(c). Q_f en ordonnées, Q_c en abscisses
(d). Q_f en ordonnées, W en abscisses

✓ QCM : Rappels : travaux et chaleurs reçus par des gaz ✗

Un QCM de révision sur le chapitre T3, car les calculs d'échanges d'énergies avec des gaz sont essentiels pour de nombreux exercices.

Q7. Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression isobare à $P = 3\,\mathrm{bar}$ de $V_i = 32\,\mathrm{L}$ à $V_f = 16\,\mathrm{L}$. Le travail reçu par le gaz vaut :

(a). 4800 J
(b). 48 J
(c). −3200 J
(d). −48 J

Q8. et la chaleur reçue par le gaz vaut :

(a). −16 800 J
(b). −4800 J
(c). −6720 J
(d). −1230 J

Q9. Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression isotherme à $T = 18\,°C$ de $V_i = 32\,L$ à $V_f = 16\,L$. Le travail reçu par le gaz vaut :

(a). $-1200\,J$ (b). $1680\,J$
(c). $39\,J$ (d). $104\,J$

Q10. et la chaleur reçue par le gaz vaut :

(a). $-1680\,J$ (b). $0\,J$
(c). $-5580\,J$ (d). $-4200\,J$

Q11. Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression adiabatique réversible de l'état $T_i = 18\,°C$, $V_i = 32\,L$) vers l'état $V_f = 16\,L$. La température finale vaut :

(a). $23{,}8\,°C$ (b). $42{,}1\,°C$
(c). $111\,°C$ (d). $47{,}5\,°C$

Q12. et le travail reçu par le gaz vaut :

(a). $1680\,J$ (b). $1400\,J$
(c). $-1910\,J$ (d). $1930\,J$

Q13. et la chaleur reçue par le gaz vaut :

(a). $0\,J$ (b). $-230\,J$
(c). $4630\,J$ (d). $-1680\,J$

✓ QCM : Rendement d'une machine thermique ✗

Le rendement (ou efficacité) d'une machine thermique est toujours défini comme le rapport de ce qu'on récupère sur ce qu'on fournit. Il faut comprendre l'utilisation de la machine pour pouvoir le définir.
Dans le cas d'une machine ditherme recevant un travail W, une quantité de chaleur Q_f d'une source froide et une quantité de chaleur Q_c d'une source chaude, on a majoritairement trois cas :

- pour un moteur, on fournit la chaleur Q_c et on récupère le travail W ;
- pour une pompe à chaleur, on fournit le travail W et on récupère la chaleur Q_c ;
- pour une climatisation ou un réfrigérateur, on fournit le travail W et on récupère la chaleur Q_f.

On peut aussi exprimer le rendement comme un rapport de puissances plutôt qu'un rapport d'énergies.
Remarque : dans ce QCM, on prend les valeurs absolues des énergies ou des puissances.

Q14. Un moteur est chauffé par une chaudière de $30\,kW$. Son rendement vaut $23\,\%$. La puissance mécanique produite par ce moteur vaut :

(a). $6{,}9\,kW$ (b). $33{,}1\,kW$
(c). $30\,kW$ (d). $23\,kW$

Q15. Un moteur produit $6{,}4\,kW$ de puissance motrice (travail) avec un rendement de $31\,\%$. La puissance thermique apportée par la source chaude vaut :

(a). $14{,}6\,kW$ (b). $27{,}0\,kW$
(c). $2{,}0\,kW$ (d). $20{,}6\,kW$

Q16. Un réfrigérateur consomme en moyenne $120\,W$ d'électricité (travail électrique) ; son efficacité vaut 2,4. La puissance thermique extraite de l'intérieur du réfrigérateur vaut :

(a). 120 W
(b). 50 W
(c). 240 W
(d). 290 W

Q17. Un réfrigérateur d'efficacité 3,1 consomme 195 W. Il rejette dans la pièce (source chaude) une puissance thermique égale à :

(a). 605 W
(b). 800 W
(c). 410 W
(d). 195 W

✓ QCM : Énergies et puissances ✗

Il est important de savoir passer du travail/transfert thermique sur un cycle à des puissances. Il faut se souvenir que la puissance est le travail en 1 s, et la puissance thermique/calorifique est le transfert thermique en 1 s. Parfois, cela fait intervenir aussi des débit massiques, c'est-à-dire la masse qui circule en 1 s.
Dans tous les cas, il n'y a pas de formules à connaître, mais il faut faire fonctionner son cerveau (surtout pour les deux dernières questions !).

Q18. Un moteur effectue 3000 tours par minute ; à chaque tour, il produit un travail égal à 1100 J. La puissance qu'il fournit vaut :

(a). 3300 kW
(b). 11 kW
(c). 145 kW
(d). 55 kW

Q19. À chaque cycle, une pompe à chaleur fournit 30 kJ par kilogramme de fluide transporté. Le débit massique moyen vaut $180\,\mathrm{kg\cdot h^{-1}}$. La puissance calorifique fournie est :

(a). 420 W
(b). 1780 W
(c). 5400 W
(d). 1500 W

Q20. Le réfrigérant d'un réfrigérateur permet d'extraire 31 kJ de chaleur pour chaque kilogramme effectuant le cycle. On souhaite extraire 1600 W de chaleur de la source froide ; le débit massique doit être de :

(a). $160\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$
(b). $31\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$
(c). $52\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$
(d). $19\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$

Q21. Un moteur à explosion produit une puissance mécanique de 12 kW avec un rendement de 28 %. Or un litre de carburant fournit environ 30 GJ de chaleur. La consommation de ce moteur vaut :

(a). $6{,}6\,\mathrm{L\cdot h^{-1}}$
(b). $3{,}2\,\mathrm{L\cdot h^{-1}}$
(c). $18{,}3\,\mathrm{L\cdot h^{-1}}$
(d). $5{,}1\,\mathrm{L\cdot h^{-1}}$

Q22. Un moteur à explosion de 5600 W consomme 1,9 L d'essence par heure. L'énergie mécanique produite par kilogramme d'essence (masse volumique : $700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) vaut :

(a). $4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
(b). $9{,}1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
(c). $5{,}4\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
(d). $8{,}6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

T5. Machines thermiques

Exercices

réponses page 1141

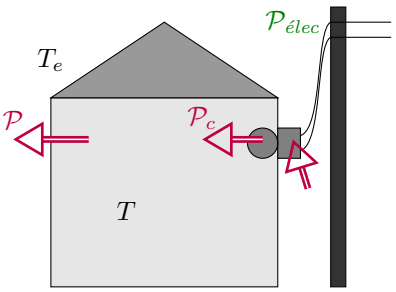
Exercice T5.1 : Refroidissement par un réfrigérateur [**]

Exercice simple… à condition de bien préciser à chaque fois le système sur lequel on travaille, et à faire attention aux sens des échanges.
Un réfrigérateur est une machine thermique ditherme refroidissant l'intérieur du réfrigérateur (de température T_f) et réchauffant l'air de la pièce (de température T_a). Toutes les transformations sont isobares.

1. On le fait fonctionner avec l'intérieur réglé à $T_f = 4\,°C$, l'air de la pièce étant à $T_c = 22\,°C$. Établissez et calculez le rendement maximal de ce réfrigérateur.
2. Dans la suite, le rendement réel sera pris égal à $\eta = 2,8$.
   On suppose que l'intérieur du réfrigérateur reçoit de la chaleur de la part de la pièce à travers les parois ; cette chaleur a pour puissance thermique $\mathcal{P}_{pertes} = \frac{T_c - T_f}{R_{th}}$ dirigée de l'air de la pièce vers l'intérieur du réfrigérateur, avec $R_{th} = 0{,}080\,K \cdot W^{-1}$.
   Par un bilan bien rédigé sur l'intérieur du réfrigérateur, calculez la puissance $\mathcal{P}_f$ reçue par la machine de la part de l'intérieur du réfrigérateur, en régime permanent.
3. En déduire la puissance électrique $\mathcal{P}_{élec}$ reçue par la machine.
4. On introduit dans le réfrigérateur des courses à la température $T_i = 25\,°C$; on constate que, pendant 1 h40 min la machine consomme une puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{élec} = 93\,W$ jusqu'à ce que les courses soient à la température T_f comme le reste. Calculez la quantité de chaleur extraite de l'intérieur du réfrigérateur pendant ce temps.
   En supposant que les pertes sont restées constantes pendant tout ce temps, calculez la variations d'enthalpie des courses qui ont été ajoutées, puis la capacité thermique C de ces courses.

Exercice T5.2 : Chauffage d'une pièce par une pompe à chaleur [**]

Une pièce de volume $200\,m^3$ est chauffée à l'aide d'une pompe à chaleur. Dans tout cet exercice, on suppose que la température est uniforme dans toute la pièce et la pression constante. La capacité thermique C_p de l'ensemble {pièce+air} vaut $5000\,kJ \cdot K^{-1}$.
On note T la température de la pièce. La pompe à chaleur a une efficacité (rapport entre la puissance $\mathcal{P}_c$ qu'elle fournit à la pièce sous forme de chaleur, et la puissance $\mathcal{P}_{élec}$ qu'elle reçoit) constante et égale à 1,8. De plus la pièce perd de la chaleur par les murs ; on modélisera cette perte par une puissance thermique $\mathcal{P} = a.C_p.(T - T_e)$ avec $a = 9 \times 10^{-6}\,s^{-1}$.
La température extérieure vaut $T_e = -5\,°C$.



1. On souhaite obtenir dans la pièce $T = 19\,°C$.
   Calculez la puissance perdue par les murs à cette température-là. Déduisez-en la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{élec}$ à fournir à la pompe à chaleur.
2. En réalité, la pompe à chaleur fonctionne en mode tout ou rien : soit elle ne fait rien, soit elle fonctionne à sa puissance électrique nominale, qui vaut $\mathcal{P}_n = 1\,kW$.
   Calculez la fraction de temps où la pompe doit fonctionner.
3. Un jour, quand on met en route la pompe à chaleur, la température de la pièce vaut $T_i = 10\,°C$. La pompe à chaleur se met alors à fonctionner à plein régime ; elle consomme $\mathcal{P}_n$.
   Par un bilan d'énergie entre deux instants séparés d'une durée courte dt, établissez l'équation différentielle vérifiée par la température T de la pièce.
4. Déduisez-en $T(t)$ à partir du moment où on allume la pompe à chaleur.
5. Calculez le temps mis pour atteindre 19 °C.

Exercice T5.3 : Moteur de Stirling [**]

Dans un moteur de Stirling, n moles de gaz décrivent de manière réversible un cycle $ABCD$:

— le gaz subit une compression isotherme au contact d'un thermostat, de l'état A : $P_A = 1\,\text{bar}$, $V_A = 2{,}50\,\text{L}$ et $T_A = 301\,\text{K}$ à l'état B de volume $V_B = 0{,}50\,\text{L}$;

— il subit alors un chauffage isochore jusqu'à la température $T_C = 903K$ au contact d'un objet appelé régénérateur (objet **interne à la machine**) ;

— il subit alors une détente isotherme au contact d'un autre thermostat, jusqu'à l'état D ;

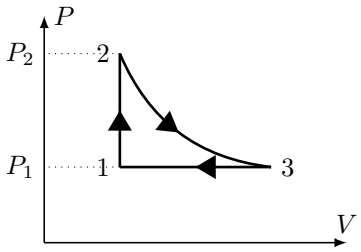
— il revient alors à A par un refroidissement isochore au contact du régénérateur.

On assimile le gaz à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$.

1. Représentez le cycle dans le diagramme de Watt.
2. Calculez le nombre de moles de gaz ; calculez les caractéristique de chaque état A, B, C, D.
3. Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours des évolutions AB, BC, CD et DA. Que vaut le transfert thermique total échangé avec le régénérateur sur un cycle ?
4. Définissez et calculez le rendement de ce moteur, et comparez avec le rendement idéal selon le théorème de Carnot.

Exercice T5.4 : Cycle de Lenoir [**]

Le premier moteur à combustion interne à 2 temps a été mis au point par Lenoir. Le cycle idéal de Lenoir est le suivant :



— admission du mélange d'air et de carburant en 1, à la pression P_1, puis explosion isochore jusqu'à la pression P_2,

— détente adiabatique réversible jusqu'à la pression P_1,

— évacuation isobare des gaz brûlés.

On suppose que le mélange gazeux est modélisé par un gaz parfait de rapport isentropique γ. On appelle *rapport de compression* le rapport $\alpha = P_2/P_1$.

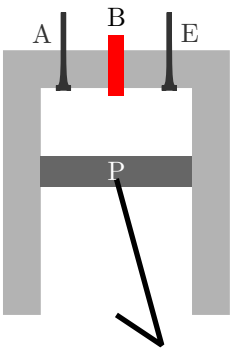
1. Complétez le tableau suivant en fonction de V_3, T_1, α et γ :

État	P	V	T
1	P_1		T_1
2	P_2		
3	P_1	V_3	

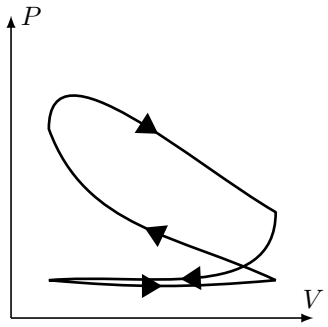
2. Exprimez le transfert thermique et le travail reçus par le gaz lors de chaque étape, en fonction de P_1, P_2, V_3 (cylindrée) et T_1.
3. Définissez le rendement de ce moteur, et montrez qu'il vaut $1 - \gamma\dfrac{\alpha^{1/\gamma} - 1}{\alpha - 1}$. AN pour $\gamma = 1{,}38$ et $\alpha = 5$.

Exercice T5.5 : Étude d'un moteur à explosion (Petites Mines) [***]

Afin de simplifier le problème, on suppose que le moteur est constitué d'un seul cylindre dont le schéma en coupe est représenté sur la figure ci-dessous :



Coupe du cylindre



Allure du diagramme de Watt réel du moteur à explosion

L'allure du diagramme de Watt du moteur réel est représentée figure de droite.
Pour l'étude, on va considérer que le moteur fonctionne suivant un cycle idéal appelé cycle d'Otto-Beau de Rochas. Le système {gaz dans le cylindre} suit le cycle suivant :

— $O \to A$: admission du gaz par la soupape d'admission. Initialement, le piston est tout en haut. Il descend tandis que la soupape A est ouverte. Un mélange gazeux constitué d'air et de $n' = 1 \times 10^{-4}$ mol d'essence entre alors dans le cylindre, à la pression constante P_A.
À la fin de l'admission, lorsque la soupape d'admission se ferme, le mélange air-carburant se trouve dans les conditions : $V_A = 0{,}5\,\text{L}$, $P_A = 1\,\text{bar}$, $T_A = 293\,\text{K} = 20\,^\circ\text{C}$.

— $A \to B$: compression adiabatique réversible ; le volume final vaut V_B. On note $V_B = V_A/a$ où a est un nombre sans dimension appelé *taux de compression*.

— $B \to C$: une étincelle provoque l'explosion isochore du mélange (le piston n'a pas le temps de bouger) ; toute l'essence réagit avec l'oxygène, et la température augmente fortement.

— $C \to D$: détente adiabatique réversible jusqu'à $V_D = V_A$.

— $D \to A$: refroidissement isochore : l'ouverture de la soupape d'échappement E met en contact l'intérieur du cylindre avec l'atmosphère, ce qui refroidit rapidement le gaz jusqu'à ce que sa pression atteigne P_A.

— $A \to O$: refoulement isobare du gaz vers l'extérieur à la pression P_A.

Les contraintes de fabrication et d'utilisation imposent de ne pas dépasser une pression de 50 bar dans le cylindre.
Dans tout le problème, les gaz, quels qu'ils soient, sont assimilés à des gaz parfaits de rapport isentropique $\gamma = 1{,}34$; on rapelle que $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. Les transformations seront considérées comme mécaniquement réversibles.

1. **Fonctionnement général**
   (a) Représenter l'ensemble des transformations du cycle d'Otto-Beau de Rochas sur un diagramme de Watt. Indiquez le sens de parcours ; est-ce bien un moteur ?
   (b) Pourquoi parle-t-on de moteur à combustion interne ?
   (c) Justifier pourquoi, pour l'étude théorique du système, on peut oublier les étapes $A \to O$ et $O \to A$, et considérer simplement qu'on a un système fermé de n moles de gaz qui décrit un cycle $ABCD$.
   Calculer le nombre n de moles de gaz présentes dans le système.
   (d) Suggérer une explication à la valeur $\gamma = 1{,}34$.
2. **Bilan énergétique**
   (a) Déterminer la pression P_B du mélange en B en fonction de P_A, γ et a. AN pour $a = 8$.
   (b) Déterminer la température T_B du mélange en B. AN pour $a = 8$.
   (c) Le mélange air-essence explose spontanément à $T_e = 330\,^\circ\text{C}$. Si l'explosion a lieu avant que la compression soit terminée, le gaz chaud cherche à repousser le piston, ce qui abîme le moteur. Calculer le taux de compression maximal permettant d'éviter cet autoallumage, en fonction de T_A, T_e et γ. AN .
   (d) L'étude détaillée de l'explosion ne sera pas faite ici. On admettra simplement que $T_C = 2100\,\text{K}$. Calculer P_C pour $a = 8$. Respecte-t-on la contrainte de pression mentionnée en introduction ?
   En réalité, la pression maximale est légèrement inférieure. Proposer une explication.
   (e) Calculer la température T_D en fonction de T_C, γ et a. AN pour $a = 8$.
   (f) Exprimer, en fonction de C_{vm}, n, T_B, T_C et a, le travail W reçu par le gaz au cours d'un cycle.

(g) Définir le rendement du cycle, et l'exprimer en fonction de a. AN pour $a = 8$.
Comment le rendre maximal ?

(h) Un moteur avec $a = 8$ effectue 2500 cycles par minute. Combien de tours par minute effectue-t-il ?
Calculer la puissance mécanique de ce moteur.

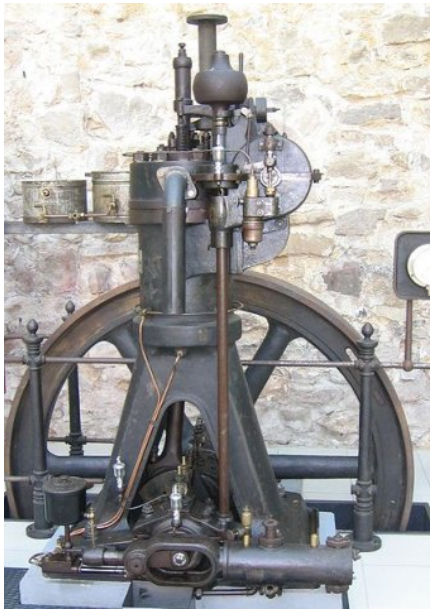
3. **Bilan entropique**
Quelles sont les sources d'irréversibilité dans ce cycle ?

Exercice T5.6 : Étude d'un moteur Diesel [**]

Le rendement d'un moteur à explosion augmente avec le taux de compression, lequel est limitée par le problème d'autoexplosion du mélange air-essence. Pour contourner cet obstacle, le moteur Diesel n'injecte le carburant (gazole) qu'une fois la phase de compression terminée.
On adopte le modèle idéal dans lequel une même quantité de gaz parfait (de coefficient isentropique constant $\gamma = 1,40$) décrit de manière quasi-statique un cycle $ABCD$:

1. AB : le gaz est comprimée de manière adiabatique et réversible ;
2. BC : le gazole est injecté et brûle tandis que le gaz se détend de façon isobare ;
3. CD : le gaz se détend de manière adiabatique et réversible ;
4. DA : l'ouverture de la soupape d'échappement permet une détente isochore du gaz.

Il y a bien évidemment ensuite un aller-retour du piston qui permet l'échappement du gaz usé puis l'introduction du gaz frais, mais cela ne joue pas de rôle dans l'étude thermodynamique et on l'oublie ici. La combustion du gazole est modélisée du point de vue thermodynamique par un transfert thermique Q_c reçu par le gaz.



Moteur Diesel construit en 1904 par MAN AG

1. Tracez l'allure du cycle dans le diagramme de Watt.
2. Complétez le tableau ci-dessous, et calculez aussi le nombre de moles de gaz :

	A	B	C	D
p en bar	1,00			
T en K	323	954		
V en L	2,40		0,24	

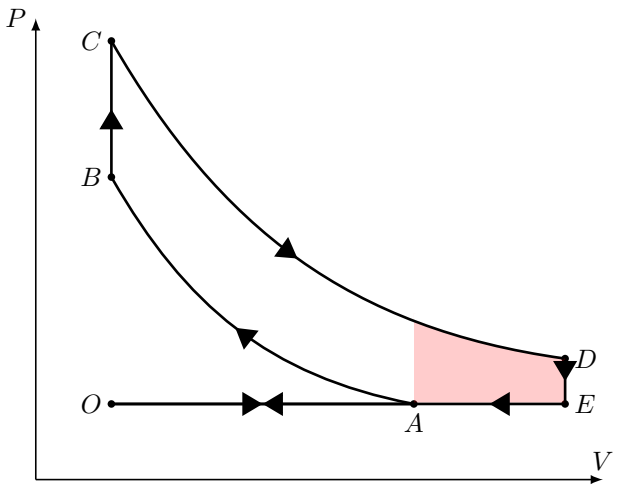
3. Calculez numériquement les transferts thermiques et les travaux reçus lors des évolutions AB, BC, CD et DA.
4. Calculez le rendement de ce moteur.

Exercice T5.7 : Cycle d'Atkinson [***]

Dans un moteur à explosion fonctionnant suivant le cycle d'Otto-Beau de Rochas, une partie du travail de détente des gaz chauds est perdue par le fait qu'on arrête la détente des gaz au point mort haut pour des raisons mécaniques. Pour améliorer le rendement, une idée est de fabriquer des systèmes permettant des compressions/détentes avec des rapports de compression différents lors des deux tours d'un cycle moteur.

Le schéma ci-contre représente un cycle idéal dans le diagramme de Watt (la partie colorée représente le travail suplémentaire récupéré par rapport à un cycle d'Otto-Beau de Rochas) :

- $O \to A$: admission de l'air à pression P_0, T_A, jusqu'au volume V_A
- $A \to B$: compression adiabatique réversible jusqu'au volume minimal V_B
- $B \to C$: explosion isochore
- $C \to D$: détente adiabatique réversible jusqu'à un volume $V_D > V_A$
- $D \to E$: refroidissement isochore à l'ouverture de la soupape d'échappement
- $E \to O$: échappement isobare



Pour simplifier, ou oubliera dans la suite les étapes $O \to A$ et $A \to O$ et on considèrera n moles de gaz parfait de rapport isentropique $\gamma = 1,35$ effectuant le cycle $ABCDEA$. On notera $a = \frac{V_A}{V_B}$ et $b = \frac{V_D}{V_A}$.
On notera T_i la température au point i.

1. Retrouvez l'expression de C_{vm} du gaz en fonction de R et γ.
2. Exprimez T_B en fonction de T_A, a et γ.
3. Exprimez T_C en fonction de T_D, a, b et γ.
4. Exprimez la quantité de chaleur Q_c reçue lors de l'explosion en fonction de n, C_{vm}, T_A et T_D.
5. Exprimez les travaux W^{AB} et W^{CD} en fonction de n, C_{vm}, T_A, T_D, a, b et γ.
6. Exprimez le travail W^{EA} en fonction de n, R, T_A et b.
7. Montrez alors que le rendement vaut $r = 1 - \frac{T_D + (\gamma b - \gamma - b) T_A}{T_D b^{\gamma-1} - T_A} a^{1-\gamma}$
8. Simplifiez l'expression de r si $V_D = V_A$; que retrouve-t-on ? AN pour $a = 8$.
9. Calculez T_D puis r pour les valeurs suivantes : $T_A = 20\,°\text{C}$, $T_C = 1800\,°\text{C}$, $a = 8$, $b = 1,5$.
10. Pour tirer le maximum de travail possible de la détente, il faut la poursuivre jusqu'à avoir comme pression en D la pression P_0.

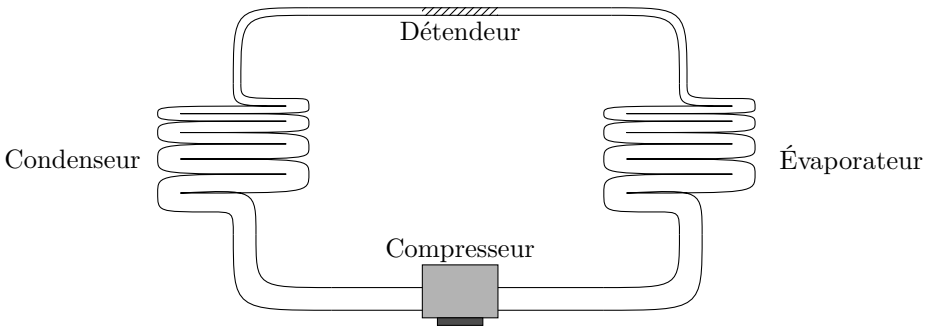
    Montrez que dans ce cas $b = \left(\frac{T_C}{T_A} a^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

    AN pour $T_A = 20\,°\text{C}$, $T_C = 1800\,°\text{C}$ et $a = 8$, calculez b puis r. Commentez.

Exercice T5.8 : Étude d'un réfrigérateur (CCINP) [**]

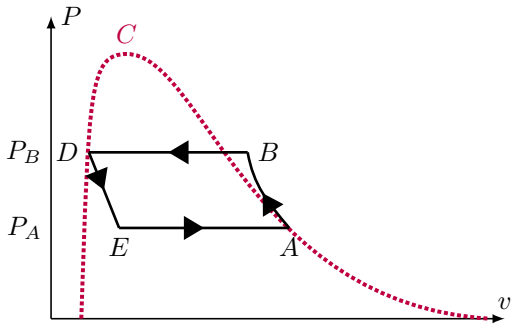
Le cycle représenté par la figure ci-dessous dans le diagramme de Clapeyron constitue un modèle de fonctionnement d'une machine de réfrigération dans laquelle une masse de fluide frigorigène subit les transformations suivantes :

- $A \to B$: compression adiabatique dans le compresseur.
- $B \to D$: refroidissement et liquéfaction isobares dans le condenseur.
- $D \to E$: détente adiabatique et isenthalpique (l'enthalpie massique reste constante) dans le détendeur.
- $E \to A$: vaporisation isobare dans l'évaporateur.



Les sources froides Σ_F (intérieur de l'enceinte à réfrigérer) et chaude Σ_C (air ambiant) sont assimilées à des thermostats de températures respectives T_F et T_C constantes. Les variations d'énergie potentielle et cinétique du fluide sont négligeables.
Données :

— $T_F = 278\,\text{K}$, $T_C = 293\,\text{K}$;
— enthalpie massique du liquide saturant : $h_{LS}(T_A) = 281{,}3\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$; $h_{LS}(T_D) = h_D = 286{,}4\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
— enthalpie massique de la vapeur saturante : $h_{VS}(T_A) = h_A = 390{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
— enthalpie massique de l'état B : $h_B = 448{,}6\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.



Remarque : l'étude plus précise des systèmes en écoulement, tels celui-ci, sera vue dans un chapitre ultérieur.

1. **Performances de l'installation**
   (a) Lorsqu'une masse de fluide subit une transformation isobare au cours de laquelle elle ne reçoit pas de travail autre que celui des forces de pression, quelle est la relation entre sa variation d'enthalpie massique Δh et la quantité de chaleur q qu'elle reçoit par unité de masse ?
   (b) Reliez l'enthalpie massique h_E au point E à $h_{LS}(T_A)$, $h_{VS}(T_A)$ et w_V (fraction massique de vapeur au point E). En déduire la valeur de w_V.
   (c) On désigne par q_F et q_C les quantités massiques d'énergie reçues par le fluide par transfert thermique au contact de la source froide et au contact de la source chaude respectivement, au cours du cycle défini ci-dessus.
   Exprimez q_F et q_C en fonction des données. Faites l'application numérique.
   (d) On désigne par w le travail massique reçu par le fluide au cours d'un cycle.
   Exprimez w en fonction des données, et faites l'application numérique.
   (e) Calculez l'efficacité μ de cette installation.
   Comparez à l'efficacité maximale entre les mêmes thermostats.
   (f) Sachant que la puissance $\mathcal{P}_F$ à extraire de la source froide pour maintenir sa température constante est de 500 W, calculez le débit massique qu'on doit imposer au fluide frigorigène.
2. **Étude entropique**
   On note par s_F et s_C les valeurs algébriques des entropies massiques échangées par le fluide avec la source froide et avec la source chaude respectivement.
   Calculez s_F et s_C, puis l'entropie massique créée au cours du cycle. Conclusion ?

Exercice T5.9 : Machine à vapeur [***]

Exercice pas forcément compliqué mais très long avec beaucoup de calculs numériques ; néanmoins c'est un bon entraînement.
On adopte le modèle suivant pour une machine à vapeur : un système fermé constitué de 1 kg d'eau sous les phases liquide et vapeur décrit le cycle $ABCD$ tel que BC et DA sont des adiabatiques réversibles, AB et CD sont isothermes et isobares. On note x le titre massique en vapeur. Les données concernant les différents états sont :

	A	B	C	D
p en bar	20	20	1	1
T en K	485	485	373	373
x	0	1	x_C	x_D

On donne les extraits suivants des tables thermodynamiques de l'eau :

		Liquide saturé			Vapeur saturée		
T	P	v_L	h_L	s_L	v_V	h_V	s_V
(K)	(bar)	($m^3 \cdot kg^{-1}$)	($kJ \cdot kg^{-1}$)	($kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$)	($m^3 \cdot kg^{-1}$)	($kJ \cdot kg^{-1}$)	($kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$)
485	20	$1{,}18 \times 10^{-3}$	909	2,45	0,0998	2801	6,35
373	1	$1{,}04 \times 10^{-3}$	418	1,30	1,70	2676	7,36

1. Dessinez l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.
2. Calculez les titres en vapeur x_C et x_D, puis les volumes massiques v, les enthalpies massiques h, les énergies internes massiques u et les entropies massiques s aux points A, B, C et D.
3. Calculez les travaux et les transferts thermiques reçus par l'eau au cours de chacune des évolutions AB, BC, CD et DA, puis le travail total W. Calculez alors le rendement, et comparer au rendement idéal selon Carnot.
4. Calculez pour chaque étape ΔS, $S_{éch}$ et S_c.

Exercice T5.10 : Relation de Clapeyron [***]

Le théorème de Carnot permet d'établir de nombreuses relations portant sur les dérivées de certaines grandeurs. On va établir ici l'évolution de P_{sat} en fonction de la température pour un corps pur.
On imagine une masse m de corps pur qui décrit le cycle suivant :

— Initialement, on a du liquide saturant à la température T ; on le chauffe très légèrement pour obtenir du liquide saturant à la température $T + \mathrm{d}T$;

— on vaporise ce liquide de façon isobare et isotherme ; on obtient de la vapeur saturante à $T + \mathrm{d}T$;

— on refroidit alors et on obtient de la vapeur saturante à la température T ;

— on liquéfie alors cette vapeur de façon isobare et isotherme, à la température T.

Lorsque T passe à $T + \mathrm{d}T$, la pression de vapeur saturante augmente de $\mathrm{d}P_{sat}$; on cherche à évaluer ce $\mathrm{d}P_{sat}$.

1. Dessinez le cycle dans le diagramme de Clapeyron.
2. Calculez le travail fourni par ce moteur, en évaluant l'aire du cycle en fonction de m, $v_V(T)$ (volume massique de la vapeur saturante à T), $v_L(T)$ (volume massique du liquide saturant) et $\mathrm{d}P_{sat}$.
3. La variation de température entre T et $T+\mathrm{d}T$ est tellement petite qu'on peut négliger la chaleur échangée lors des phases correspondantes. Quelle est alors la phase où de la chaleur est reçue de la source chaude ? Que vaut-elle en fonction de m et $\ell_v(T)$?
4. En appliquant le théorème de Carnot, montrez que $\dfrac{\mathrm{d}P_{sat}}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\ell_v}{T(v_V - v_L)}$ (relation de Clapeyron)
5. Cette relation est vraie aussi pour l'équilibre solide/liquide. En l'appliquant à l'eau, que retrouve-t-on qu'on a vu sur le diagramme des phases (P, T) de l'eau ?

T5. Machines thermiques

TDs numériques

réponses page 1147

TD numérique : Moteur à explosion

Un moteur à explosion à 4 temps, comme déjà vu en exercice, est un moteur cyclique effectuant 1 cycle tous les 2 tours de l'arbre moteur (vilbrequin). La rotation de l'arbre moteur entraîne une oscillation du piston dans le cylindre (on n'en considère qu'un seul ici), de sorte que le volume contenu dans le cylindre oscille entre deux valeurs V_{max} (point mort bas, à partir duquel est définie la cylindrée) et V_{min} (point mort haut). Le rapport $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$ est une caractéristique essentielle du moteur, appelé taux de compression.
Les étapes de ce cycle sont (en partant du point mort haut) :

- une phase d'admission du mélange air frais + carburant
- une phase de compression au cours duquel le gaz, enfermé dans le cylindre, est comprimé de V_{max} à V_{min}
- une explosion qui a lieu juste après le passage au point mort haut, alors que le volume recommence à croître
- une détente du gaz dans le cylindre, jusqu'à V_{max}
- une phase d'échappement qui éjecte les gaz brûlés vers le pot d'échappement

Dans un premier temps, on peut n'étudier que les phases compression+explosion+détente et oublier l'admission et l'échappement, bien que ces phases jouent un rôle très important.
On va modéliser un moteur de 2cv ; on donne les caractéristiques suivantes :

- cylindrée totale : $V_t = 425\,\text{cm}^3$ répartie sur 2 cylindres
- taux de compression : $a = 7{,}75$
- consommation à $60\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ à $4000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$: $5{,}5\,\text{L}/100\,\text{km}$
- pouvoir calorifique de l'essence : $35\,\text{MJ}\cdot\text{L}^{-1}$
- coefficient isentropique du mélange air-essence : $\gamma = 1{,}34$
- pression extérieure : $P_0 = 1\,\text{bar}$; température extérieure $T_0 = 293\,\text{K}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

1. Définissez dans un fichier Python les données du problème. Calculez le volume maximal V_{max} d'un cylindre (cylindrée divisée par le nombre de cylindres) ; déduisez-en le nombre de moles n d'air aspiré (sous les conditions P_0 et T_0) puis la capacité calorifique C_v du gaz.
2. Le piston est relié par le moteur au moyen d'un système bielle-manivelle. On admet que le volume $V(t)$ du piston soit la loi
$$V(t) = r.\cos\theta + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\theta} \text{ avec } \begin{cases} \ell &= \frac{a+1}{2a} V_{max} \\ r &= \frac{a-1}{2a} V_{max} \\ \theta &= \frac{2\pi}{Tmot} t \end{cases} \quad (1)$$
où T_{mot} représente la période de rotation du moteur.
Définir une fonction `t,Tmot)` qui renvoie le volume, ainsi qu'une fonction `dVdt(t,Tmot)` qui renvoie la dérivée temporelle du volume.
Tracez $V(t)$ sur une période, pour un moteur tournant à $2000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
3. À partir des données de l'énoncé, calculez la quantité de chaleur Q_c fournie par l'explosion de l'essence à chaque cycle.
On va choisir une durée arbitraire $T_{expl} = 3\,\text{ms}$ pour l'explosion et on va modéliser la puissance thermique fournie par l'essence sous la forme :
$$\mathcal{P}_c(t) = \begin{cases} \frac{Q_c}{T_{expl}} \text{ si } \frac{T_{mot}}{2} \leq t \leq \frac{T_{mot}}{2} + T_{expl} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (2)$$
car l'explosion a lieu juste après le milieu du cycle. Implémentez une fonction `Pc(t,Tmot)` qui renvoie cette puissance.
4. La modélisation de ce système consiste à faire varier le volume $V(t)$ et à calculer pas à pas la pression $P(t)$ et la température $T(t)$; pour cela, écrire le premier principe appliqué au gaz pendant une durée dt, et relier $\frac{\text{d}T}{\text{d}t}$ à P, $\frac{\text{d}V}{\text{d}t}$ et aux autres données.

5. Le moteur tourne à $2000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Résolvez cette équation sur un tour et 10000 points avec une méthode d'Euler [a] (on prendra P_0 et T_0 comme conditions initiales ; on modélisera le gaz par un gaz parfait pour le calcul de la pression) et tracez le diagramme de Watt $P(V)$. On remarquera qu'il n'est pas fermé, car on n'a pas modélisé les phases d'échappement et d'admission.
6. Tracez sur la même figure plusieurs diagrammes correspondant à des régimes moteurs allant de $1000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ à $4000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Observez l'évolution du cycle.
7. Le travail fourni sur un cycle est l'aire du cycle, qu'on peut calculer à l'aide de la fonction `scipy.integrate.trapezoid(y,x)`. En divisant ce travail par la période, on obtient la puissance du moteur. En divisant la puissance par la pulsation, on obtient le couple moteur.

   Calculez, pour des régimes moteurs entre $1000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ et $4000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, la puissance et le couple moteur ; tracez les courbes correspondantes.

   La notice indique une puissance maxi de 13,5 chevaux vapeur à 4000 tr/min (1 cheval vapeur correspond à 736 W). Commentez.
8. Quelles sources de perte de puissance a-t-on négligées ici ?

a. `odeint` n'y arrive pas bien à cause des discontinuités de $\mathcal{P}_c$. Attention à ne pas utiliser `n` comme variable de boucle, c'est déjà le nombre de moles !

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)
Q2.(a)
Q3.(a) ET (d)
Q4.(b)
Si la machine n'est pas cyclique, alors elle peut être un moteur.
Q5.(b) ET (c) ET (d)
$r \leq 1 - \frac{300}{900} = 0,67$ est le rendement **maximal**.
Q6.(b)

Réponses au QCM : Rappels : travaux et chaleurs reçus par des gaz

Q7.(a)
$W = -P.(V_f - V_i)$ avec la pression en bar et le volume en m^3.
Q8.(a)
$Q = \Delta H = nC_{pm}(T_f - T_i) = n\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\left(\frac{PV_f}{nR} - \frac{PV_i}{nR}\right)$.
Q9.(b)
$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
Q10.(a)
$Q = \Delta U - W = -W$.
Q11.(c)
Loi de Laplace : $T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma - 1}$.
Q12.(d)
$W = \Delta U - Q = \Delta U = n\frac{R}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$.
Q13.(a)

Réponses au QCM : Rendement d'une machine thermique

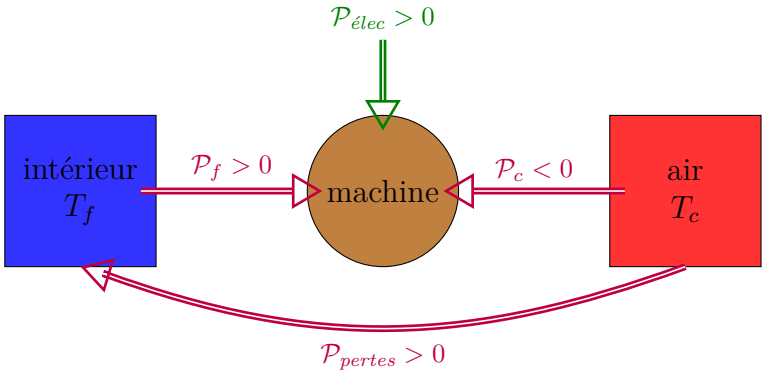
Q14.(a)
$W = r.Q_c$ donc $\mathcal{P} = r.\mathcal{P}_c$
Q15.(d)
$\mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}}{r}$
Q16.(d)
$\mathcal{P}_f = \eta.\mathcal{P}$
Q17.(b)
$Q_c = -W - Q_f = -W - \eta W$ donc $\mathcal{P}_c = -(1 + \eta)\mathcal{P}$

Réponses au QCM : Énergies et puissances

Q18.(d)
$3000\,\mathrm{tr/min} = 50\,\mathrm{tr} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ donc $\mathcal{P} = 1100 \times 50$.
Q19.(d)
$\frac{\text{chaleur}}{\text{temps}} = \frac{\text{chaleur}}{\text{masse}} \times \frac{\text{masse}}{\text{temps}} = \frac{30\,000\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{kg}} \times \frac{180\,\mathrm{kg}}{3600\,\mathrm{s}}$
Q20.(c)
$1600\,\mathrm{W} = \frac{1600\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{31\,000\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{kg}} \times \frac{\text{masse}}{\text{temps}}$
Q21.(d)
$\mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}}{r} = 42,9\,\mathrm{kW} = \frac{30 \times 10^9\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{L}} \times \frac{\text{volume}}{\text{temps}}$ d'où une consommation de $1,43\,\mathrm{mL} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Q22.(a)
$\frac{5600\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{\text{énergie}}{1\,\mathrm{kg}} \times \frac{0,7\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{L}} \times \frac{1,9\,\mathrm{L}}{1\,\mathrm{s}}$

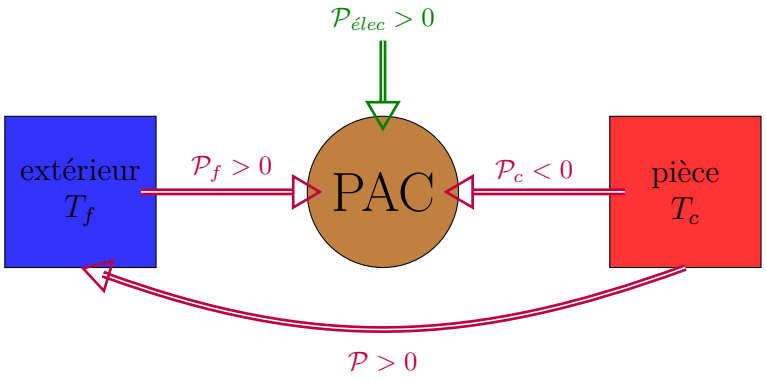
Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T5.1 : Refroidissement par un réfrigérateur [**]



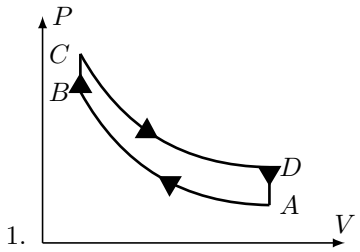
1. Démonstratrion vue en cours : $\eta_{max} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{277}{18} = 15,4$
2. Appliquons le premier principe isobare à l'intérieur du réfrigérateur pendant une durée $\mathrm{d}t$: il reçoit $+\mathcal{P}_{pertes}\mathrm{d}t$ à travers les parois, et $-\mathcal{P}_f\mathrm{d}t$ de la part de la machine (car ce qui est reçu par la machine est perdu par l'intérieur). En régime permanent, $\mathrm{d}H_{intérieur} = 0$ donc $\mathcal{P}_{pertes} - \mathcal{P}_f = 0$ donc $\mathcal{P}_f = \frac{T_c - T_f}{R_{th}} = 225\,\mathrm{W}$.
3. $\eta = \frac{Q_f}{W} = \frac{\mathcal{P}_f}{\mathcal{P}_{élec}}$ donc $\mathcal{P}_{élec} = \frac{69}{2,8} = 80\,\mathrm{W}$.
4. En une durée $\Delta t = 6000\,\mathrm{s}$, la machine reçoit de l'intérieur (y compris les courses) $Q_f = \eta\mathcal{P}_{élec}\Delta t = 1{,}6\,\mathrm{MJ}$. Donc un bilan d'enthalpie appliqué à l'intérieur du réfrigérateur pendant cette durée indique que $\Delta H_{intérieur} = -Q_f + \mathcal{P}_{pertes}\Delta t = -210\,\mathrm{kJ}$. Comme seules les courses ont changé de température entre le début et la fin, $\Delta H = C.(T_f - T_i)$ d'où on tire $C = 10\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T5.2 : Chauffage d'une pièce par une pompe à chaleur [**]



1. La puissance perdue par les murs vaut $\mathcal{P} = 1{,}08\,\mathrm{kW}$. Il faut que l'apport de la pompe compense les pertes, soit $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}$. Or $\mathcal{P}_c = 1,8\mathcal{P}_{élec}$, donc $\mathcal{P}_{élec} = 600\,\mathrm{W}$
2. Le pompe doit donc fonctionner $\frac{600}{1000} = 60\,\%$ du temps.
3. En $\mathrm{d}t$, la pièce reçoit une chaleur $\mathrm{d}Q_m = -\mathcal{P}dt = -aC_p.(T - T_e)\mathrm{d}t$ par les murs, et une chaleur $\mathrm{d}Q_p = 1,8.\mathcal{P}_n dt$ de la pompe. L'énergie de la pièce varie de $\mathrm{d}H = C_p.\mathrm{d}T$. D'après le premier principe isobare appliqué à la pièce, $C_p\mathrm{d}T = -aC_p.(T - T_e)\mathrm{d}t + 1,8\mathcal{P}_n\mathrm{d}t$, donc $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -a(T - T_e) + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{C_p}$ soit $\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_e + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a.C_p}$.
4. Donc $T(t) = T_e + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a.C_p} + Ae^{-at}$. Or $T = T_i = 10\,^\circ\mathrm{C}$ à $t = 0$, donc on obtient $T(t) = T_e + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a.C_p} + \left(T_i - T_e - \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a.C_p}\right)e^{-a.t} = 35 - 25e^{-9\times10^{-6}t}$ (en °C et en s).
   Remarque : en réalité, lorsque la température dans le pièce augmente trop, l'efficacité de la pompe à chaleur chute.
5. $t = \frac{\ln\frac{25}{16}}{9\times10^{-6}} = 50\,000\,\mathrm{s} = 13\,\mathrm{h}45\,\mathrm{min}$ environ.

Corrigé de l'exercice T5.3 : Moteur de Stirling [**]

1. 

2. A partir de l'état A, on trouve facilement que $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 0{,}10\,\text{mol}$ (attention aux unités).

État	A	B	C	D
Volume (L)	$2,50$	$0,50$	$0,50$	$2,50$
Température (K)	301	301	903	903
Pression (bar)	1	5	15	3

3. — AB : isotherme donc $\Delta U = 0$ et $Q^{AB} + W^{AB} = 0$. Or $W^{AB} = -\int P\mathrm{d}V = -\int nRT_A \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 403\,\text{J}$ et $Q^{AB} = -403\,\text{J}$.
   — BC : isochore donc $W^{BC} = 0\,\text{J}$ et $Q^{BC} = \Delta U = 5/2nR(T_C - T_B) = 1251\,\text{J}$.
   — CD : isotherme donc $\Delta U = 0$ et $Q^{CD} + W^{CD} = 0$. Or $W^{CD} = -\int P\mathrm{d}V = -\int nRT_C \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_C \ln\frac{V_D}{V_C} = -1209\,\text{J}$ donc $Q^{CD} = 1209\,\text{J}$.
   — DA : isochore donc $W^{DA} = 0\,\text{J}$ et $Q^{DA} = \Delta U = 5/2nR(T_A - T_D) = -1251\,\text{J}$.
   On a alors $W = -806\,\text{J} < 0$: c'est bien un moteur.
   On voit que $Q^{BC} + Q^{DA} = 0$: sur un cycle, le gaz reçoit de l'échangeur autant de chaleur qu'il en donne, ce qui est nécessaire pour que le moteur soit cyclique.

4. $r = \dfrac{-W}{Q^{CD}} = 67\,\%$. C'est égal au rendement idéal de Carnot : $\frac{903-301}{903} = 67\,\%$.

Corrigé de l'exercice T5.4 : Cycle de Lenoir [**]

1. $2 \to 3$ est une isentropique, donc on utilise $P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma$ avec $P_3 = P_1$. On a ensuite $V_1 = V_2$. Par la loi du GP, on trouve T_2 par $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, puis on trouve T_3 par les lois de Laplace.

État	P	V	T
1	P_1	$V_3\alpha^{-1/\gamma}$	T_1
2	P_2	$V_3\alpha^{-1/\gamma}$	$T_1\alpha$
3	P_1	V_3	$T_1\alpha^{1/\gamma}$

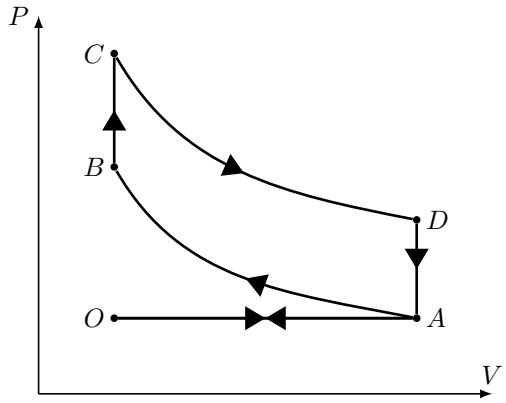
2. — $1 \to 2$ est une isochore, donc $W = 0$ et $Q = \Delta U = C_v\,(T_2 - T_1)$;
   — $2 \to 3$ est une adiabatique réversible, donc $Q = 0$ et $W = \Delta U = C_v\,(T_3 - T_2)$;
   — $3 \to 1$ est une isobare, donc $W = P_1\Delta V$ et $\Delta U = C_v\,(T_1 - T_3)$; on trouve alors Q.

Étape	W	Q	ΔU
$1 \to 2$	0	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha - 1)$
$2 \to 3$	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha^{1/\gamma} - \alpha)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha^{1/\gamma} - \alpha)$
$3 \to 1$	$-P_1V_3(\alpha^{-1/\gamma} - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(1 - \alpha^{1/\gamma}) + P_1V_3(\alpha^{-1/\gamma} - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1}T_1(1 - \alpha^{1/\gamma})$

3. On fournit de la chaleur à l'étape $1 \to 2$ (c'est l'explosion qui fournit cette chaleur) ; la chaleur perdue à l'étape $3 \to 1$ est perdue dans la source froide (l'air le plus souvent) et est gaspillée. Donc le rendement vaut $r = \dfrac{-W}{Q_{1\to2}} = -\dfrac{\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha^{1/\gamma} - \alpha) - P_1V_3(\alpha^{-1/\gamma} - 1)}{\frac{nR}{\gamma-1}T_1(\alpha - 1)}$. Or $P_1V_3 = nRT_1\alpha^{1/\gamma}$, ce qui donne
   $r = -\dfrac{\alpha^{1/\gamma} - \alpha - (\gamma - 1)(1 - \alpha^{1/\gamma})}{\alpha - 1} = 1 - \gamma\dfrac{\alpha^{1/\gamma} - 1}{\alpha - 1} = 24\,\%$

Corrigé de l'exercice T5.5 : Étude d'un moteur à explosion (Petites Mines) [***]

1. **Fonctionnement général**
   (a) Le cycle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, donc c'est bien un moteur.



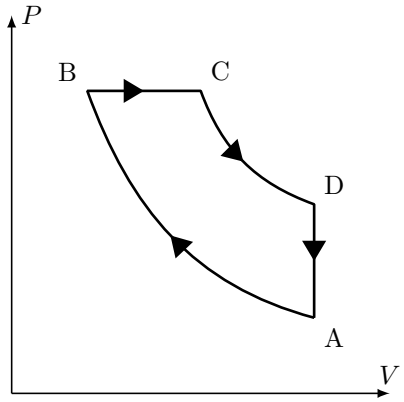
   (b) On parle de moteur à combustion interne parce que la source de chaleur se trouve à l'intérieur du cylindre (c'est la combustion de l'essence), contrairement à un moteur à vapeur où la chaudière est à l'extérieur.
   (c) On voit sur le diagramme de Watt que les transformations $O \to A$ et $A \to O$ sont inverses l'une de l'autre : elles suivent exactement le même chemin, en sens inverse. Le travail et la chaleur échangés sur la somme de ces deux transformations sont donc nuls.
   Pour avoir n, on utilise la loi des gaz parfaits dans l'état A :
   $n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 20{,}5 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
   (d) Plus les molécules du gaz contiennent beaucoup d'atomes, plus γ tend vers 1. Or dans un moteur à essence, il y a un petit peu d'essence mélangée à l'air ; et l'essence est composée de molécules organiques contenant un très grand nombre d'atomes. C'est pour cela que γ est légèrement plus proche de 1.

2. **Bilan énergétique**
   (a) On utilise la loi de Laplace (transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait) : $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ avec $V_A = a V_B$. Donc $P_B = a^\gamma P_A = 16{,}2\,\text{bar}$
   (b) On utilise la loi de Laplace $TV^{\gamma-1} = \text{cst}$, ou la loi du GP. $T_B = a^{\gamma-1} T_A = 594\,\text{K}$
   (c) On a vu que $T_B = a^{\gamma-1} T_A$. On veut que $T_B < T_e$ donc $a^{\gamma-1} < \frac{T_e}{T_A}$ d'où la condition $a < \left(\frac{T_e}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8{,}35$
   (d) $V_B = V_C$ (isochore) donc par la loi des gaz parfaits : $\frac{T_B}{P_B} = \frac{T_c}{P_C}$ (car n est constant). Donc $P_C = P_B \dfrac{T_C}{T_B} = 57{,}3\,\text{bar}$ ce qui dépasse les normes de sécurité.
   En réalité, l'explosion n'est pas isochore : le piston a le temps de descendre un peu pendant l'explosion, ce qui fait que la pression maximale reste inférieure à 50 bar.
   (e) Loi de Laplace : $T_D = a^{1-\gamma} T_C = 1036\,\text{K}$
   (f) Sur un cycle, le premier principe donne $W + Q = \Delta U = 0$ (car U est une fonction d'état). Or $Q^{AB} = 0$ et $Q^{CD} = 0$ (adiabatique). De plus, BC est isochore donc $W^{BC} = 0$, ce qui donne $Q^{BC} = \Delta U_{BC} = nC_{vm}(T_C - T_B)$. De même on a $Q^{DA} = \Delta U_{DA} = nC_{vm}(T_A - T_D)$. Or la loi de Laplace donne $T_A = a^{1-\gamma} T_B$ et $T_D = a^{1-\gamma} T_C$ donc $Q^{DA} = nC_{vm}(T_B - T_C)a^{1-\gamma}$. On en tire donc $W = -Q^{BC} - Q^{DA} = -nC_{vm}(T_C - T_B)\left(1 - a^{1-\gamma}\right)$
   (g) $r = -\frac{W}{Q^{BC}} = \frac{nC_{vm}(T_C - T_B)(1-a^{1-\gamma})}{nC_{vm}(T_C - T_B)}$ (puisque la chaleur est apportée par l'explosion BC). Donc $r = 1 - a^{1-\gamma} = 51\,\%$
   r est d'autant plus proche de 1 que $a^{1-\gamma}$ est petit. Or $1 - \gamma < 0$ donc le rendement s'approche de 1 quand le taux de compression a augmente.
   Remarque : il ne s'agit pas ici d'un moteur ditherme, donc le théorème de Carnot ne s'applique pas.
   (h) Un cycle correspond à 2 tours, donc le moteur tourne à 5000 tr/min.
   Or il fournit sur un cycle un travail $W = nC_{vm}(T_C - T_B)\left(1 - a^{1-\gamma}\right) = 383\,\text{J}$, et il effectue 41,7 cycles par secondes, ce qui donne un puissance de 15,9 kW.
   Remarque : cela correspond à 22 chevaux à peine ; mais il faut se souvenir que c'est pour un seul cyclindre. Si le moteur est un 4 cylindres par exemple, on arrive à 88 chevaux, ce qui est raisonnable.

3. **Bilan entropique**
   Les transformations BC et DA sont réversible, donc les sources d'irréversibilité sont à chercher dans les autres transformations :
   — entre B et C, il y a une explosion : c'est une réaction chimique qui est irréversible

— entre D et A, on met de l'air chaud au contact d'une source froide : il y a création d'entropie par contact thermique entre deux corps de températures très différentes.

Corrigé de l'exercice T5.6 : Étude d'un moteur Diesel [**]

1. 

2. Avec le point A on calcule $n = 0{,}0894\,\text{mol}$; ensuite :

	A	B	C	D
p en bar	1,00	44,3	44,3	1,76
T en K	323	954	1432	569
V en L	2,40	0,16	0,24	2,40

3. $C_v = 1{,}86\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
   - $Q^{A\to B} = 0\,\text{J}$; $W^{A\to B} = C_v(T_B - T_A) = 1{,}17\,\text{kJ}$
   - $W^{B\to C} - P\,(V_C - V_B) = -0{,}35\,\text{kJ}$; $Q^{B\to C} = C_v(T_C - T_B) - W^{B\to C} = 1{,}24\,\text{kJ}$
   - $Q^{C\to D} = 0\,\text{J}$; $W^{C\to D} = C_v(T_D - T_C) = -1{,}60\,\text{kJ}$
   - $Q^{D\to A} = C_v(T_A - T_D) = -0{,}46\,\text{kJ}$; $W^{D\to A} = 0\,\text{J}$
4. $W = -0{,}78\,\text{kJ}$ donc $\eta = 63\,\%$.

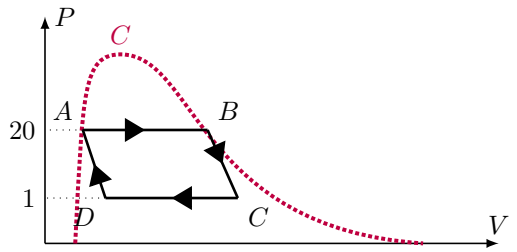
Corrigé de l'exercice T5.7 : Cycle d'Atkinson [***]

1. $C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$ (cf. cours).
2. Par la loi de Laplace entree A et B : $T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A a^{\gamma-1}$.
3. De même par la loi de Laplace entre C et D : $T_C = T_D(a.b)^{\gamma-1}$ car $\frac{V_D}{V_C} = a.b$.
4. L'explosion est isochore, donc $W^{BC} = 0$ et en appliquant le premier principe au gaz : $Q_c = \Delta U^{BC} = nC_{vm}(T_C - T_B) = nC_{vm}(T_D(a.b)^{\gamma-1} - T_A a^{\gamma-1})$.
5. $Q^{AB} = 0$ (adiabatique) donc $W^{AB} = \Delta U_{AB} = nC_{vm}(T_B - T_A) = nC_{vm}T_A\left(a^{\gamma-1} - 1\right)$.
   De même $W^{CD} = \Delta U^{CD} = nC_{vm}T_D\left(1 - (a.b)^{\gamma-1}\right)$
6. EA est isobare donc $W^{EA} = -P_0(V_A - V_E) = P_0V_A(b-1) = nRT_A(b-1)$.
7. Comme $W^{DE} = 0$ (isochore) on obtient le travail total
   $W = nC_{vm}T_A\left(a^{\gamma-1} - 1\right) + nC_{vm}T_D\left(1 - (a.b)^{\gamma-1}\right) + nRT_A(b-1)$
   $= nC_{vm}\left(T_A\left(a^{\gamma-1} - 1\right) + T_D\left(1 - (a.b)^{\gamma-1}\right) + (\gamma-1)T_A(b-1)\right)$
   puis $r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{T_A\left(1-a^{\gamma-1}\right)+T_D\left((a.b)^{\gamma-1}-1\right)-(\gamma-1)T_A(b-1)}{T_D(a.b)^{\gamma-1}-T_A a^{\gamma-1}} = 1 - \frac{T_D+(\gamma b-\gamma-b)T_A}{T_D b^{\gamma-1}-T_A}a^{1-\gamma}$
8. Si $b = 1$ on retrouve le cycle d'Otto-Beau de Rochas ; dans ce cas $r = 1 - \frac{T_D-T_A}{T_D-T_A}a^{1-\gamma} = 1 - a^{1-\gamma} = 52\,\%$
9. $T_D = T_C(a.b)^{1-\gamma} = 867\,\text{K} = 596\,^\circ\text{C}$ puis $r = 57{,}2\,\%$: c'est mieux.
10. Par les lois de Laplace entre C et D : $P_C = P_D(a.b)^\gamma$. Or BC est isochore donc $\frac{nRT_C}{P_C} = \frac{nRT_B}{P_B}$ donc $P_B = \frac{P_C T_B}{T_C}$.
    Par les lois de Laplace, $T_B = T_A a^{\gamma-1}$ et $P_B = P_0 a^\gamma$ ce qui donne $P_0 = \frac{P_C T_A}{T_C a} = P_D\frac{T_A(a.b)^\gamma}{T_C a}$. On veut que $P_D = P_0$ soit $1 = \frac{T_A}{T_C}b^\gamma a^{\gamma-1}$ d'où on tire $b = \left(\frac{T_C}{T_A}a^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2{,}5$ puis $T_D = 727\,\text{K}$ et enfin $r = 59{,}4\,\%$.

Corrigé de l'exercice T5.8 : Étude d'un réfrigérateur (CCINP) [**]

1. **Performances de l'installation**
   (a) $\Delta H = Q$ donc en divisant par la masse : $\Delta h = q$
   (b) EA est isobare sous la courbe de saturation, donc isotherme, donc $T_E = T_A$. En E, le système est donc constitué de liquide saturant à la température T_A et de vapeur saturante à la température T_A.
   Donc $H_E = m_V h_{VS}(T_A) + m_L h_{LS}(T_A)$ en notant m_V et m_L les masses de vapeur et de liquide. En divisant pas la masse totale : $h_E = w_V h_{VS}(T_A) + w_L h_{LS}(T_A)$. Or DE est isenthalpique donc $h_E = h_D$, et de plus $w_L = 1 - w_V$. Donc $h_D = w_V h_{VS}(T_A) + h_{LS}(T_A) - w_V h_{LS}(T_A)$. On en tire $w_V = \frac{h_D - h_{LS}(T_A)}{h_{VS}(T_A) - h_{LS}(T_A)} = 4{,}7\,\%$
   (c) Le réfrigérateur prend de la chaleur à la source froide et en donne à la source chaude. Donc $q_F = h_A - h_D = 103{,}8\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ et $q_C = h_D - h_B = -162{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
   (d) $w = -(q_C + q_F) = 58{,}4\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ par le premier principe sur un cycle.
   (e) $\mu = \frac{q_f}{w} = 1{,}78 < \frac{T_f}{T_c - T_f} = 18{,}5$ (il faut savoir refaire la démonstration)
   (f) $\mathcal{P}_F = \frac{Q_f}{temps} = \frac{Q_f}{masse} \times \frac{masse}{temps} = q_f . D_m$ soit $D_m = 4{,}81\,\mathrm{g \cdot s^{-1}} = 17{,}3\,\mathrm{kg \cdot h^{-1}}$
2. **Étude entropique**
   $s_F = \frac{q_F}{T_F} = 373\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ et $s_C = \frac{q_C}{T_C} = -554\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ or $\Delta s = 0$ sur un cycle donc $s_{cr} = 181\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T5.9 : Machine à vapeur [***]

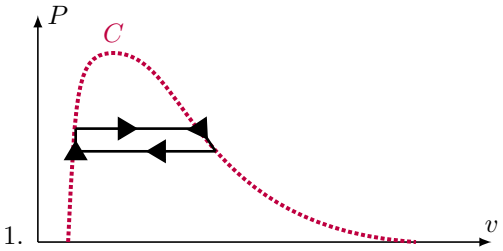
1.


2. Adiabatique réversible = isentropique. Donc $s_B = s_C$ soit $s_V(485K) = x_C s_V(373) + (1 - x_C) s_L(373K)$ d'où on tire $x_C = \frac{s_V(485K) - s_L(373K)}{s_V(373K) - s_L(373K)} = 0{,}83$ et de même $s_L(485K) = x_D s_V(373K) + (1 - x_D) s_L(373K)$ d'où on tire $x_D = \frac{s_L(485K) - s_L(373K)}{s_V(373K) - s_L(373K)} = 0{,}19$.
   Ensuite, on a par exemple $v_C = x_C v_V(373K) + (1 - x_C) v_L(373K) = 1{,}42\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$; puis $h_C = 2300\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$; et enfin $u_C = h_C - P_C v_C = 2157\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

État	x	$v(\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}})$	$h(\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}})$	$u(\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}})$	$s(\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}})$
A	0	$1{,}18 \times 10^{-3}$	909	907	2,45
B	1	0,0998	2801	2601	6,35
C	0,83	1,42	2300	2157	6,35
D	0,19	0,32	846	815	2,45

3. Pour $m = 1\,\mathrm{kg}$:
   — $W^{AB} = -P_A . m(v_B - v_A) = -198\,\mathrm{kJ}$; $Q_{AB} = m(u_B - u_A) - W_{AB} = 1892\,\mathrm{kJ}$
   — $W^{BC} = -444\,\mathrm{kJ}$; $Q_{BC} = 0\,\mathrm{J}$
   — $W^{CD} = 112\,\mathrm{kJ}$; $Q_{CD} = -1454\,\mathrm{kJ}$
   — $W^{DA} = 92\,\mathrm{kJ}$; $Q_{DA} = 0\,\mathrm{J}$
   Le rendement vaut alors $r = -\frac{W^{AB} + W^{BC} + W^{CD} + W^{DA}}{Q^{AB}} = 23\,\%$: c'est égal au rendement idéal de Carnot entre 485 K et 373 K.
4. $\Delta S^{AB} = 3{,}90\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$; $S^{AB}_{éch} = \frac{1892}{485} = 3{,}90\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$; $S^{AB}_{cr} = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.
   On trouve de même $\Delta S^{BC} = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$, $\Delta S^{CD} = -3{,}90\,\mathrm{kiloJ/K}$ et $\Delta S^{DA} = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$. À chaque étape, l'entropie créée est nulle, d'où le rendement idéal.

Corrigé de l'exercice T5.10 : Relation de Clapeyron [***]

1. 

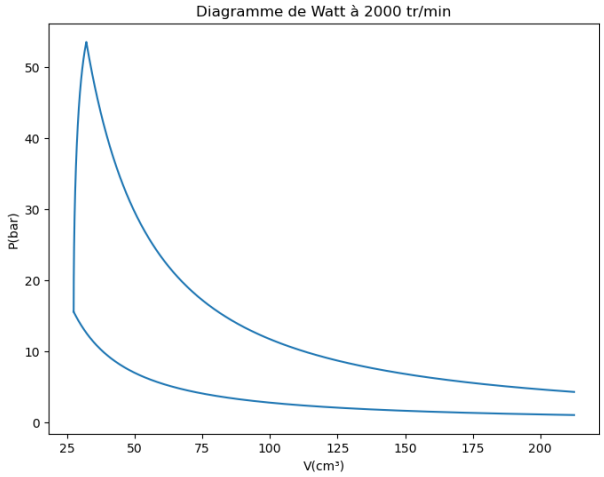
2. Le cycle peut être approché par un rectangle lorsque $\mathrm{d}P_{sat}$ tend vers 0. Donc $W = -$largeur $\times$ hauteur $= -m(v_V - v_L)\mathrm{d}P_{sat}$
3. La chaleur est reçue principalement lors de la vaporisation. Celle-ci est isobare, donc $Q_c = m\ell_v$.
4. $\frac{-W}{Q_c} = \frac{T+\mathrm{d}T-T}{T+\mathrm{d}T} \approx \frac{\mathrm{d}T}{T}$ donc $\frac{m(v_V-v_L)\mathrm{d}P_{sat}}{m\ell_v} = \frac{\mathrm{d}T}{T}$, d'où on tire $\dfrac{\mathrm{d}P_{sat}}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\ell_v}{T(v_V - v_L)}$
5. Pour l'eau, $v_L < v_S$ donc $\frac{l_F}{T(v_L-v_S)} < 0$, ce qui explique pourquoi la pente de la frontière solide/liquide dans le diagramme (P,T) est négative pour l'eau.

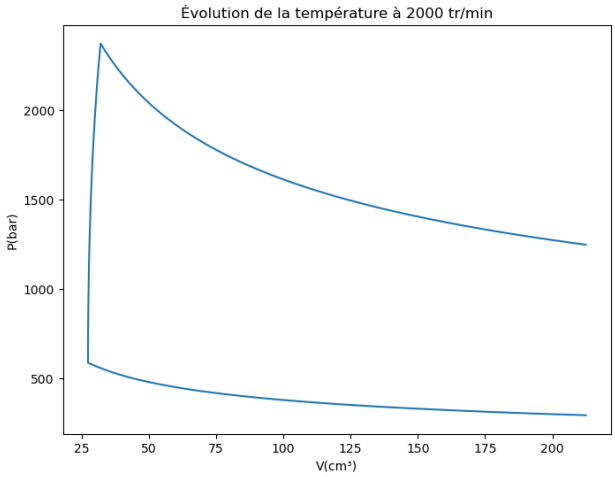
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Moteur à explosion

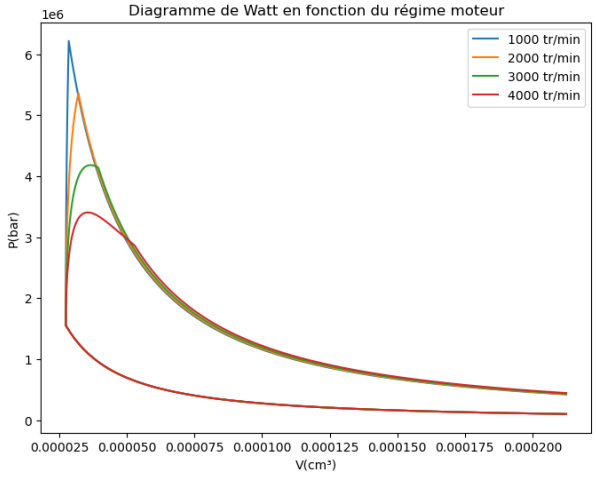
Le début demande plusieurs relations numériques, en particulier $V_{max} = \frac{V_t}{2}$ puis $n = \frac{P_0 V_{max}}{RT_0}$ et $C_v = \frac{R}{\gamma - 1} n$. On trouve aussi que la consommation vaut $5{,}5\,\mathrm{L}/100\,\mathrm{km} = 45{,}8\,\mathrm{mL} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ soit $11{,}46\,\mu\mathrm{L}$ par cycle, d'où $Q_c = 401\,\mathrm{J}$ à chaque cycle.

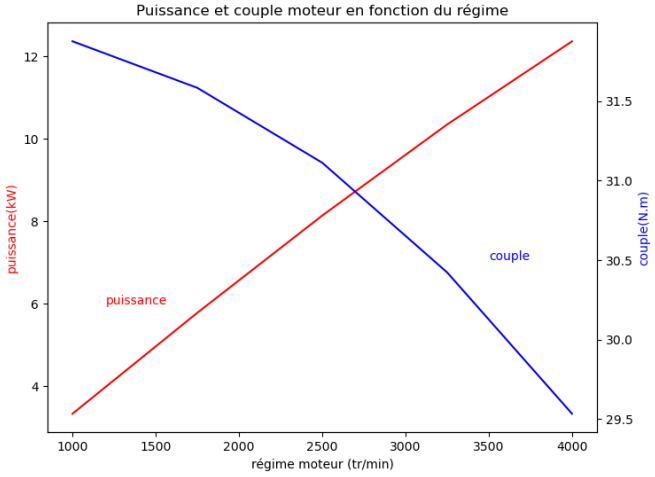
L'équation à résoudre est alors $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_v}\left(\mathcal{P}_c - P\frac{dV}{dt}\right)$:





Quand le régime est plus rapide, l'explosion prend une part plus grande de la détente et le travail diminue :





En réalité, les pertes thermiques doivent être prises en compte et, à bas régime, elles diminuent le travail. Il y a aussi les frottements qui diminuent le travail à haut régime. Au final, la courbe réelle du couple moteur présente un maximum aux régimes moyens.

Chapitre T6 Bilans d'entropie

Programme p.1159

Conseils p.1160

Cours p.1150
- T6.A. Le second principe de la thermodynamique (rappel)
- T6.B. Bilans d'entropie
- T6.C. Diagramme entropique (Hors programme)

QCMs p.1161

Exercices p.1163

TDs numériques p.1166

T6. Bilans d'entropie

Cours

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, si on veut obtenir une machine thermique avec un bon rendement, il faut :

— partir de la plus grande différence de température possible entre la source chaude et la source froide

— limiter au maximum les sources d'irréversibilité, c'est-à-dire de création d'entropie

Dans ce chapitre, nous allons donc faire des bilans d'entropie sur des transformations, c'est-à-dire calculer l'entropie créée lors d'une transformation. La valeur trouvée n'aura pas un intérêt en elle-même, mais la comparaison des entropies créées par deux transformations différentes allant du même état initial au même état final nous permettra de choisir la transformation la moins irréversible.

T6.A. Le second principe de la thermodynamique (rappel)

Propriété : Second principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une **fonction d'état extensive** S appelée **entropie**, en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Lorsqu'un système fermé évolue entre deux états d'équilibre en recevant des quantités de chaleur Q_i de la part de thermostats à la température T_i, sa variation d'entropie vaut

$$\Delta S = S_{éch} + S_{cr} \text{ avec } S_{éch} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \text{ (entropie échangée) et } S_{cr} \geq 0 \text{ (entropie créée)} \qquad \text{(T6.1)}$$

L'entropie créée est nulle si et seulement si la transformation est réversible.

On retient donc que l'entropie échangée se calcule une fois Q connu ; par contre l'entropie créée ne se calcule qu'à l'aide du second principe : $S_{cr} = \Delta S - S_{éch}$. Pour calculer l'entropie créée lors d'une transformation, il faut donc savoir calculer la variation d'entropie du système entre deux instants. Pour cela, la formule de base est celle de Boltzmann :

Formule de Boltzmann

Soit un système dont l'état macroscopique est décrit par la donnée des variables U, V, N (énergie interne, volume, nombre d'entités). Cet état macroscopique peut être réalisé par un très grand nombre d'états microscopiques ; notons $\Omega(U,V,N)$ ce nombre. Alors l'entropie du système est définie par

$$S(U,V,N) = k_B \ln \Omega(U,V,N) \qquad \text{(T6.2)}$$

avec $k_B = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

Il est bon de la connaître et de savoir l'interpréter : elle traduit l'entropie comme une perte d'information lorsqu'on a réduit la description du système à un ensemble de variables thermodynamiques U, V, N. On a gardé l'information moyenne, mais on a perdu la position et la vitesse de chaque entité constituant le système. Dans un système isolé, cette perte d'information augmente ; pour regagner de l'information, c'est-à-dire diminuer l'entropie, il faudra recevoir de l'énergie sous forme de travail et l'évacuer sous forme de chaleur.

Néanmoins, l'utilisation de cette formule n'est pas au programme.

T6.B. Bilans d'entropie

B.1. Identités thermodynamiques (Hors programme)

En thermodynamique, l'état macroscopique d'un système est décrit par un ensemble de variables ou de fonctions thermodynamiques : $P, T, V, N, U, S, \ldots$ Mais ces grandeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres ; elles sont

reliées par des équations d'état. Par exemple, pour la plupart des phases simples (solide, gaz), si on connaît V, P et T on peut déterminer N, U, S, …

Il en résulte une conséquence facile à comprendre : si une de ces grandeurs varie, les autres grandeurs vont aussi varier, et il y aura des liens entre ces variations. Les expression des variations des grandeurs énergétiques en fonction de l'entropie et des autres données sont les identités thermodynamiques.

Propriété : Identités thermodynamiques

Lorsque l'état macroscopique d'un système fermé subit une transformation infinitésimale, alors

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \tag{T6.3a}$$
$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P \tag{T6.3b}$$

Démonstration

Considérons un système subissant une transformation infinitésimale entre deux états. Sa variation d'énergie dU entre ces deux états ne dépend pas du chemin suivi. On peut imaginer effectuer la transformation à l'aide d'un changement infime des contraintes : mise en contact avec un thermostat de température T_{ext} très légèrement différente de la température T du système, et avec un réservoir de pression ayant une pression P_{ext} très légèrement différente de la pression P du système. Dans ce cas, la transformation peut être rendue réversible. On peut alors écrire :

- le premier principe : $\mathrm{d}U = \delta Q - P_{ext}\mathrm{d}V = \delta Q - P\mathrm{d}V$
- le second principe : $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T_{ext}} + \delta S_{cr} = \frac{\delta Q}{T}$ car $\delta S_{cr} = 0$

On en déduit que $\delta Q = T\mathrm{d}S$ puis $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$. Cette relation entre des fonctions d'état est vraie quelle que soit la transformation.
On sait alors que $\mathrm{d}H = \mathrm{d}(U+PV) = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P$.

Cette relation peut être inversée ; par exemple, de la première on tire $\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{P}{T}\mathrm{d}V$. On en déduit que, si on fait une transformation isochore, $\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U$ donc T est relié à la dérivée partielle de S par rapport à U à volume constant.

Définition : Température et pression thermodynamique

Si on connaît l'expression de l'entropie $S(U,V,N)$ d'un système fermé en fonction de son volume V et de son énergie interne U, alors la température et la pression de ce système sont définis par

$$\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V} \tag{T6.4a}$$
$$\frac{P}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,U} \tag{T6.4b}$$

Comment interpréter une telle définition ? Imaginons deux systèmes Σ_1 et Σ_2 en contact thermique, le tout étant isolé et indéformable. Imaginons un échange de chaleur spontané $\delta Q_{1\to 2}$ de 1 vers 2 ; alors l'énergie interne du système Σ_2 augmente de $\mathrm{d}U_2 = \delta Q_{1\to 2}$ donc son entropie augmente de $\mathrm{d}S_2 = \frac{1}{T_2}\delta Q_{1\to 2}$ avec T_2 sa température ; dans le même temps, on a $\mathrm{d}U_1 = -\delta Q_{1\to 2}$ donc $\mathrm{d}S_1 = -\frac{1}{T_1}\delta Q_{1\to 2}$. La variation d'entropie du système complet vaut donc $\mathrm{d}S = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\delta Q_{1\to 2}$. Comme il est isolé, l'évolution spontanée se fait obligatoirement avec une augmentation de l'entropie totale : $\mathrm{d}S > 0$. On voit donc que l'évolution spontanée vérifie $\delta Q_{1\to 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} > 0 \Leftrightarrow T_2 < T_1$: la chaleur passe spontanément de Σ_1 vers Σ_2 si et seulement si la température de Σ_2 est inférieure à celle de Σ_1, ce qui est cohérent avec l'interprétation de Clausius du second principe de la thermodynamique.

Ce que dit donc cette définition de la température, c'est qu'un système froid est un système pour lequel $\left.\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V}$ est grand, c'est-à-dire que si on lui transfère de l'énergie interne, son entropie augmente beaucoup. L'évolution spontanée du système cherchera donc plutôt à transférer de la chaleur à un système de température faible, afin d'augmenter l'entropie totale.

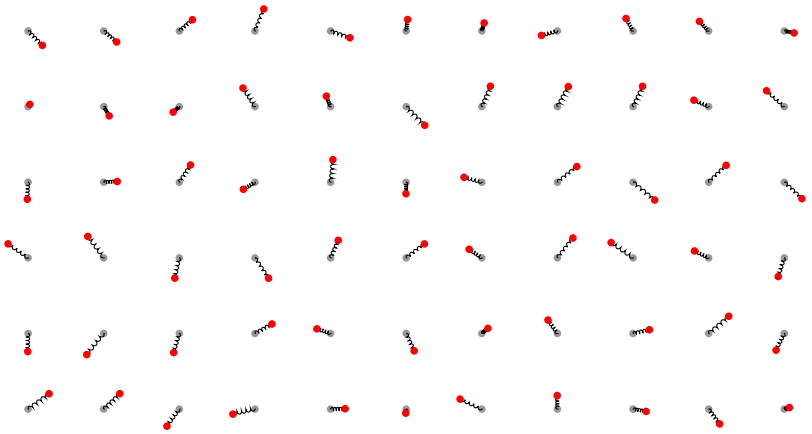
On peut de même montrer que la définition de P est compatible avec une augmentation du volume du système de plus forte pression lors de la mise en contact à travers une paroi déformable de deux systèmes.

B.2. Entropie de modèles simples (Hors programme)

D'après le paragraphe précédent, si on connaît l'expression de l'entropie $S(U,V,N)$ d'un système, on peut en déduire sa température et sa pression. Pour calculer S, il faut faire du dénombrement : d'après la formule de Boltzmann, $S(U,V,N) = k_B \ln \Omega(U,V,N)$ où $\Omega(U,V,N)$ représente le nombre de d'états microscopiques possibles du système correspondant à l'état macroscopique (U,V,N) associé.

Calcul : Entropie d'un solide cristallin incompressible monoatomique

On considère un solide cristallin, où tous les atomes de même masse m sont alignés régulièrement ; du moins, leurs positions d'équilibre le sont, car en réalité, ils peuvent bouger un peu autour de cette position d'équilibre. On va modéliser cela ainsi : les atomes peuvent bouger un peu mais sont reliés à leur position d'équilibre par une force de rappel de la forme $-k\overrightarrow{EA}$ où E est la position d'équilibre et A la position de l'atome ; c'est donc comme si l'atome était relié à E par un ressort de raideur k (on prendra le même k pour tous les atomes).



La question est alors : combien y a-t-il d'états microscopiques de ce système de N atomes respectant les contraintes ? On va oublier ici la contrainte de volume, car on considère le solide indéformable. La seule contrainte qui reste ici est donc celle sur l'énergie interne du système. D'où provient cette énergie interne U ? De la somme des énergies internes de chaque atome.

Soit i un atome ; soient (x_i, y_i, z_i) les trois coordonnées du vecteur $\overrightarrow{E_iA_i}$ (vecteur représentant le déplacement de l'atome A_i depuis sa position d'équilibre E_i) dans une base cartésienne quelconque. La vitesse de cet atome a alors pour coordonnées $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$. L'énergie de cet atome est la somme de deux contributions :

— son énergie cinétique $\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{A_i} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$

— son énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}k\overrightarrow{E_iA_i}^2 = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$

Au final on peut donc écrire que

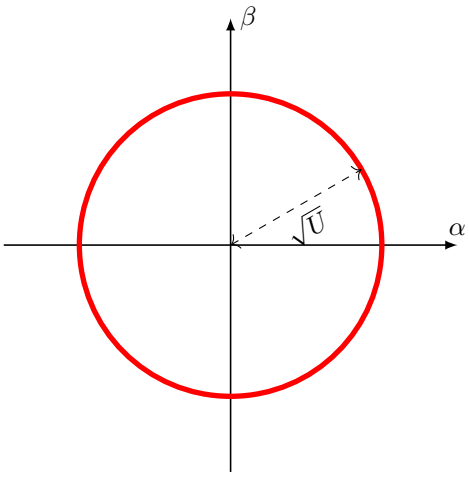
$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sqrt{m}\dot{x}_i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{m}\dot{y}_i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{m}\dot{z}_i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{k}x_i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{k}y_i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{k}z_i}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

En considérant les variables « réduites » $\alpha_{i1} = \frac{\sqrt{m}\dot{x}_i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{i2} = \frac{\sqrt{m}\dot{y}_i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{i3} = \frac{\sqrt{m}\dot{z}_i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{i4} = \frac{\sqrt{k}x_i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{i5} = \frac{\sqrt{k}y_i}{\sqrt{2}}$ et $\alpha_{i6} = \frac{\sqrt{k}z_i}{\sqrt{2}}$, la contrainte sur l'énergie s'écrit alors

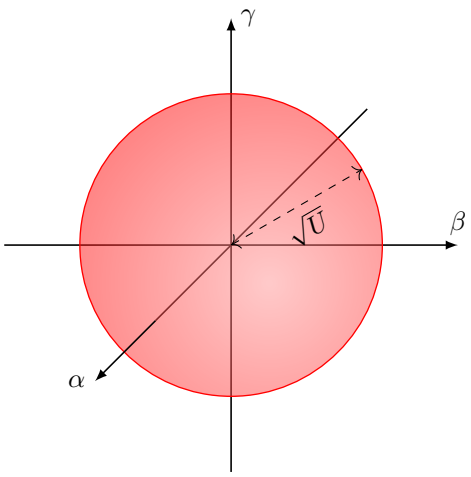
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6} \alpha_{ij}^2 = U$$

On a une sommation sur $6N$ variables ; considérons pour le moment le cas où il n'y aurait que 2 variables α et β ; l'équation $\alpha^2 + \beta^2 = U$ définit dans le plan (α, β) un cercle de rayon $\sqrt{U}$ (schéma à gauche ci-dessous). Le nombre d'états possibles sur ce cercle semble infini. Mais les lois de la mécanique quantique, que nous ne connaissons pas pour le moment, indiquent que tous les états ne sont pas possibles : les états sont quantifiés. On ne sais pas trop comment ça marche, mais on va faire comme si les états possibles avaient une certaine densité uniforme dans le plan. Alors le nombre d'états sur le cercle est… nul car le cercle n'a pas d'épaisseur. Mais là encore, la mécanique quantique nous dit que toute mesure a une incertitude, jamais nulle ; il y a donc

une incertitude sur U, donc c'est comme si le cercle avait une petite épaisseur. Le nombre d'état possibles sur ce cercle un peu épais est alors proportionnel au périmètre du cercle ; on ne sait pas trop le facteur de proportionnalité, mais qu'importe : le périmètre vaut 2π multiplié par le rayon, donc le nombre d'états possible est égal à une constante multipliée par $U^{1/2}$.



États vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = U$



États vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = U$

Sur le schéma de gauche, on a désormais 3 variables, α, β et γ ; la contrainte est $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^3 = U$ ce qui représente une sphère de rayon $\sqrt{U}$. Par le même raisonnement, le nombre d'états possibles vérifiant la contrainte sera proportionnel à la surface de la sphère, donc à $\left(U^{1/2}\right)^2 = U$.
Que se passe-t-il si on somme maintenant les carrés de $6N$ variables indépendantes ? Les états possibles se répartissent alors sur une hypersphère de dimension $6N$: c'est la généralisation de la notion de sphère à des dimensions supérieures à 3. C'est un peu compliqué à voir, mais il nous suffit d'ouvrir un ouvrage de mathématiques pour y trouver que la surface d'une hypersphère de rayon R en dimension d vaut $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} R^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ où Γ est la fonction Gamma dont nous n'avons rien à savoir ; tout ce qui nous intéresse, c'est que la surface est proportionnelle à R^{d-1} ; donc dans notre cas étudié, le nombre d'états possible est proportionnel à $\left(U^{1/2}\right)^{6N-1} = U^{\frac{6N-1}{2}}$.
On peut donc écrire $\Omega = AU^{\frac{6N-1}{2}} \approx AU^{3N}$ (avec $A \in \mathbb{R}^+$) puisque $6N \gg 1$ (on est dans un système thermodynamique) ce qui donne en prenant le logarithme $S = k_B \ln\left(AU^{3N}\right)$ soit

$$S(U,N) = 3Nk_B \ln U + \text{cst}$$

Voilà l'entropie d'un solide cristallin indéformable monoatomique. On le connaît à une constante près, mais peu importe, car ce qui nous intéresse maintenant, c'est de dériver : $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}\Big)_{N,V} = \frac{3Nk_B}{U}$ d'où on tire

$$U(N,T) = 3Nk_BT$$

Nous venons de démontrer qu'un tel solide a une énergie proportionnelle à la température, et que sa capacité thermique à volume constant vaut

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}\Big)_{N,V} = 3Nk_B = 3nR$$

C'est la loi de Dulong et Petit ; elle n'est cependant plus valable à basse température, car des effets quantiques font que les états possibles ne sont plus denses sur l'hypersphère, ce qui amène des corrections à l'évaluation précédente.
Enfin, nous pouvons remplacer U par $3Nk_BT$ dans l'expression de l'entropie pour obtenir

$$S(T,N) = 3Nk_B \ln(3Nk_BT) = C_v \ln T + \text{cst}'$$

Nous reverrons cette formule plus loin.

Calcul : Entropie d'un gaz parfait monoatomique

Considérons maintenant une assemblée de N atomes sous l'état de gaz parfait dans un volume V avec une énergie interne U. Cette fois, les contraintes sur la position et la vitesse des atomes sont découplées :

— quant à la position, la contrainte pour les atomes est qu'ils occupent le volume V. Pour chaque atome,

cela donne un nombre d'états accessibles proportionnel à V ; pour les N atomes, cela donc un nombre de possibilités proportionnel à V^N. [a]

— quant à la vitesse, on retrouve une contrainte de la forme $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\sqrt{m}\dot{x}_i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{m}\dot{y}_i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{m}\dot{z}_i}{\sqrt{2}}\right)^2=U$ (car la position ne contribue pas à l'énergie : les particules sont supposées indépendantes). Comme on l'a vu précédemment, cela donne un nombre d'état possible proportionnel à $U^{\frac{3N-1}{2}}\approx U^{\frac{3N}{2}}$.

Le nombre total d'états possibles pour le système est donc $\Omega = AV^N U^{\frac{3N}{2}}$ avec $A\in\mathbb{R}^+$. En prenant le logarithme, on trouve

$$S(U,V,N)=\frac{3}{2}Nk_B\ln U+Nk_B\ln V+\text{cst}$$

On calcule alors les dérivées partielles : $\begin{cases}\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial U}\big)_{N,V}=\frac{3Nk_B}{2U} & \Rightarrow \quad U=\frac{3}{2}Nk_BT\\ \frac{P}{T}=\frac{\partial S}{\partial V}\big)_{N,U}=\frac{Nk_B}{V} & \Rightarrow \quad PV=Nk_BT\end{cases}$

On a donc retrouvé d'une part la capacité thermique $C_v=\frac{3}{2}nR$ du gaz parfait monoatomique, et d'autre part la loi du gaz parfait.
En remplaçant U par $\frac{3}{2}Nk_BT$ on trouve aussi

$$S(T,V,N)=C_v\ln T+nR\ln V+\text{cst}'$$

qu'on reverra un peu plus loin.

a. En fait, on devrait tenir compte du fait que 2 particules ne peuvent pas être au même endroit, mais pour un gaz parfait, la densité est faible, donc c'est peu probable.

Remarque : ces lois d'entropie divergent toutes à basse température, lorsque $T\to 0$. À ces températures, les effets quantiques font que les calculs précédents ne sont plus exacts. Peu importe pour nous, car nous allons nous contenter de calculer des variations d'entropie entre deux états de température pas trop faible. Mais on peut en profiter pour citer une troisième loi qui ne nous servira pas : c'est qu'à basse température, la plupart des corps purs se figent dans un état où plus rien ne bouge et où le nombre de configurations possibles devient égal à 1 :

Troisième principe de la thermodynamique

L'entropie d'un corps pur cristallisé à 0 K est nulle.

Remarque : Il existe des corps purs bizarres, comme l'hélium, qui restent liquides même à 0 K sous pression atmosphérique.

B.3. Bilans d'entropie sans changement d'état

Le but de ce chapitre est de faire des bilans d'entropie, afin de calculer l'entropie créée lors d'une transformation. Ainsi, en considérant deux transformations ayant le même état initial et le même état final, on peut comparer les entropies créées et en déduire laquelle est la moins irréversible. Pour cela, une seule solution : le second principe qui indique que $S_{cr}=\Delta S-S_{éch}$; l'entropie échangée se calcule grâce à la quantité de chaleur échangée ; la variation d'entropie se calcule grâce à des formules.

Les calculs vus au paragraphe B.2. sont absolument hors programme ; normalement, dans les exercices, on redonnera toujours la variation de l'entropie de la phase considérée en fonction des paramètres thermodynamiques du système. Il est bon cependant de retenir la variation d'entropie d'un solide ou d'un liquide incompressibles.

Variation d'entropie d'un solide ou liquide

Lorsqu'un solide ou un liquide incompressible et indilatable de capacité thermique C passe d'un état (T_i,P_i,V_i) à un état (T_f,P_f,V_f), son entropie varie de

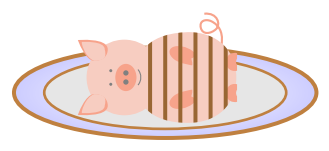
$$\Delta S^{i\to f}=C\ln\frac{T_f}{T_i} \qquad \text{(T6.5)}$$

Démonstration

Si on admet les identités thermodynamiques, en appliquant les propriétés d'un solide incompressible et indilatable, à savoir $\mathrm{d}V=0$ et $\mathrm{d}U=C.\mathrm{d}T$, alors (T6.3a) devient $C\mathrm{d}T=T\mathrm{d}S$ donc $\mathrm{d}S=C\frac{\mathrm{d}T}{T}$; en intégrant, on trouve $\Delta S^{i\to f}=\int_i^f C\frac{\mathrm{d}T}{T}=C\ln\frac{T_f}{T_i}$

Exemple : Cuisson au four

1. On prend un rôti de capacité calorifique $C = 3200\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$, à 20 °C, et on le place dans un four à 200 °C sous 1 bar ; il se réchauffe jusqu'à atteindre 90 °C. Calculez l'entropie créée, sachant que la variation d'entropie du rôti s'écrit $\Delta S = C \ln \frac{T_{final}}{T_{initial}}$.



2. On chauffe maintenant en deux étapes :
   - dans un four à 100 °C, le rôti se réchauffe jusqu'à 50 °C ;
   - puis dans un four à 200 °C, il se réchauffe jusqu'à 90 °C.

   Calculez de nouveau l'entropie créée.

1. $\Delta S = C \ln \frac{363}{293} = 685{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$. Pour avoir l'entropie échangée, il faut Q qu'on trouve par le premier principe isobare : $Q = \Delta H = C.(90-20) = Q = 3200 \times 70 = 224\,000\,\text{J}$ soit $S_{éch} = \frac{224000}{473} = 473{,}6\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ (dans l'entropie échangée, c'est la température du **thermostat** qui compte).
   Alors par le second principe : $S_{cr} = \Delta S - S_{éch} = 212\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$: la transformation est irréversible.
2. On a toujours $\Delta S = 685{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$. Mais pour calculer $S_{éch}$ il faut calculer les quantités de chaleur échangées à chaque étape. On trouve $Q_1 = 96\,000\,\text{J}$ et $Q_2 = 128\,000\,\text{J}$ donc $S_{éch} = \frac{96000}{373} + \frac{128000}{473} = 528\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.
   On en déduit que $S_{cr} = 157{,}6\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$: l'entropie créée est moindre, donc la transformation est moins irréversible.

Remarque : Dans cet exemple, la transformation réversible correspond à la limite où on monte très graduellement la température du thermostat, de manière à ce que le rôti chauffe quasiment en même temps que le thermostat.

Variation d'entropie d'un GP(Hors programme)

Lorsqu'un GP (n moles) passe d'un état (T_i, P_i, V_i) à un état (T_f, P_f, V_f), son entropie varie de

$$\Delta S^{i\to f} = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_{pm} \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i} \qquad \text{(T6.6)}$$

Démonstration

Si on admet les identités thermodynamiques, en appliquant les propriétés d'un gaz parfait, à savoir $PV = nRT$ et $\mathrm{d}U = nC_{vm}.\mathrm{d}T$, alors (T6.3a) devient $nC_{vm}\mathrm{d}T = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V = T\mathrm{d}S - \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V$ donc $\mathrm{d}S = nC_{vm}\frac{\mathrm{d}T}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V}$; en intégrant, on trouve $\Delta S^{i\to f} = \int_i^f nC_{vm}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \int_i^f nR\frac{\mathrm{d}V}{V} = nC_{vm}\ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i}$
De même, à partir de (T6.3b) on trouve $\Delta S^{i\to f} = \int_i^f nC_{pm}\frac{\mathrm{d}T}{T} - \int_i^f nR\frac{\mathrm{d}P}{P} = nC_{vm}\ln\frac{T_f}{T_i} - nR\ln\frac{P_f}{P_i}$

À partir de ces formules, on peut redémontrer les lois de Laplace ; cette démonstration, ainsi que la formule précédente, sont hors programme.

Calcul : Lois de Laplace

Si un gaz parfait subit une transformation adiabatique et réversible, alors $S_{éch} = 0$ (adiabatique) et $S_{cr} = 0$ (réversible) donc $\Delta S = 0$.
D'après la formule de variation d'entropie d'un gaz parfait, $nC_{vm}\ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i} = 0$; or $C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$ d'où on tire $\frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i} = 0$ soit $\ln\frac{T_f}{T_i} + (\gamma-1)\ln\frac{V_f}{V_i} = 0$ ou encore $\ln\frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}} = 0$ ce qui montre que

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

On redémontre ensuite les deux autres lois : $P_f V_f^{\gamma} = P_i V_i^{\gamma}$ et $P_f^{1-\gamma} T_f^{\gamma} = P_i^{1-\gamma} T_i^{\gamma}$.

Remarque : Une transformation adiabatique et réversible est aussi appelée *transformation isentropique* (= à entropie

constante). En fait, une transformation isentropique n'est pas forcément adiabatique réversible, mais en pratique, quand on dit qu'une transformation est isentropique, on suppose qu'elle esn AR.

B.4. Bilans d'entropie avec changement d'état

L'expression de la variation d'entropie d'un corps pur changeant de phase est, par contre, à connaître.

Variation d'entropie associée à un changement d'état

Lorsqu'une masse m de corps pur passe de de l'état liquide à la pression P et à la température $T_{vap}(P)$, à l'état vapeur à la même température et à la même pression, alors son entropie varie de

$$\Delta S = m\frac{\ell_v}{T vap} \qquad \text{(T6.7)}$$

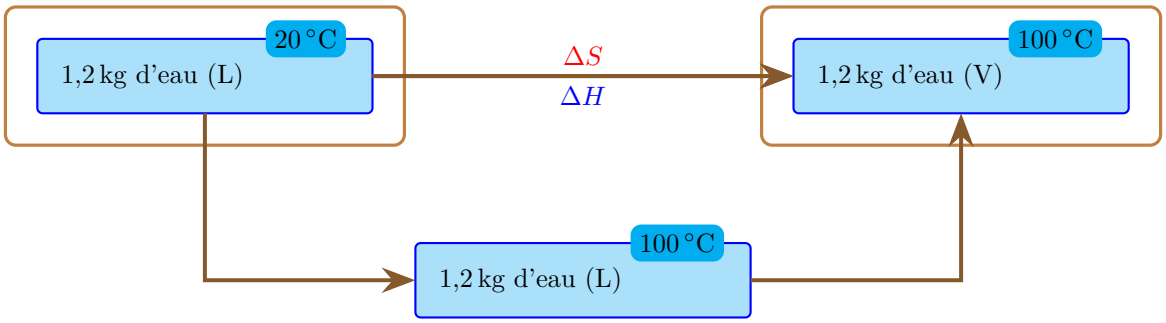
Démonstration

Une telle transformation peut se faire de diverses manières ; le plus simple est de la faire de façon isobare et isotherme. Dans ce cas, elle est réversible donc $S_{cr} = 0$, et $\Delta S = S_{éch} = \frac{Q}{T_{ext}} \approx \frac{Q}{T_{vap}}$ puisque, pour qu'elle soit réversible, il faut que la température du thermostat soit très proche de la température de vaporisation. Or, d'après le premier principe isobare, $Q = \Delta H = m.\ell_v$. On a donc bien $\Delta S = \frac{m.\ell_v}{T_{vap}}$.

Remarque : On généralise facilement cette formule au cas de la fusion ou de la sublimation.

Exemple : Vaporisation d'une casserole d'eau

On place une casserole contenant 1,2 L d'eau à 20 °C sur une plaque chauffante à 140 °C, le tout à pression constante sous 1 bar. L'eau s'évapore, et on obtient de la vapeur d'eau à 100 °C.
Calculez l'entropie créée lors de cette transformation.
Données : capacité thermique massique de l'eau : $c = 4{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; chaleur latente de vaporisation de l'eau : $\ell_v(100\,°\text{C}) = 2260\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.



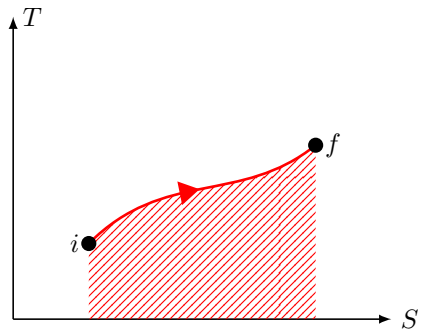
On commence par calculer $\Delta S = mc\ln\frac{373}{293} + m\frac{\ell_v}{373} = 8{,}487\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$: attention, dans le calcul de variation d'entropie avec changement d'état, c'est la température de changement d'état qui compte, et non la température du thermostat, qui comptera par contre pour l'entropie échangée.
Pour calculer $S_{éch}$ avec le thermostat à la température 413 K, il faut connaître Q. Par le premier principe isobare : $Q = \Delta H = mc.(100-20) + m.\ell_v = 3115\,\text{kJ}$. Donc $S_{éch} = \frac{Q}{T_{therm}} = \frac{3115}{413} = 7{,}543\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$.
Alors $S_{cr} = \Delta S - S_{éch} = 945\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

T6.C. Diagramme entropique (Hors programme)

Comme on trace l'évolution d'un système dans le diagramme de Watt (P, V), on peut aussi la tracer dans le **diagramme entropique** (T, S).

Si on représente dans ce diagramme l'évolution d'un système entre deux états i et f (figure T6.1), alors l'aire sous la courbe vaut $\int_i^f T\mathrm{d}S$ si $S_f > S_i$. Dans le cas d'une transformation réversible, $\mathrm{d}S = \delta S_{éch} = \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{\delta Q}{T}$ donc l'aire

FIGURE T6.1 : Chaleur échangée lors d'une transformation dans le diagramme entropique.



vaut $\int_i^f \delta Q = Q^{i\to f}$: l'aire sous la courbe est égale à la chaleur reçue par le système. On peut appliquer cela ensuite à un cycle :

Propriété : Chaleur reçue au cours d'un cycle dans le diagramme entropique

Dans le diagramme entropique, la chaleur (ou transfert thermique) reçue par un système au cours d'un cycle réversible est égal :

- à l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens horaire ; dans ce cas, c'est un **cycle moteur**
- à l'opposé de l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens trigonométrique ; dans ce cas, c'est un **cycle récepteur**

Démonstration

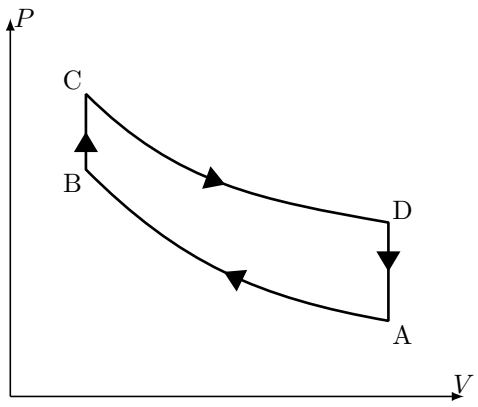
Le fait que Q soit égal à $\pm$ l'aire du cycle se démontre comme dans le cas du travail dans le diagramme de Watt.
De plus, sur un cycle, $W + Q = \Delta U = 0$ car U est une fonction d'état ; donc le cycle est moteur si et seulement si $Q > 0$.

À l'aide de la formule (T6.6) on peut alors tracer les courbes modèles du gaz parfait dans le diagramme entropique :

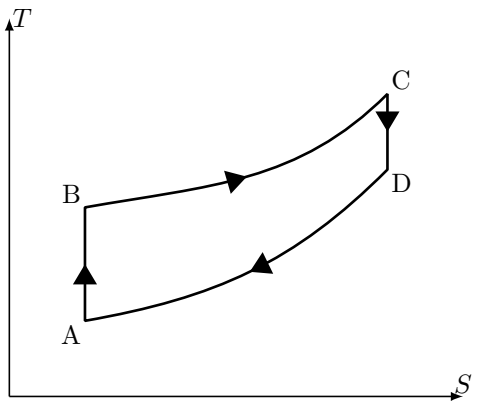
- une isotherme est une horizontale
- une isentropique (adiabatique réversible) est une verticale
- une isochore est une exponentielle de la forme $T = Ae^{\frac{S}{nC_{vm}}}$
- une isobare est une exponentielle de la forme $T = Ae^{\frac{S}{nC_{pm}}}$ donc moins pentue que l'isochore

La figure T6.2 montre par exemple l'allure du cycle d'Otto-Beau de Rochas dans le diagramme de Watt et dans le diagramme entropique ; dans ce dernier, les adiabatiques réversibles (isentropiques) sont des segments verticaux, tandis que les isochores sont des exponentielles.

FIGURE T6.2 : Cycle idéal d'Otto-Beau de Rochas.



(a) Diagramme de Watt



(b) Diagramme entropique

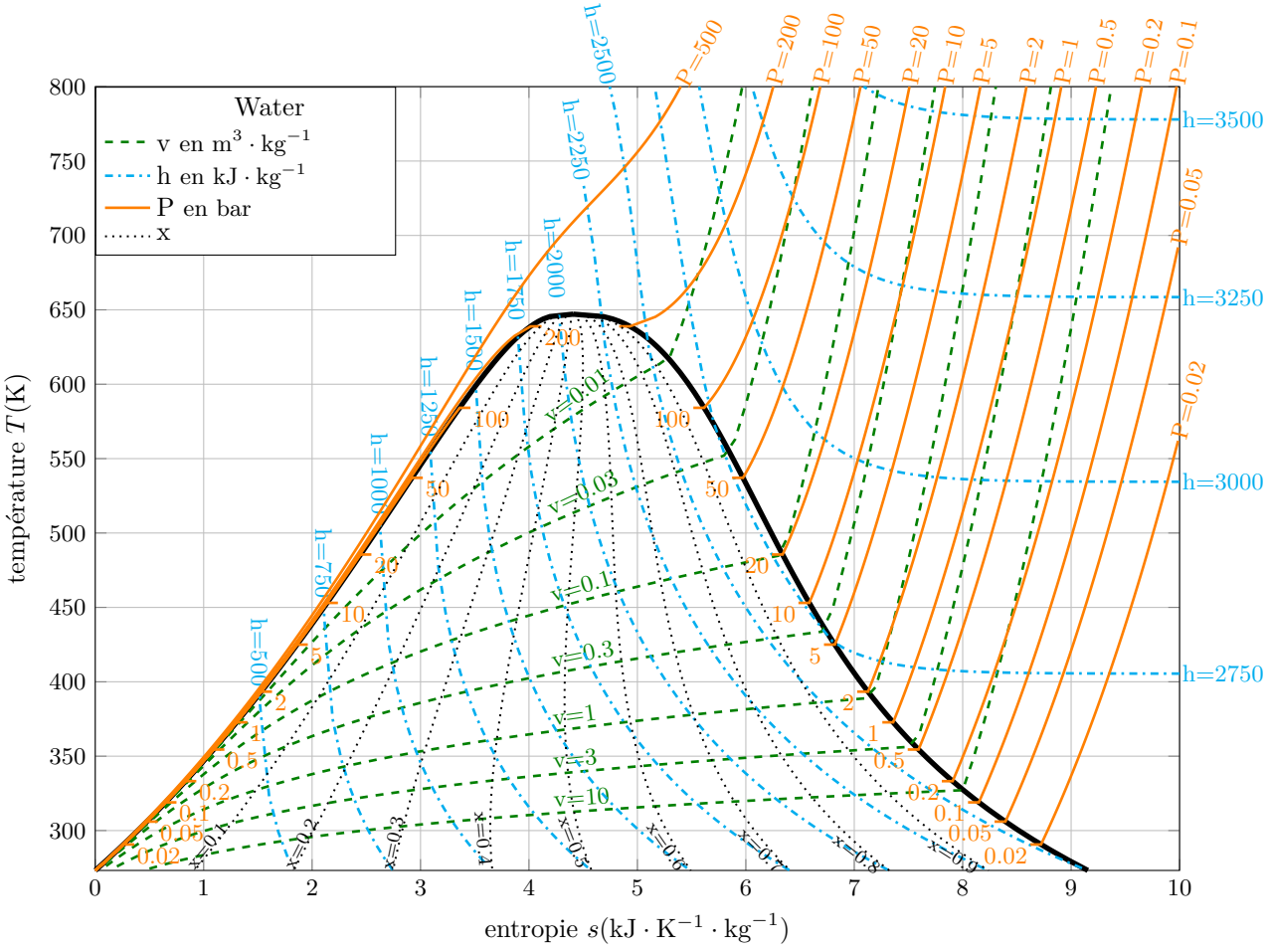
Pour des fluides réels, on dispose de tables contenant les données thermodynamiques pour de très nombreux états possibles, ce qui permet de tracer des diagrammes entropiques très précis avec de nombreuses données. La figure T6.3 montre par exemple le diagramme entropique de l'eau :

— la courbe en noir est la courbe de saturation ; le liquide à gauche, la vapeur à droite, et un mélange diphasé en-dessous (les courbes $x = \dots$ indiquent alors la fraction de vapeur ; la loi des moments s'applique aussi à ce type de diagrammes)

— les isochores, isobares et isenthalpiques permettent de lire, pour un point donné, toutes les caractéristiques du système

— les isobares ne sont pas tracées sous la courbe de saturation pour ne pas surcharger le schéma, car ce sont des horizontales (plateau de vaporisation)

FIGURE T6.3 : Diagramme entropique de l'eau.



T6. Bilans d'entropie

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Deuxième principe, bilans d'entropie	
	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie, entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$ avec $S_{\text{éch}} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Lois de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Variation d'entropie associée à une transition de phase.	Exploiter la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase.

T6. Bilans d'entropie

Quelques conseils

✎ Pour calculer S_{cr}, d'après le second principe, il faut calculer ΔS, à l'aide le plus souvent de formules données par l'énoncé, et $S_{éch}$ qui nécessite Q qu'on obtient par le premier principe (souvent isobare).

T6. Bilans d'entropie

QCMs

réponses page 1167

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'entropie a pour unité :

(a). $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (b). K
(c). $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (d). J

Q2. L'entropie créée est toujours positive :

(a). Faux (b). Vrai

Q3. Lors d'une vaporisation, l'entropie d'un corps pur varie de :

(a). $m\frac{\ell_v}{T_{vap}}$ (b). $m \ln \frac{T_f}{T_i}$
(c). 0

Q4. L'entropie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température :

(a). Faux (b). Vrai

✓ QCM : Variations d'entropie avec changements d'état ✗

Données concernant le mercure sous 1 bar :

masse molaire	$200{,}6\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
T_{fus}	$-38{,}84\,^\circ\mathrm{C}$
$L_{f,m}$	$2{,}295\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$
T_{vap}	$356{,}73\,^\circ\mathrm{C}$
$L_{v,m}$	$59{,}11\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$
$C_{pm}(\mathrm{liq})$	$28{,}0\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

Q5. 1 kg de mercure liqude à 356,7 °C s'évapore entièrement sous 1 bar pour donner de la vapeur de mercure à la même température. La variation d'entropie de ce système vaut :

(a). $93{,}8\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (b). $591{,}1\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
(c). $468\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (d). $826\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Q6. 3 mol de vapeur de mercure à 356,7 °C se liquéfient entièrement sous 1 bar pour donner du mercure liquide à la même température. La variation d'entropie de ce système vaut :

(a). $472\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (b). $-472\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
(c). $282\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (d). $-282\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Q7. On place 50 g de mercure liquide à 356,7 °C dans une enceinte sous 1 bar ; 23 g de mercure s'évaporent, le reste demeure liquide, sous 1 bar. La variation d'entropie de ce système (mercure total) vaut :

(a). $10{,}8\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (b). $19{,}0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
(c). $21{,}7\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (d). $1{,}8\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Q8. On met dans une enceinte à 356,7 °C, sous 1 bar : 45 g de mercure liquide et 65 g de vapeur de mercure. Après transformation, il reste 70 g de liquide et 40 g de vapeur, sous 1 bar. La variation d'entropie de ce système (mercure total) vaut :

(a). $-30{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
(b). $28{,}3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
(c). $47{,}9\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
(d). $-11{,}7\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

T6. Bilans d'entropie

Exercices

réponses page 1168

Exercice T6.1 : Changements d'état de l'eau [*]

Cet exercice fait simplement travailler les calculs d'entropie utilisant le fait que l'entropie est une fonction d'état, donc on peut créer un chemin au choix pour aller de l'état initial à l'état final.
Calculez la variation d'entropie d'1 kg d'eau initialement liquide à 25 °C, lorsqu'on l'amène à l'état suivant (la pression vaut toujours 1 bar ; on considère que l'énergie de la vapeur ne dépend que de la température) :

1. 1 kg d'eau liquide à 5 °C
2. 300 g d'eau liquide et 700 g de glace, en équilibre
3. 1 kg de glace à −10 °C
4. 1 kg de vapeur d'eau à 150 °C

Données :

— Température de fusion de l'eau sous 1 bar : à connaître
— Température d'ébullition de l'eau sous 1 bar : à connaître
— Capacité calorifique massique de la glace : $c^s = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$; de l'eau liquide : $c^l = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$; de l'eau vapeur : $c_p^v = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$
— Enthalpie de fusion de l'eau sous 1 bar : $\ell_f = 333\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
— Enthalpie de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $\ell_v = 2260\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
— Pour l'eau solide ou liquide : $\Delta S = C\ln\frac{T_f}{T_i}$; pour l'eau vapeur : $\Delta S = C_P\ln\frac{T_f}{T_i} - nR\ln\frac{P_f}{P_i}$

Exercice T6.2 : Refroidissement du zinc dans de l'eau [*]

On plonge un morceau de 100 g de zinc à 80 °C dans 300 g d'eau liquide à 15 °C ; l'ensemble est isolé thermiquement, sous pression constante.
Données :

— $c_{eau} = 4{,}18\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$; $c_{\mathrm{Zn}} = 0{,}38\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$
— pour un solide ou un liquide de capacité thermique C, on a $\Delta S = C\ln\frac{T_f}{T_i}$

1. Par un bilan d'enthalpie, calculez la température à l'équilibre.
2. Calculez la variation d'entropie du zinc et de l'eau, puis l'entropie créée.

Exercice T6.3 : Imprimante 3D [**]

Dans une imprimante 3D, du plastique liquide est déposé à 230 °C et se refroidit au contact de l'atmosphère (thermostat de température $T_{air} = 20\,°\mathrm{C}$).
Données

— capacité thermique massique du plastique solide : $c^s = 1{,}3\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$; liquide : $c^l = 1{,}5\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$
— chaleur latente de fusion du plastique : $\ell_f(210\,°\mathrm{C}) = 180\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
— variation d'entropie d'un solide ou d'un liquide dont la température change : $\Delta s = c\ln\frac{T_{final}}{T_{initial}}$

Déterminer l'entropie s_{cr} créée pour chaque kilogramme de plastique déposé liquide qui se solidifie et refroidit jusqu'à T_{air}. On fera les hypothèses nécessaires pour la transformation.

Exercice T6.4 : Refroidissement d'une brame d'acier [**]

Dans une aciérie, une brame d'acier solide de 30 t sort à 800 °C d'une coulée continue. Pour la refroidir, on la met en contact avec de l'eau liquide à 15 °C. Toutes les transformations se passent sous 1 bar. On suppose que les échanges entre l'eau et l'acier sont suffisamment rapides pour qu'on puisse considérer le système comme isolé thermiquement.

Données :

- température de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $T_{vap} = 100\,°C$
- chaleur latente de vaporisation de l'eau : $\ell_v(100\,°C) = 2260\,kJ \cdot kg^{-1}$
- capacités thermiques : $c_{eau\ L} = 4{,}2\,kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$; $c_{acier} = 460\,J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
- variation d'entropie d'un liquide ou d'un solide de capacité thermique C et dont la température passe de T_i à T_f : $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$

1. Tant que la température de la brame reste supérieure à 100 °C, l'eau s'évapore à son contact et on obtient de l'eau gazeuse à 100 °C.
   En appliquant le premier principe, déterminer la masse m_1 d'eau nécessaire pour amener la brame à 100 °C.
   En appliquant le second principe, calculez l'entropie créée lors de cette première étape.
2. On continue de verser de l'eau, jusqu'à obtenir une température d'équilibre acier/eau à 60 °C.
   Calculer la masse m_2 d'eau utilisée lors de cette seconde étape, et l'entropie créée.

Exercice T6.5 : Chauffage de l'air ; utilisation de tables thermodynamiques [***]

On prend 1 kg d'air sous 2 bar et 300 K dans une chaudière. On chauffe cet air jusqu'à l'état $P = 10$ bar et $T = 600$ K en le mettant en contact avec un thermostat à 900 K ; au cours de cette transformation, il **reçoit** un travail $W = 190$ kJ. Calculez l'entropie créée.

Énergies en $J \cdot g^{-1}$:

P \ T	200 K	300 K	500 K	1000 K
1 bar	142,4	214,2	359,7	759,2
10 bar	139,1	212,4	358,9	759,1
100 bar	102,1	194,4	349,6	754,9

Entropies en $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$:

P \ T	200 K	300 K	500 K	1000 K
1 bar	6,463	6,871	7,389	8,138
10 bar	5,766	6,204	6,727	7,477
100 bar	4,949	5,486	6,048	6,812

Exercice T6.6 : Compression ou détente isotherme [****]

Une détente isotherme est une détente tellement lente que le gaz a à chaque instant le temps de quasiment équilibrer sa température avec le thermostat extérieur. Cette détente est infiniment lente et idéalisée ; on peut essayer de la modéliser par une détente en N étapes. On propose le modèle suivant :

- on travaille sur un gaz parfait de n moles, de coefficient isentropique γ ; on rappelle que, lorsqu'il passe d'un état i à un état f, son entropie varie de $\Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$
- la détente se fait de l'état (V_A, T_0) à l'état (V_B, T_0) où T_0 est la température du thermostat extérieur et $V_B > V_A$
- la détente se fait en N étapes de variation de volume $\mathrm{d}V = \frac{V_B - V_A}{N}$. Lors de l'étape k, le gaz est initialement à $(V_{k-1} = V_A + (k-1)\mathrm{d}V, T_0)$; il subit d'abord une détente adiabatique et réversible (rapide) jusqu'à l'état $(V_k = V_A + k\mathrm{d}V, T_k)$, puis un refroidissement isochore jusqu'à (V_k, T_0).

Dans la suite, on supposera que $N \gg 1$ donc on fera des développements limités à l'ordre 2 par rapport à $\frac{\mathrm{d}V}{V_k} \ll 1$.

1. Exprimez la température T_k en fonction de T_0, V_A, $\mathrm{d}V$ et k.
2. On va d'abord exprimer le travail reçu par le gaz lors de cette transformation. Exprimez le travail δW_k

lors de la k-ième étape. Par sommation, montrez que le travail total tend, lorsque $N \to \infty$, vers celui d'une isotherme.

3. On s'intéresse maintenant à l'entropie créée. Exprimez, en effectuant à chaque fois un DL à l'ordre 2, l'entropie créée lors de l'étape k

   Montrer alors que l'entropie totale créée lors de la transformation tend vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Exercice T6.7 : Création d'entropie par des frottements solides [****]

On considère un gaz parfait enfermé dans un cylindre de section S fermé par un piston, le tout étant calorifugé ; au départ, tout est à la température T_i. Quand le piston bouge, des frottements solides appliquent sur lui une force constante F opposée à son mouvement.

1. Soit P la pression du gaz. Que doit valoir au moins la pression extérieure P_{ext} pour que le piston se mette en mouvement et comprime le gaz ?
2. On suppose que P_{ext} vaut cette valeur, et on l'augmente de dP_{ext}. On suppose que la puissance dissipée par les frottements est transmise au piston de capacité thermique C sous forme de chaleur, et que le gaz subit une transformation adiabatique réversible. En notant T_p la température du piston, exprimez la variation $\mathrm{d}T_p$ en fonction de $\mathrm{d}P_{ext}$.
3. Exprimez alors l'entopie créée pour comprimer le gaz petit à petit de la pression P_i à la pression P_f (l'expression de la variation d'entropie d'un solide n'est pas rappelée ici). Commentez.

T6. Bilans d'entropie

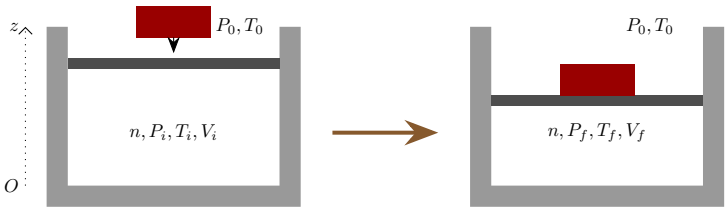
TDs numériques

réponses page 1171

TD numérique : Irréversibilité liée aux frottements

EDO

Dans un cylindre vertical de section $S = 30\,\text{cm}^2$, on enferme $n = 1 \times 10^{-2}\,\text{mol}$ moles d'air (considéré comme un gaz parfait diatomique) à l'aide d'un piston de masse $m = 400\,\text{g}$. Il y a équilibre mécanique avec l'extérieur (pression $P_0 = 1\,\text{bar}$, température $T_0 = 293\,\text{K}$) et la température initiale de tout vaut T_0. L'extérieur du cylindre et du piston sont calorifugés.



À l'instant $t = 0$ on pose une masse $m' = 2\,\text{kg}$ sur le piston. Le piston oscille puis se stabilise sous l'effet de forces de frottements de la forme $-\lambda\vec{v}$ avec $\lambda = 40\,\text{USI}$.
Donnés :

- constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
- le piston et le cylindre sont en acier de capacité calorifique massique $c_a = 502\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
- pesanteur : $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

1. Calculez numériquement les variables initiales : P_i, T_i et V_i ainsi que l'altitude z_i du bas du piston.
2. On note $P(t)$, $T(t)$, $V(t)$ et $z(t)$ les grandeurs du gaz au cours du temps. On admet que la pression extérieure P_0 et la température extérieure T_0 ne varient pas.
   En appliquant le PFD au piston de masse totale $m + m'$, déterminez l'équation différentielle reliant z à P et aux autres grandeurs.
3. On suppose dans un premier temps un modèle simpliste : toute l'énergie dissipée par les frottements est transmise sous forme de chaleur au gaz, et il n'y a pas d'échanges de chaleur entre le gaz et le piston ou le cylindre.
   En appliquant le premier principe au gaz sur une durée $\text{d}t$, exprimez $\dot{T}$ en fonction de $\dot{z}$
4. Résolvez alors à l'aide d'un schéma d'Euler ou de `odeint` ce système d'équations sur une durée de 2 s. Tracez $z(t)$ et $T(t)$ et observez qu'ils se stabilisent après des oscillations.
5. La variation d'entropie d'un GP entre deux états s'écrit $\Delta S^{1\to 2} = nC_{vm}\ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$. Calculez le tableau donnant à chaque instant l'entropie créée entre l'état initial et l'instant t, et tracez-le. Commentez le résultat obtenu.
6. Changez légèrement la valeur de λ ; qu'est ce qui change ? qu'est-ce qui ne change pas ?
7. En fait les frottements ont plutôt lieu entre les solides, donc c'est plutôt le piston et le cylindre qui chauffent. Dans un second modèle, on considère que toute la puissance dissipée par les frottements est transmise sous forme de chaleur au piston (on pourrait aussi tenir compte du cylindre, ça changerait juste une capacité thermique mais pas grand chose d'autre). On notera dans la suite $T_a(t)$ la température de l'acier qui compose le piston.
   Établir les 3 équations différentielles vérifiées par z, T et T_a. Résolvez-les sur 10 s, tracez $z(t)$, $T(t)$, $T_a(t)$ puis $S_{cr}(t)$ sachant que la variation d'entropie d'un solide s'écrit $\Delta S^{1\to 2} = mc\ln\frac{T_2}{T_1}$. Commentez.
8. Dans un troisième modèle on ajoute les transferts thermiques entre le gaz et le piston, via une résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{hS}$ avec $h = 50\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Reprenez la même étude.

Pour aller plus loin, il faudrait tenir compte du fait que la température des solides n'est pas homogène, et découpant les solides en cubes de petite taille ayant chacun sa propre température : c'est la méthode des éléments finis, que vous verrez un peu l'année prochaine.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)
Q2.(b)
Q3.(a)
Q4.(a)
Elle dépend aussi du volume et/ou de la pression ; pensez par exemple à la détente de Joule-Gay Lussac, à température constante, qui crée de l'entropie.

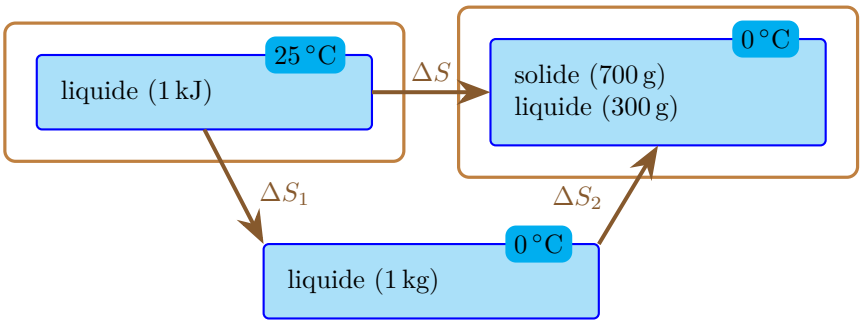
Réponses au QCM : Variations d'entropie avec changements d'état

Q5.(c)
$\Delta S = \frac{m}{M}\frac{L_{v,m}}{T_{vap}}$; mettez bien la température en Kelvins !
Q6.(d)
$\Delta S = -3.\frac{L_{v,m}}{T_{vap}}$
Q7.(a)
Il n'y a que les $\frac{23}{201} = 0{,}114\,\text{mol}$ de mercure qui s'évaporent qui comptent dans le calcul.
Q8.(d)
Le bilan net est le suivant : 25 g de mercure se sont liquéfiés (soit 0,124 mol).

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T6.1 : Changements d'état de l'eau [*]

1. Il n'y a pas de changement d'état ici, seulement un changement de température. Pour un liquide (a priori incompressible et indilatable), on a simplement $\Delta S = m \times c^l \times \ln \frac{273+5}{273+25} = -292\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
2. L'eau se solidifie sous 1 bar à la température 0 °C. Il faut donc d'abord descendre à cette température, ce qui implique une variation d'entropie $\Delta S_1 = 1 \times c^l \times \ln \frac{273}{298} = -368\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$; puis on solidifie 700 g d'eau, ce qui correspond à une variation d'éntropie $\Delta S_2 = -0,7 \times \frac{\ell_v}{T_f} = -854\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$. En tout, on a donc $\Delta S = -1222\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
3. Même principe, en trois étapes : $\Delta S = 1 \times c^l \times \ln \frac{273}{298} - 1 \times \frac{\ell_f}{T_f} + 1 \times c^s \times \ln \frac{263}{273} = -1666\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

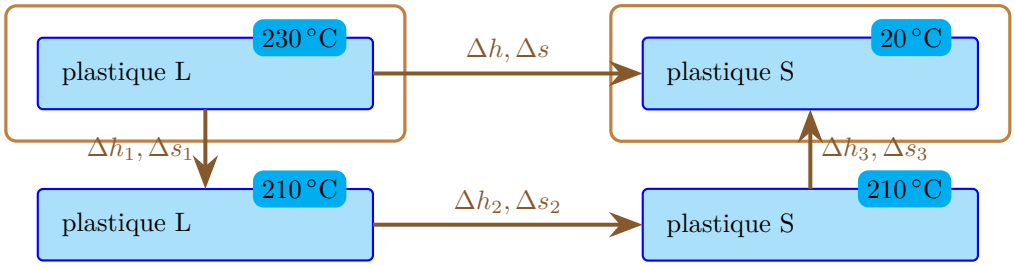


4. Même principe : $\Delta S = 1 \times c^l \times \ln \frac{373}{298} + 1 \times \frac{\ell_v}{T_v} + 1 \times c_p^v \times \ln \frac{423}{373} = +7266\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T6.2 : Refroidissement du zinc dans de l'eau [*]

1. On notera $C_{eau} = 1250\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$; $C_{\mathrm{Zn}} = 38\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ les capacité thermiques de l'eau et du zinc.
   Soit T_f la température finale. Alors $\Delta H_{eau} = C_{eau}(T_f - 15)$, et $\Delta H_{\mathrm{Zn}} = C_{\mathrm{Zn}}(T_f - 80)$. Or le système est isolé sous pression constante, donc $\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{\mathrm{Zn}} = 0$; on en tire $T_f = 16{,}9\,°\mathrm{C}$
2. $\Delta S_{eau} = C_{eau} \ln \frac{273+16{,}9}{273+15} = 8{,}2\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ et $\Delta S_{\mathrm{Zn}} = -7{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$. Or $S_{éch} = 0$ (isolé thermiquement) donc $S_{cr} = \Delta S = +0{,}7\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

Corrigé de l'exercice T6.3 : Imprimante 3D [**]



On commence par calculer $\Delta h = c^l(210 - 230) - \ell_f + c^s(20 - 210) = -457\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. On peut supposer que la transformation est isobaare et sans travail utile, donc $q = \Delta h$. L'entropie échangée vaut donc $s_{éch} = \frac{q}{T_{air}} = -1560\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

La variation d'entropie vaut $\Delta s = c^l \ln \frac{483}{503} - \frac{\ell_f}{483} + c^s \ln \frac{293}{483} = -1083\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

D'après le premier principe, $s_{cr} = \Delta s - s_{éch} = +476\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

Corrigé de l'exercice T6.4 : Refroidissement d'une brame d'acier [**]

1. La transformation est isobare et adiabatique, donc $\Delta H = Q = 0$.
   Or $\Delta H_{eau} = m_1\,(85 \times 4{,}2 + 2260)$ en kJ. De même $\Delta H_{acier} = -700 \times 30000 \times 0{,}46$ en kJ.
   Donc $m_1 = \frac{700 \times 30000 \times 0{,}46}{85 \times 4{,}2 + 2260} = 3690\,\mathrm{kg}$.

Le système est isolé thermiquement, donc d'après le second principe, $S_{cr,1} = \Delta S_{eau} + \Delta S_{acier} = 4,2 \times m_1 \ln \frac{373}{288} + m_1 \frac{2260}{373} + 30000 \times 0,46 \ln \frac{373}{1073} = 11,8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}$

2. De la même manière, on a $m_2 \times 4,2 \times 45 - 30000 \times 0,46 \times 40 = 0$ soit $m_2 = 2920\,\text{kg}$, puis on calcule $S_{cr,2} = \Delta S = 215\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$: c'est beaucoup plus faible. La première transformation est beaucoup plus irréversible, car elle faisait intervenir des écarts de température très grands.

Corrigé de l'exercice T6.5 : Chauffage de l'air ; utilisation de tables thermodynamiques [***]

La seule difficulté de cet exercice consiste dans l'interpolation des données. Initialement, on est à 2 bar et 300 K, or à cette température on connaît S et U à 1 bar et à 10 bar. Pour interpoler U par exemple, on calcule la pente entre 1 bar et 10 bar : $p = \frac{212,4-214,2}{10-1} = -0,2\,\text{kJ} \cdot \text{bar}^{-1}$. On a donc $U(2\,\text{bar}, 300\,\text{K}) = U(1\,\text{bar}, 300\,\text{K}) + (2-1) \times p = 214,0\,\text{kJ}$ et de même on trouve $S(2\,\text{bar}, 300\,\text{K}) = 6797\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

En procédant de même à la fin entre les cases à 500 K et à 1000 K, on trouve $U(10\,\text{bar}, 600\,\text{K}) = 438,9\,\text{kJ}$ et $S(10\,\text{bar}, 600\,\text{K}) = 6877\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On trouve donc $\Delta S = 6877 - 6797 = 80\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ et $Q = \Delta U - W = 34,9\,\text{kJ}$ d'après le premier principe, donc $S_e = \frac{Q}{T_{ext}} = \frac{34900}{900} = 39\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. Donc d'après le second principe : $S_c = 41\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice T6.6 : Compression ou détente isotherme [****]

1. Par la loi de Laplace :
$$\begin{aligned} T_k &= T_0 \left(\frac{V_{k-1}}{V_k}\right)^{\gamma-1} \\ &= T_0 \left(\frac{V_A + (k-1)\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^{\gamma-1} \\ &= T_0 \left(1 - \frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^{\gamma-1} \\ &= T_0 \left(1 - (\gamma-1)\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} + \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) \end{aligned}$$

2. On applique le premier principe lors de l'étape k :
$$\begin{aligned} \delta W_k &= nC_{vm}.(T_k - T_0) + 0 \\ &= \frac{nR}{\gamma-1} T_0 \left(-(\gamma-1)\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} + \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) \\ &= nRT_0 \left(-\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} + \frac{1}{2}(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) \end{aligned}$$
On a donc $W = -nRT_0 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} + nRT_0 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2$. Le premier terme est une somme de Riemann qui tend vers $-nRT_0 \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V}\text{d}V = -nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_A}$; le second est majoré en valeur absolue par $nRT_0 N \frac{1}{2}(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A}\right)^2 = \frac{nRT_0(\gamma-2)(V_B-V_A)^2}{2NV_A} \underset{N\to\infty}{\to} 0$. On retrouve donc bien le travail reçu lors d'une isotherme.

3. Sur la k-ième étape, $\text{d}S_k = nR \ln \frac{V_k}{V_{k-1}}$ et $\delta S_{éch,k} = \frac{0 + nC_{vm}(T_0 - T_k)}{T_0} = \frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0 - T_k}{T_0}$ (car la chaleur est échangée lors du refroidissement isochore). D'après le second principe, l'entropie créée est donc
$$\begin{aligned} \delta S_{cr,k} &= nR \ln \frac{V_k}{V_{k-1}} - \frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0 - T_k}{T_0} \\ &= -nR \ln\left(1 - \frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right) - \frac{nR}{\gamma-1}\left((\gamma-1)\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) \\ &= -nR\left(-\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) - nR\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V} + \frac{1}{2}(\gamma-2)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}nR(\gamma-1)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2 \end{aligned}$$
Donc $S_{cr} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}nR(\gamma-1)\left(\frac{\text{d}V}{V_A + k\text{d}V}\right)^2 \leq \frac{NnR(\gamma-1)\text{d}V^2}{2V_A^2} = \frac{NnR(\gamma-1)(V_B-V_A)^2}{2N^2V_A^2}$ donc $S_{cr} \underset{N\to\infty}{\to} 0$: la transformation devient réversible à la limite isotherme.

Corrigé de l'exercice T6.7 : Création d'entropie par des frottements solides [****]

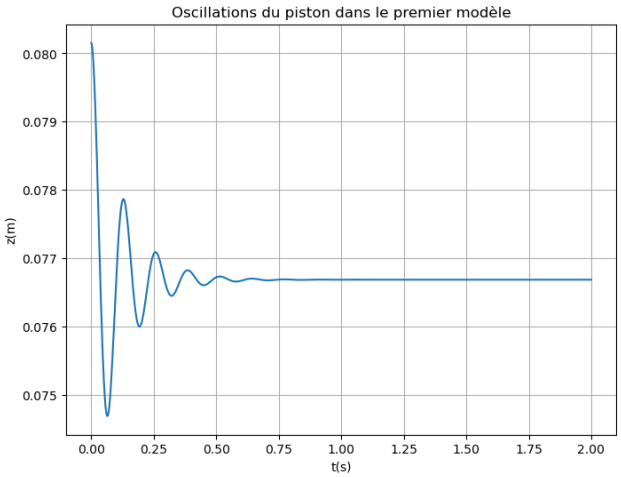
1. Il faut que la somme des forces dans le sens du mouvement ($P_{ext}S$) dépasse la somme des forces dans le sens opposé ($PS + F$) soit $P_{ext} > P + \frac{F}{S}$.
2. On a donc $P_{ext} = P + \frac{F}{S} + \mathrm{d}P_{ext}$. Le gaz va se comprimer jusqu'à ce que $P_{ext} = P + \mathrm{d}P + \frac{F}{S}$ donc sa pression varie de $\mathrm{d}P = \mathrm{d}P_{ext}$.
   Par la loi de Laplace, $PV^\gamma = \text{cst}$ donc en prenant le logarithme et en différentiant : $\mathrm{d}P + \gamma \mathrm{d}V = 0$ donc le volume du gaz varie de $\mathrm{d}V = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{d}P$; de même sa température varie de $\mathrm{d}T = \frac{\gamma-1}{\gamma}\mathrm{d}P$ mais cela est inutile ici. Si le volume varie de $\mathrm{d}V$, c'est que la position du piston bouge de $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}V}{S} = \frac{\mathrm{d}P}{\gamma S}$ donc le travail des forces de frottements vaut $-\frac{F\mathrm{d}P}{\gamma S}$; la quantité opposée est transférée au piston sous forme de chaleur, donc par un premier principe appliqué au piston supposé indéformable : $C\mathrm{d}T_p = \frac{F\mathrm{d}P_{ext}}{\gamma S}$.
3. Comme le système est calorifugé et que le gaz subit une transformation adiabatique et réversible donc isentropique, $S_{cr} = \Delta S_p = C \ln \frac{T_f}{T_i}$ or $T_f = T_i + \int_i^f dT_p = T_i + \int_i^f \frac{F}{\gamma SC}\mathrm{d}P_{ext} = T_i + \frac{F}{\gamma SC}(P_{ext,f} - P_{ext,i})$ or $P_{ext,i} = P_i + \frac{F}{S}$ et $P_{ext,f} = P_f + \frac{F}{S}$ donc finalement $T_f = T_i + \frac{F.(P_f - P_i)}{\gamma SC}$ et $S_{cr} = C \ln\left(1 + \frac{F.(P_f - P_i)}{\gamma SCT_i}\right)$.
   D'abord, on voit que l'entropie créé est positive ; si on faisait une détente elle serait encore positive car la force deviendrait $-F$. On voit qu'elle augmente avec la force de frottements (d'où la nécessité de diminuer au maximum ces frottements), diminue avec S (donc un gros cylindre rend la transformation moins irréversible, même si F augmente un peu avec la taille, mais moins). Quant à la masse du piston (et donc sa capacité thermique C) elle joue peu car si on fait un DL à l'ordre 1 on voit que C disparaît, mais le terme d'ordre 2 sera en $\frac{1}{C}$ donc on retrouve le fait que pour un gros système l'entropie créée par les frottements est moindre.

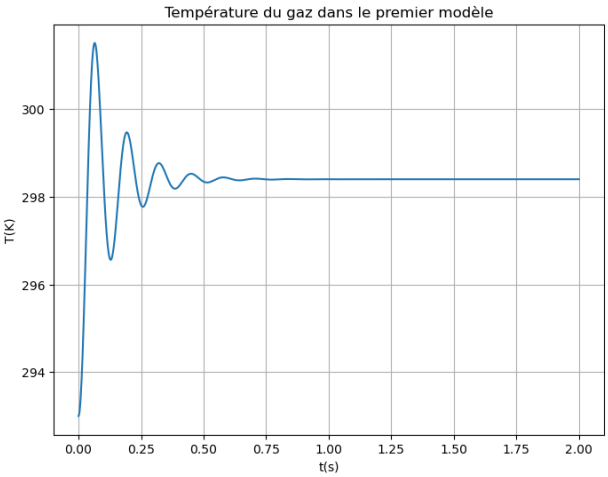
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Irréversibilité liée aux frottements

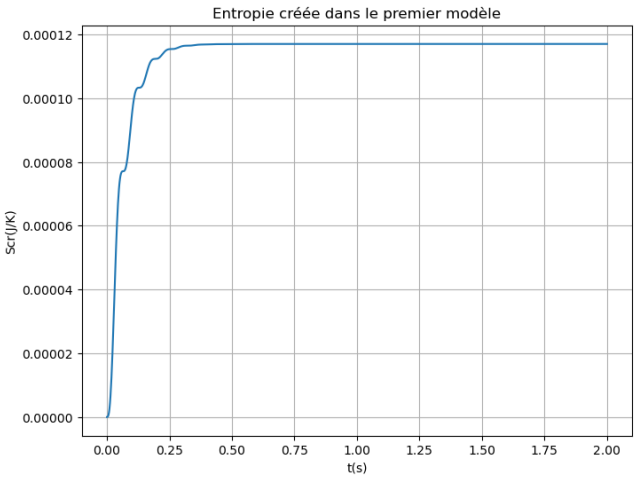
Initialement, $T_i = 293\,\text{K}$, $P_i = P_0 + \frac{mg}{S} = 1{,}013\,\text{bar}$, $V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 0{,}24\,\text{L}$ et $z_i = \frac{V_i}{S} = 8{,}0\,\text{cm}$.

On a dans le premier modèle les équations $\begin{cases} \ddot{z} = \dfrac{(P-P_0)S - \lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} = \dfrac{-PS\dot{z} + \lambda\dot{z}^2}{nCvm} \end{cases}$ avec $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

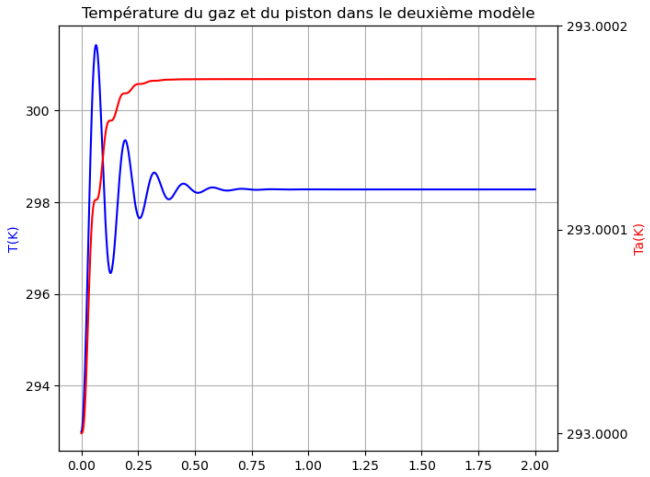


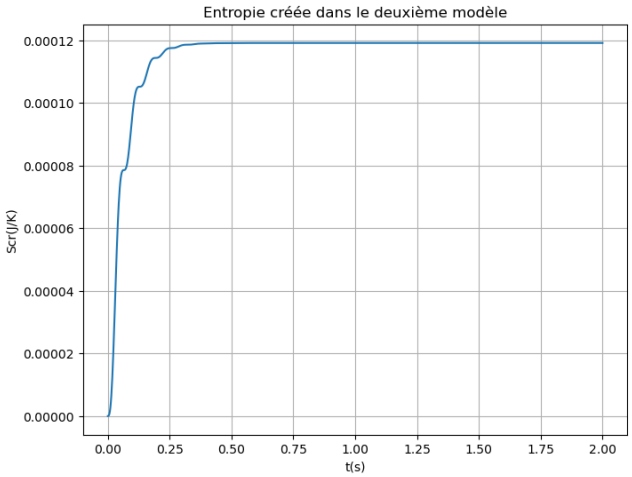


Une fois $z(t)$ et $T(t)$ obtenus, alors comme le système est isolé thermiquement, on a simplement $S_{cr} = nC_{vm}\ln\frac{T}{T_i} + nR\ln\frac{z}{z_i}$. La transformation crée une entropie d'environ $117\,\mu\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$; elle ne varie pas si λ change, car l'état final est le même donc la variation d'entropie aussi.

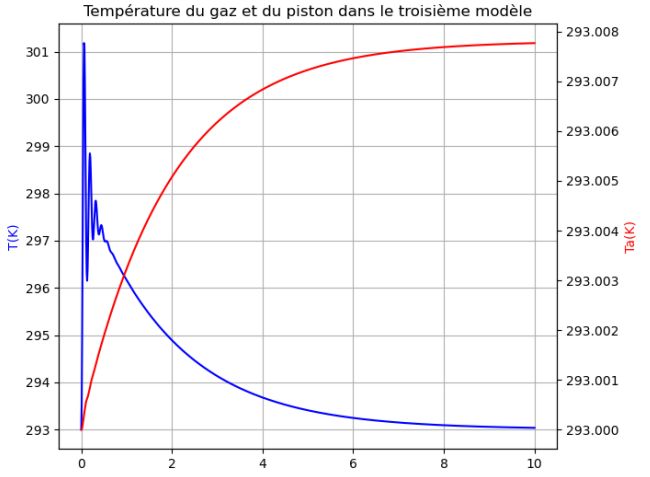


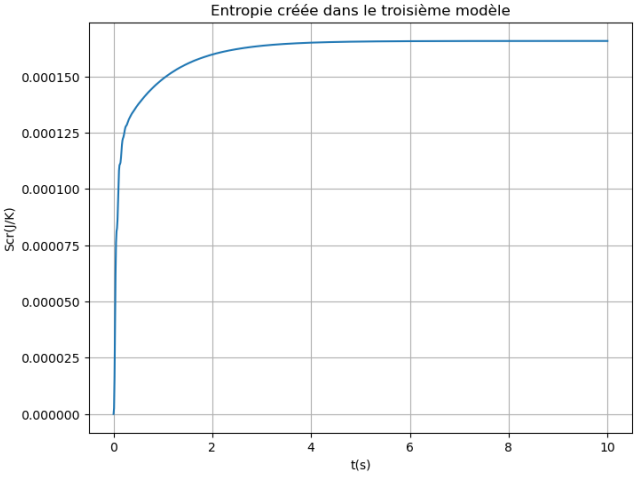
Avec le deuxième modèle, les équations deviennent $\begin{cases} \ddot{z} = \dfrac{(P-P_0)S - \lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} = \dfrac{-PS\dot{z}}{nCvm} \\ \dot{T}_a = \dfrac{\lambda\dot{z}^2}{mc_a} \end{cases}$ et l'entropie créée est quasiment la même. Le piston chauffe peu car l'énergie dissipée par les frottements est somme toute assez faible.





Avec le troisième modèle, on a $\begin{cases} \ddot{z} = \dfrac{(P-P_0)S - \lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} = \dfrac{-PS\dot{z} + \frac{T_a - T}{R_{th}}}{nCvm} \\ \dot{T}_a = \dfrac{\lambda\dot{z}^2 + \frac{T-T_a}{R_{th}}}{mc_a} \end{cases}$. Cette fois, l'élévation de température du gaz, due à la compression, se transmet au piston, ce qui crée de l'entropie supplémentaire.





Chapitre T7

Systèmes en écoulement

Programme p.1182

Cours p.1174

T7.A. Étude de la détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin)

T7.B. Étude énergétique d'un système quelconque en écoulement

T7.C. Bilans entropiques des systèmes en écoulement (Hors programme)

T7.D. Utilisation d'un diagramme enthalpique

Conseils p.1183

QCMs p.1184

Exercices p.1186

T7. Systèmes en écoulement

Cours

Les deux premiers principes de la thermodynamique s'appliquent à des systèmes **fermés**. Nous avons donc jusqu'ici étudié des machines thermiques fermées, où la même quantité de gaz effectue des cycles. Mais la plupart des machines sont des systèmes où le fluide s'écoule d'un composant vers un autre. Par exemple, dans un réfrigérateur, le fluide frigorigène décrit un cycle au cours duquel il traverse successivement un compresseur, un échangeur, un détendeur et un autre échangeur.

Nous allons donc voir dans ce chapitre comment on peut appliquer le premier (et éventuellement le second) principe de la thermodynamique à un système en écoulement, appelé aussi **système ouvert**.

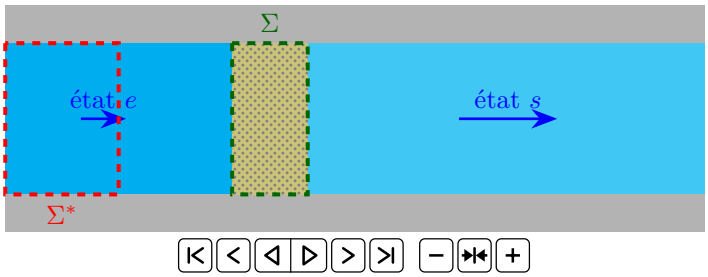
T7.A. Étude de la détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin)

La première étude d'un système ouvert a été l'étude d'une détente en écoulement : la détente de Joule-Thomson. Il s'agit d'une détente qu'on effectue souvent : quand on utilise un réchaud à gaz par exemple, le gaz est comprimé dans la bouteille ; il faut le faire sortir de la bouteille en continu, mais pas à la pression de plusieurs bars auquel il est conservé (le but n'est pas de faire un lance flamme, mais juste une petite flamme qui chauffe). On doit donc détendre en continu le gaz ; pour le détendre sans dangers, il faut créer des frottements à l'aide d'un bouchon qui laisse passer lentement le gaz.

Joule et Thomson (ou Lord Kelvin) ont réalisé cela en mettant un « bouchon poreux » dans un tuyau ; il s'agit par exemple d'un bloc de coton bien tassé, à travers lequel le fluide peut passer lentement en percolant (figure T7.1). On peut aussi le réaliser en faisant passer le fluide à travers un tout petit trou, c'est comme cela que fonctionne un détendeur de réchaud à gaz.

Nous allons donc étudier cette détente pour commencer à voir comment on peut effectuer un bilan sur un système ouvert.

FIGURE T7.1 : Détente de Joule-Kelvin.



Exemple : Détente de Joule-Thomson — À connaître

On considère une détente idéale dans lequel un fluide circule **lentement** dans une **conduite horizontale**, **calorifugée**. Le fluide arrive dans un état initial (dont les variables seront indicées par $_e$), traverse un bouchon poreux, et repart dans un état final différent (variables indicées par $_s$) dont la pression est inférieure à la pression initiale : $P_s < P_e$. L'écoulement est en **régime permanent** (c'est-à-dire que les caractéristiques du fluide en un point fixé ne changent pas au cours du temps).
Montrez que l'enthalpie massique du fluide est conservée au cours de la détente : $h_s = h_e$.

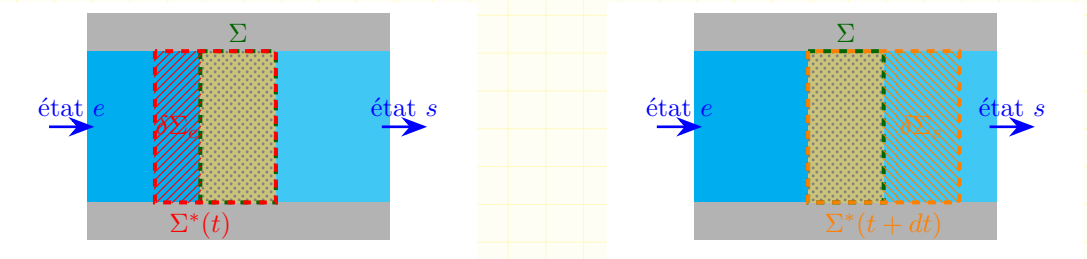
Pour comprendre le problème qui se pose ici, il faut bien observer l'animation de la figure T7.1. Appelons Σ le système constitué du bouchon poreux (pointillé vert). Lorsque le fluide circule, il y a du fluide qui traverse le système Σ : il s'agit d'un système **ouvert** sur lequel il est **IMPOSSIBLE D'APPLIQUER LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE**. Ce système n'est donc pas adapté.
Sur la même figure T7.1, on voit aussi un système Σ^* qui avance avec le fluide : il contient toujours la même quantité de fluide, et bouge quand le fluide bouge. Ce système est fermé. Mais sa description est compliquée.

La solution est de n'étudier ce système Σ^* qu'entre deux instants très proches t et $t+\mathrm{d}t$. On va donc définir ainsi le système Σ^* :

— à l'instant t, le système $\Sigma^*(t)$ est constitué du bouchon poreux Σ et de la quantité $\delta\Sigma_e$ de fluide qui va rentrer dans le bouchon pendant le temps $\mathrm{d}t$ (en ▨ sur le schéma ci-dessous) ;

— à l'instant $t+\mathrm{d}t$, le système $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t)$ est constitué du bouchon poreux Σ et de la quantité $\delta\Sigma_s$ de fluide qui est sortie du bouchon pendant le temps $\mathrm{d}t$ (en ▨ sur le schéma ci-dessous).

Le système est représenté ci-dessous aux deux instants. Il faut imaginer qu'entre les deux instants, le fluide a bougé vers la droite et a entraîné le système avec lui.



Ce système est bien **FERMÉ**, on peut commencer par lui appliquer la conservation de la masse : $m_{\Sigma^*} = \text{cst}$; en notant $m(t)$ la masse de $\Sigma^*(t)$ et $m(t+\mathrm{d}t)$ celle de $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t)$, on peut écrire $m(t) = m(t+\mathrm{d}t)$. Mais le problème, c'est que le système Σ^* est inhomogène ; plus précisément, le fluide en amont du bouchon est homogène (état e) ; le fluide en aval est homogène (état s) ; mais dans le bouchon, on ne sait pas trop ce qui se passe. On va donc découper le système : à l'instant t, le système $\Sigma^*(t)$ est formé de deux morceaux : le bouchon $\Sigma(t)$ plus le petit morceau ▨ de masse $\delta m_{\delta\Sigma_e}$; donc $m(t) = m_{\Sigma(t)} + \delta m_{\delta\Sigma_e}$; de même à l'instant $t+\mathrm{d}t$, un découpage semblable permet d'écrire que $m(t+\mathrm{d}t) = m_{\Sigma(t+dt)} + \delta m_{\delta\Sigma_s}$ où $\delta m_{\delta\Sigma_s}$ est la masse de la portion ▨. Or l'écoulement est permanent ; cela implique que la masse contenue dans le système fixe Σ est constante : $m_{\Sigma(t)} = m_{\Sigma(t+\mathrm{d}t)}$. On en déduit facilement que $\delta m_{\delta\Sigma_e} = \delta m_{\delta\Sigma_s}$, qu'on notera désormais simplement δm : la masse qui entre est égale à la masse qui sort. On aurait pu admettre ce résultat assez logique.

Ce raisonnement, assez évident quant à la masse, va être appliqué de la même manière quant à l'énergie. Le système Σ^* étant **FERMÉ**, on peut lui appliquer le premier principe entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}E_{macro} + \mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.
Commençons par évaluer le terme de gauche. D'abord, la circulation du fluide est lente, ce qui élimine l'énergie cinétique, et horizontale, ce qui élimine l'énergie potentielle de pesanteur. Donc $\mathrm{d}E_{macro} = 0$.
$\mathrm{d}U$ représente la variation d'énergie interne du système Σ^* entre t et $t+\mathrm{d}t$. On peut simplement l'écrire comme $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$. Pour l'évaluer, on va procéder, comme avec la masse, par découpage : $U(t) = U_{\Sigma(t)} + \delta U_{\delta\Sigma_e}$ et $U(t+\mathrm{d}t) = U_{\Sigma(t+dt)} + \delta U_{\delta\Sigma_s}$. Or le régime est permanent, donc l'énergie interne du système fixe Σ est constante : $U_{\Sigma(t)} = U_{\Sigma(t+\mathrm{d}t)}$. On en déduit que $\mathrm{d}U = \delta U_{\delta\Sigma_s} - \delta U_{\delta\Sigma_e}$. Or le morceau ▨ est un morceau de masse δm de fluide dans l'état final s ; en notant u_s l'énergie interne massique dans l'état s, on peut écrire $\delta U_{\delta\Sigma_s} = \delta m.u_s$; de même $\delta U_{\delta\Sigma_e} = \delta m.u_e$. On arrive donc à cette conclusion : $\mathrm{d}U = \delta m.(u_s - u_e)$: la variation d'énergie interne du système est égale à la masse qui circule multipliée par la variation d'énergie interne massique entre l'entrée et la sortie.
Considérons maintenant le terme de droite : $\delta W + \delta Q$. Il est évident que $\delta Q = 0$ car le système est calorifugé. Dans les travaux, il n'y a que le travail des forces de pression à considérer, car il n'y a pas de pièces mobiles dans le système. Néanmoins, il faut faire attention avec la formule $\delta W = -P_{ext}\mathrm{d}V$, car ici il y a 2 pressions extérieures. On va donc considérer séparément l'amont en l'aval. En aval, le système gagne un volume $\delta V_{\delta\Sigma_s}$ puisqu'on voit bien, en comparant les deux schémas, qu'entre t et $t+\mathrm{d}t$ le volume à droite a **augmenté** de la partie ▨. En notant v_s le volume massique dans l'état final, on peut écrire $\delta V_{\delta\Sigma_s} = \delta m.v_s$; le travail des forces de pression en aval vaut donc $-P_s v_s \delta m$. On peut procéder de même en amont, à une différence importante près : entre le schéma de gauche et celui de droite, le volume $\delta V_{\delta\Sigma_e} = \delta m.v_e$ de ▨ a **disparu**, il est perdu par le système (attention, on ne parle pas de la masse de fluide qui était contenue, laquelle est restée dans le système ; mais le volume est perdu). Par conséquent la variation de volume en amont vaut $-\delta V_{\delta\Sigma_e}$ donc le travail des forces de pression en amont vaut $+P_e v_e \delta m$. Le travail total vaut donc $\delta W = (P_e v_e - P_s v_s)\,\delta m$.
Remettons tous les morceaux ensemble : le premier principe s'écrit finalement pour ce système $\mathrm{d}U = \delta W$ soit $\delta m.(u_s - u_e) = \delta m.(P_e.v_e - P_s.v_s)$. On simplifie par δm, on passe tous les termes à gauche : $u_s + P_s.v_s - u_e - P_e.v_e = 0$ soit

$$h_s - h_e = 0 \qquad \text{(T7.1)}$$

l'enthalpie du fluide est conservée lors d'une détente de Joule-Thomson (détente isenthalpique).

Comme dans le cas de la détente de Joule-Gay Lussac, Joule a testé cette détente sur beaucoup de fluides, et a constaté que certains fluides voyaient leur température rester constante lors de la détente, alors que d'autres subissaient un changement de température.

Définition : Seconde loi de Joule

On dit qu'un fluide vérifie la seconde loi de Joule si sa température ne varie pas lorsqu'il subit une détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin).

Remarque : Pour un GP dont l'enthalpie ne dépend que de T, on peut écrire $\Delta h = c_p \Delta T$. Donc $\Delta h = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$: si un gaz se comporte comme un gaz parfait, alors il vérifie la seconde loi de Joule ; la réciproque est presque vraie : la grande majorité des gaz qui ne se comportent pas comme des gaz parfaits voient leur température varier lors d'une telle détente.

La figure T7.2 montre les courbes isenthalpiques $h = \text{cst}$ tracées dans le diagramme (T, P) pour du diazote. On constate que, aux températures usuelles (proches de 300 K), les courbes ont une allure croissante puis décroissante. Considérons par exemple la courbe bleue avec des cercles : elle croît jusqu'à environ 350 bar, puis décroit. Si on part d'un fluide dans un état représenté par un point de cette courbe, en-dessous de 350 bar, et qu'on lui fait subir une détente de Joule-Thomson, alors, lors de cette détente :

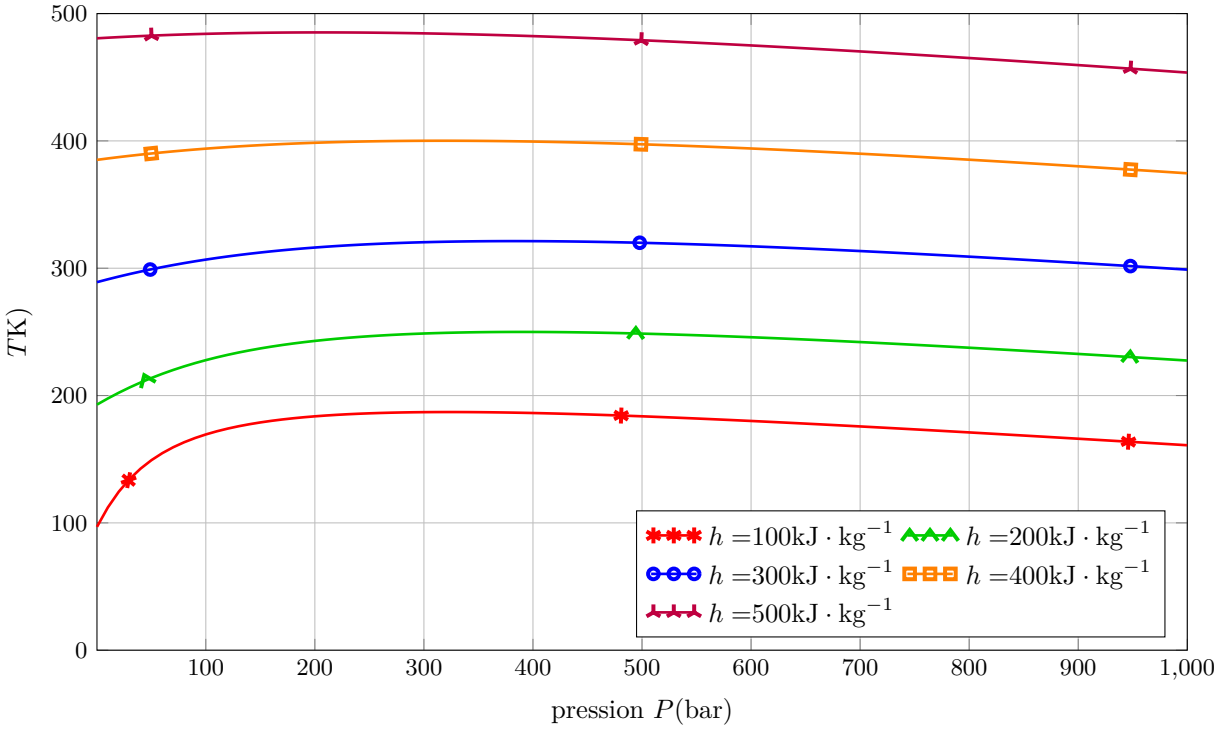
— sa pression baisse, donc le point représentatif se déplace vers la gauche

— son enthalpie massique reste constante, donc il suit la courbe $h = \text{cst}$

par conséquent, sa température diminue. Par contre, si on part d'une pression trop forte, cette loi n'est plus vraie.

En pratique, on constate que la plupart des gaz, à température ambiante, subissant une détente de Joule-Thomson avec une chute de pression raisonnable, se refroidissent. C'est le cas par exemple de la cartouche de butane qui sert à alimenter le réchaud à gaz (quoique dans ce cas, l'évaporation du liquide en gaz joue un rôle prépondérant).

FIGURE T7.2 : Isenthalpiques du diazote.



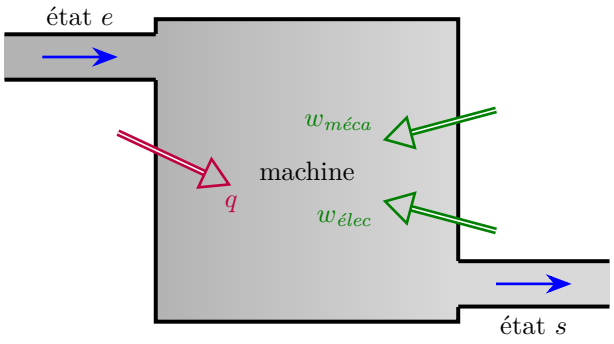
T7.B. Étude énergétique d'un système quelconque en écoulement

La détente de Joule-Thomson est un exemple très simple de système en écoulement. Dans cette section, nous allons établir l'équation générale des systèmes en écoulement.

Premier principe industriel, ou équation des machines

Considérons une machine traversée par un fluide circulant dans un régime permanent avec un débit massique D_m. Le fluide arrive dans un état initial e et ressort dans un état s après avoir reçu :

- un travail utile de la part de pièces mobiles, caractérisé par une puissance mécanique $\mathcal{P}_{méca}$ ou par un travail mécanique massique $w_{méca}$
- un travail utile électrique, caractérisé par une puissance électrique $\mathcal{P}_{élec}$ ou par un travail électrique massique $w_{élec}$
- un transfert thermique caractérisé par une puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$ ou par un transfert thermique massique q



Alors le bilan énergétique de cette machine s'écrit

$$\Delta^{e\to s}\left[h+gz+\frac{1}{2}k^2\right]=w_{méca}+w_{élec}+q=w'+q \qquad \text{(T7.2a)}$$

$$D_m\Delta^{e\to s}\left[h+gz+\frac{1}{2}k^2\right]=\mathcal{P}_{méca}+\mathcal{P}_{élec}+\mathcal{P}_{th} \qquad \text{(T7.2b)}$$

où h représente l'enthalpie massique, g l'accélération de la pesanteur, z l'altitude du fluide et k sa vitesse [a] ; enfin $\Delta^{e\to s}$ représente la variation de ces grandeurs entre l'état initial (entrée) et l'état final (sortie).

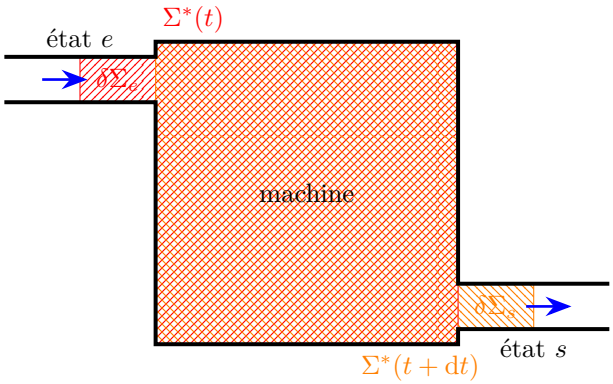
a. Eh oui, v, w et c sont déjà pris en thermo !

Démonstration

On prend les notations proposées dans l'énoncé de cette loi, et ajoutant la pression P, le volume massique v et l'énergie interne massique u. On notera avec un indice $_e$ les caractéristiques dans l'état initial et avec un $_s$ celles de l'état final.

On définit un système Σ^* ainsi :

- à l'instant t, le système est formé de la machine plus la quantité $\delta\Sigma_e$ qui va entrer dans la machine en un temps dt
- à l'instant $t+\mathrm{d}t$, le système est constitué de la machine plus la quantité $\delta\Sigma_s$ qui est sortie de la machine en un temps dt.



Ce système est fermé ; par conservation de sa masse, il est évident que $\delta m_{\delta\Sigma_e}=\delta m_{\delta\Sigma_s}$, qu'on notera δm.
Le premier principe appliqué à ce système indique que $\mathrm{d}(E_{macro}+U)=\delta W+\delta Q$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } \mathrm{d}(E_{macro}+U) &= [E_{macro}+U](t+\mathrm{d}t)-[E_{macro}+U](t)\\
&= [E_{macro}+U]_{machine(t+\mathrm{d}t)}+\delta[E_{macro}+U]_{\delta\Sigma_s}\\
&\qquad -[E_{macro}+U]_{machine(t)}-\delta[E_{macro}+U]_{\delta\Sigma_e}\\
&= \delta[E_{macro}+U]_{\delta\Sigma_s}-\delta[E_{macro}+U]_{\delta\Sigma_e}\ \text{(régime permanent)}\\
&= \delta m\left([e_{macro}+u]_s-[e_{macro}+u]_e\right)\\
&= \delta m\left(\frac{1}{2}k_s^2+gz_s+u_s-\frac{1}{2}k_e^2-gz_e-u_e\right)
\end{aligned}$$

car e_{macro} est la somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie potentielle de pesanteur massique.
Le terme δQ peut simplement s'écrire $\delta Q=q\delta m$ où est le transfert thermique par unité de masse. Pour le travail, $\delta W=\delta W_{pression}+\delta W'=\delta W_{pression\ en\ entrée}+\delta W_{pression\ en\ sortie}+(w_{méca}+w_{élec})\,\delta m$

$$=+P_ev_e\delta m-P_sv_s\delta m+(w_{méca}+w_{élec})\,\delta m$$

En mettant tous ces résultats dans le premier principe, et en simplifiant par δm, on trouve $u_s + gz_s + \frac{1}{2}k_s^2 - u_e - gz_e - \frac{1}{2}k_e^2 = P_e v_e - P_s v_s + + w_{méca} + w_{élec} + q$. En passant les termes Pv à gauche, on les combine avec les termes u pour former l'enthalpie massique $h = u + Pv$. On obtient alors bien

$$\Delta^{e\to s}\left[h + gz + \frac{1}{2}k^2\right] = +w_{méca} + w_{élec} + q$$

La seconde équation s'obtient simplement en remarquant que $w_{méca}$ est le travail utile par unité de masse et $\mathcal{P}_{méca}$ par unité de temps, c'est-à-dire que $w_{méca} = \frac{\delta W_{méca}}{\delta m} = \frac{\mathcal{P}_{méca}\mathrm{d}t}{\delta m} = \frac{\mathcal{P}_{méca}}{D_m}$ et de même pour $w_{élec}$ et aussi pour $q = \frac{\mathcal{P}_{th}}{D_m}$.

! Dans l'équation des machines, les termes gz et $\frac{1}{2}k^2$ ont pour unité SI des $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$, donc il faut absolument mettre les enthalpies massiques en $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ et non pas en $\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

Remarque : Considérons un kilogramme d'eau liquide.

— si sa température augmente de 1 °C alors son enthalpie augmente 4200 J.

— pour obtenir la même variation d'énergie potentielle de pesanteur, il faut avoir $mg\Delta z = 4200$ soit environ $\Delta z = 420\,\mathrm{m}$

— pour obtenir la même variation d'énergie cinétique, en partant d'une vitesse initiale nulle, il faut atteindre en sortie une vitesse $k = \sqrt{2\times 4200} = 92\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 330\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

Ces ordres de grandeur permettent de voir que les variations d'énergie mécanique sont le plus souvent négligeables devant les énergies mises en jeu lors de changements de températures, et à plus forte raison devant des changements d'état. En pratique :

— on ne tient compte des variations d'altitudes que lorsqu'elles sont très importantes, à savoir dans les barrages

— on ne tient compte des variations d'énergie cinétique que lorsque la vitesse en sortie est très grande, à savoir dans les réacteurs d'avions ou les tuyères d'hélicoptères.

De manière générale, si l'énoncé d'un problème ne donne pas d'indication concernant les variations d'altitude ou de vitesse, c'est qu'on les néglige.

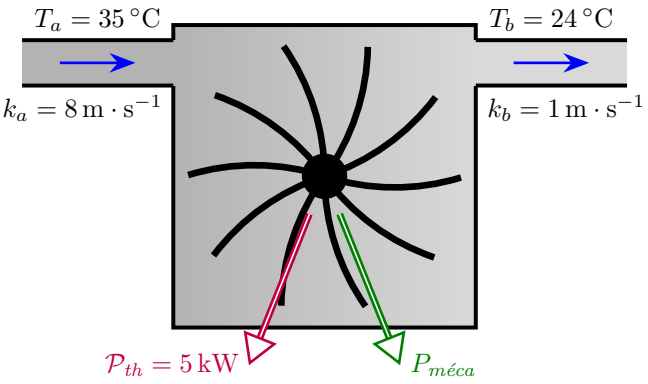
Remarque : Le travail utile est apporté par des pièces mécaniques mobiles dans la machine : pales, turbine, …. Si l'énoncé indique : « il n'y a aucune pièce mécanique mobile », cela signifie que $w_{méca} = 0$.

Exemple : Bilan énergétique d'une turbine

On considère une turbine traversée par un fluide dont l'enthalpie ne dépend que de la température ; toutes les données sont sur la figure (attention au sens des flèches), les variations d'altitude sont négligeables.

Débit massique : $D = 10\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

$c_{p,fluide} = 1{,}9\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$



En appliquant l'équation des machines, calculez la puissance mécanique utile $P_{méca}$ produite par cette turbine.

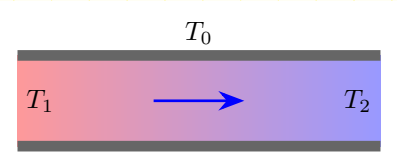
L'équation des machines s'écrit ici $D\left[\Delta h + \frac{1}{2}\Delta k^2\right] = -\mathcal{P}_{méca} - \mathcal{P}_{th}$. Or $\Delta h = c_p\Delta T$ donc on peut écrire $\mathcal{P}_{méca} = Dc_p.(T_b - T_a) + \frac{D}{2}\left(k_b^2 - k_a^2\right) - P_{th} = 204\,\mathrm{kW}$

T7.C. Bilans entropiques des systèmes en écoulement (Hors programme)

Les bilans entropiques des systèmes en écoulement ne sont pas au programme de première année. On va donc simplement se contenter d'un exemple illustrant comment on effectue un tel bilan.

Exemple : Création d'entropie par refroidissement d'un fluide chaud

On considère un tuyau dans lequel circule un fluide de capacité thermique massique $c = 1{,}4\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. Ce fluide entre à la température $T_1 = 40\,°\text{C}$ et circule dans le tuyau tout en se refroidissant au contact de l'air extérieur qui est à $T_0 = 8\,°\text{C}$; en sortie, le fluide n'est plus qu'à $T_2 = 21\,°\text{C}$. L'écoulement est permanent, sans pièces mécanique mobile, lent et horizontal.



1. Calculez la quantité de chaleur massique q reçue par le fluide, en appliquant l'équation des machines.
2. Calculez l'entropie créée s_{cr} par unité de masse. On rappelle que la variation d'entropie d'un fluide de capacité C dont la température passe de T_i à T_f s'écrit $\Delta S = C.\ln\frac{T_f}{T_i}$.

1. En appliquant l'équation des machines : $\Delta\left(h + gz + \frac{1}{2}k^2\right) = w' + q$; or ici $k = 0$ (écoulement lent), $z = 0$ (écoulement horizontal), $w' = 0$ (pas de pièces mobiles, par de source électrique), donc $q = \Delta h = c(T_2 - T_1) = -26{,}6\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
2. On définit le système fermé Σ^* :
   - à l'instant t, le système est formé de la machine plus la quantité $\delta\Sigma_1$ qui va entrer dans la machine en un temps $\mathrm{d}t$
   - à l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système est constitué de la machine plus la quantité $\delta\Sigma_2$ qui est sortie de la machine en un temps $\mathrm{d}t$.

   Par conservation de la masse en régime permanent, il est évident que $\delta m_{\delta\Sigma_1} = \delta m_{\delta\Sigma_2}$, noté δm.
   Le second principe appliqué à ce système indique que $\mathrm{d}S = \delta S_{éch} + \delta S_{cr}$. Or $\mathrm{d}S = S(t+\mathrm{d}t) - S(t) = S_{machine(t+\mathrm{d}t)} + s_2\delta m - S_{machine(t)} - s_1\delta m = \delta m.(s_2 - s_1)$ en notant s_1 et s_2 les entropies massiques en entrée et en sortie du tuyau. De plus, $\delta S_{éch} = \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{q\delta m}{T_0}$ et $\delta S_{cr} = s_{cr}\delta m$ avec s_{cr} l'entropie créée massique. En mettant tout ensemble : $\Delta s.\delta m = \frac{q}{T_0}\delta m + s_{cr}\delta m$ soit $s_{cr} = \Delta s - \frac{q}{T_0} = c\ln\frac{T_2}{T_1} - c\frac{T_2 - T_1}{T_0} = 192\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

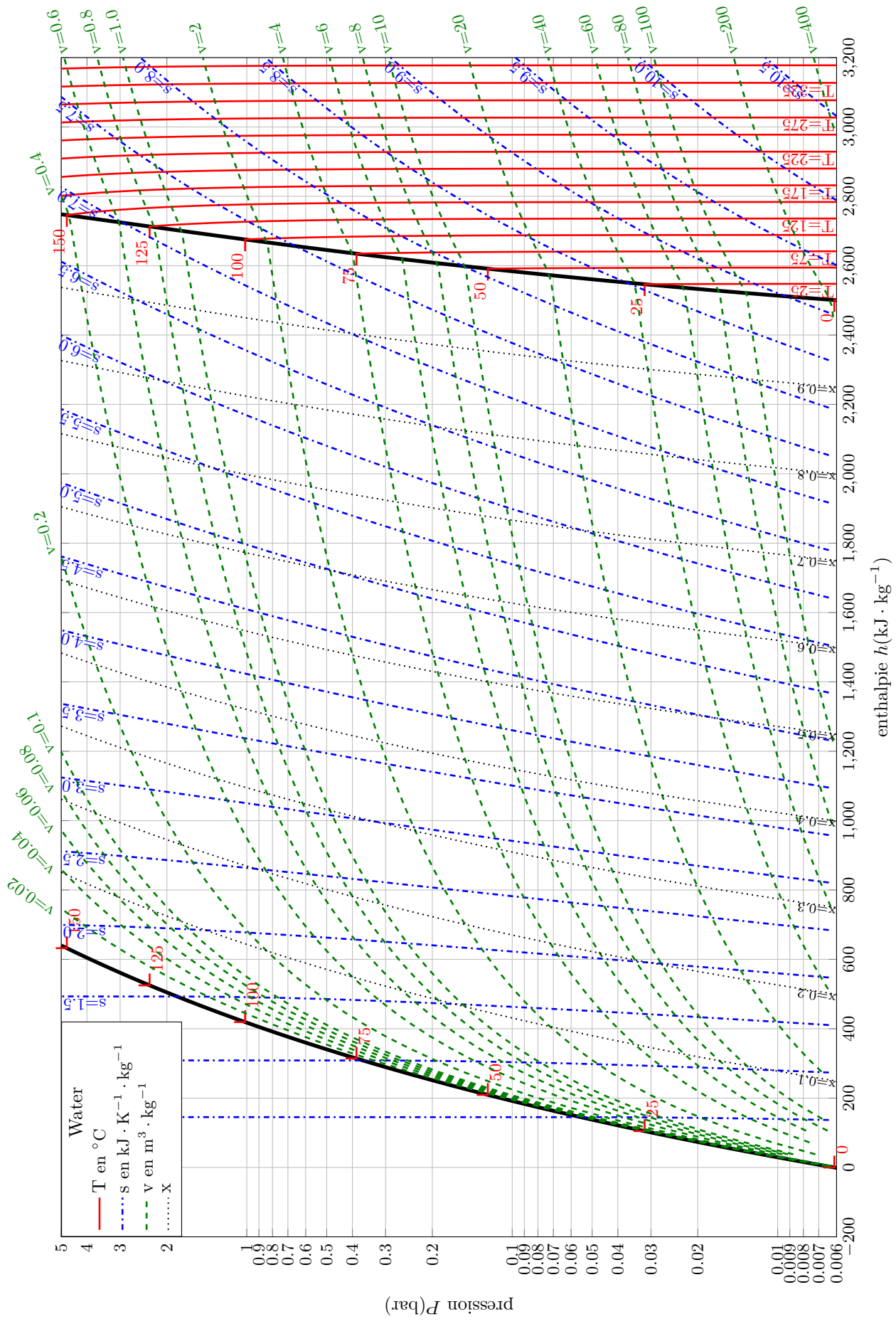
T7.D. Utilisation d'un diagramme enthalpique

Avec le premier principe industriel, on en vient à étudier des fluides circulant dans des machines réelles, avec très souvent des changements d'états (liquide/vapeur). Dans ces conditions, les gaz ne se comportent plus vraiment comme des gaz parfaits. On utilise alors des mesures expérimentales sur les fluides qui sont regroupées dans des graphiques ; un des plus utilisés est le diagramme enthalpique (ou diagramme de Mollier).

Définition : Diagramme enthalpique, ou diagramme de Mollier

Un diagramme enthalpique représente les variables d'états d'un fluide dans un diagramme $(\log P, h)$. On y trace les isobares ($P = \text{cst}$, horizontales), les isenthalpiques ($h = \text{cst}$, verticales), les isothermes ($T = \text{cst}$), les isochores ($v = \text{cst}$), les isentropiques ($s = \text{cst}$) et la courbe de saturation (cf. figure T7.3).

FIGURE T7.3 : Diagramme enthalpique de l'eau entre 0,006 bar et 5 bar.



Quelques remarques sur ce diagramme enthalpique de l'eau :

— le code R718 en haut à gauche est le code du fluide étudié (ici de l'eau) selon la norme 34-1992 d'ANSI/ASHRAE utilisée par l'IUPAC (cf la liste ici) ;

— l'enthalpie massique en abscisse est graduée de $-200\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ à $3200\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$; les courbes isenthalpiques correspondantes sont des droites verticales ;

— la pression en ordonnée est graduée de 0,006 bar à 5 bar en échelle logarithmique ; les courbes isobares correspondantes sont des droites horizontales ;

— la courbe en noir épais est la courbe de saturation (tronquée en haut sur ce diagramme, mais souvent on la voit jusqu'au point critique).

— l'état de l'eau est liquide à gauche de la courbe d'ébullition et vapeur à droite de la courbe de rosée. Entre les deux courbes, il y a coexistence liquide/vapeur. Des courbes en pointillé noir, graduées en bas $x = 0,10$ jusqu'à $0,90$, indiquent les fractions massiques de vapeur (calculées grâce à la loi des moments) ;

— les courbes en rouge sont les isothermes. Elles sont représentées à droite dans la zone vapeur, de 0 °C à 360 °C ; une fois arrivées à la courbe de rosée, on ne voit plus qu'on petit trait horizontal ; en effet, sous cette courbe, les isothermes sont aussi des isobares, donc on ne les dessine plus pour ne pas surcharger le dessin. On reprend ce petit trait en face, au même niveau sur la courbe d'ébullition, prolongée par un petit trait vertical : en effet, dans la partie liquide, les isothermes sont quasiment verticales ;

— les courbes en tirets verts sont les isochores (v = cst) ; le volume massique y est indiqué dessus en $\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$ (c'est écrit en haut à gauche) ;

— les courbes en tirets-points bleus sont les isentropiques (s = cst) ; l'entropie massique y est indiquée en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ (pareil, c'est écrit en haut à gauche).

On peut tracer de tels diagrammes à l'aide du logiciel freeware Coolpack ou de la librairie CoolProp.

La figure T7.4 montre par exemple un cycle moteur avec de l'eau (les isochores ont été supprimées pour plus de lisibilité) :

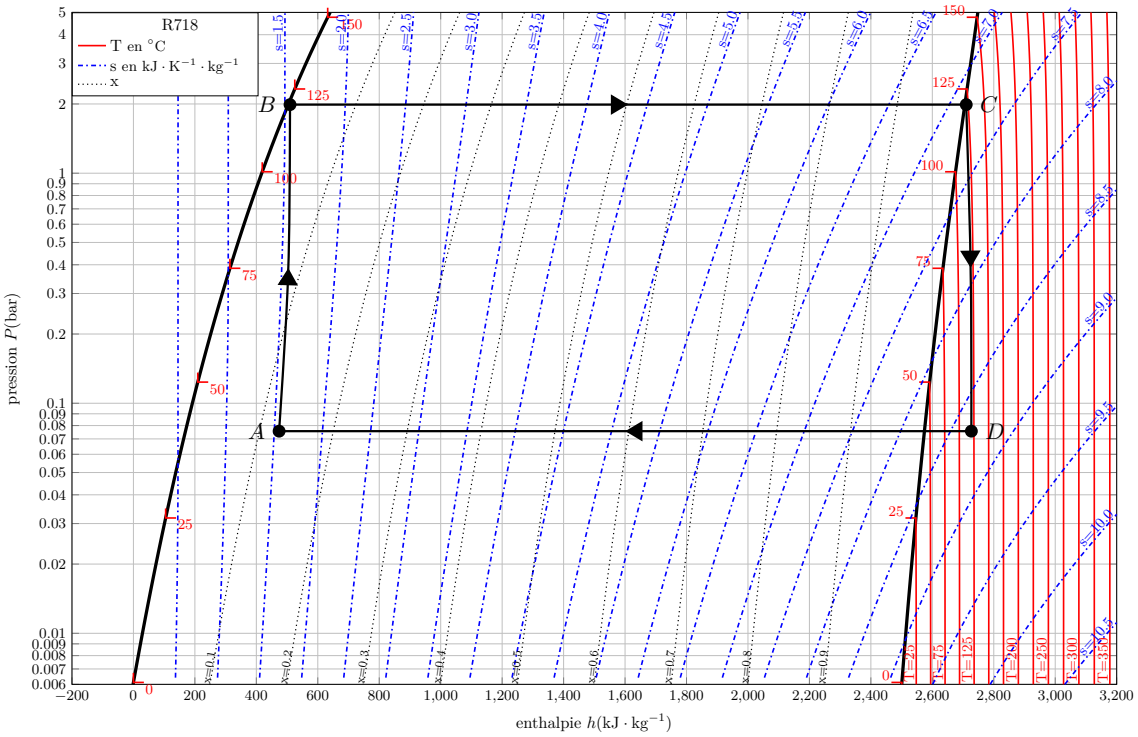
— AB : compression isentropique du mélange liquide/vapeur de 0,075 bar, 40 °C à 2 bar, 120 °C

— BC : chauffage et évaporation isobare de l'eau sous 2 bar

— CD : détente isotherme de la vapeur jusqu'à 0,075 bar

— DA : refroidissement isobare de la vapeur.

FIGURE T7.4 : Exemple de cycle moteur de l'eau.



T7. Systèmes en écoulement

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Machines thermiques	
	Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération.

T7. Systèmes en écoulement

Quelques conseils

✎ Quand il faut redémontrer un bilan à un système ouvert, il faut toujours soigneusement définir un système fermé.

✎ Faites attention aux unités ; mettez si possible toutes les énergies massiques en joule par kilogramme.

✎ Entraînez-vous à lire des diagrammes enthalpiques. Normalement, dans les énoncés, on ne met que les courbes qui sont utiles, ce qui rend l'ensemble moins confus. Mais le jour des concours, il n'y a pas de couleurs.

✎ Retenez bien cette propriété fondamentale : sous le courbe de saturation, une isotherme est aussi une isobare. Le système est alors un mélange de deux états, les deux états situés aux deux extrémités du palier.

T7. Systèmes en écoulement

QCMs

réponses page 1194

✓ QCM : Bilans énergétiques sur des systèmes en écoulement ✗

Dans chaque question, il faut appliquer l'équation des machines en notant bien quels sont les termes nuls ou non nuls. On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Q1. Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 2{,}3\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ circule à faible vitesse dans un tuyau horizontal où il n'échange aucun travail utile. Il entre à 28 °C et ressort à 21 °C. Les pertes thermiques par kilogramme de fluide transféré valent :

(a). $640\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ (b). $16\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$
(c). $640\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ (d). $16\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

Q2. Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 0{,}6\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ circule à faible vitesse dans un tuyau horizontal où il n'échange aucun travail utile. Il entre à 11 °C et ressort à 39 °C. Le débit massique vaut $35\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$. La puissance thermique reçue vaut :

(a). 480 W (b). 588 W
(c). 588 mW (d). 480 kW

Q3. Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 1{,}0\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et de masse volumique $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, arrive à l'entrée d'une tuyère horizontale avec une température de 600 °C et une vitesse négligeable. Après une détente adiabatique sans échange de travail utile, il ressort avec une température de 130 °C. Sa vitesse en sortie vaut :

(a). $970\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (b). $940\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
(c). $31\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (d). $690\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

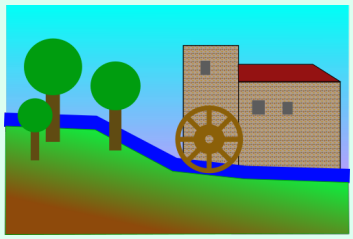
Q4. Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et de masse volumique $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, arrive à l'entrée d'une conduite forcée à 18 °C avec une vitesse négligeable. Après une descente sans échange de travail utile ni de chaleur, il ressort avec 0,1 °C de plus, 530 m plus bas. Sa vitesse en sortie vaut :

(a). $106\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (b). $69\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
(c). $102\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (d). $98\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Q5. Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et de masse volumique $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, arrive à l'entrée d'une machine à 19 °C avec une vitesse de $8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Après avoir travaillé adiabatiquement dans la machine, il ressort avec la même température, à $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, à la même altitude. Le travail utile échangé par unité de masse vaut :

(a). $21\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ (b). $13\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$
(c). $5{,}5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ (d). $30\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$

Q6. De l'eau, de capacité thermique à pression constante $c_p = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et de masse volumique $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, arrive à l'entrée d'un moulin avec une vitesse de $3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Après avoir travaillé adiabatiquement sur la roue à aubes, elle ressort avec la même température, à $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et 4 m plus bas. Le débit volumique d'eau vaut $100\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$. La puissance fournie au moulin vaut :



(a). 3,6 kW
(b). 8 W
(c). 460 W
(d). 4,2 kW

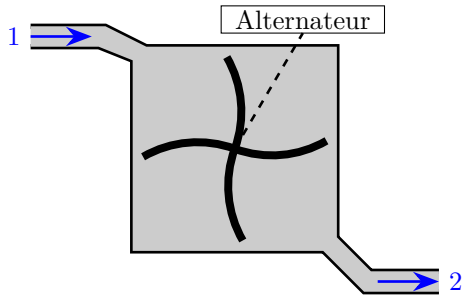
T7. Systèmes en écoulement

Exercices

réponses page 1195

Exercice T7.1 : Turbine de barrage [*]

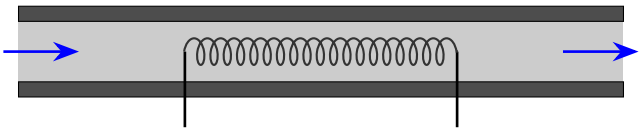
Une turbine de barrage sert à transformer l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau en énergie mécanique de rotation, pour produire ensuite de l'électricité.
En régime stationnaire, l'eau arrive dans l'état 1 avec un débit massique $D = 3000\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et une vitesse négligeable. Elle passe dans la turbine calorifugée ; celle-ci récupère une puissance utile $\mathcal{P}$ qui part vers un alternateur. Elle ressort alors $z = 40\,\mathrm{m}$ plus bas dans l'état 2, avec une vitesse $w = 8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Entre l'état 1 et l'état 2, sa température a augmenté de $\Delta T = 0{,}01\,^\circ\mathrm{C}$.
On donne : $c_{P,eau} = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.



1. Calculez la puissance utile reçue par l'alternateur.
2. Calculez la puissance maximale que pourrait récupérer la turbine avec le même débit et la même hauteur de chute. Déduisez-en le « rendement » de la turbine.
3. La turbine entraîne un alternateur qui produit de l'électricité avec un rendement de 85 % ; calculez le rendement de l'ensemble.

Exercice T7.2 : Chauffage d'un fluide en écoulement [*]

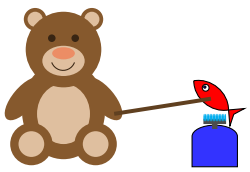
On fait entrer lentement un fluide à 15 °C dans un tube horizontal très bien calorifugé contenant une résistance de 10 Ω parcourue par un courant de 0,5 A.



À l'aide d'un bilan enthalpique, déterminez la capacité thermique massique à pression constante du fluide, sachant qu'il sort à 18,3 °C et que le débit massique de fluide est $1\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}$.

Exercice T7.3 : Détente du gaz propane [**]

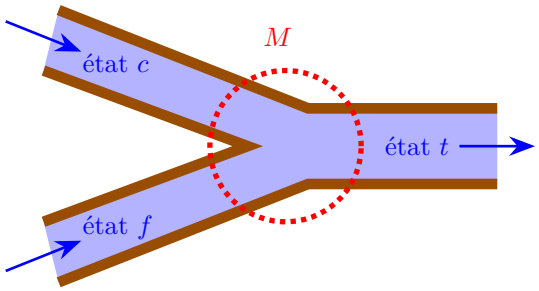
Une « bouteille de gaz » contient du propane liquéfié en équilibre avec son gaz, sous une pression p_1 à $T_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$. Lorsqu'on ouvre le robinet, le gaz se détend de manière isenthalpique (détente de Joule-Kelvin), jusqu'à la pression $p_2 = 1\,\mathrm{bar}$.
À l'aide du diagramme enthalpique du propane (R290) (fig. T7.5 après les énoncés), répondez aux questions suivantes :



1. Que vaut la pression p_1 ?
2. Dessinez la transformation suivie par le gaz propane.
3. Déterminez la température finale T_2 du gaz.
4. Déterminez l'entropie massique créée lors de cette détente du gaz.
5. Lorsque le gaz s'échappe de la bouteille, une quantité quasiment équivalente de liquide se transforme en gaz. Déterminez l'enthalpie massique puis l'entropie massique de vaporisation du propane à T_1.

Exercice T7.4 : Mitigeur [**]

Un mitigeur permet de mélanger de l'eau chaude et de l'eau froide pour obtenir de l'eau tiède.
En entrée, l'eau froide arrive dans un état noté f, avec une température T_f et un débit massique d_f. L'eau chaude arrive dans un état c, et l'eau ressort tiède dans un état t. L'écoulement est lent, les changements d'altitude sont faibles. L'eau est considérée comme un liquide incompressible.
On note M le système ouvert entouré en pointillés sur la figure, dans lequel les deux eaux se mélangent ; il ne contient aucune pièce mécanique mobile. On suppose qu'on est en régime permanent.

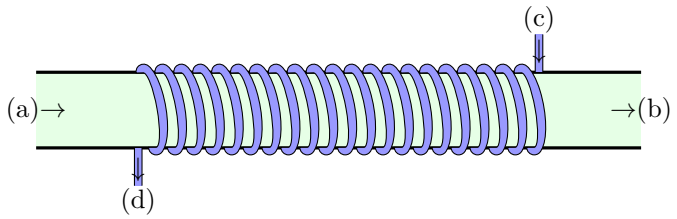


1. Soit M^* le système défini ainsi :
   - à l'instant t, M^* ={M+les masses $\delta m_f = d_f.\mathrm{d}t$ d'eau froide et $\delta m_c = d_c.\mathrm{d}t$ d'eau chaude qui vont entrer}
   - à l'instant $t+\mathrm{d}t$, M^* ={M+la masse $\delta m_t = d_t.\mathrm{d}t$ d'eau tiède qui est sortie}

   Faites un schéma de ce système.
2. Par un rapide bilan de masse appliqué à M^*, reliez d_f, d_c et d_t.
3. Par une application précise du premier principe à ce système, montrez que $d_t h_t - d_f h_f - d_c h_c = P_{th}$ où P_{th} est la puissance thermique reçue et h les enthalpies massiques.
   Réexprimez cette relation en fonction de d_f, d_c, T_f, T_c, T_t, P_{th} et la capacité calorifique c_p de l'eau, qu'on supposera constante.
4. On dispose d'eau froide à $T_f = 15\,°\mathrm{C}$ et d'eau chaude à $T_c = 70\,°\mathrm{C}$. On souhaite obtenir de l'eau à $35\,°\mathrm{C}$ avec un débit $d_t = 8\,\mathrm{kg/min}$. Calculer les débits d_f et d_c nécessaires si le mitigeur est parfaitement calorifugé.
5. On règle les débits calculés à la question précédente, et on mesure $T_t = 34{,}7\,°\mathrm{C}$ en sortie. Calculez les pertes thermiques P_{th}. *Données* : $c_p = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.
6. La variation d'entropie massique de l'eau passant d'une température T_1 à une température T_2 s'écrit $\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$. Calculez l'entropie créée par minutes lors du fonctionnement adiabatique de la question 4. Reprenez la même question en tenant compte des pertes thermiques (question 5), en supposant que la pièce est à $21\,°\mathrm{C}$.

Exercice T7.5 : Condenseur [**]

Un fluide arrive dans un tuyau dans l'état (a) gazeux ; le but est de le liquéfier ; il ressort alors dans l'état (b) à la même température $T_b = T_a$, mais liquide. Pour cela, il échange de la chaleur avec un liquide réfrigérant (de l'eau) arrivant à contre-courant dans l'état (c) et repartant dans l'état (d) : cette eau reste liquide, mais sa température passe de $T_c = 18\,°\mathrm{C}$ à $T_d = 45\,°\mathrm{C}$. De débit massique de l'eau vaut $D_{eau} = 14\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Il n'y a aucune pièce mécanique mobile.
Données : $c_{p,eau} = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$; $\ell_{v,fluide}(T_a = T_b) = 1370\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$



1. Calculez le débit massique D_{liq} de fluide qui peut être liquéfié si on suppose que l'ensemble est calorifugé.
   Indication : appliquez deux fois l'équation des machines, en notant par exemple $\mathcal{P}_{échangée}$ la puissance thermique passant du fluide vers l'eau.
2. En réalité, l'ensemble perd une puissance thermique $\mathcal{P}_{pertes} = 62\,\mathrm{kW}$. Calculez le nouveau débit de fluide qui est liquéfié.

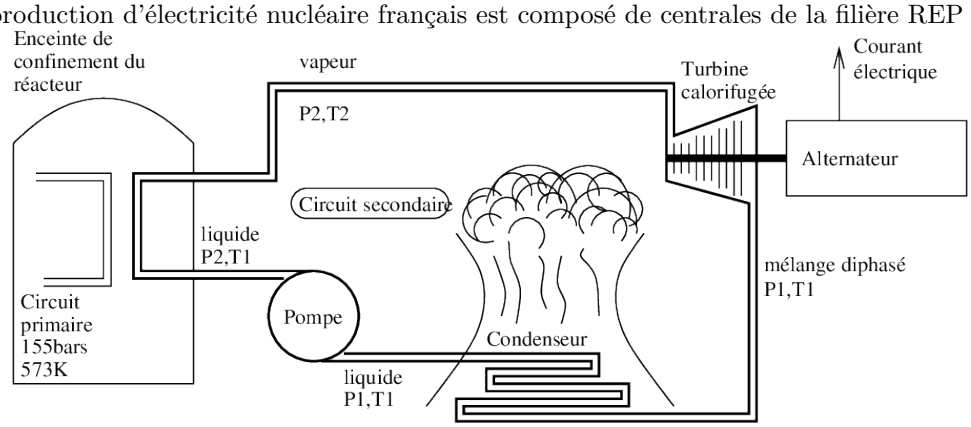
Exercice T7.6 : Compresseur [***]

Un compresseur a pour rôle d'augmenter la pression d'un fluide. On considère ici un compresseur travaillant sur du 1,1,1,2-tétrafluoroéthane ou R134a dont le diagramme enthalpique est donné en figure T7.6 à la fin des énoncés.

1. **Compression mono-étagée**
   En entrée du compresseur, on dispose de vapeur saturante à $-10\,°C$ sous $2\,bar$. En sortie, on souhaite obtenir une pression de $20\,bar$. On définit le rendement isentropique du compresseur comme $\eta_s = \frac{h_{f'} - h_i}{h_f - h_i}$ où h_i désigne l'enthalpie massique au départ, h_f à la fin, et $h_{f'}$ l'enthalpie massique finale si le compresseur était isentropique dans son fonctionnement (avec la même pression d'arrivée).
   (a) Placez sur le diagramme le point de départ I et le point fictif F' qui serait atteint en cas de fonctionnement isentropique.
   (b) Le rendement isentropique vaut $\eta_s = 85\,\%$. Déduisez-en h_f, et placez le vrai point d'arrivée sur le diagramme. Mesurez le rapport v_f/v_i des volumes massiques, et les températures finales T_f et $T_{f'}$.
   (c) Quel est le travail utile massique fourni par le compresseur si on suppose que les pertes thermiques sont négligeables ?
2. **Compression multi-étagée**
   On propose le protocole suivant :
   (a) on comprime la vapeur saturante à $-10\,°C$ sous $2\,bar$ jusqu'à $7\,bar$ (point A) ; le rendement isentropique vaut 0,85.
   (b) on laisse refroidir jusqu'à obtenir de la vapeur saturante sous $7\,bar$ (point B).
   (c) on comprime jusqu'à $20\,bar$ avec le même rendement isentropique (point C).
   Placez les points A et B. Mesurez le travail utile massique fourni, et la température finale.

Exercice T7.7 : Étude d'un réacteur à eau pressurisée [***]

Le parc de production d'électricité nucléaire français est composé de centrales de la filière REP :



On étudie l'eau ($M = 18\,g \cdot mol^{-1}$) contenue dans le circuit secondaire, qui est un circuit fermé. On se propose de modéliser son évolution au prix de quelques approximations par le cycle suivant :

— $A \to B$: l'eau sort liquide du condenseur, à la température T_1 et la pression P_1. Elle subit alors dans la pompe une compression durant laquelle sa température ne varie pratiquement pas. On considérera que les échanges thermiques sont négligeables lors de cette compression, qui l'amène à la pression P_2.

— $B \to E$: l'eau passe dans un échangeur qui permet des transferts thermiques entre le circuit primaire (chauffé par le réacteur) et le circuit secondaire. On peut décomposer en deux transformations ce qui se passe alors : l'eau liquide s'échauffe de manière isobare jusqu'à T_2 (état D), où elle se trouve sous forme de liquide saturant ; puis elle se vaporise entièrement jusqu'à l'état E, de manière isobare.

— $E \to F$: la vapeur d'eau se détend de manière réversible dans une turbine calorifugée jusqu'à l'état F, à P_1 et T_1. Durant cette détente, une fraction $(1 - x)$ de l'eau redevient liquide, tandis qu'une fraction x reste gazeuse.

— $F \to A$: la vapeur restante se condense dans le condenseur de manière isobare.

L'écoulement est stationnaire dans tout ce problème. On rappelle que $R = 8{,}314\,J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$. On a extrait les volumes, enthalpies et entropies massiques des tables thermodynamiques :

		v ($\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$)		h ($\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$)		s ($\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$)	
T	$P_{v.sat}$	v_l	v_v	h_l	h_v	s_l	s_v
$T_1 = 293\,\mathrm{K}$	$P_1 = 0{,}023\,\mathrm{bar}$	$v_l(293)$	$v_v(293)$	85	2540	0,3	8,7
$T_2 = 573\,\mathrm{K}$	$P_2 = 80\,\mathrm{bar}$	$1{,}31 \times 10^{-3}$	0,026	1290	2890	$s_l(573)$	6,0

1. **Calcul des données manquantes**
   (a) Quelle est la relation entre la variation d'entropie d'un corps pur et sa variation d'enthalpie lors d'une vaporisation totale à température constante ? En déduire $s_l(573\,\mathrm{K})$.
   (b) Sachant que la vapeur d'eau sous 0,023 bar à 293 K peut être considérée comme un gaz parfait, calculer son volume massique $v_v(293\,\mathrm{K})$.
   (c) Donner sans calcul la valeur de $v_l(293\,\mathrm{K})$.
2. **Diagramme de Clapeyron**
   (a) Tracer dans le diagramme de Clapeyron l'allure de la courbe de saturation, des deux isothermes T_1 et T_2, et le cycle décrit par l'eau en précisant les points A, B, D, E et F.
   (b) La pente de AB est très grande (presque verticale) ; à quelle propriété physique cela correspond-il ?
3. **Entropie**
   (a) Justifier que (EF) est une isentropique.
   (b) Calculer le titre en vapeur x dans l'état F.
4. On note w_a le travail reçu par l'alternateur par unité de masse de fluide écoulé ; on négligera tout frottement. La turbine est calorifugée et horizontale, la vitesse de l'eau est négligeable, et on admet que tout le travail utile que reçoit la turbine est transmise à l'alternateur.
   Montrer que $w_a = h_E - h_F$. Calculer numériquement w_a.
5. **Rendement**
   (a) La capacité calorifique massique de l'eau liquide vaut $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$. Calculer le transfert thermique par unité de masse d'eau écoulée reçu par le système au niveau de l'échangeur avec le circuit primaire, q_{BE}.
   (b) On définit le rendement par $\frac{w_a}{q_{BE}}$. Le calculer. Que néglige-t-on dans cette définition ?
   (c) Comparer au rendement maximal qu'on pourrait avoir entre deux sources de température T_1 et T_2.



Turbine de centrale nucléaire

Exercice T7.8 : Moteur à réaction(ESIM) [***]

1. **Préliminaire**
   Un gaz s'écoule en régime permanent dans une canalisation [1] ; il traverse ensuite une partie active où il échange avec le milieu extérieur le travail w et la quantité de chaleur q (par unité de masse qui transite), puis il s'écoule dans une canalisation [2]. Les parois des canalisations [1] et [2] sont calorifugées. Dans la canalisation [1], le gaz a pour pression P_1, pour vitesse v_1 et pour enthalpie massique h_1 ; dans la

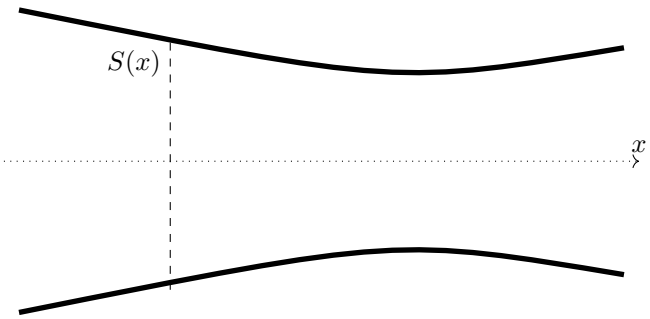
canalisation [2], le gaz a pour pression P_2, pour vitesse v_2 et pour enthalpie massique h_2.
Établir une relation, tirée du premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé, reliant les enthalpies et les vitesses en entrée et en sortie, et les échanges mécaniques et thermiques.

2. Dans un moteur à réaction, un gaz, assimilé à l'air, supposé parfait, subit des transformations qu'on considérera d'abord comme réversibles. Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (point 1). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2, et la température vaut alors T_2 (point 2). Il passe alors dans une chambre de combustion sans parties mobiles où sa température passe de T_2 à T_3, la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion est représentée par le point 3). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (point 4) ; cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les points 1 et 2. Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (point 5). Le gaz est rejeté avec la vitesse v (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1. On considérera que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.
Données numériques :
   - $T_1 = 290\,\mathrm{K}$; $P_1 = 1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.
   - Le rapport $a = P_2/P_1$ est égal à 5.
   - La température du gaz à l'entrée de la turbine vaut 1300 K. L'air est un gaz diatomique de masse molaire $29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ pour lequel $\gamma = 1{,}4$.
   - La chaleur massique de l'air à pression constante vaut $c_p = 1000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

   Les calculs demandés sont relatifs à l'unité de masse. Les grandeurs extensives correspondantes seront représentées avec une lettre minuscule. Représenter l'allure des transformations subies par le gaz dans le diagramme de Clapeyron.
   Dans les questions suivantes, on établira d'abord l'expression littérale, puis on donnera la valeur numérique des résultats demandés.
3. Déterminer l'expression de T_2 en fonction des données.
4. Quelle est le travail fourni à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur ?
5. Quelle est le transfert thermique reçu puis par unité de masse dans la chambre de combustion ?
6. Déterminer T_4 et T_5.
7. Quelle est la vitesse du gaz à la sortie de la tuyère ?
8. Quel est le rendement de ce moteur ?
   Indication : le but d'un réacteur est d'obtenir une poussée qui fait avancer l'avion ; on récupère donc de l'énergie cinétique.
9. En réalité, la tuyère n'a pas un fonctionnement réversible. Le gaz sort de la tuyère à une température T_5'. On définit le rendement de la tuyère par rapport à l'isentropique par $\eta = \frac{h_5' - h_4}{h_5 - h_4}$; il vaut 90 %.
   (a) Quelle est la température de sortie T_5' des gaz de la tuyère ?
   (b) Quelle est la nouvelle vitesse de sortie de ces gaz ?
   (c) Quelle est la variation d'entropie massique du gaz à la traversée de la tuyère ? On donne $\Delta s = c_p \ln \frac{T_{5'}}{T_4} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_5}{P_4}$.
   Évaluer alors le travail des forces de frottement interne à la traversée de la tuyère. Quel est le nouveau rendement du cycle ?

Exercice T7.9 : Profil d'une tuyère [****]

Une tuyère est un dispositif sans pièces mobiles visant à convertir de l'énergie interne en énergie cinétique. Un gaz chaud et sous haute pression entre dans la tuyère ; au fur et à mesure qu'il avance, il se détend, se refroidit, et accélère. L'éjection du gaz produit une poussée qui accélère un avion, une fusée, ...



À une abscisse x fixée, on note $S(x)$, $P(x)$, $T(x)$, $\mu(x)$, $h(x)$ la section de la tuyère, la pression du gaz, sa température, sa masse volumique et son enthalpie massique. On note avec un indice 0 la valeur de ces grandeurs au début de la tuyère ($x = 0$).

1. Le débit massique est constant, noté D ; reliez D aux grandeurs du gaz à une abscisse x donnée.
2. On modélise le gaz par un GP de masse molaire M et de rapport isentropique γ. Rappeler l'expression de C_{pm} puis de c_p (massique).
3. La transformation subie par le gaz dans la tuyère est rapide, on la suppose adiabatique. À partir d'un bilan enthalpique, montrez qu'une autre quantité est conservée.
4. On souhaite que la transformation soit réversible. Sous cette hypothèse, quelle loi relie $P(x)$, $T(x)$ et γ ?
5. Différenciez (logarithmiquement ou pas, à vous de voir) les 3 expressions précédentes, ainsi que la loi du GP reliant la pression, la température et la masse volumique. En éliminant $\mathrm{d}P$, $\mathrm{d}\mu$ et $\mathrm{d}T$, montrez que
$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mathrm{d}v \left[\frac{v}{(\gamma-1)\,c_p T} - \frac{1}{v}\right]$$
6. Quel doit être le signe de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$? En déduire que la section $S(x)$ doit décroître tant que v est inférieur à une valeur v_{lim} à exprimer, puis croître. Vérifiez que $v_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\mu}}$. Que représente v_{lim} ?

FIGURE T7.5 : Diagramme enthalpique du propane.

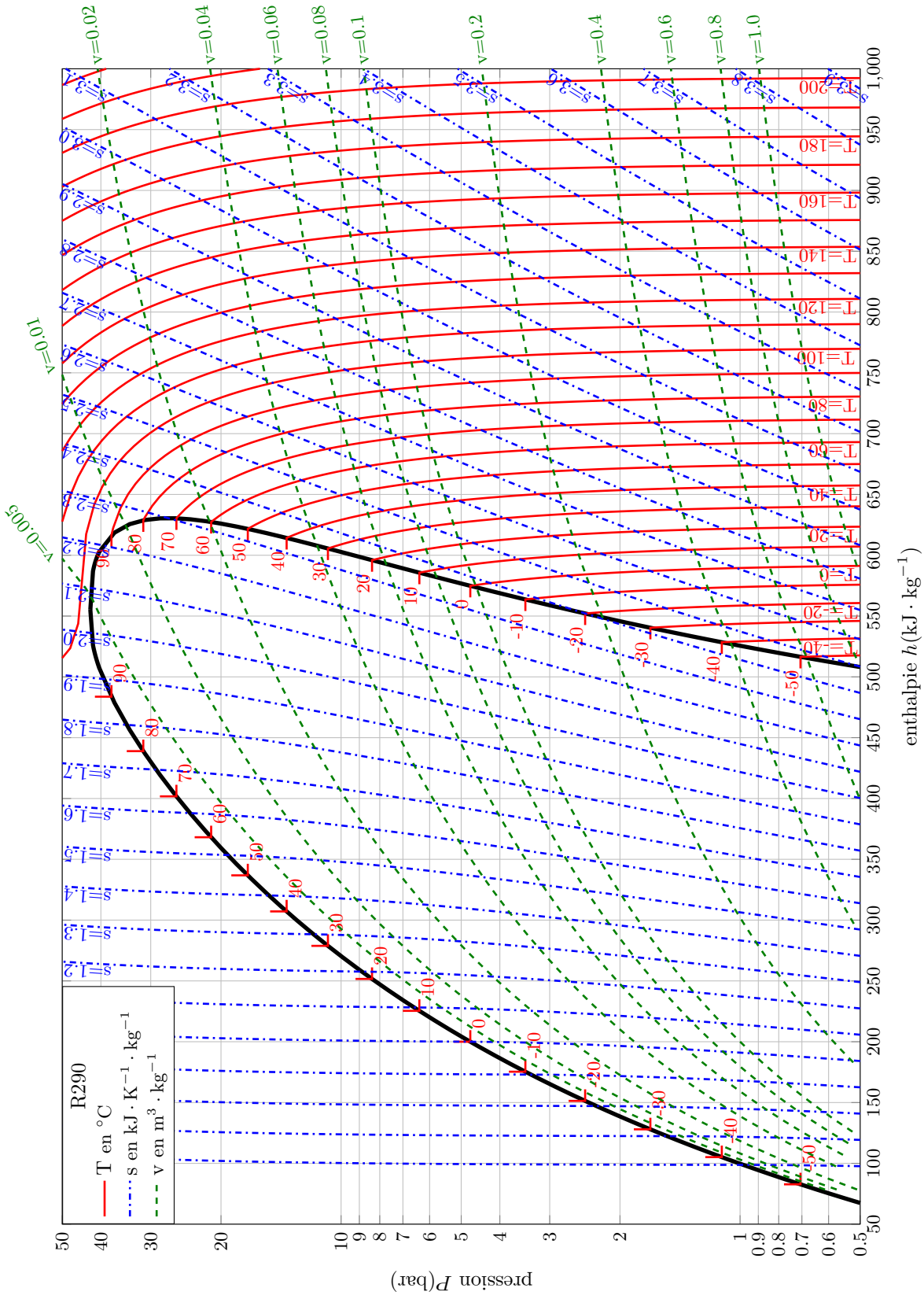
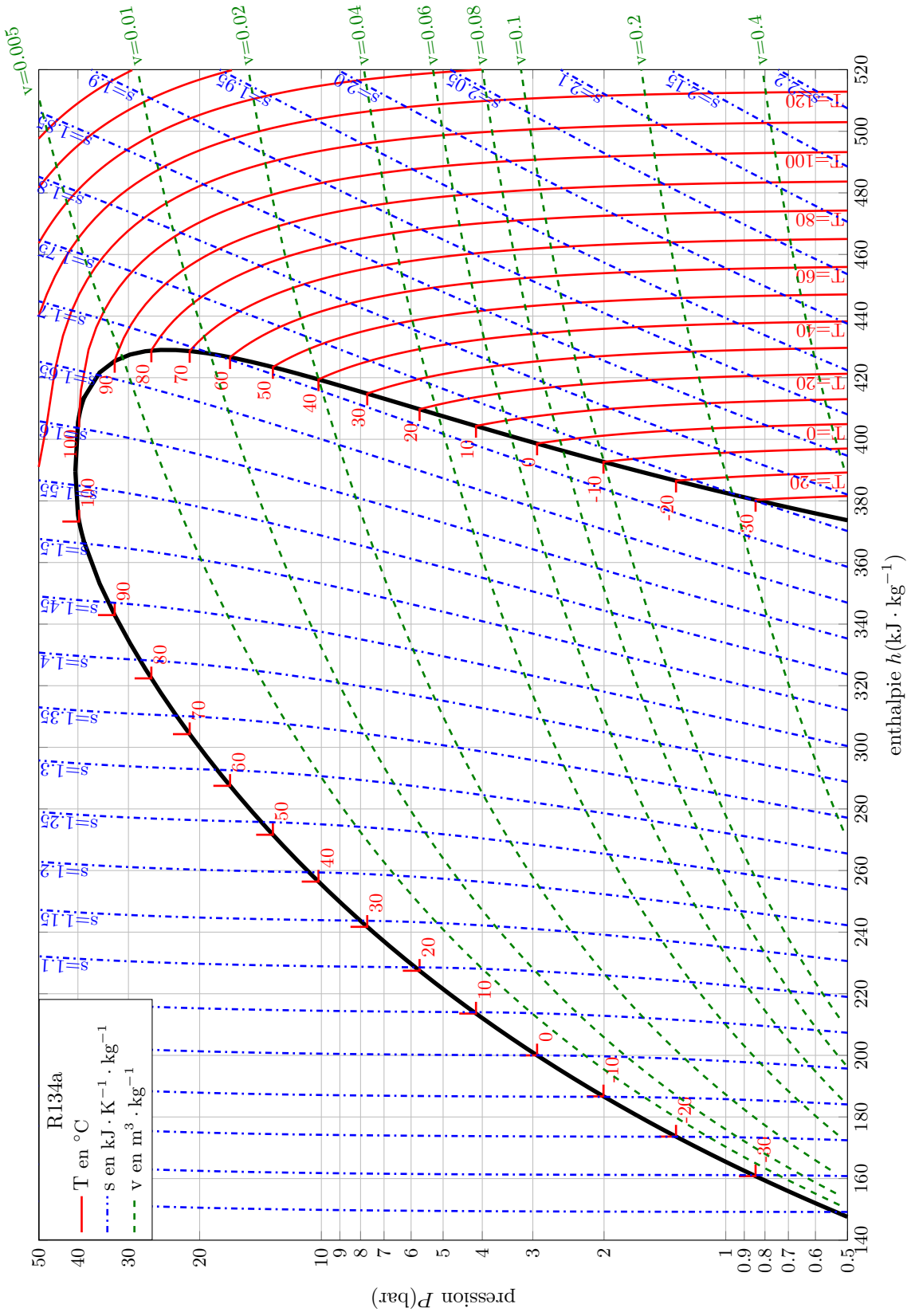


FIGURE T7.6 : Diagramme enthalpique du R134a



Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Bilans énergétiques sur des systèmes en écoulement

Q1.(d)
$\Delta h = c_p \Delta T = q$
Q2.(b)
$\mathcal{P}_{th} = q.D_m$
Q3.(a)
$\left(\frac{1}{2}v^2 - 0\right) + c_p \Delta T = 0$
Q4.(d)
$\left(\frac{1}{2}v^2 + 0\right) - (0 + gh) + c_p \Delta T = 0$
Q5.(d)
$w' = \Delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$
Q6.(d)
$w' = \Delta\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right)$ et $D_m = \rho.D_V$

Réponses aux exercices

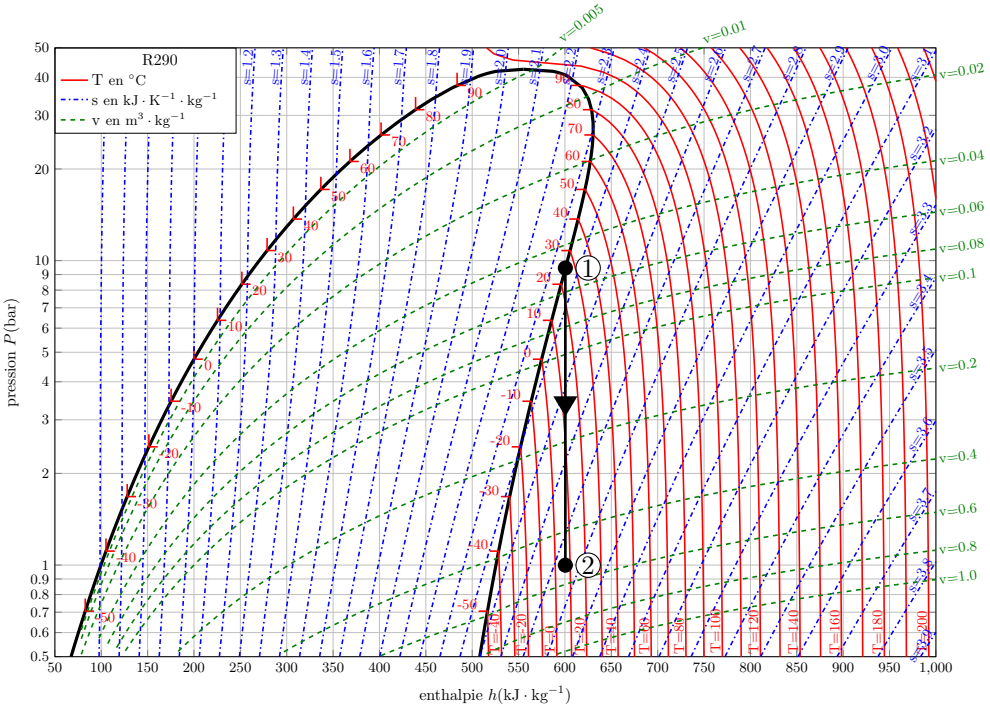
Corrigé de l'exercice T7.1 : Turbine de barrage [*]

1. On peut appliquer directement l'équation des machines : $D\left(h_2 - h_1 - gz + \frac{1}{2}w^2\right) = -\mathcal{P}$. Or $h_2 - h_1 = c_P(T_2 - T_1)$ donc $\mathcal{P} = D\left(gz - \frac{1}{2}w^2 - c_P\Delta T\right) = 950\,\text{kW}$
2. L'énergie serait entièrement récupérée si $\Delta T = 0$ et $w = 0$; on a donc $\mathcal{P}_{max} = Dgz = 1180\,\text{kW}$. Cette turbine a donc un rendement de $\frac{950}{1180} = 81\,\%$
3. Le rendement complet vaut $0,81 \times 0,85 = 69\,\%$.

Corrigé de l'exercice T7.2 : Chauffage d'un fluide en écoulement [*]

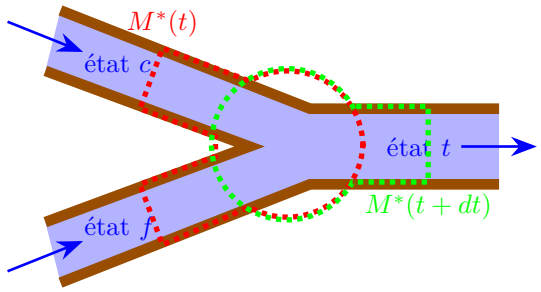
Par l'équation des machines : $h_s - h_e = \frac{RI^2}{D_m}$, donc finalement $c_p = \dfrac{RI^2}{D_m(T_s - T_e)} = 0{,}75\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice T7.3 : Détente du gaz propane [**]

1. À l'équilibre liquide/gaz sous $T_1 = 25\,^\circ\text{C}$, la pression vaut $p_1 = 9{,}5\,\text{bar}$.
2. 

3. Par lecture : $T_2 = 5\,^\circ\text{C}$
4. On lit $\Delta s = 2,73 - 2,35 = 0{,}38\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. Comme la détente est adiabatique, cela représente une entropie créée.
5. Par lecture : $l_v = 600 - 270 = 330\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ soit une entropie $\frac{330000}{273+25} = 1107\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice T7.4 : Mitigeur [**]



1.

2. La masse du système est constante, donc $m_M + d_f dt + d_c dt = m_M + d_t.dt$ donc $d_t = d_f + d_c$.

3. Le premier principe s'écrit $\mathrm{d}U = \delta W_{pression} + \delta Q$ ici (il n'y a ni énergie mécanique, ni pièces mobiles).
   Or $\mathrm{d}U = U(t+dt) - U(t) = U_M + u_t d_t \mathrm{d}t - (U_M + u_f d_f \mathrm{d}t + u_c d_c \mathrm{d}t) = (d_t u_t - d_f u_f - d_c u_c).\mathrm{d}t$. Le travail des forces de pression vaut $-P_t v_t d_t \mathrm{d}t + P_f v_f d_f \mathrm{d}t + P_c v_c d_c \mathrm{d}t$ et $\delta Q = P_{th}\mathrm{d}t$. Donc en simplifiant par $\mathrm{d}t$: $d_t u_t - d_f u_f - d_c u_c = -P_t v_t d_t + P_f v_f d_f + P_c v_c d_c + P_{th}$. En passant les termes en Pvd à gauche, on fait apparaître l'enthalpie : $d_t h_t - d_f h_f - d_c h_c = P_{th}$
   On ne sait exprimer que des Δh, donc on va écrire $d_t = d_c + d_f$ donc $d_f(h_t - h_f) + d_c(h_t - h_c) = P_{th}$ soit $c_p d_f\,(T_t - T_f) + c_p d_c\,(T_t - T_c) = P_{th}$

4. Les équations $d_t = d_f + d_c$ et $c_p d_f\,(T_t - T_f) + c_p d_c\,(T_t - T_c) = P_{th} = 0$ forment un système de deux équations à deux inconnues, qu'on résout : $d_c = d_t \frac{T_t - T_f}{T_c - T_f} = 2{,}9\,\mathrm{kg/min}$ et $d_f = d_t \frac{T_c - T_t}{T_c - T_f} = 5{,}1\,\mathrm{kg/min}$

5. Il suffit d'appliquer la formule $P_{th} = c_p d_f\,(T_t - T_f) + c_p d_c\,(T_t - T_c) = -170\,\mathrm{W}$

6. Appliquons le second principe au système fermé M^* : $\mathrm{d}S = \delta S_{éch} + \delta S_{cr}$. Or $\mathrm{d}S = S(t+dt) - S(t) = S_{machine} + S_{\delta m_t} - S_{machine} - S_{\delta m_f} - S_{\delta m_c} = \delta m_t s_t - \delta m_f s_f - \delta m_c s_c$. De plus $\delta S_{éch} = \frac{\mathcal{P}_{th}\mathrm{d}t}{T_{ext}}$. En combinant tout, on obtient $d_t s_t - d_c s_c - d_f s_f = \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_{ext}} + \frac{\delta S_{cr}}{\mathrm{d}t}$.
   Or $d_t = d_c + d_f$ donc $d_c.(s_t - s_c) + d_f(s_t - s_f) = \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_{ext}} + \frac{\delta S_{cr}}{\mathrm{d}t}$ soit $c_p\left[d_c \ln\frac{T_t}{T_c} + d_f \ln\frac{T_t}{T_f}\right] = \frac{P_{th}}{T_{ext}} + \frac{\delta S_{cr}}{\mathrm{d}t}$
   Premier cas : $\frac{\delta S_{cr}}{\mathrm{d}t} = c_p d_c \ln\frac{T_t}{T_c} + c_p d_f \ln\frac{T_t}{T_f} = 120\,\mathrm{J/K/min}$: irréversible
   Second cas : $\frac{\delta S_{cr}}{\mathrm{d}t} = 122\,\mathrm{J/K/min}$

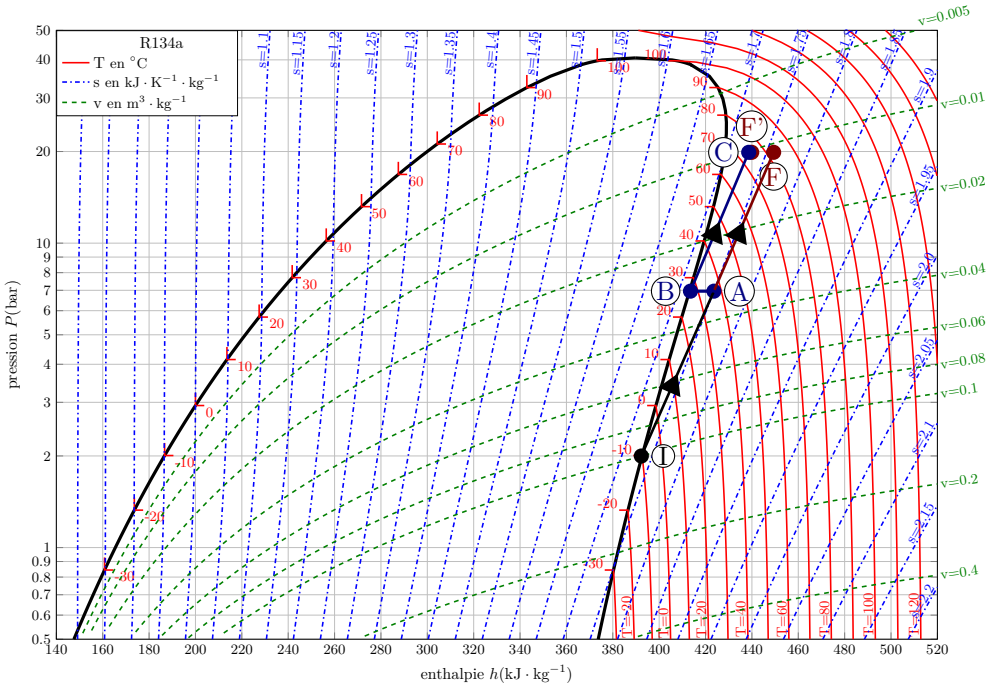
Corrigé de l'exercice T7.5 : Condenseur [**]

1. Notons $\mathcal{P}_{échangée}$ comme l'indique l'énoncé. Alors
   — en appliquant le premier principe industriel à la transformation $(a) \to (b)$, sans travail utile, et en supposant qu'on néglige les variations d'énergies cinétique et potentielle, on trouve $D_{liq}\Delta h^{(a)\to(b)} = -\mathcal{P}_{échangée}$ donc $-D_{liq}\ell_{v,fluide}(T_a) = -\mathcal{P}_{échangée}$ (car on effectue une liquéfaction).
   — en appliquant le premier principe industriel à l'eau, sans travail utile, on trouve sous les mêmes hypothèses $D_{eau}\Delta h^{(c)\to(d)} = +\mathcal{P}_{échangée}$ donc $D_{eau}c_{p,eau}.(T_d - T_c) = +\mathcal{P}_{échangée}$
   En regroupant les deux : $D_{liq} = D_{eau}\frac{c_{p,eau}.(T_d - T_c)}{\ell_{v,fluide}(T_a)} = 1{,}16\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

2. Cette fois, avec des notations évidentes :
   — premier principe industriel au fluide : $-D_{liq}\ell_{v,fluide}(T_a) = -\mathcal{P}_{échangée} - \mathcal{P}_{pertes,fluide}$
   — premier principe industriel à l'eau : $D_{eau}c_{p,eau}.(T_d - T_c) = +\mathcal{P}_{échangée} - \mathcal{P}_{pertes,eau}$
   donc en sommant : $-D_{liq}\ell_{v,fluide}(T_a) + D_{eau}c_{p,eau}.(T_d - T_c) = -\mathcal{P}_{pertes,fluide} - \mathcal{P}_{pertes,eau} = -\mathcal{P}_{pertes}$ donc $D_{liq} = \frac{D_{eau}c_{p,eau}.(T_d - T_c) - \mathcal{P}_{pertes}}{\ell_{v,fluide}(T_a)} = 1{,}11\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T7.6 : Compresseur [***]

1. **Compression mono-étagée**
   (a)



(b) $h_{f'} - h_i = 440 - 392 = 48\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ donc $h_f = h_i + \frac{h_{f'}-h_i}{\eta_s} = 448\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. On lit alors $\frac{v_f}{v_i} = \frac{0{,}011}{0{,}10} = 11\,\%$. $T_f = 83\,^\circ\mathrm{C}$ et $T_{f'} = 75\,^\circ\mathrm{C}$: l'irréversibilité est souvent due à des frottements internes, qui produisent une élévation de température.

(c) Sans pertes thermiques, on a simplement $w' = h_f - h_i = 56\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

2. **Compression multi-étagée**

Il faut faire plein de calculs pour trouver les enthalpies de A puis de C. Les points sont en bleu sur le graphique précédent. On trouve $h_i = 392\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $h_{a'} = 420\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ donc $h_a = 425\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $h_b = 413\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $h_{c'} = 433\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ donc $h_c = 437\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ soit $w' = 45\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$: on gagne 20 % (les mesures ne sont pas très précises). $T_c = 73\,^\circ\mathrm{C}$.

Corrigé de l'exercice T7.7 : Étude d'un réacteur à eau pressurisée [***]

1. **Calcul des données manquantes**

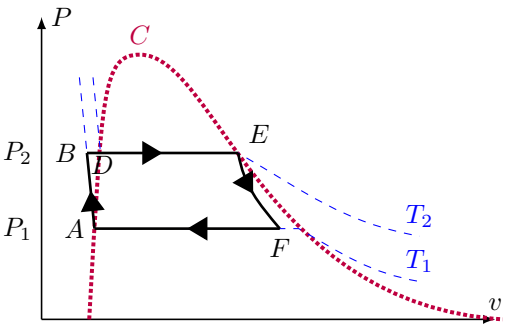
(a) Lors d'une vaporisation à température constante, $\Delta S = \frac{\Delta H}{T}$ En prenant une masse unité, on en déduit alors facilement que $s_l(573\,\mathrm{K}) = s_v(573\,\mathrm{K}) + \dfrac{h_l(573\,\mathrm{K}) - h_v(573\,\mathrm{K})}{T_2} = 3{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

(b) D'après la loi des gaz parfaits, $v_v(293\,\mathrm{K}) = \dfrac{RT_1}{P_1 M} = 59\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$

(c) On sait que $v_l(293\,\mathrm{K}) = 1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$

2. **Diagramme de Clapeyron**

(a)



(b) La pente du segment (AB) est presque verticale, car l'eau est un liquide très peu compressible (la pente est proportionnelle à $1/\alpha$; en effet, elle vaut $\frac{\partial P}{\partial v}\big|_T$).

3. **Entropie**

(a) L'évolution EF est adiabatique, donc l'entropie échangée est nulle, et réversible, donc l'entropie créée est nulle. L'application du second principe à une masse unité d'eau indique alors que $s_F = s_E$

(b) L'extensivité de l'entropie implique que $s_E = s_v(573\,\mathrm{K})$ et $s_F = xs_v(293\,\mathrm{K}) + (1-x)s_l(293\,\mathrm{K})$. On en déduit alors facilement que $x = \dfrac{s_v(573\,\mathrm{K}) - s_l(293\,\mathrm{K})}{s_v(293\,\mathrm{K}) - s_l(293\,\mathrm{K})} = 0{,}68$

4. On applique l'équation des machines, $w_a = -w'_{turbine} = h_E - h_F = h_v(573\,\mathrm{K}) - xh_v(293\,\mathrm{K}) - (1-x)h_l(293\,\mathrm{K}) = 1136\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

5. **Rendement**

(a) Les étapes $B \to D$ et $D \to E$ se font sans travail utile. L'équation des machines implique que $\Delta h = q$ sur chacune de ces deux étapes. Or $\Delta h = \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE} = c(T_2 - T_1) + (h_v(573\,\mathrm{K}) - h_l(293\,\mathrm{K})) = 2770\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Donc $q_{BE} = 2270\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

(b) On a alors $\eta = \dfrac{w_a}{q_{BE}} = 0{,}41$

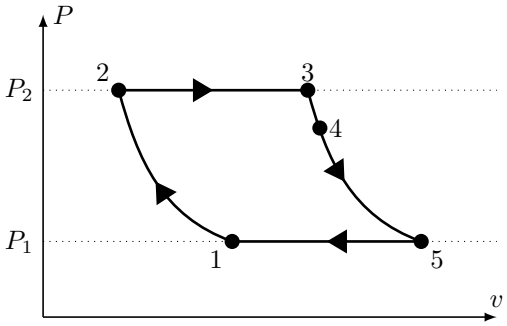
Dans cette définition, on néglige le travail fourni par la pompe au fluide. On ne dispose pas ici des données pour vérifier si cette approximation est justifiée.

(c) Le rendement maximal de Carnot vaut $\eta_{max} = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} = 0{,}49$. On est un peu en-dessous.

Corrigé de l'exercice T7.8 : Moteur à réaction(ESIM) [***]

1. Cf. le cours. Faire une démonstration propre pour montrer que $h_2 + \frac{1}{2}v_2^2 - h_1 - \frac{1}{2}v_1^2 = w + q$

2.



3. Par les lois de Laplace : $T_2^\gamma P_2^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$ donc $T_2 = T_1 a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 460\,\mathrm{K}$

4. En appliquant le résultat préliminaire, les vitesses étant négligeables en entrée et en sortie et le transfert thermique nul, on a $w_{comp} = h_2 - h_1 = c_p\,(T_2 - T_1) = 170\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

5. On applique la même formule avec aucun travail utile : $q_{comb} = h_3 - h_2 = c_p\,(T_3 - T_2) = 840\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

6. La même formule appliquée à la turbine donne $w_{tur} = h_4 - h_3 = c_p\,(T_4 - T_3)$. Or la puissance récupérée dans la turbine compense exactement celle consommée dans le compresseur, donc $w_{tur} + w_{comp} = 0$ d'où on tire $T_4 = T_3 - \dfrac{w_{comp}}{c_p} = 1130\,\mathrm{K}$

Ensuite, les lois de Laplace indiquent que $T_5 = T_4 \left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$; mais ce n'est pas la bonne solution, car P_4 n'est pas connue. En fait, toute la transformation de 3 à 5 est adiabatique réversible, donc on peut aussi écrire $T_5 = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ soit $T_5 = T_3 a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 820\,\mathrm{K}$

7. L'application de la loi du préliminaire entre 4 et 5 donne ici $h_5 - h_4 + \frac{1}{2}v_5^2 - \frac{1}{2}v_4^2 = 0$ car la tuyère est adiabatique et sans parties mobiles. Donc $c_p\,(T_5 - T_4) + \frac{1}{2}v^2 = 0$ d'où $v = \sqrt{2c_p\,(T_4 - T_5)} = 790\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

8. Le rendement vaut $r = \dfrac{\frac{1}{2}v^2}{q_{comb}} = 37\,\%$

9.

(a) Par définition, $\eta = \frac{c_p(T'_5 - T_4)}{c_p(T_5 - T_4)}$ d'où on tire après simplification $T'_5 = T_4 + \eta\,(T_5 - T_4) = 850\,\mathrm{K}$

(b) Même calcul qu'auparavant, car il n'y a toujours pas de transfert thermique ni de travail utile ; on trouve $v = \sqrt{2c_p\,(T_4 - T'_5)} = 750\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(c) $s'_5 - s_4 = c_p \ln\frac{T'_5}{T_4} - \frac{R}{M}\ln\frac{P_1}{P_4}$. Avec les lois de Laplace appliquées à la turbine, on trouve $P_4 = P_2\left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 3{,}1\,\mathrm{bar}$ d'où on tire $s'_5 - s_4 = 36\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

Pour le travail des forces de frottements, il faut se souvenir que les forces de frottements ne sont pas conservatives, et que leur travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Or entre la tuyère réversible et la tuyère avec frottements, l'énergie mécanique diminue de $\frac{1}{2}790^2 - \frac{1}{2}750^2 = 31\,\text{kJ}$; c'est le travail des forces de frottements.

Enfin, le nouveau rendement du cycle vaut $r = 33\,\%$

Corrigé de l'exercice T7.9 : Profil d'une tuyère [****]

1. La masse qui traverse la section $S(x)$ en un temps dt est celle contenue dans le cylindre de base $S(x)$ et de hauteur $v(x)\text{d}t$, donc $\delta m = S(x)v(x)\text{d}t \times \mu(x)$. Donc $D = \mu(x)v(x)S(x)$
2. Cours : $C_{pm}\frac{\gamma R}{\gamma-1}$ et $c_p\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M}$
3. D'après l'équation des machines, par exemple entre l'entrée de la tuyère et l'abscisse x, indique que $\Delta\left[h + \frac{1}{2}v^2\right] = w' + q = 0$ donc $h + \frac{1}{2}v^2 = \text{cst}$; pour un gaz parfait, cela implique que $c_pT(x) + \frac{1}{2}v(x)^2 = \text{cst}$
4. Loi de Laplace : $P(x)^{1-\gamma}T(x)^{\gamma} = \text{cst}$
5. $Sv\mu = \text{cst}$ donc $\ln S + \ln v + \ln\mu = \text{cst}$ donc $\frac{\text{d}S}{S} + \frac{\text{d}v}{v} + \frac{d\mu}{\mu} = 0$.

   De même, de $c_pT(x) + \frac{1}{2}v(x)^2 = \text{cst}$ on tire $c_p\text{d}T + v\text{d}v = 0$.

   De la loi de Laplace, on prend logarithme puis on montre que $(1-\gamma)\frac{\text{d}P}{P} + \gamma\frac{\text{d}T}{T} = 0$.

   De la loi du GP : $P = \frac{\mu RT}{M}$ donc $\frac{\text{d}P}{P} = \frac{\text{d}\mu}{\mu} + \frac{\text{d}T}{T}$.

   En combinant, on élimine $\text{d}P$: $(1-\gamma)\frac{d\mu}{\mu} + \frac{\text{d}T}{T} = 0$. En éliminant $\text{d}\mu$ et $\text{d}T$ on trouve $(1-\gamma)\left(-\frac{\text{d}S}{S} - \frac{\text{d}v}{v}\right) - \frac{v\text{d}v}{c_pT}$ soit $\frac{\text{d}S}{S} + \frac{\text{d}v}{v} - \frac{v\text{d}v}{(\gamma-1)c_pT} = 0$ ce qui correspond bien à la formule demandée.
6. Le but d'une tuyère est d'accélérer le gaz, donc $\frac{\text{d}v}{\text{d}x} > 0$. Cela implique que $\frac{\text{d}S}{\text{d}x}$ est du signe de $\frac{v}{(\gamma-1)c_pT} - \frac{1}{v} = \frac{1}{v}\left[\frac{v^2}{v_{lim}^2} - 1\right]$ avec $v_{lim} = \sqrt{\frac{1}{(\gamma-1)c_pT}} = \sqrt{\frac{M}{\gamma RT}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\mu}}$. Quant à la fin de la question, vous ne pouvez pas le savoir pour le moment, mais il s'agit de la vitesse du son dans l'air. Autrement dit, la tuyère est convergente ($\frac{\text{d}S}{\text{d}x} < 0$) tant que l'écoulement est subsonique, puis elle devient divergente ($\frac{\text{d}S}{\text{d}x} > 0$).

Chapitre T8 Statique des fluides

Programme p.1214

Conseils p.1215

Cours p.1202
T8.A. Pression dans un fluide au repos
T8.B. Force de pression sur des objets

QCMs p.1216

Exercices p.1220

TDs numériques p.1226

T8. Statique des fluides

Cours

Le chapitre de statique des fluides est un peu à part dans le programme de physique de première année. Il sert d'introduction à la dynamique des fluides que vous verrez l'an prochain en PC. C'est un chapitre de mécanique mais qui utilise des outils de thermodynamique pour décrire les fluides, voilà pourquoi on l'étudie maintenant.

Ce chapitre contient deux parties bien distinctes : d'une part, le calcul de la répartition de pression dans un fluide au repos, selon une approche locale ; d'autre part, l'action d'un fluide au repos sur un objet, selon une approche globale.

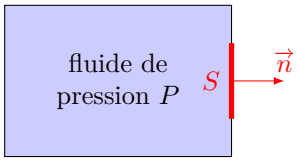
Dans tout ce chapitre, on va utiliser les forces de pression. Il peut donc être utile de faire un rappel :

Définition : Pression

La pression caractérise la force exercée par un fluide sur une paroi en contact avec lui : un fluide de pression P exerce sur une surface S de vecteur normal $\vec{n}$ une force

$$\vec{F} = PS\vec{n} \qquad \text{(T8.1)}$$

La pression se mesure en Pascal : $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ou en bar : $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$.



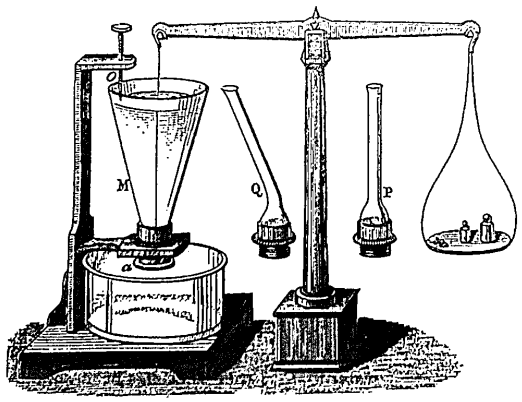
T8.A. Pression dans un fluide au repos

A.1. Approche historique

Quand on pose un objet lourd sur un autre, celui d'en-dessous se fait comprimer par le poids de l'objet situé au-dessus. Même si, à la Renaissance, la notion de force (et donc la description du poids) n'était pas clairement connue, on savait bien que ce poids était proportionnel à la masse : si une mouche se pose sur une coquille de noix, elle ne la cassera pas ; si un éléphant s'appuie dessus, la noix va se casser.

Pourtant, quand on s'intéresse aux fluides, les choses se passent différemment. C'est Stévin, grand précurseur de la physique avant Galilée, qui a réalisé en 1586 une expérience décrite sur la figure T8.1 : on y voit une balance à fléaux avec deux bras de même longueur. Sur le bras de gauche est suspendue une tige terminée par un bouchon (a) ; sur le bras de droite un plateau. À gauche, on approche un récipient (M) de forme quelconque, fixé, avec une ouverture en bas ; la tige traverse ce récipient, et le tout est réglé pour que le bouchon vienne juste fermer le trou situé en bas du récipient. On pose alors sur le plateau de droite une masse m, puis on commence à remplir doucement avec de l'eau le récipient. Au début, le fait d'avoir posé des masses à droite va « plaquer » le bouchon contre le récipient, ce qui fait que l'eau ne fuit pas. Pourtant, lorsqu'on a ajouté une certaine quantité d'eau, l'eau fuit par en bas. Avec le recul et les outils dont on dispose aujourd'hui, on comprend qu'à droite s'applique le poids mg, et à gauche la force de pression au fond de l'eau PS avec P la pression au fond et S la surface du bouchon. Ainsi, lorsque l'eau se met à fuir, on a $P = \frac{mg}{S}$: on peut évaluer la pression au fond du récipient [1].

Figure T8.1 : Expérience de Stévin.

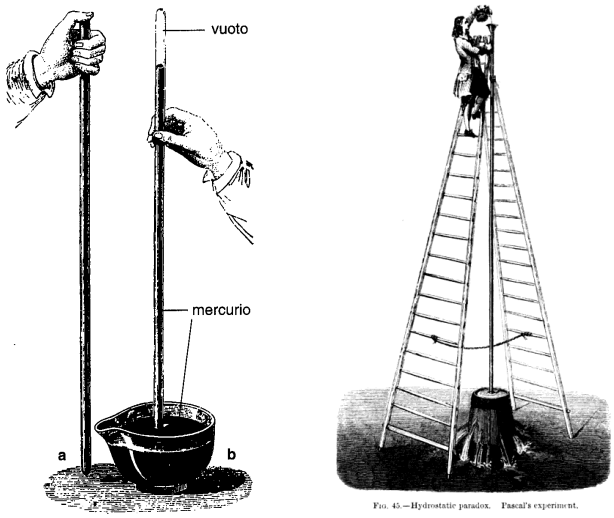


1. En fait, pour être exact, il ne s'agit pas de la pression, mais de la surpression par rapport à la pression atmosphérique.

Or ce que constate Stévin, c'est que cette pression ne dépend, pour un fluide donné, que de la hauteur de fluide. La forme du récipient ne joue pas de rôle : on peut en prendre un droit (P), penché (Q), évasé (M), gros, petit, rien ne change : la pression au fond de l'eau ne dépend que de la hauteur d'eau.

Cette expérience reste sans suite. En 1643, Torricelli, un disciple de Galilée, essaie de résoudre un problème que les ingénieurs avaient posé à Galilée : pourquoi les pompes les plus puissantes ne sont-elles pas capables d'aspirer l'eau à plus de 10 m de profondeur ? Torricelli a l'intuition que cette limite de 10 m dépend de la densité du liquide. Il prend du mercure, 13,6 fois plus dense que l'eau. Il en remplit un long tube fermé d'un côté, le bouche avec son doigt, le retourne dans un soucoupe remplie de mercure, et débouche le tube : le mercure descend alors dans le tube et se stabilise à 76 cm au-dessus du niveau de la soucoupe (figure T8.2). En haut du tube, il n'y a plus de mercure ; comme le tube est fermé, Torricelli conclut qu'il y a du vide [2]. Conclusion : même le vide n'est pas capable de faire monter le mercure de plus de 76 cm. Pour de l'eau 13,6 fois moins lourde, on pourra monter de $13,6 \times 76\,\text{cm} = 10\,\text{m}$.

FIGURE T8.2 : Autres expériences historiques.



(a) Expérience de Torricelli (b) Crève-tonneaux de Pascal

Cette expérience vint aux oreilles de Blaise Pascal. Reprenant l'idée déjà avancée par Toricelli, il supposa que c'était la pression de l'air qui poussait le mercure et le faisait monter dans la colonne [3]. S'il y avait moins d'air qui poussait, la colonne monterait moins : pour le vérifier, Pascal mis en place une expédition qui monta au sommet du Puy de Dôme pour y mesurer l'élévation de la colonne de mercure, tandis qu'une autre expédition restait en bas à Clermont-Ferrand : la colonne de mercure était moins haute au sommet ; il prouva ainsi pour la première fois que la pression atmosphérique diminue avec l'altitude.

Faisant le lien avec les travaux de Stévin, Pascal fabriqua un « crève-tonneaux » (figure T8.2) : un système permettant de fixer sur un tonneau un long tuyau de 10 m de haut qu'on remplissait d'eau ; quand l'eau atteignait une certaine hauteur, la pression faisait exploser le tonneau. Pascal [4] a ainsi pu prouver en mettant des tuyaux de différentes section que ce n'est pas la masse d'eau introduite qui compte pour faire exploser le tonneau, mais uniquement sa hauteur.

Essayons de comprendre par un modèle simple pourquoi la pression dépend uniquement de la hauteur de fluide et de sa densité. Considérons un schéma simple (figure T8.3) d'un récipient vertical de section S constante, rempli d'un fluide au repos de masse volumique ρ. Notons P_s la pression au niveau de la surface de l'eau (c'est la pression atmosphérique).

Calcul : Pression au fond du récipient

Considérons comme système le volume de fluide compris entre les altitudes 0 (au fond) et h (en surface) ; son volume vaut Sh et sa masse ρSh. On note $\vec{e}_z$ l'axe vertical ascendant. Le système est soumis à plusieurs forces :

— son poids $m\vec{g} = -\rho Shg\vec{e}_z$

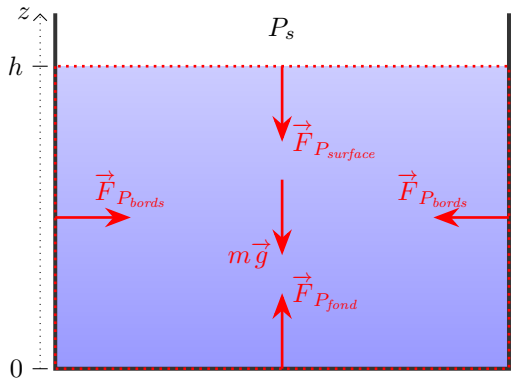
— la force de pression au fond : $\vec{F}_{P_{fond}} = +P_f S\vec{e}_z$ en notant P_f la pression au fond ; cette force est vers le

2. En réalité il y a du mercure à la pression de vapeur saturante, qui est très très faible.

3. À l'époque, la plupart des interprétation se fondaient sur la notion d'« horreur du vide » introduite par Aristote. Descartes n'admit jamais les théories de Toricelli et de Pascal, et déclara que le vide était ce qui remplissait la tête de Pascal. On n'a pas attendu l'invention des réseaux sociaux pour s'envoyer des insultes !

4. La postérité de Pascal envers cette expérience n'est pas certaine.

FIGURE T8.3 : Calcul de la pression en deux points d'un fluide incompressible.



haut

— la force de pression en surface : $\vec{F}_{P_{surface}} = -P_s S\vec{e}_z$ en notant P_s la pression en surface ; cette force est vers le bas

— les forces de pression sur le côté, qui sont horizontales

Le fluide étant à l'équilibre, la somme des forces est nulle. En projetant sur l'axe $\vec{e}_z$, on élimine les forces horizontales, et il reste $-\rho Shg + P_f S - P_s S = 0$ soit $P_f = P_s + \rho gh$

Remarque : L'augmentation de pression avec la profondeur dépend de la masse volumique du fluide. Pour l'eau ($\rho = 1000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) la pression augmente de 1 bar/10 m. Pour le mercure ($\rho = 13\,600\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) la pression augmente de 1 bar/760 mm.

Remarque : cette formule est un cas particulier qui ne s'applique que pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cst}$) dans un champ de pesanteur uniforme ($g = \text{cst}$). On verra plus loin une méthode plus générale dans les autres cas.

A.2. Relation Fondamentale de la Statique des Fluides

Un fluide se comporte différemment d'un solide. Dans un solide, on peut s'occuper du solide dans son ensemble pour lui appliquer le PFD ou le TMC, car les liaisons entre les atomes font que toute force appliquée en une partie du solide entraînera le mouvement de l'ensemble. Dans un fluide, c'est différent, il y a bien une cohésion, mais à courte distance. On va donc découper le fluide en petits morceaux imaginaires appelés *particule de fluide*, de taille *mésoscopique*, c'est-à-dire intermédiaire entre l'échelle microscopique (celle des atomes et des molécules) et l'échelle macroscopique (celle du système complet). Une particule de fluide contient de très nombreux atomes ou molécules, de sorte qu'on peut y définir les grandeurs thermodynamiques intensives (pression, température, masse volumique,…), mais elles sont suffisamment petites pour qu'on puisse considérer que ces variables intensives sont uniforme sur la particule.

Ces particules fluides ont la possibilité de bouger les unes par rapport aux autres. Pour traduire que le fluide est au repos, il faudra donc, non pas seulement que la somme des forces s'exerçant sur le fluide soit nulle, mais que la somme des forces s'exerçant sur chaque particule de fluide soit nulle.

Diverses forces peuvent s'appliquer sur une particule de fluide, mais il en est une qui est toujours présente : la force de pression.

Propriété : Résultante des forces de pression sur une particule fluide

La somme (ou résultante) des forces de pressions qui s'exercent sur une particule de fluide de volume dV vaut

$$\overrightarrow{dF}_{pression} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P.\mathrm{d}V \qquad \text{(T8.2)}$$

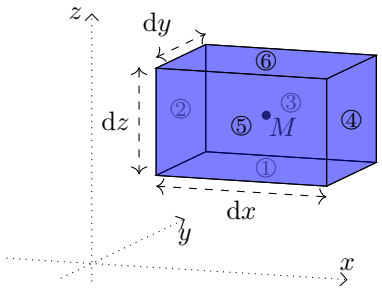
Démonstration

Pour la démonstration, on va se placer dans le cas simple d'une particule de fluide placée en $M(x,y,z)$ et ayant la forme d'un parallélépipède de dimensions $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$. Cette particule s'étend donc :

— entre $x - \frac{\mathrm{d}x}{2}$ et $x + \frac{\mathrm{d}x}{2}$ dans la direction x

— entre $y - \frac{\mathrm{d}y}{2}$ et $y + \frac{\mathrm{d}y}{2}$ dans la direction y

— entre $z - \frac{\mathrm{d}z}{2}$ et $z + \frac{\mathrm{d}z}{2}$ dans la direction z



Sur chacune des 6 faces du parallélépipède s'applique une force de pression. Il est naturel de regrouper ces forces 2 par 2 :

— les forces qui s'appliquent sur les faces de droite et de gauche. Commençons avec $\overrightarrow{dF}_②$: cette force s'applique sur une face de surface $\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$ dont le centre est placé en $\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)$ et qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{e}_x$; donc $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_② = P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$. Pour la face ④, c'est presque pareil à deux détails près : d'une part la pression doit être évaluée en $\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)$, et d'autre part la force pousse désormais suivant $-\vec{e}_x$; donc $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_④ = -P\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$. En ajoutant les deux, on trouve $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_② + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_④ = \left(P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) - P\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$. On effectue un développement limité à l'ordre 1 : $P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) - P\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) = \left(P(x,y,z) - \frac{\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\right) - \left(P(x,y,z) + \frac{\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\mathrm{d}x$. Donc finalement :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_② + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_④ = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\mathrm{d}V\vec{e}_x$$

— considérons maintenant les forces qui s'exercent sur les faces de devant et du fond (faces ③ et ⑤). Par les mêmes raisonnements que précédemment, on trouve $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_③ = -P\left(x, y + \frac{\mathrm{d}y}{2}, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_⑤ = P\left(x, y - \frac{\mathrm{d}y}{2}, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$. En ajoutant les deux et en effectuant un DL à l'ordre 1, on trouve

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_③ + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_⑤ = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)\mathrm{d}V\vec{e}_y$$

— la même raisonnement aboutit pour les faces du bas et du haut à

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_① + \overrightarrow{\mathrm{d}F}_⑥ = -\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)\mathrm{d}V\vec{e}_z$$

On somme toutes ces forces pour obtenir la force totale :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z\right).\mathrm{d}V = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P.\mathrm{d}V$$

Remarque : Mathématiquement, le gradient de P est un champ comme P, c'est-à-dire qu'il dépend des coordonnées x, y, z en cartésien. Si on est en coordonnées cylindriques, la relation reste vraie, seulement l'expression du gradient change : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P(r,\theta,z) = \frac{\partial P(r,\theta,z)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P(r,\theta,z)}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial P(r,\theta,z)}{\partial z}ez$; cette relation n'est pas à connaître, elle sera donnée dans l'énoncé si besoin. De même en sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$.

Ce que dit ce résultat, c'est que la résultante des forces de pression est non nulle si la pression n'est pas homogène : dans ce cas, la pression est plus forte d'un côté de la particule fluide que de l'autre côté de la particule, et la force totale va du côté opposé à la pression la plus forte.

On peut maintenant établir la relation fondamentale de la statique des fluides :

Relation Fondamentale de la Statique des Fluides (RFSF)

Soit un fluide au repos soumis à des **forces volumiques** (forces par unité de volume) $\vec{f}_{vol}$. Alors la pression dans ce fluide vérifie l'équation différentielle

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \vec{f}_{vol} \qquad \text{(T8.3a)}$$

En particulier, dans le cas d'un fluide de masse volumique ρ soumis uniquement à un champ de pesanteur $\vec{g}$, la RFSF s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \rho\vec{g} \qquad \text{(T8.3b)}$$

Démonstration

L'idée est simplement d'écrire qu'au repos, la somme des forces qui s'applique sur une particule fluide de volume $\mathrm{d}V$ est nul.

— Dans le cas général, s'il y a une force volumique $\vec{f}_{vol}$, elle se traduit sur la particule fluide par une force $\vec{f}_{vol}\mathrm{d}V$; de plus la particule est soumise à la résultante des forces de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P.\mathrm{d}V$. À l'équilibre, on a donc $\vec{f}_{vol}\mathrm{d}V - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P.\mathrm{d}V = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{f}_{vol}$

— Dans le cas où la seule force qui s'applique est le poids $\rho\vec{g}\mathrm{d}V$ de la particule fluide, alors $\rho\vec{g}\mathrm{d}V - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P.\mathrm{d}V = \vec{0}$ ce qui donne bien $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \rho\vec{g}$

! Attention au mélange de signes entre la formule de la résultante des forces de pression (avec un $-$) et la RFSF (sans $-$).

Remarque : Physiquement, si le poids attire un fluide vers le bas, cela va amener une surpression en bas du fluide, ce qui correspond bien à un gradient de pression dirigé aussi vers le bas.

A.3. Cas particulier d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur homogène

Propriété : Champ de pression dans un fluide incompressible placé dans un champ de pesanteur homogène

Dans un fluide incompressible (de masse volumique constante ρ) placé dans un champ de pesanteur homogène ($\vec{g}$ le même partout), la pression de dépend que de l'altitude z et vaut (avec z orientée **vers le haut**)

$$P(z) = -\rho g z + \mathrm{cst} \qquad \text{(T8.4)}$$

Démonstration

La relation fondamentale de la statique de fluides : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \rho\vec{g}$ peut se projeter sur une base cartésienne avec $\vec{e}_z$ vertical vers le haut : $\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$ puisque $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Les deux premières équations montrent que la pression $P(x,y,z)$ ne dépend en fait ni de x, ni de y. On peut donc écrire $P(z)$, et la dernière équation devient $\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho.g$ donc $P(z) = -\rho g z + \mathrm{cst}$

On avait déjà obtenu cette relation tout à l'heure mais uniquement dans le cas d'un cylindre vertical ; maintenant, elle est vraie pour tout fluide dans n'importe quel récipient

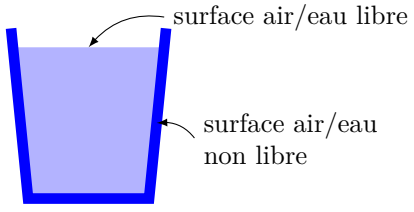
Remarque : Si z est orientée vers le bas : $P(z) = +\rho g z + \mathrm{cst}$. De toutes manières, il faut se souvenir que la pression doit être plus forte en bas.

! Il ne faut pas intégrer n'importe comment $\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho g$: on ne peut écrire $P = -\rho g z + \mathrm{cst}$ QUE SI ρ ET g SONT CONSTANTS.

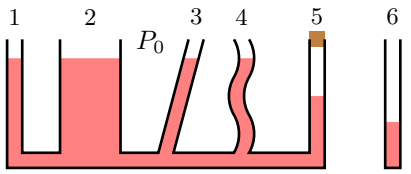
Propriété : Continuité de la pression à une surface libre

Lorsque deux fluides sont séparés par une surface libre (surface où les fluides sont libres de prendre la forme qu'ils veulent au contact l'un de l'autre), la pression est continue au passage de l'un à l'autre.

Cette propriété assez logique ne s'applique qu'à des interfaces libres. Par exemple, si on considère un verre d'eau, la surface eau/air en haut est libre donc la pression est continue ; par contre, sur les côtés, il y a discontinuité de pression entre l'eau et l'air, car le verre situé entre les deux fait que ce n'est pas une surface libre.



Remarque : La première conséquence de ces deux propriétés est le **principe des vases communicants**. Si on considère le schéma ci-contre, on a plusieurs tubes qui sont reliés entre eux par la base ; la formule $P(z) = \text{cst} - \rho g z$ s'applique donc à l'ensemble de ces tubes. Si ces tubes sont tous ouverts à l'air libre, alors leurs surfaces sont toutes à la pression atmosphérique P_0. Donc pour chaque tube i, l'altitude z_i de la surface vérifie $P_0 = \text{cst} - \rho g z_i$ soit $z_i = \frac{\text{cst} - P_0}{\rho g}$: autrement dit, tous les tubes ont une surface de liquide à la même altitude. Si on verse du liquide dans l'un des tubes, l'eau s'écoulera par en bas dans les autres tubes, de manière à s'équilibrer à une nouvelle altitude qui sera à nouveau la même pour tous. Il y a cependant deux exceptions :



— le tube 5 est fermé, donc la pression au niveau de la surface du fluide n'est pas P_0 ; son altitude est donc différente ;

— le tube 6 n'est pas en contact avec les autres, sa pression n'a donc rien à voir, et son altitude est différente.

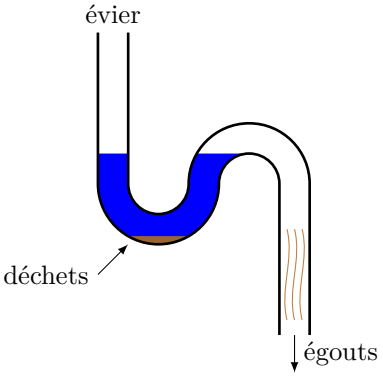
Ce principe des vases communicants est très important, parfois utile, parfois dangereux. Ainsi lorsqu'on puise de l'eau au fond d'un puits, on fait baisser le niveau de tous les puits qui sont reliés par la même nappe phréatique ; ce qui pose des soucis de voisinage, voire des guerres entre pays voisins. Mais ce principe était aussi bien connu des romains, qui l'utilisaient en créant des siphons pour faire franchir certaines vallées à leurs aqueducs. L'aqueduc du Gier possédait 4 siphons en plus de ses nombreux ponts (figure T8.4).

La figure de T8.4(b) illustre le siphon d'un évier. Le coude situé sous l'évier sert à avoir un bouchon d'eau qui empêche les mauvaises odeurs de remonter. Quand l'eau coule de l'évier, elle passe dans le tuyau qui descend dans les égouts par le principe des vases communicants, sans que les mauvaises odeurs aient jamais un passage. Mais attention, les déchets lourds (cailloux, sable,…) ne se comportent pas comme l'eau : ils se déposent au fond du siphon et le bouchent.

FIGURE T8.4 : Exemples d'utilisation du principe des vases communicants.



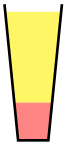
(a) Départ du siphon du Garon de l'aqueduc du Gier, près de Soucieu-en-Jarez. Les trous dans la pierre sont des prises d'eau d'où partaient autrefois des tuyaux en plomb qui franchissaient la vallée du Garon. (Crédit : Wikipedia/Jmh2o)



(b) Principe du siphon d'un évier

Exemple : Pression au fond d'une bouteille de vinaigrette

Un récipient contient 5 cm de vinaigre (densité 1,01) au-dessus de laquelle flottent 12 cm d'huile d'olive (densité 0,916). Calculez la pression du fond de la bouteille si la pression atmosphérique vaut $P_0 = 1{,}0000\,\text{bar}$; on prendra $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Pour rappel, la densité est le rapport entre la masse volumique d'un objet et celle de l'eau. Par exemple, le vinaigre a pour masse volumique $1{,}01 \times 1000 = 1010\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

On applique deux fois la formule vue précédemment : en notant $z = 0$ la surface, on a :

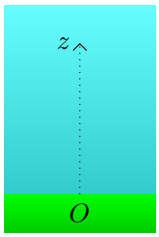
— la pression dans l'huile vaut $P_h(z) = \text{cst}_1 - 916 \times 9{,}81 \times z$; or $P_h(0) = \text{cst}_1 = P_0$ donc $P(z) = P_0 - 916 \times 9{,}81 \times z$. Au bas de l'huile, on a donc $P_h(-12\,\text{cm}) = 1{,}0115\,\text{bar}$

— la pression dans le vinaigre vaut $P_v(z) = \text{cst}_2 - 1010 \times 9{,}81 \times z$. Or par continuité de la pression à l'interface

vinaigre/huile, on a $P_v(-12\,\text{cm}) = P_h(-12\,\text{cm}) = 1{,}0115\,\text{bar}$ donc on trouve $\text{cst}_2 = 0{,}999\,65\,\text{bar}$. Au fond de la bouteille on a alors $P_v(-17\,\text{cm}) = 1{,}0165\,\text{bar}$

A.4. Pression dans un fluide compressible et/ou dans un champ de pesanteur inhomogène

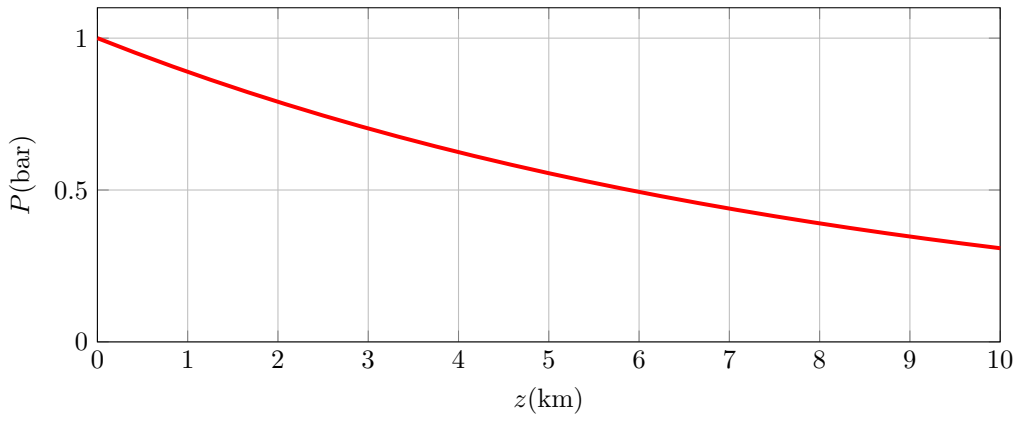
Exemple : Atmosphère isotherme — À connaître



Le modèle le plus simple pour calculer la pression dans l'atmosphère terrestre est celui de l'atmosphère isotherme. On suppose que l'air est un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, et que sa température est constante, de valeur T_0. On repère un point de l'atmosphère par son altitude z.

1. Écrire la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides appliquée à l'atmosphère ; en déduire que la pression ne dépend que de l'altitude.
2. Écrire la loi des gaz parfaits reliant la masse volumique ρ, la pression P, ainsi que M, T_0 et R..
3. À partir des deux relations précédentes, établir une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
4. Exprimer $P(z)$ en fonction de la pression $P(0)$ au sol ; on introduira une grandeur h homogène à une longueur, dont on fera l'AN pour $T_0 = 290\,\text{K}$.
   Tracez $P(z)$.
5. Calculer la pression au sommet du Mont Blanc (4807 m) un jour où la pression au niveau de la mer vaut 1 atm=1,013 25 bar.
   En réalité, on mesure 550 hPa. Le calcul effectué est-il précis ? De quoi faudrait-il tenir compte pour améliorer cette précision ?

1. La RFSF projetée sur les 3 axes donne : $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = -\rho g$. On en déduit que P ne dépend ni de x ni de y, mais seulement de z ; et que $\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho g$
2. Par la loi du gaz parfait appliqué à un volume V de masse m, contenant $n = \frac{m}{M}$ moles : $P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} = \frac{\rho RT_0}{M}$
3. En combinant les deux équations : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) + \frac{gM}{RT_0}P(z) = 0$
4. On peut réécrire $h\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} + P(z) = 0$ avec $h = \frac{RT_0}{gM} = 8500\,\text{m}$. Alors $P(z) = P(0)\,e^{-z/h}$



5. La théorie prévoit 0,575 bar = 575 hPa, ce qui est un peu trop élevé de 4,5 %. Pour être plus précis, il faut tenir compte de la baisse de température avec l'altitude.

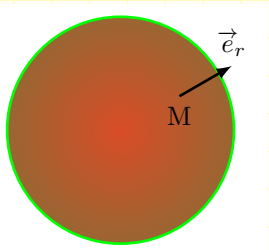
On a vu un exemple, l'atmosphère isotherme, où c'est ρ qui varie, car un gaz est compressible. On va voir maintenant un exemple où c'est l'attraction de la Terre qui varie.

Exemple : Pression à l'intérieur de la Terre

On modélise la Terre par une sphère de rayon R_T, remplie d'un fluide, le magma, de masse volumique qu'on prendra constante pour simplifier : $\rho_m = 5500\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On admet que la force gravitationnelle exercée sur un système de masse m situé à l'intérieur de la Terre s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{4\pi\rho_m G}{3} m.r\,\vec{e}_r$$

en coordonnées sphériques.



1. Exprimer la pression à l'intérieur de la Terre en fonction de r ; on prendra la pression nulle en surface ($r = R_T$).
2. Calculer numériquement la pression estimée au centre de la Terre. Comparez avec la valeur estimée par les meilleurs modèles : 380 GPa.
   Données : $R_T = 6400\,\text{km}$; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ USI ;
   Indication : le gradient en coordonnées sphériques s'écrit : $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$

1. Soit un petit volume $\text{d}V$ de magma, de masse $\rho_m \text{d}V$; il subit la force $\text{d}\vec{f} = -\frac{4\pi\rho_m^2 G}{3} r\text{d}V\vec{e}_r$ d'attraction terrestre, et la résultante des forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P.dV$. À l'équilibre, la somme de ces deux forces est nulle, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = -\frac{4\pi\rho_m^2 G}{3} r\vec{e}_r$.
   On projette sur la base sphérique : $\begin{cases} \frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = -\frac{4\pi\rho_m^2 G}{3} r \\ \frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial P(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$
   Donc la pression ne dépend ni de θ ni de φ, elle ne dépend que de r, et $\frac{\text{d}P(r)}{\text{d}r} = -\frac{4\pi\rho_m^2 G}{3} r$.
   En intégrant : $P(r) = -\frac{2\pi\rho_m^2 G}{3} r^2 + \text{cst}$. Or $P(R_T) \approx 0$ donc $\text{cst} = \frac{2\pi\rho_m^2 G}{3} R_T^2$. On en déduit que $P(r) = \frac{2\pi\rho_m^2 G}{3}\left(R_T^2 - r^2\right)$
2. $P(0) = \frac{2\pi\rho_m^2 G R_T^2}{3} = 173\,\text{GPa}$: c'est la moitié de la valeur estimée. En réalité, on sait que la Terre possède un noyau de densité 11 sur ses premiers 3500 km puis le magma de densité 4, 45, ce qui fait que la valeur estimée est 2 fois plus forte environ.

A.5. Facteur de Boltzmann

La loi de l'atmosphère isotherme vue plus haut est l'occasion de voir pour la première fois une propriété générale des systèmes en équilibre à une température uniforme et constante.

Calcul : Probabilité de trouver une particule à l'altitude z

On peut faire un calcul à partir du résultat de l'atmosphère isotherme. On a montré que la pression vaut $P(z) = P(0).e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$ et aussi que $\rho = \frac{PM}{RT_0}$; or ici M, R et T_0 sont des constantes, ce qui fait qu'on en déduit que $\rho(z) = \rho(0).e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$ avec $\rho(0) = \frac{P(0)M}{RT_0}$. En notant m la masse d'une molécule d'air, on peut alors écrire $\rho(z) = \rho(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$. On reconnaît alors l'énergie potentielle d'une particule de masse m à l'altitude z : $\rho(z) = \rho(0)e^{-\frac{E_p}{k_B T_0}}$. Ce résultat particulier vient d'une propriété très générale qu'on peut retenir :

Propriété : Facteur de Boltzman

Soit un système à l'équilibre à la température T_0. Alors la probabilité pour une particule d'être dans un état i d'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann $e^{-\frac{E_i}{k_B T_0}}$ avec $k_B = \frac{R}{N_A} = 1{,}38\times10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

La probabilité est *proportionnelle* au facteur de Boltzmann ; pour avoir la probabilité exacte, il faudrait diviser par un facteur de normalisation, $Z = \sum_{états\ i} e^{-\frac{E_i}{k_B T_0}}$. Ce facteur joue un rôle important en physique statistique, mais ce n'est pas au programme.

Ce qu'on peut retenir, c'est que si on a 2 états (a) et (b) d'énergie E_a et $E_b > E_a$, alors le rapport des probabilités

que le système soit dans ces deux états vaut

$$\frac{p(E_b)}{p(E_a)} = \frac{e^{-\frac{E_b}{k_B T_0}}}{e^{-\frac{E_a}{k_B T_0}}} = e^{-\frac{(E_b - E_a)}{k_B T_0}}$$

Ces probabilités se traduisent, dans des systèmes avec de nombreuses particules, par des populations d'états. Ainsi, si on a un ensemble d'atomes identiques qui peuvent être dans ces états (a) et (b), le rapport des probabilités des deux états traduira un rapport du nombre d'atomes dans l'état (b) sur le nombre d'atomes dans l'état (a). On voit que ce rapport est quasiment nul dès que l'écart en énergie dépasse quelques $k_B T_0$.

Par exemple, dans un gaz parfait monoatomique, les atomes vont être présents en quantité non négligeable dans tous les états d'énergie inférieure à quelques $k_B T_0$. Cela est cohérent avec la loi qu'on a déjà vu : l'énergie moyenne d'un atome dans un gaz parfait monoatomique à la température T_0 vaut $\langle e_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T_0$.

Au contraire, si on considère une assemblée d'atomes d'hydrogène, les électrons autour du noyau peuvent occuper différents états quantifiés :

— des états discrets d'énergie $E_n = \frac{-13{,}6\,\text{eV}}{n^2}$ pour lesquels l'électron est lié au noyau

— des états continus d'énergie $E > 0$ correspondant à des électrons non liés au noyau

L'écart d'énergie entre l'état fondamental $E_1 = -13{,}6\,\text{eV}$ et le second $E_2 = -3{,}4\,\text{eV}$ vaut 10,2 eV. À température ambiante, $T_0 \approx 300\,\text{K}$ et $k_B T_0 \approx 25\,\text{meV}$; on voit que tous les atomes seront dans leur état fondamental, puisque $e^{-(E_2 - E_1)/k_B T_0} = 4{,}8 \times 10^{-177}$. Si on chauffe, on va commencer à peupler le second état lorsque $k_B T_0 \gtrsim 10{,}2\,\text{eV}$ soit $T_0 \gtrsim 120\,000\,\text{K}$. À des températures encore plus élevées, même les états non liés se peuplent, et l'hydrogène devient ionisé : on a un plasma.

En poussant plus loin le modèle quantique de l'atome d'hydrogène, on voit que le niveau fondamental possède en réalité deux niveaux très proches séparés de 5,9 µeV : c'est la structure hyperfine de l'hydrogène. Les deux niveaux hyperfins seront peuplés tant que $k_B T_0 \gtrsim 5{,}9\,\mu\text{eV}$ soit $T_0 \gtrsim 0{,}07\,\text{K}$: même dans l'espace interstellaire, on a des températures supérieures, et les transitions des atomes qui passent d'un état à l'autre émettent une onde radio, de longueur d'onde égale à 21 cm, qui est très utilisée dans l'observation de l'univers.

En résumé, on peut se souvenir que, sous l'effet de l'agitation thermique, les atomes et molécules acquièrent une énergie dont l'ordre de grandeur est donné par $k_B T_0$.

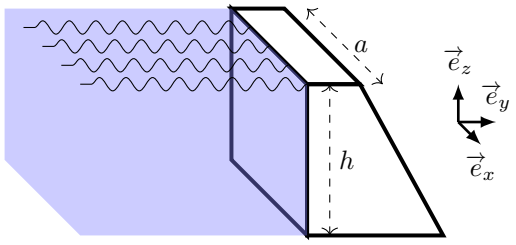
T8.B. Force de pression sur des objets

B.1. Calcul d'une résultante de forces de pression

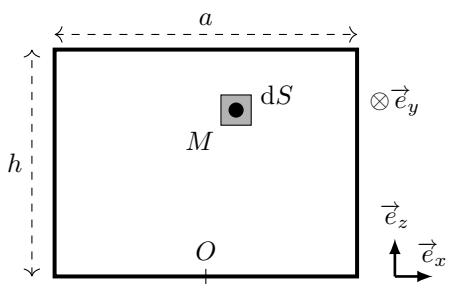
On sait maintenant calculer la pression dans un fluide au repos. Plaçons maintenant un objet en contact avec ce fluide au repos ; il va subir des forces de pression de la part de ce fluide ; la force totale peut s'écrire comme une somme (intégrale) des forces de pression sur toute sa surface : $\vec{F} = \iint_S P.dS.\vec{n}$.

Exemple : Poussée de l'eau sur un barrage poids — À connaître

On considère un barrage que l'on prendra pour simplifier comme un parallélépipède de hauteur h et de largeur a (et d'épaisseur e, inutile ici). L'eau se trouve d'un côté du barrage, elle est au repos.



Barrage poids, vu en perspective.



Barrage poids, vu de face.

On place la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_y$ orthogonal au barrage. L'origine du repère est choisie en O,

point situé au bas du barrage, au milieu. On note P_0 la pression atmosphérique. On note ρ la masse volumique de l'eau (supposée constante) et $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur.

1. Établir rapidement l'expression de la pression $P(z)$ dans l'eau.
2. Soit M un point de la surface du barrage, repéré par ses coordonnées x et z. On considère une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$, de hauteur $\mathrm{d}z$, et de largeur $\mathrm{d}x$.
   Exprimer la petite force de pression s'exerçant sur cette surface
3. Calculer à l'aide d'une intégrale double la force de pression totale exercée par l'eau sur le barrage.
   AN : $a = 70\,\mathrm{m}$, $h = 30\,\mathrm{m}$, $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, ρ_{eau} à connaître.

1. On l'a déjà vu plus haut : la RFSF projetée indique que $\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ donc $P(z) = \mathrm{cst} - \rho g z$. Or $P(h) = P_0$ donc $\mathrm{cst} = P_0 + \rho g h$. Donc $P(z) = P_0 + \rho g.(h - z)$
2. La surface vaut $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$ et sa normale sortante est $\vec{e}_y$, donc la petite force de pression vaut $\mathrm{d}\vec{F} = (P_0 + \rho g.(h-z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$.
3. On somme sur la surface totale du barrage : x varie de $-a/2$ à $+a/2$ et z varie de 0 à h donc on intègre sur ces deux variables : $\vec{F} = \int_{z=0}^{h}\int_{x=-a/2}^{+a/2}(P_0 + \rho g.(h-z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$. Une intégrale double, c'est l'intégrale d'une intégrale. Dans beaucoup de cas simples qu'on rencontrera, elle peut se factoriser en un produit de deux intégrales simples (comme on factorise un produit de sommes : $\sum_{i,j} a_i b_j = (\sum_i a_i).(\sum_j b_j)$). Ici on a donc $\vec{F}\cdot\vec{e}_y = \displaystyle\int_{z=0}^{h}\int_{x=-a/2}^{+a/2}(P_0 + \rho g.(h-z))\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$\left(\int_{z=0}^{h}(P_0 + \rho.g.(h-z))\,\mathrm{d}z\right).\left(\int_{x=-a/2}^{+a/2}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \left[P_0 z + \rho g\left(h.z - \frac{z^2}{2}\right)\right]_0^h .\,[x]_{-a/2}^{a/2}$$

$$= P_0 a h + \frac{\rho g a h^2}{2} = 519\,\mathrm{MN}$$

En exercice, on pourra aller un peu plus loin et étudier le moment de cette force, pour déterminer son point d'application équivalent.

B.2. Poussée d'Archimède

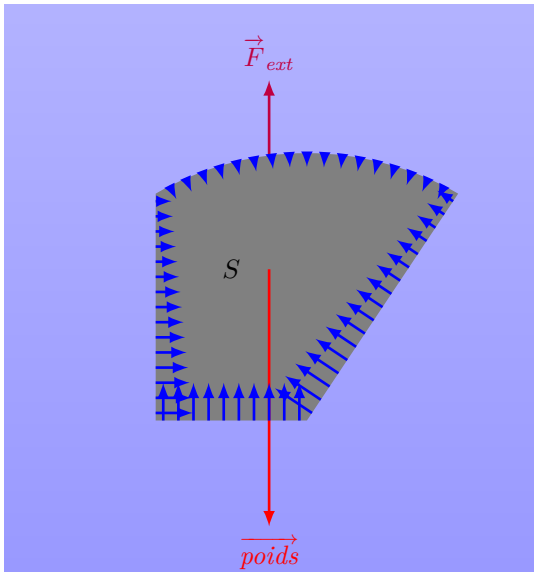
Le calcul de la force de pression sur un barrage poids a été possible, car la surface du barrage est régulière : plane, de forme rectangulaire. Mais quand on place un objet biscornu en contact avec un fluide, le calcul de la force de pression par double intégration est quasiment impossible. Il existe cependant un cas simple, lorsque l'objet est entièrement immergé dans le fluide.

Poussée d'Archimède

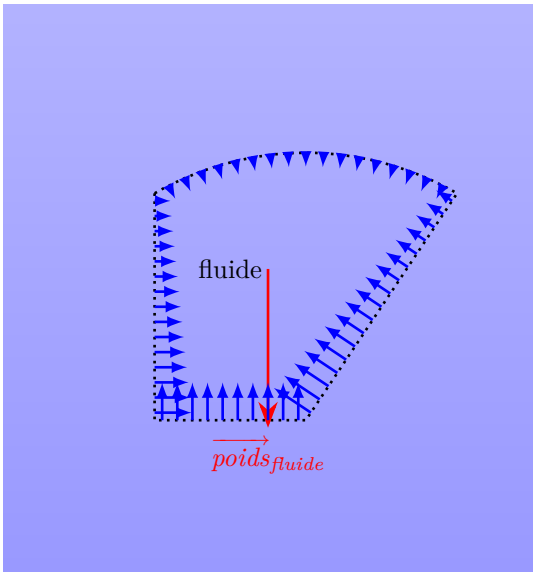
Tout objet **entièrement immergé** dans un fluide **au repos** subit de la part de ce fluide une force égale à l'opposé du poids du liquide déplacé : c'est la poussée d'Archimède.

Démonstration

Considérons un objet quelconque immergé dans un fluide au repos (figure de gauche). Cet objet est soumis à son propre poids, et à plein de petites forces de pression (en bleu) ; de plus il doit être tenu par une force supplémentaire $\vec{F}_{ext}$ si on veut qu'il soit immobile ; en effet, il aurait tendance soit à couler, soit à flotter. En notant $\vec{\Pi}$ la résultante des forces de pression, on a donc $m_{objet}\vec{g} + \vec{\Pi} + \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, mais comme on ne connaît pas la force extérieure exercée, cette équation ne nous amène à rien.
Pour se débarrasser de cette inconnue, Archimède imagine l'expérience de pensée où il remplace l'objet par le même volume de fluide. Si on place un fluide dans lui-même, il ne descend ni ne monte : il reste là où il est, sans qu'on ait besoin de le tenir.



Objet immergé



Système immaginaire

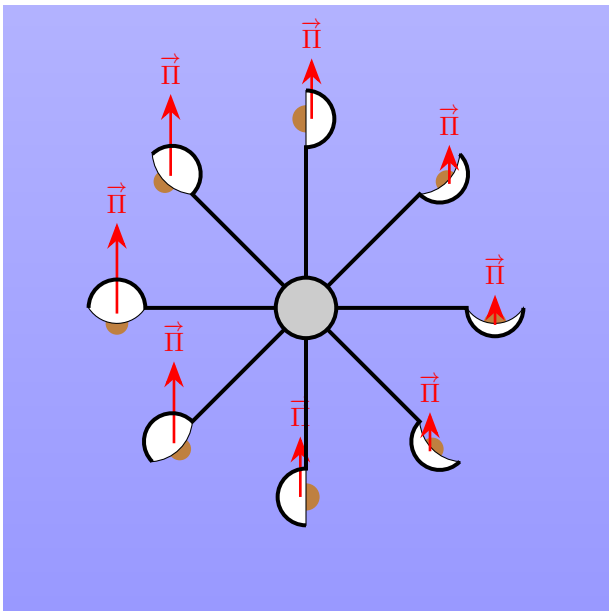
Or les forces de pression ne dépendent que de la pression dans le fluide (qui n'a pas changé) et de la surface (qui n'a pas changé aussi) donc on peut écrire l'équilibre mécanique du morceau de fluide qui a remplacé l'objet : $m_{fluide}\vec{g} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ ce qui montre bien que la résultante des forces de pression vaut $\vec{\Pi} = -m_{fluide}.\vec{g}$.

Cette résultante des force est vers le haut ; c'est logique, car la pression est plus forte en bas de l'objet qu'en haut.

Remarque : Dans le cas d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ_{fluide}, on peut écrire $\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} V \vec{g}$ avec V le volume de l'objet immergé.

Remarque : Cette loi n'est valable que dans **un fluide au repos**. Si l'objet bouge dans le fluide, elle n'est plus valable ; si l'objet est indéformable, on pourra souvent prendre le modèle approché suivant : la somme de forces de pression va être égale à la poussée d'Archimède + une force de frottements opposée au mouvement. C'est le modèle qu'on prendra, par exemple, pour modéliser le mouvement d'une montgolfière. Mais pour des objets déformables, cette approximation ne fonctionne plus ; c'est ce qui explique que la machine à mouvement perpétuel de la figure T8.5 ne tourne pas.

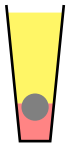
FIGURE T8.5 : Machine à mouvement perpétuel : les godets sont fermés par une membrane souple sur laquelle est fixé une masse. Le poids fait que les godets de gauche sont gonflés, donc la poussée d'Archimède est plus forte sur les godets de gauches que sur ceux de droite : la machine devrait donc se mettre à tourner. Or il n'en est rien, car l'expression de la poussée d'Archimède n'est valable que dans un fluide au repos.



Remarque : La poussée d'Archimède ne s'applique que pour un objet **entièrement immergé** dans un fluide ; par

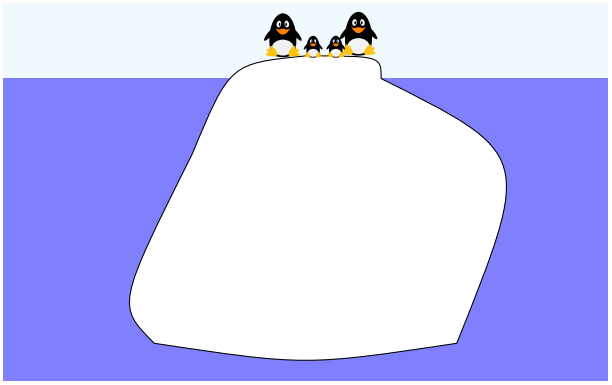
exemple, on ne peut pas l'appliquer au barrage vu précédemment.

Par contre, il y a un cas où elle s'applique encore, c'est celle d'un objet immergé dans plusieurs fluides séparés par des interfaces libres. Considérons par exemple dans l'image ci-contre un objet qui flotte à l'interface entre le vinaigre et l'huile d'une vinaigrette. Il est immergé dans deux fluides séparés par une interface libre. On peut alors appliquer la loi de la poussée d'Archimède ; pour évaluer la masse de liquide déplacé, il faut imaginer qu'on enlève l'objet, et qu'on remplace la partie du haut par de l'huile et la partie du bas par du vinaigre.



Exemple : Iceberg

Un iceberg (constitué de glace : $\rho_{glace} = 920\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) flotte dans l'eau salée ($\rho_{eau} = 1030\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$). Sur son volume total V une fraction αV émerge dans l'air ($\rho_{air} = 1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$).
Calculez α à l'équilibre.



L'iceberg est soumis à son poids $m_{glace}\vec{g} = \rho_{glace}V\vec{g}$, et à la poussée d'Archimède $-(m_{eau} + M_{air})\vec{g} = -\left(\rho_{eau}\cdot(1-\alpha)V + \rho_{air}\alpha V\right)\vec{g}$. En écrivant que la somme des forces est nulle à l'équilibre, et en simplifiant par V et par $\vec{g}$, on trouve $\rho_{glace} = \alpha\rho_{air} + (1-\alpha)\,\rho_{eau}$ donc $\alpha = \dfrac{\rho_{eau} - \rho_{glace}}{\rho_{eau} - \rho_{air}} = 11\,\%$

T8. Statique des fluides

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Forces surfaciques, forces volumiques.	Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
Résultante de forces de pression.	Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.
Équivalent volumique des forces de pression.	Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Équation locale de la statique des fluides.	Établir l'équation locale de la statique des fluides.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $\frac{dP}{dz} = -\rho.g$.	Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. **Capacité numérique : À l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.**
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Exploiter la loi d'Archimède.
Facteur de Boltzmann.	S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser $k_B T$ comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.

T8. Statique des fluides

Quelques conseils

✎ Dans un problème de statique des fluides, il faut bien considérer le système sur lequel on travaille : si c'est un objet gros, la résultante des forces de pression est la poussée d'Archimède s'il est immergé, ou le résultat d'une intégrale sinon ; si c'est un volume infinitésimal, la résultante est $\overrightarrow{\text{grad}}\, P.\text{d}V$.

✎ N'appliquez par $P = \text{cst} - \rho g z$ à toutes les sauces ! Il y a des hypothèses, et quand elles ne sont pas vérifiées, on fait attention à bien résoudre l'ED sur $P(z)$.

✎ Le modèle de l'atmosphère isotherme, bien que simpliste, est très important, c'est un grand classique à savoir refaire rapidement. Attention, dans l'AN de la hauteur caractéristique, à bien mettre la masse molaire en $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$!

✎ Pour exprimer la force élémentaire de pression à intégrer, il faut multiplier la pression par le produit vectoriel des deux petits déplacements parallèles à la surface. Par exemple, si on se déplace sur un cylindre, les deux petits déplacements selon la surface sont $r\text{d}\theta\vec{e}_\theta$ et $\text{d}z\vec{e}_z$ donc la force élémentaire est $\text{d}\vec{f} = P.(r\text{d}\theta\vec{e}_\theta) \wedge (\text{d}z\vec{e}_z) = Pr\text{d}\theta\text{d}z\vec{e}_r$. Attention, P peut dépendre des coordonnées.

T8. Statique des fluides

QCMs

réponses page 1227

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'unité SI de pression est

(a). le bar (bar)
(b). le millimètre de mercure (mmHg)
(c). le Pascal (Pa)

Q2. La pression dans un fluide au repos est la même partout.

(a). Faux
(b). Vrai

Q3. Quelle(s) conditions(s) faut-il pour que la pression dans un fluide au repos s'écrive $P(z) = \text{cst} - \rho g z$:

(a). le champ de pesanteur g est uniforme
(b). le fluide est incompressible
(c). z est orienté vers le haut

Q4. Quelle(s) condition(s) faut-il pour pouvoir écrire que la force de pression sur une surface vaut $PS\vec{n}$?

(a). le fluide doit être incompressible
(b). la pression soit être uniforme
(c). la surface doit être de forme rectangulaire
(d). la surface doit être plane

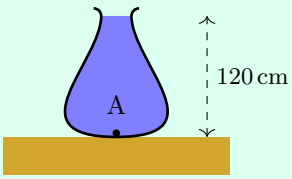
Q5. Le théorème d'Archimède indique que :

(a). Tout objet flottant à la surface de l'eau subit une force opposée au poids de l'eau déplacée (on néglige le poids de l'air)
(b). Tout objet entièrement immergé dans l'eau subit une force opposée à son poids
(c). Tout objet entièrement immergé dans l'eau ressort mouillé
(d). Tout objet entièrement immergé dans l'eau subit une force opposée au poids de l'eau déplacée

✓ QCM : Pression dans les liquides incompressibles ✗

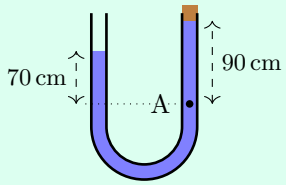
Dans ce QCM, on considère des liquides incompressibles.
Dans les dessins, le bleu représente de l'eau (masse volumique $1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$), le jaune représente de l'huile (masse volumique $800\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) et le gris foncé représente du mercure (masse volumique $13\,600\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$). L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et la pression atmosphérique à 1 atmosphère, soit 1,013 bar.

Q6. La pression en A vaut :



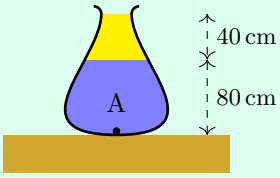
(a). 2,2 bar
(b). 0,12 bar
(c). 1,133 bar
(d). 1,025 bar

Q7. La pression en A vaut :



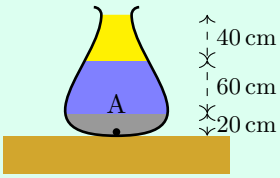
(a). 1,083 bar
(b). 1,020 bar
(c). 1,713 bar
(d). 1,006 bar

Q8. La pression en A vaut :



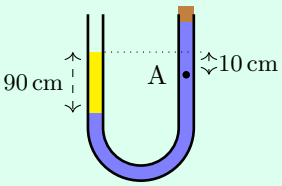
(a). 1,023 bar
(b). 1,125 bar
(c). 1,133 bar
(d). 1,109 bar

Q9. La pression en A vaut :



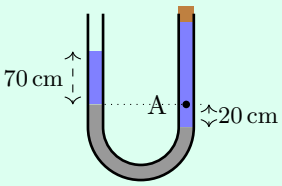
(a). 1,049 bar
(b). 1,197 bar
(c). 1,235 bar
(d). 1,377 bar

Q10. La pression en A vaut :



(a). 1,073 bar
(b). 1,021 bar
(c). 1,103 bar
(d). 1,005 bar

Q11. La pression en A vaut :



(a). 1,569 bar
(b). 1,335 bar
(c). 1,183 bar
(d). 1,044 bar

✓ QCM : Application de la poussée d'Archimède à des objets immergés dans deux fluides ✗

Ce QCM un peu plus difficile fait juste un peu réfléchir sur le fait que, pous un objet qui flotte, la poussée d'Archimède compense son poids.
Dans tout ce QCM, l'accélération de la pesanteur est prise égale à $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. La masse volumique de l'eau vaut $1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, celle de l'huile vaut $800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; celle de l'air est négligée.

Q12. On plonge un objet de 600 g dans de l'eau ; il flotte à la surface. Le volume immergé dans l'eau vaut :

(a). $600\,\mathrm{cm^3}$ (b). 6 L
(c). Il manque le volume de l'objet (d). 600 L

Q13. On plonge une bombonne de 5 L dans de l'eau ; elle flotte à la surface, et le volume émergé représente 34 % de son volume. Sa masse totale vaut :

(a). Très faible (b). 1,3 kg
(c). 1,7 kg (d). 3,3 kg

Q14. On plonge une ampoule de $300\,\mathrm{cm^3}$ dans un récipient contenant de l'eau et de l'huile ; elle se stabilise à l'interface, avec 12 % de son volume qui reste dans l'huile. Sa masse totale vaut :

(a). 293 g (b). 153 g
(c). 26 g (d). 29 g

Q15. On plonge un objet de 170 g et de volume $200\,\mathrm{cm^3}$ dans un récipient contenant de l'eau et de l'huile ; il se stabilise à l'interface. Le pourcentage de volume immergé dans l'eau vaut :

(a). 33 % (b). 50 %
(c). 67 % (d). 25 %

Q16. On plonge un objet de masse volumique $920\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ dans un récipient contenant de l'eau et de l'huile ; il se stabilise à l'interface. Le pourcentage de volume immergé dans l'eau vaut :

(a). 45 % (b). 64 %
(c). 71 % (d). 60 %

✓ QCM : Expériences dans une piscine ✗

Bientôt les vacances ! Imaginez-vous sur un radeau gonflable au milieu d'une piscine. À bord, vous disposez d'une tasse, d'un bout de bois, d'une pomme et d'un poulet (vivant).

Q17. Que se passe-t-il si vous remplissez votre tasse d'eau de la piscine et la buvez (tant pis s'il y a du chlore, un grand sage yankee a dit que ça combat le coronavirus) ?

(a). Le niveau de l'eau baisse (b). Le niveau de l'eau monte
(c). Le niveau de l'eau ne change pas

Q18. Que se passe-t-il si vous jetez le morceau de bois dans l'eau (il flotte) ?

(a). Le niveau de l'eau monte (b). Le niveau de l'eau ne change pas
(c). Le niveau de l'eau baisse

Q19. Que se passe-t-il si vous faites tomber la pomme dans l'eau, et qu'elle coule ?

(a). Le niveau de l'eau ne change pas
(b). Le niveau de l'eau monte
(c). Le niveau de l'eau baisse

Q20. Que se passe-t-il si le poulet s'envole et quitte le radeau ?

(a). Le niveau de l'eau ne change pas
(b). Le niveau de l'eau baisse
(c). Le niveau de l'eau monte

Q21. Que se passe-t-il si vous dégonflez un peu le radeau ?

(a). Le niveau de l'eau baisse
(b). Le niveau de l'eau ne change pas
(c). Le niveau de l'eau monte

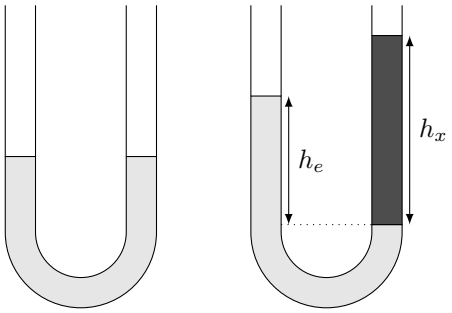
T8. Statique des fluides

Exercices

réponses page 1229

Exercice T8.1 : Mesure de la densité d'un liquide [*]

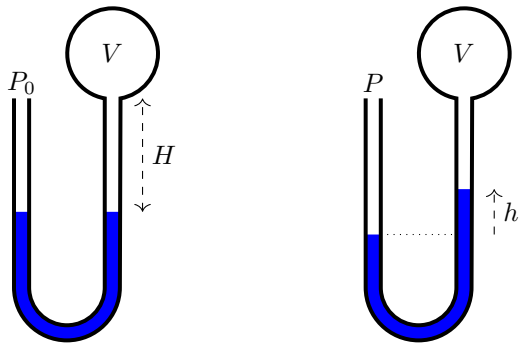
Dans un tube en U, on verse de l'eau. Le niveau dans les deux branches atteint la même hauteur (schéma de gauche). On verse alors un liquide de densité inconnue dans une des branches ; ce liquide (en gris sur la figure de droite) n'est pas miscible avec l'eau, et est plus léger : il reste donc à la surface de l'eau et occupe une hauteur h_x.
Les fluides sont supposés incompressibles.



1. Exprimez la différence de pression entre les deux surfaces des liquides, en fonction de h_e, h_x, ρ_{eau} et ρ_x.
2. La pression atmosphérique étant la même dans les deux branches, déduisez-en ρ_x.
   AN pour de l'huile : $h_e = 9\,\text{cm}$ et $h_x = 10\,\text{cm}$.

Exercice T8.2 : Baromètre [**]

On considère un baromètre formé d'un tube de section $s = 3{,}1\,\text{mm}^2$ ayant une forme de U, contenant un liquide de densité $1,05$. Le côté gauche est en contact avec l'atmosphère à la pression P, le côté droit est fermé par une boule de volume $V = 2{,}3\,\text{cm}^3$.
On a réglé le système pour que, lorsque $P = P_0 = 1{,}013\,\text{bar}$, le liquide monte à la même hauteur dans les deux branches du U, à une altitude $H = 4{,}1\,\text{cm}$ sous la boule. Lorsque P varie, le liquide à droite se retrouve à une altitude h au-dessus du liquide à gauche (h peut être négatif). On néglige la masse volumique de l'air. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1. Soit P_b la pression de l'air dans la boule. Reliez P_b à P, ρ, g et h par les lois de la statique des fluides.
2. À l'aide de la loi du gaz parfait, exprimez P en fonction de h et des autres données, si on suppose que la température reste uniforme et constante partout.
   AN lorsque $h = -2{,}3\,\text{cm}$.
3. Pourquoi un tel baromètre n'est-il en réalité que qualitatif, et ne permet pas de faire des mesures précises de la pression ?

Exercice T8.3 : Bulle d'eau pétillante [*]

Une bulle de gaz se forme au fond d'une bouteille d'eau pétillante de 23 cm de haut. En bas de la bouteille, elle a pour diamètre $r_0 = 1\,\text{mm}$; quel est son rayon une fois arrivée à la surface, si on la modélise comme un gaz parfait subissant une transformation isotherme et sans modification de la quantité de matière ? On introduira les valeurs numériques nécessaires.

Exercice T8.4 : Atmosphère terrestre [**]

Les mesures effectuées dans l'atmosphère montrent que, avec une bonne approximation, la température moyenne y varie en fonction de l'altitude z suivant une loi linéaire $T(z) = T_0(1 - az)$ avec $a = 22{,}5 \times 10^{-3}\,\text{km}^{-1}$ et $T_0 = 290\,\text{K}$, au moins sur la partie la plus basse (moins de 11 km d'altitude), appelée *troposphère*. On cherche à en déduire la pression P et la masse volumique ρ en fonction de l'altitude ; on note $P(0) = P_0 = 1\,\text{bar}$ et $\rho(0) = \rho_0$.
On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. Écrivez 2 équations reliant P, ρ et T : une traduisant l'équilibre thermodynamique du gaz, l'autre son équilibre mécanique.
2. Déduisez-en l'équation différentielle reliant P et z ; on posera $h = \dfrac{RT_0}{M_a g}$.
3. Résolvez-la en séparant les variables, puis en intégrant entre le sol et l'altitude z.
   Déduisez-en $\rho(z)$; et faites l'AN de $\frac{1}{ah}$.
4. Comparez, avec Python ou avec votre calculatrice, les courbes de P et de ρ, avec celles obtenues dans le cas d'une atmosphère isotherme à T_0.

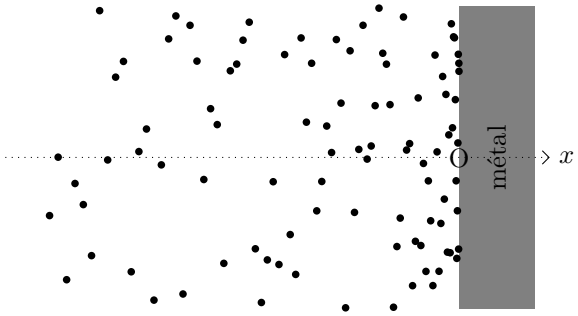
Exercice T8.5 : Pression dans un océan faiblement compressible [**]

On suppose que l'eau d'un océan est à la température uniforme $T = 280\,\text{K}$, et qu'elle est faiblement compressible avec un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 5 \times 10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$.

1. En raisonnant sur une masse m d'eau, de volume initial V, montrez que lorsque la pression varie de $\text{d}P$, la masse volumique μ du fluide varie de $\text{d}\mu = \mu\chi_T \text{d}P$.
   Indication : il faudra faire un développement limité : $\frac{1}{1-\chi_T \text{d}P} \approx 1 + \chi_T \text{d}P$ puisque $\text{d}P$ est très petit.
2. Déduidez-en l'expression de la masse volumique μ en fonction de la pression P, de χ_T et des valeurs $P_0 = 1\,\text{bar}$ et $\mu_0 = 1 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ à la surface.
   Indication : intégrez en séparant les variables.
3. En écrivant la relation fondamentale de la statique des fluides, déterminez la pression en fonction de la profondeur h, mesurée à partir de la surface.
   Indication : intégrez encore en séparant les variables.
4. Faites l'AN à 5 km de profondeur (avec $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), et comparez à la pression qu'on obtiendrait en supposant l'eau incompressible.

Exercice T8.6 : Adsorption d'un gaz sur un métal [***]

Un métal occupe le demi-espace $x > 0$; le demi-espace $x < 0$ est occupé par de l'hélium. L'hélium gazeux est assimilé à un gaz parfait ; sa température est constante : $T = 0{,}8\,\text{K}$.



Les atomes du métal attirent les atomes d'hélium : chaque atome d'hélium subit de la part du métal une force $\vec{f} = \dfrac{3A}{x^4}\vec{e}_x$ avec $A = 5{,}1 \times 10^{-51}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-4}$.
Données :

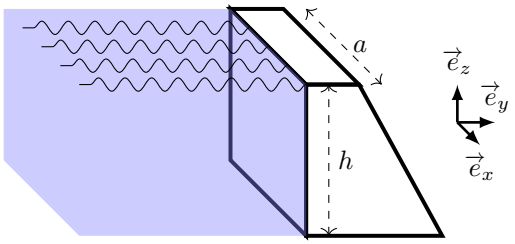
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

— Masse molaire de l'hélium : $M_{He} = 4{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
— Densité molaire de l'hélium liquide : $n = 44{,}9\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$
— Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

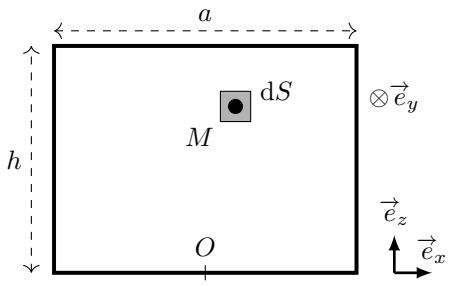
1. Calculez numériquement la distance $|x|$ pour laquelle le poids d'un atome d'hélium a la même valeur que la force d'attraction du métal sur cet atome.
2. **Désormais, on va s'intéresser à ce qui se passe très près de la paroi ($|x| < 100\,\mathrm{nm}$), ce qui fait qu'on négligera le poids.**
   On considère un petit volume $\mathrm{d}V$ d'hélium situé à l'abscisse x. Exprimez le nombre $\mathrm{d}N$ d'atomes d'hélium qu'il contient, en fonction de $P(x)$, de $\mathrm{d}V$ et des constantes.
3. En traduisant l'équilibre mécanique de ce petit volume $\mathrm{d}V$, établissez l'équation différentielle vérifiée par la pression P dans le gaz à l'équilibre (en fonction de la variable x).
4. Intégrez cette équation différentielle en séparant les variables ; on supposera connue (par mesure) la limite de P lorsque $x \to -\infty$, notée P_∞. On posera $\ell = \sqrt[3]{\frac{A\mathcal{N}_A}{RT}}$.
   Faites l'AN de ℓ.
5. La pression de vapeur saturante de l'hélium à T vaut $\Pi(T) = 1{,}52\,\mathrm{Pa}$. On mesure $P_\infty = 1{,}2\,\mathrm{Pa}$.
   Montrez que le métal se recouvre d'une couche d'hélium liquide dont on calculera l'épaisseur.
6. Calculez la surface de métal qu'il faudrait avoir pour stocker 1 kg d'hélium liquide. Quel procédé permettrait d'obtenir une telle surface ?

Exercice T8.7 : Poussée sur un barrage [**]

1. **Barrage poids**
   On reprend le modèle vu en cours d'un barrage de largeur a et de hauteur h.



Barrage poids, vu en perspective.

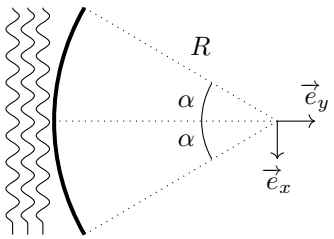


Barrage poids, vu de face.

   Pour simplifier, on négligera la pression atmosphérique P_0 dans les calculs.

   (a) Retrouver rapidement l'expression de la pression $P(z)$.
   (b) Retrouver l'expression de la force totale $\vec{F}$ qui s'exerce sur le barrage.
   (c) On veut calculer le moment de ces forces par rapport au point O.
   Considérons de nouveau une petite surface $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x.\mathrm{d}z$ autour du point $M(x,z)$. Exprimez le moment $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la force de pression s'exerçant sur $\mathrm{d}S$, par rapport au point O.
   (d) Par intégration sur la surface, exprimez le moment total $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. Vérifiez qu'il peut s'écrire $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{h}{3}\vec{e}_z \wedge \vec{F}$ et interprétez ce résultat.

2. **Barrage voûte**
   Le barrage a désormais la forme d'une portion de cylindre, d'angle 2α, de rayon R, de hauteur h (perpendiculaire à la figure), et est rempli à ras bords. On prend encore la référence d'altitude au bas du barrage.



On prend la même expression que précédemment pour la pression de l'eau en fonction de l'altitude.

(a) Quel système de coordonnées choisit-on pour repérer un point du barrage ? Quelles sont les variables qui varient quand ce point se déplace sur le barrage ? Entre quelles bornes varient-elles ?

(b) On considère un point P repéré par ses coordonnées, et on note $\vec{n}$ le vecteur normal au barrage en P, dirigé de l'eau vers le barrage.
Décomposez $\vec{n}$ dans la base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en fonction de θ.

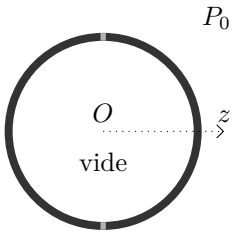
(c) On prend une petite surface autour de P. Puisque l'ensemble du barrage va être décrit en faisant varier deux coordonnées, il faut exprimer cette surface en fonction des petites variations de ces coordonnées.
En raisonnant sur le petit déplacement du point P lorsque ces coordonnées changent, exprimez la petite surface en fonction des coordonnées et/ou de leur petite variation.

(d) Écrivez alors la force de pression s'exerçant sur cette petite surface, décomposée dans la base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

(e) Intégrez sur les deux variables et déduisez-en la somme des forces de pression s'exerçant sur la barrage.
Indication : il faut séparer l'intégrale sur $\vec{e}_x$ et celle sur $\vec{e}_y$.
AN : $h = 30\,\text{m}$, $R = 100\,\text{m}$, $\alpha = 20°$.
Remarque : avant d'intégrer, il est **impératif** de s'assurer que tout les vecteurs qui apparaissent dans l'expression sont des constantes et peuvent être sortis de l'intégrale. On ne **sait pas** intégrer des vecteurs.

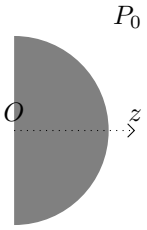
Exercice T8.8 : Hémisphères de Magdebourg [**]

On considère deux demi-sphères creuses de rayon $R = 25\,\text{cm}$ plaquées l'une contre l'autre, de manière à former une sphère complète. À l'extérieur de cette sphère, il y a l'air à la pression atmosphérique $P_0 = 1\,\text{bar}$; à l'intérieur, on fait le vide. On cherche à calculer la force de pression totale (appelée *résultante des forces de pression*) exercée sur chacune de ces demi-sphères, par exemple celle de droite. On prend les notations de la figure ci-contre.



1. Par des considérétions de symétries, déterminez la direction de la résultante $\vec{F}$ des forces de pression sur la demi-sphère de droite.

2. *Première méthode* : avec la poussée d'Archimède.
La demi-sphère de droite n'est pas entièrement immergée dans l'air. On ne peut lui appliquer la poussée d'Archimède. On va alors imaginer l'expérience suivante : on place dans l'air une demi-boule de rayon R. On néglige la masse volumique de l'air.



   (a) Que vaut la résultante des forces de pression s'exerçant sur toute la demi-boule ?

   (b) Que vaut la résultante des forces de pression s'exerçant sur la face de gauche ?

   (c) En déduire $\vec{F}$ par un raisonnement rigoureux.

3. *Seconde méthode* : par intégration.
On se place en coordonnées sphériques centrées sur O. On considère une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ de la sphère autour d'un point $M(R, \theta, \varphi)$.

(a) Quelles sont les coordonnées sphériques qui varient lorsque le point P se déplace sur la sphère ? Entre quelles bornes varient-elles ?

(b) Que vaut le petit élément de surface $\mathrm{d}S$? Que vaut le vecteur normal $\vec{n}$ dirigé de l'air vers l'objet ? On le projettera sur les vecteurs fixes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

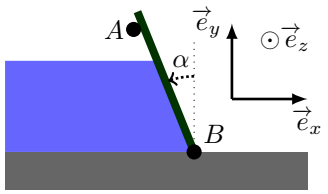
Indication : pour la surface, on fait le produit des normes des petits déplacements selon les deux coordonnées qui varient.

(c) En déduire l'expression de la force élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}$.

(d) Par intégration, exprimer $\vec{F}$.

Exercice T8.9 : Porte hydraulique [***]

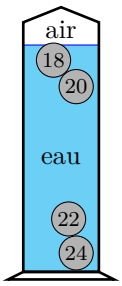
Un bassin de largeur L (orthogonalement à la figure) contient de l'eau (masse volumique ρ) sur une hauteur h. Il est fermé par une porte plane de masse $m = 2{,}3\,\mathrm{t}$, rectangulaire, homogène, de dimensions $\ell \times L = 2{,}2\,\mathrm{m} \times 3{,}2\,\mathrm{m}$, pouvant pivoter librement autour d'un axe Bz. Au départ, cette porte est en butée en un point A ; elle fait un angle $\alpha = 22°$ avec la verticale.



1. Exprimez le moment de la force de surpression de l'eau (liée à $P - P_0$ où P_0 est la pression atmosphérique) sur la porte, par rapport à l'axe Bz.
2. Montrez que la porte commence à basculer si h dépasse une valeur à exprimer ; faire l'AN.
3. Quelle va être la suite du mouvement ?

Exercice T8.10 : Thermomètre de Galilée [*]

Un thermomètre de Galilée est constitué d'une enceinte (qu'on supposera indéformable tout au long de ce problème) de volume $V = 700\,\mathrm{cm}^3$, remplie en partie d'eau, en partie d'air, et étanche. Des boules numérotées sont placées dans l'eau.



Dans ce problème, on considérera, pour simplifier, qu'il n'y a une seule boule, de masse $m_b = 8{,}265\,\mathrm{g}$ et de volume $V_b = 8{,}280\,\mathrm{cm}^3$; cette boule est indilatable et incompressible. La masse d'eau dans l'enceinte vaut $m_e = 550{,}0\,\mathrm{g}$. La masse volumique de l'eau vaut $\rho_{20} = 0{,}9984\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$ à $20{,}0\,°\mathrm{C}$; son coefficient de dilatation isobare vaut $\alpha = 5{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$; l'eau est supposée incompressible : $\chi_T = 0$; on admet que le coefficient α peut alors être utilisé même si la pression n'est pas constante.

L'air est modélisé par un gaz parfait de masse molaire $M_a = 28{,}96\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. La masse d'air dans l'enceinte vaut $m_a = 0{,}180\,\mathrm{g}$.

On rappelle que $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ et que $0\,°\mathrm{C}$ correspond à $273\,\mathrm{K}$.

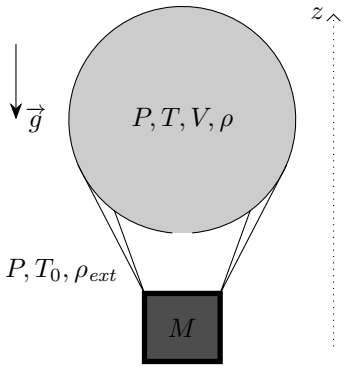
1. Calculer le volume d'eau dans l'enceinte à $20{,}0\,°\mathrm{C}$, puis l'exprimer à une température T (en °C) **proche** de $20\,°\mathrm{C}$, en fonction de T. En déduire la masse volumique ρ_e de l'eau en fonction de T.
2. On suppose pour l'instant que la boule repose au fond (elle est donc en contact avec le fond ; on supposera néanmoins que la surface de contact est suffisamment petite pour qu'on puisse la considérer comme entièrement immergée).

   En établissant le bilan des forces qui s'exercent sur la boule, montrer que cette configuration (la boule au fond) n'est possible que si $\frac{m_b}{V_b} > \rho_e(T)$. En déduire une condition sur la température ; on introduira une température limite T_ℓ dont on fera l'AN.

   Que fait la boule si cette condition n'est pas réalisée ?
3. On suppose que $T = 22{,}0\,°\mathrm{C}$; à l'aide d'un bilan des forces, calculer le volume de la boule qui émerge de l'eau. On admettra qu'on peut appliquer la poussée d'Archimède en négligeant la masse d'air déplacé.
4. Calculer le volume d'air à $T = 22\,°\mathrm{C}$; en déduire la pression P de l'air.

Exercice T8.11 : Montgolfière [**]

Une montgolfière est constituée d'une nacelle et d'une enveloppe qui contient du gaz. La nacelle et l'enveloppe, plus l'équipage éventuel, ont une masse totale $M = 400\,\text{kg}$.
Dans une montgolfière à air chaud, l'enveloppe est indéformable ; le volume de gaz contenu, $V = 2500\,\text{m}^3$, ne varie pas. Un brûleur permet de chauffer le gaz contenu dans l'enveloppe ; on supposera que la température de tout le gaz est homogène, on la note T. On néglige le volume de la nacelle et de l'enveloppe (pour en tenir compte, il suffirait d'intégrer leur poussée d'Archimède dans leur poids).
L'enveloppe étant ouverte, la pression à l'intérieur est toujours égale à la pression à l'extérieur.
Les mouvements de la montgolfière dans le référentiel terrestre (galiléen) sont suffisamment lents pour qu'on puisse négliger les frottements.
L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.



1. La montgolfière est au sol, la température extérieure vaut $T_0 = 290\,\text{K}$ et la pression $P_0 = 1\,\text{bar}$.
   En effectuant un bilan de toutes les forces qui s'exercent sur le système {nacelle,enveloppe,gaz enfermé}, montrez que T doit être supérieur à une certaine valeur pour que la montgolfière décolle.
   Indication : n'oubliez pas le poids de l'air enfermé.
2. On suppose que l'atmosphère est localement isotherme, et que la pression et la masse volumique varient avec l'altitude z selon les lois $P(z) = P_0 e^{-z/d}$ et $\rho_{ext}(z) = \rho_0 e^{-z/d}$, avec $d = 8\,\text{km}$ et $\rho_0 = \frac{P_0 M_a}{R T_0}$.
   La température initiale de l'air enfermé vaut $T_i = 400\,\text{K}$. Si on néglige les pertes de chaleur par l'enveloppe, alors on peut montrer que la température T varie au cours de l'ascension, à cause de la variation de pression, suivant la loi de Laplace $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cst}$, avec $\gamma = 1,4$.
   (a) Exprimez la température T à l'altitude z, en fonction de T_i et $d' = d\frac{\gamma}{\gamma-1}$; faites l'AN de d'.
   (b) Exprimez la masse volumique de l'air contenu dans le ballon à l'altitude z en fonction de $d'' = \frac{\text{d}.d'}{\text{d}'-d}$ et des constantes ; faites l'AN de d''.
   (c) Déduisez-en la résultante des forces qui s'exercent sur le ballon.
   (d) Montrez qu'avec ce modèle, le ballon s'arrête à une altitude h à déterminer par une résolution numérique.
   (e) Si on tient compte des pertes de chaleur, le ballon montera-t-il plus ou moins haut ?

T8. Statique des fluides

TDs numériques

réponses page 1234

TD numérique : Ballon-sonde à hélium

EDO

Les ballons-sonde à hélium sont utilisés pour transporter des instruments scientifiques en haute atmosphère. Il fonctionnement grâce au fait que l'hélium est un gaz moins lourd que l'air.

Données :

- masse molaires : $M_{air} = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; $M_{He} = 4\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
- champ de pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
- pression au sol $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$

1. On modélise l'atmosphère par un gaz parfait dans lequel la température varie selon la loi $T(z) = T_0 - \alpha z$ avec $T_0 = 290\,\mathrm{K}$ et $\alpha = 1\,\mathrm{K}/140\,\mathrm{m}$.

   Montrez que la pression vérifie la loi $P(z) = P_0\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}z\right)^{\beta}$ avec β à exprimer en fonction de M_{air}, g, R et α.

2. Créez trois fonctions qui serviront plus loin, `Tair(z)`, `Pair(z)` et `rhoair(z)` qui renvoient la température, la pression et la masse volumique de l'atmosphère à l'altitude z. Tracez la courbe de la pression de l'air en fonction de l'altitude jusqu'à 10 km.

3. On considère un ballon de masse totale $m_b = 9\,\mathrm{kg}$ dans lequel est enfermé $m_{He} = 2\,\mathrm{kg}$ d'hélium, modélisé comme un gaz parfait monoatomique de capacité thermique molaire à volume constant $C_{vm} = \frac{3}{2}R$. On modélisera le ballon par une sphère de rayon r_b et de volume V_b (on négligera le volume des instruments suspendus sous le ballon). À cause de l'élasticité de l'enveloppe, la pression de l'hélium dans le ballon vaut $P_b = P_{air}(z) + 0{,}2\,\mathrm{bar}$.

   On notera T_b la température de l'hélium du ballon ; l'hélium dans le ballon échange de la chaleur avec l'extérieur à travers une résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{\gamma_{th} S_b}$ où $\gamma_{th} = 3\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$ et S_b la surface de la sphère.

   On note z_b l'altitude du ballon, $\vec{e}_z$ étant le vecteur unitaire vertical ascendant ; comme le ballon bouge, il est soumis à une force de la part de l'air qu'on modélisera comme la somme de la poussée d'Archimède et d'une force de frottements $-\lambda\pi r_b^2 \vec{v}_b$ avec $\lambda = 0{,}2\,\mathrm{USI}$ et $\vec{v}_b$ la vitesse du ballon.

   En appliquant le Théorème du Centre de Masse au ballon, établissez une équation différentielle reliant $\ddot{z}_b$ aux autres variables.

4. Exprimez le volume V_b en fonction de $P_{air}(z_b)$ et T_b. En déduire la petite variation de volume $\mathrm{d}V_b$ en fonction de la variation $\mathrm{d}z_b$ d'altitude et de la variation $\mathrm{d}T_b$ de température.

   Indication : on pourra remarquer que $\mathrm{d}P_b = \frac{\mathrm{d}P_b}{\mathrm{d}z_b}\mathrm{d}z_b$

5. En déduire, par application du premier principe de la thermodynamique, une équation différentielle reliant $\dot{T}_b$ à $\dot{z}_b$ et aux variables.

6. On lâche le ballon depuis le sol, sans vitesse initiale et avec une température initiale T_0. À l'aide de `odeint`, simulez les variations de $z_b(t)$, $\dot{z}_b(t)$ et $T_b(t)$ pendant 30 min.

   Indication : dans la fonction dérivée, calculez d'abord la pression P_b, puis le rayon r_b ; calculez ensuite $\dot{T}_b$ et $\ddot{z}_b$.

   Tracez les courbes $z_b(t)$, $r_b(t)$ et $T_b(t)$. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c)
$1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Q2.(a)
Elle vérifie la loi $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \overrightarrow{f}_{vol} = \rho.\overrightarrow{g}$ le plus souvent.
Q3.(a) ET (b) ET (c)
Les trois hypothèses sont nécessaires. Si z est vers le bas, le signe change.
Q4.(b) ET (d)
Q5.(a) ET (d)
Et aussi : « Tout objet flottant à la surface de l'eau subit une force opposée à son poids »...je vous laisse y réfléchir !

Réponses au QCM : Pression dans les liquides incompressibles

Q6.(c)
$P_A = 101300 + 1,2\times 10\times 1000\text{Pa}$
Q7.(a)
On est 70 cm en-dessous du niveau de la surface libre à 1 atmosphère ; les 90 cm ne servent à rien.
Q8.(b)
$P_A = 101300 + 0,4\times 10\times 800 + 0,8\times 10\times 1000$ Pa
Q9.(d)
$P_A = 101300 + 0,4\times 10\times 800 + 0,6\times 10\times 1000 + 0,2\times 10\times 13600$ Pa
Q10.(d)
$P_A = 101300 + 0.9\times 10\times 800 - 0.8\times 10\times 1000$ Pa car le point A est 80 cm au-dessus du niveau de l'interface huile/eau.
Q11.(b)
$P_A = 101300 + 0.7\times 10\times 1000 + 0.2\times 10\times 13600 - 0.2\times 10\times 1000$ Pa

Réponses au QCM : Application de la poussée d'Archimède à des objets immergés dans deux fluides

Q12.(a)
La poussée d'Archimède compense le poids ; la masse d'eau déplacée vaut donc 600 g.
Q13.(d)
Le volume d'eau déplacé vaut $(1-0,34)\times 5 = 3{,}3\,\text{L}$
Q14.(a)
L'objet déplace $36\,\text{cm}^3$ d'huile et $264\,\text{cm}^3$ d'eau.
Q15.(d)
Si on note p la fraction immergée dans l'eau, alors à l'équilibre : $[1000p + 800\,(1-p)]\times 0,200 = 170$
Q16.(d)
À l'équilibre, le pourcentage immergé p vérifie $[1000p + 800\,(1-p)] = 920$

Réponses au QCM : Expériences dans une piscine

Q17.(c)
Vous prélevez un volume V d'eau, soit une masse $m = \rho.V$. Étant plus lourd de m, le radeau va s'enfoncer, et la déplacer une masse supplémentaire m d'eau (donc un volume V) afin que la poussée d'Archimède compense de nouveau le poids total du radeau. Au final, l'eau reprend son niveau initial.
Q18.(b)
Le poids du radeau diminue, donc il va déplacer moins d'eau pour que la poussée d'Archimède soit moins grande, mais en contrepartie le morceau de bois va déplacer une masse d'eau équivalente, ce qui fait qu'en tout le niveau de l'eau ne change pas.
Q19.(c)
Soit m la masse de la pomme ; comme la pomme n'est plus sur le radeau, cela fait diminuer le poids de $m.g$ donc le volume immergé du radeau diminue de $\frac{m}{\rho_{eau}}$: le niveau de l'eau baisse. Mais la pomme, au fond de l'eau, occupe un volume $\frac{m}{\rho_{pomme}}$. Comme $\rho_{pomme} > \rho_{eau}$, ce gain de volume est plus faible que la perte au début, donc le niveau de l'eau a bien baissé.

Q20.(b)

La masse du radeau baisse donc la poussée d'Archimède aussi, donc le volume d'eau déplacé baisse.

Q21.(b)

Le volume du radeau ne joue aucun rôle dans la poussée d'Archimède. Attention toutefois à ne pas trop le dégonfler, au risque de couler !

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice T8.1 : Mesure de la densité d'un liquide [*]

1. $P_{droite} = P_{interface\ x/eau} - \rho_x.g.h_x = P_{gauche} + \rho_e.g.h_e - \rho_x.g.h_x$
2. La pression à la surface est identique des deux côtés, donc $\rho_e.g.h_e - \rho_x.g.h_x = 0$ soit $\rho_x = \rho_{eau}\frac{h_e}{h_x} = 0{,}9\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$

Corrigé de l'exercice T8.2 : Baromètre [**]

1. Par la relation fondamentale de la statique des fluides, pour un fluide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme, $P_b = P - \rho.g.h$ avec $\rho = 1050\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ la mase volumique du fluide (car la pression du fluide en surface vaut la pression de l'air avec lequel il est en contact).
2. Au départ, les deux surfaces du liquide sont au même niveau, donc l'air enfermé a une pression P_0 et un volume $V + H.s$.
   À l'équilibre pour $P \neq P_0$, l'air enfermé a une pression P_b et un volume $V + (H-h).s$. Si la température ne change, par la loi du gaz parfait, $P_0.(V + H.s) = P_b.(V + H.s - h.s)$. On remplace avec la question précédente : $P_0.(V + H.s) = (P - \rho.g.h).(V + H.s - h.s)$ soit après développement $P = \frac{P_0.(V+H.s)+\rho.g.h.(V+H.s-h.s)}{V+H.s-h.s}$
   AN : $P = 0{,}98\,\mathrm{bar}$
3. Si la température change, les lois précédentes ne sont plus valables, et h change. Ce baromètre de décoration fonctionne donc à peu près en intérieur, dans une maison de température à peu près constatte, mais n'est pas un instrument de mesure précis.

Corrigé de l'exercice T8.3 : Bulle d'eau pétillante [*]

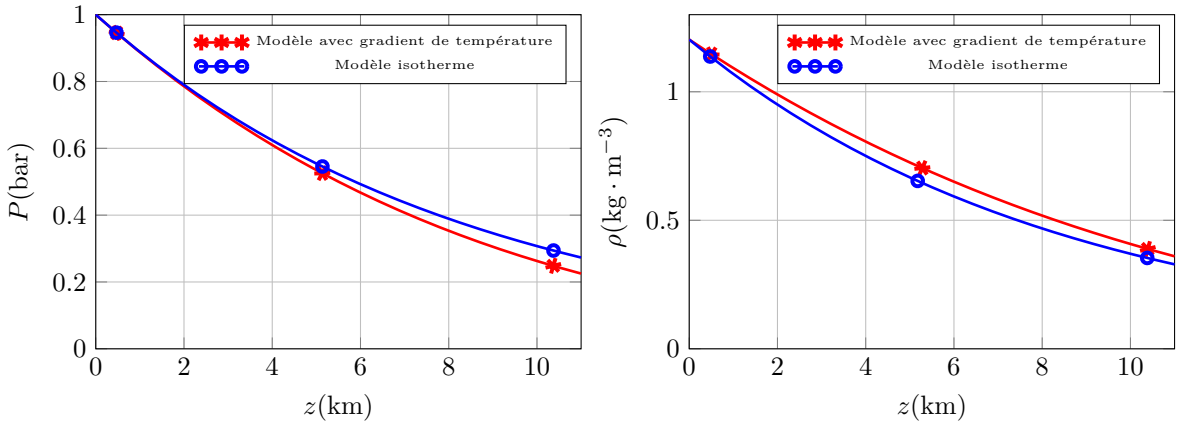
Soit $P_0 \approx 1\,\mathrm{bar}$ la pression de l'air ; alors au fond de la bouteille, la pression vaut $P_f = P_0 + \rho g h = 1{,}025\,\mathrm{bar}$ avec $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ la masse volumique de l'eau.

Soit r_s le rayon à la surface, alors par la loi du gaz parfait $P_f\frac{4}{3}\pi r_0^3 = nRT = P_0\frac{4}{3}\pi r_s^3$ (isotherme) donc $r_s = r_0\left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{1/3} = 1{,}008\,\mathrm{mm}$: c'est très faible.

Donc si on voit les bulles grossir en montant, c'est que la quantité de matière augmente : du gaz carbonique s'ajoute à la bulle au fur et à mesure de la montée.

Corrigé de l'exercice T8.4 : Atmosphère terrestre [**]

1. Les 2 relations sont :
   - la loi des gaz parfaits : $P(x,y,z)M_a = \rho(x,y,z)RT(z)$
   - la relation fondamentale de la statique des fluides : $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z = -\rho(x,y,z)g\vec{e}_z$ qui montre que P (et aussi ρ) ne dépend que de z, et que $\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho g$
2. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{P(z)M_a}{RT(z)}g = -\dfrac{M_a g}{RT_0}\dfrac{P(z)}{1-az} = -\dfrac{P(z)}{h(1-az)}$
3. On sépare les variables : $\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{\mathrm{d}z}{h(1-az)}$ qu'on intègre : $\ln P - \ln P_0 = -\frac{\ln(1-az)-\ln 1}{-ah}$ ce qui donne $P(z) = P_0 e^{\frac{ln(1-az)}{ah}}$ soit $P(z) = P_0(1-az)^{\frac{1}{ah}}$
   AN : $\dfrac{1}{ah} = 5{,}2$ (attention aux unités)
   On en tire $\rho(z) = \rho_0(1-az)^{\frac{1}{ah}-1} = \rho_0(1-az)^{4{,}2}$
4.



Corrigé de l'exercice T8.5 : Pression dans un océan faiblement compressible [**]

1. On considère un morceau de fluide de masse m. Il a un volume V. Si la pression varie de $\mathrm{d}P$, le volume devient $V - V\chi_T \mathrm{d}P$ par définition de χ_T.
   La masse volumique passe donc de $\frac{m}{V}$ à $\frac{m}{V-V\chi_T \mathrm{d}P} = \frac{m}{V}\frac{1}{1-\chi_T \mathrm{d}P} = \frac{m}{V}(1+\chi_T \mathrm{d}P)$ ce qui correspond bien à une variation de $\mu\chi_T \mathrm{d}P$.
2. Donc $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \chi_T \mathrm{d}P$ soit en intégrant depuis 0 : $\ln\mu - \ln\mu_0 = \chi_T(P-P_0)$ soit $\mu = \mu_0 e^{\chi_T(P-P_0)}$.
3. On a alors par la relation fondamentale de la statique des fluides : $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} = \mu g = \mu_0 g e^{\chi_T(P-P_0)}$, soit $e^{\chi_T(P_0-P)}\mathrm{d}P = -\mu_0 g.\mathrm{d}h$ donc $(e^{\chi_T(P_0-P)}-1)/\chi_T = \mu_0 g h$ et $\chi_T(P_0-P) = \ln(1+\mu_0 g h \chi_T)$ donc $P = P_0 - \dfrac{1}{\chi_T}\ln(1+\mu_0 g h \chi_T)$
4. La pression à 5 km de profondeur vaut 492 bar si on tient compte de la compressibilité, et 486 bar sinon ; soit une erreur de 1 %.
   Remarque : pour être précis, il faudrait tenir compte de la variation de g avec la profondeur.

Corrigé de l'exercice T8.6 : Adsorption d'un gaz sur un métal [***]

1. $\frac{3A}{x^4} = \frac{M_{He}}{\mathcal{N}_A}g \Leftrightarrow x = 690\,\mathrm{nm}$. Donc au-delà su micron, la force d'attraction de la paroi est négligeable ; en-dessous de 300 nm environ, le poids est négligeable.
2. Par la loi du GP : $\mathrm{d}N = \dfrac{\mathcal{N}_A P}{RT}\mathrm{d}V$
3. Le volume $\mathrm{d}V$ est soumis à la force de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P.\mathrm{d}V$ et à la somme des forces d'attractoin de la paroi sur les $\mathrm{d}N$ atomes du gaz, qui s'écrit $\frac{3A}{x^4}\mathrm{d}N\vec{e}_x$. La projection sur $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ montre que la pression ne dépend que de x, et la projection sur $\vec{e}_x$ donne $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3A\mathcal{N}_A P}{RTx^4}$
4. En séparant : $\frac{\mathrm{d}P}{P} = \dfrac{3A\mathcal{N}_A P}{RT}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$.
   On intègre depuis l'infini : $\int_{P_\infty}^{P}\frac{\mathrm{d}P}{P} = \dfrac{A\mathcal{N}_A P}{RT}\int_{-\infty}^{0}\frac{3\mathrm{d}x}{x^4}$ soit $[\ln P]_{P_\infty}^{P} = \dfrac{A\mathcal{N}_A P}{RT}\left[-\frac{1}{x^3}\right]_{-\infty}^{0}$.
   En posant $\ell^3 = \dfrac{A\mathcal{N}_A P}{RT} = 0{,}77\,\mathrm{nm}$, on obtient $\ln\frac{P}{P_\infty} = -\frac{\ell^3}{x^3}$ (on voit par homogénéité que ℓ est une longueur).
   Donc finalement $P(x) = P_\infty e^{-\ell^3/x^3}$
5. $\lim_{x\to 0} P(x) = +\infty$ donc quand on s'approche de la paroi, il va arriver un moment où la pression dans le gaz dépasse la pression de vapeur saturante : l'hélium devient alors liquide. Cela arrive lorsque $P(x) > \Pi$ soit $x > -\dfrac{\ell}{\sqrt[3]{\ln\frac{\Pi}{P_\infty}}} = -1{,}3\,\mathrm{nm}$. On a donc une couche de 1,3 nm d'hélium liquide qui est adsorbée sur le métal.
6. 1 kg correspond à 250 mol soit 5,57 L. Avec une épaisseur de 1,3 nm il faut une surface de $43\,000\,\mathrm{m}^2 = 4{,}3\,\mathrm{ha}$. Une telle surface peut être atteinte dans des matériaux poreux, selon le principe d'une éponge. C'est ce qu'on cherche à faire, par exemple, pour stocker du dihydrogène pour les voitures à pile à combustible.

Corrigé de l'exercice T8.7 : Poussée sur un barrage [**]

1. **Barrage poids**

(a) $P(z) = \rho g.(h-z)$

(b) $\vec{F} = \int_{z=0}^{h}\int_{x=-a/2}^{a/2} \rho g(h-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,\vec{e}_y = \frac{\rho g h^2 a}{2}\vec{e}_y$

(c) $\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OP}\wedge\mathrm{d}\vec{F} = (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z)\wedge(\rho g.(h-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_y) = \rho g.(h-z)\,(x\vec{e}_z - z\vec{e}_x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$. On intègre :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \iint_S \rho g.(h-z)\,(x\vec{e}_z - z\vec{e}_x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &= \int_{z=0}^{h}\int_{x=-a/2}^{a/2}\rho g.(h-z)x\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_z - \int_{z=0}^{h}\int_{x=-a/2}^{a/2}\rho g(h-z)z\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_x\\ &= \left[\rho g\left(hz-\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^h\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a/2}^{+a/2}\vec{e}_z - \left[\rho g\left(h\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^h[x]_{-a/2}^{+a/2}\,\vec{e}_x\\ &= -\frac{\rho g a h^3}{6}\vec{e}_x\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\vec{\mathcal{M}} = \frac{h}{3}\vec{e}_z\wedge\vec{F}$, ce qui signifie que tout se passe comme si la poussée s'exerçait sur un point situé en $H(0,h/3)$. On dit parfois que la poussée s'exerce à 1/3 de la hauteur du barrage.

2. **Barrage voûte**

(a) On prend des coordonnées cylindriques, l'angle θ étant repéré par rapport à $-\vec{e}_y$; z varie de 0 à h et θ entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

(b) $\vec{n} = \sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$

(c) $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

(d) $\mathrm{d}\vec{F} = \rho g R(h-z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.(\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$

(e)
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=-\alpha}^{+\alpha}\rho g R(h-z)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_x + \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=-\alpha}^{+\alpha}\rho g R(h-z)\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_y\\ &= \left[\rho g R\left(hz-\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^h[-\cos\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}\,\vec{e}_x + \left[\rho g R\left(hz-\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^h[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}\,\vec{e}_y\\ &= \rho g R h^2\sin\alpha\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

AN : $F = 3{,}1\times10^8$ N

Corrigé de l'exercice T8.8 : Hémisphères de Magdebourg [**]

1. La figure ne change par si on lui applique une rotation autour de l'axe Oz, donc la force $\vec{F}$ ne doit pas changer aussi si on applique cette transformation. On en déduit que $\vec{F}$ est selon $\vec{e}_z$. On notera $\vec{F} = -F\vec{e}_z$.

2. *Première méthode* : avec la poussée d'Archimède.

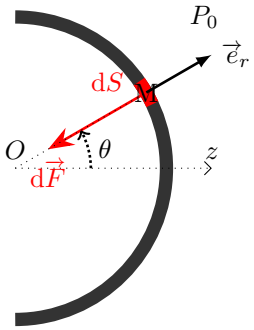
(a) La demi-boule est entièrement immergée dans l'air, donc la résultante des forces de pression est la poussée d'Archimède ; si on néglige la masse volumique de l'air, alors le poids de l'air déplacé est nul, donc la poussée d'Archimède est nulle.

(b) À gauche on a une surface plane, un disque de rayon R et de surface πR^2. Donc la force totale s'exerçant sur la face de gauche vaut $+\pi R^2 P_0\vec{e}_z$.

(c) La force s'exerçant sur la face de droite de la demi-boule est exactement la même que celle s'exerçant sur la demi-sphère du problème initial (même forme, même pression de l'air extérieur) ; c'est donc $-F\vec{e}_z$.

On en déduit que $+\pi R^2 P_0\vec{e}_z - F\vec{e}_z = \vec{0}$ donc $F = \pi R^2 P_0 = 1{,}9\times10^4$ N.

3. *Seconde méthode* : par intégration.



(a) L'angle θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tandis que l'angle φ varie entre 0 et 2π.

(b) Le petit déplacement selon θ vaut $R\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$ et celui selon φ vaut $R\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$. Donc $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Le vecteur normal est $-\vec{e}_r = -\sin\theta(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) - \cos\theta\vec{e}_z$.

(c) On en déduit que $\mathrm{d}\vec{F} = -P_0R^2\sin\theta\,(\sin\theta(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) + \cos\theta\vec{e}_z)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

(d) Inutile de tout intégrer ; on sait que la force est selon $\vec{e}_z$, donc on va projeter uniquement selon cet axe :

$$\begin{aligned}\vec{F}.\vec{e}_z &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\vec{F}.\vec{e}_z\\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} -P_0R^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right).\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\\ &= -P_0R^2\left[\frac{-\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}.2\pi\\ &= -P_0\pi R^2\end{aligned}$$

donc on retrouve $F = \pi R^2P_0 = 1{,}9\times10^4\,\mathrm{N}$.

Corrigé de l'exercice T8.9 : Porte hydraulique [***]

1. Soit M un point de la porte repéré par sa distance $r = BM \in \left[0\,;\frac{h}{\cos\alpha}\right]$ et par sa coordonnée $z\in[0\,;L]$; ce point a pour coordonnées $(-r\sin\alpha; r\cos\alpha; z)$; la pression de l'eau en ce point vaut $P = P_0+\rho g(h-r\cos\alpha)$; la surface élémentaire vaut $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r.\mathrm{d}z$ et le vecteur normal $\cos\alpha.\vec{e}_x + \sin\alpha.\vec{e}_y$. La forme de surpression élémentaire vaut donc $\mathrm{d}\vec{F} = \rho g(h-r.\cos\alpha)\,(\cos\alpha.\vec{e}_x+\sin\alpha.\vec{e}_y)\,\mathrm{d}r.\mathrm{d}z$. Le moment de cette force élémentaire par rapport à Bz vaut $\mathrm{d}\mathcal{M}^{Bz}_{\mathrm{d}\vec{F}} = \left(\overrightarrow{BM}\wedge\mathrm{d}\vec{F}\right).\vec{e}_z$

$$\begin{aligned}&= \rho g(h-r\cos\alpha)\mathrm{d}r\mathrm{d}z.\left(\begin{vmatrix}-r\sin\alpha\\ r\cos\alpha\\ 0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}\right)\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\\ &= \rho g(h-r\cos\alpha)r.\left(-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\\ &= -\rho g(h-r\cos\alpha)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Le moment total vaut donc $\mathcal{M}^{Bz}_{surpression} = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{h/\cos\alpha} -\rho g(h-r\cos\alpha)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}&= -\rho gL\int_{r=0}^{h/\cos\alpha}(h-r\cos\alpha)r\mathrm{d}r\\ &= -\rho gL\left[h\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\alpha\right]_{r=0}^{h/\cos\alpha}\\ &= -\frac{\rho gLh^3}{6\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

Le signe est négatif car la poussée de l'eau fait tourner la porte selon le sens horaire (sens indirect ici).

2. La porte est soumise à d'autres actions :
   — son poids qui s'applique en son milieu, de moment $\mathcal{M}^{Bz}_{poids} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\wedge m\vec{g}\right).\vec{e}_z$
   $$= \left(\frac{\ell}{2}\left(-\sin\alpha\vec{e}_x+\cos\alpha\vec{e}_y\right)\wedge -mg\vec{e}_y\right).\vec{e}_z$$
   $$= \frac{mg\ell\sin\alpha}{2}$$
   — la réaction de l'axe, de moment nul car elle passe par l'axe
   — la force due à la pression atmosphérique P_0 se compense des deux côtés de la porte donc elle est nulle et son moment est nul

   D'après le Théorème du Moment Cinétique appliqué à la porte dans le référentiel terrestre par rapport à l'axe Bz, la porte bascule en sens horaire si la somme des moments est négative, donc si $\frac{\rho gLh^3}{6\cos^2\alpha} > \frac{mg\ell\sin\alpha}{2}$ soit $h > \sqrt[3]{\frac{3m\ell\sin\alpha\cos^2\alpha}{\rho L}} = 1{,}15\,\mathrm{m}$

3. α va diminuer ; la norme du moment du poids diminue alors, mais celle de la surpression aussi. Un calcul de dérivée montre que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^{Bz}_{surpression}}{\mathrm{d}\alpha} = 2\mathcal{M}^{Bz}_{surpression}\tan\alpha$ tandis que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^{Bz}_{poids}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathcal{M}^{Bz}_{poids}}{\tan\alpha}$; or quand la porte commence à

basculer, les deux moments sont égaux et $2\tan\alpha = 0,80 < \frac{1}{\tan\alpha} = 2,5$ ce qui montre que le moment du poids va décroître plus vite que celui dû à la surpression : le basculement va donc s'accélérer, et la porte va basculer jusqu'à l'horizontale ($\alpha = -90°$) : toute l'eau va alors se vider.

Corrigé de l'exercice T8.10 : Thermomètre de Galilée [*]

1. $V_{20} = \frac{m_e}{\rho_{20}} = 550{,}9\,\text{cm}^3$ donc $V(T) = V_{20}\,(1 + \alpha(T-20))$
   d'où on tire $\rho_e(T) = \dfrac{m_e}{V_{20}\,(1+\alpha(T-20))} = \dfrac{0,9984}{1 + 5{,}3\times10^{-5}.(T-20)}$ en $\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$ ou en $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.
2. Soit z l'axe vertical vers le haut. La boule est soumise à son poids $-m_b g\vec{e}_z$, à la poussée d'Archimède $V_b\rho_e(T)g\vec{e}_z$, et à la réaction du fond $R_N\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$. La boule est immobile, donc d'après le Théorème de la Quantité de Mouvement, la somme des forces est nulle donc $m_b g = V_b\rho_e(T)g + R_N$ et comme $R_N > 0$ on en déduit que $m_b > V_b\rho_e(T)$ d'où on tire (AN en grammes et en cm^3) $T > T_\ell = 20 + \frac{1}{5{,}3\times10^{-5}}\left[\frac{8{,}280\times0{,}9984}{8{,}265} - 1\right] = 24{,}0\,°\text{C}$
3. $T < T_\ell$ donc la boule n'est pas au fond, elle flotte. Soit V_b' le volume émergé, alors on a désormais deux forces qui s'annulent : le poids $-m_b g\vec{e}_z$, et la poussée d'Archimède $(V_b - V_b')\rho_e(T)g\vec{e}_z$ (car on néglige la masse d'air déplacé) ce qui donne $V_b' = V_b - \dfrac{m_b}{\rho_e(22\,°\text{C})} = 0{,}9\,\text{mm}^3$
4. $V_a = V - V_{24} - V_b = 141\,\text{cm}^3$ et $P = \dfrac{6{,}22\times10^{-3}\times8{,}314\times299}{141\times10^{-6}} = 1{,}10\,\text{bar}$

Corrigé de l'exercice T8.11 : Montgolfière [**]

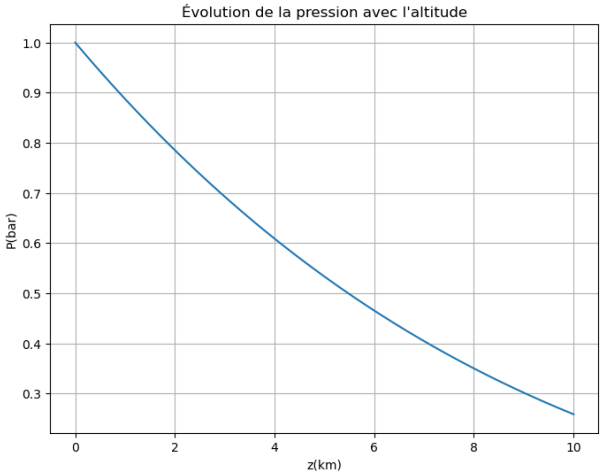
1. Les forces qui s'exercent sur la montgolfière sont :
   — le poids de la nacelle et l'enveloppe : $-Mg\vec{u}_z$ avec $\vec{u}_z$ vers le haut
   — le poids de l'air enfermé : $-\frac{P_0VM_a}{RT}g\vec{u}_z$ car $\rho = \frac{PM_a}{RT}$
   — la poussée d'Archimède : $\frac{P_0VM_a}{RT_0}g\vec{u}_z$

   Le ballon décolle si la somme de ces forces est vers le haut, ce qui équivaut à $\frac{P_0VM_a}{RT_0} > \frac{P_0VM_a}{RT} + M$ soit $T > \dfrac{T_0}{1 - \frac{MRT_0}{P_0VM_a}} = 330\,\text{K} = 61\,°\text{C}$.
2. (a) $\left(P_0e^{-z/d}\right)^{1-\gamma}T^\gamma = P_0^{1-\gamma}T_i^\gamma$. Donc $T^\gamma = T_i^\gamma.\exp\left(\frac{z}{d}(1-\gamma)\right)$ d'où $T = T_ie^{-z/d'}$ avec $d' = 28\,\text{km}$.
   (b) Par la loi des gaz parfaits : $\rho = \frac{PM_a}{RT} = \frac{P_0M_a}{RT_i}e^{-z/d+z/d'} = \frac{P_0M_a}{RT_i}e^{-z/d''}$. AN : $d'' = 11{,}2\,\text{km}$.
   (c) On effectue le même bilan des forces, et on trouve
   $\Sigma\vec{F} = (-M - \rho V + \rho_{ext}V)\,g\vec{u}_z = \left(-M - \frac{P_0M_a}{RT_i}Ve^{-z/d''} + \frac{P_0M_a}{RT_0}Ve^{-z/d}\right)g\vec{u}_z$
   Remarque : ρ_{ext} et P varient suffisamment lentement avec z pour qu'on puisse les considérer comme quasiment constants à l'échelle du ballon.
   (d) La somme des forces est nulle pour $z = h$ tel que $\dfrac{1}{T_0}e^{-h/d} - \dfrac{1}{T_i}e^{-h/d''} = \dfrac{RM}{P_0M_aV}$. On trouve numériquement $h = 3\,\text{km}$.
   (e) S'il y a des pertes de chaleur, le ballon ira moins haut. Dans la pratique, on continue à chauffer au cours de l'ascension.

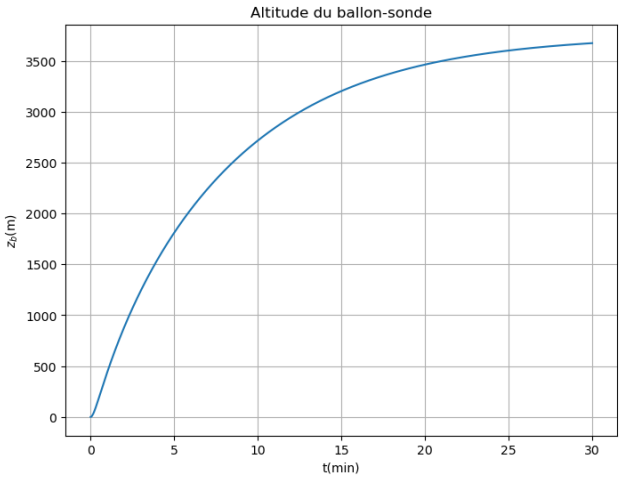
Réponses aux TDs numériques

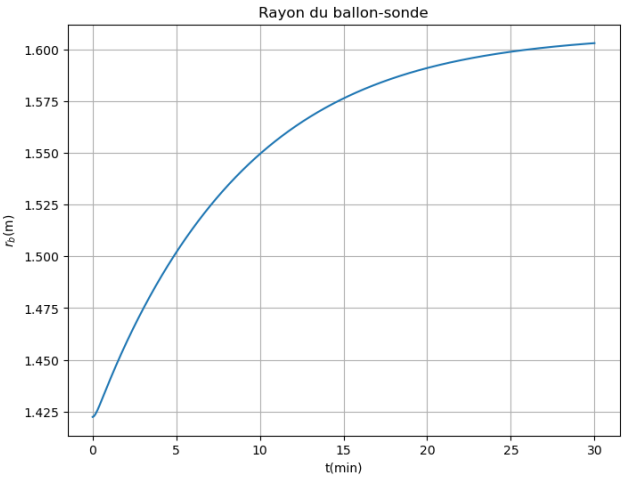
Réponses au TD d'info : Ballon-sonde à hélium

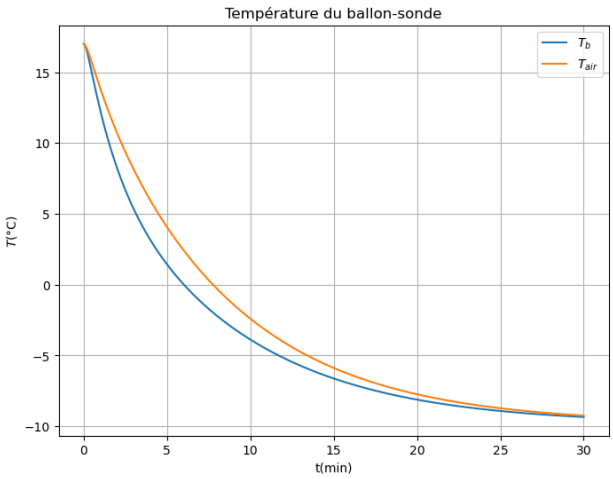
Avec le modèle d'atmosphère proposé, on trouve $\beta = \frac{M_{air} g}{\alpha R}$.



Le Théorème du Centre de Masse donne $(m_b + m_{He})\,\ddot{z}_b(t) = -(m_b + m_{He})\,g + \rho_{air}\left(z_b(t)\right)\frac{4}{3}\pi r_b(t)^3 g - \lambda\pi r_b^2 \dot{z}_b$.
Le Premier Principe donne $\frac{5}{2}\dot{T}_b(t) = -\frac{T_b(t)P_0}{T_0 P_b(t)}\alpha\beta\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}z_b(t)\right)^{\beta-1}\dot{z}_b(t) + \frac{M_{He}}{m_{He}R}4\pi r_b(t)^2\gamma_{th}\left(T_{air}\left(z_b(t)\right) - T_b(t)\right)$.
De plus $r_b = \sqrt[3]{\frac{3nRT_b}{4\pi P_b}}$







On constate que le ballon met ensiron une demi-heure pour atteindre son altitude maximale à 3,7 km. Au cours de l'ascension, il est plus froid que l'air extérieur (à cause de la détente du gaz) mais les échanges thermiques réduisent ensuite cet écart. À cause de ce refroidissement, le rayon du ballon n'augmente pas beaucoup au cours de l'ascension.

Mécanique quantique

Chapitre

MQ1 Introduction à la mécanique quantique

Programme p.1255

Conseils p.1256

Cours p.1240

MQ1.A. Quantification de la lumière

MQ1.B. Description des particules quantiques

QCMs p.1257

Exercices p.1258

MQ1. Introduction à la mécanique quantique

Cours

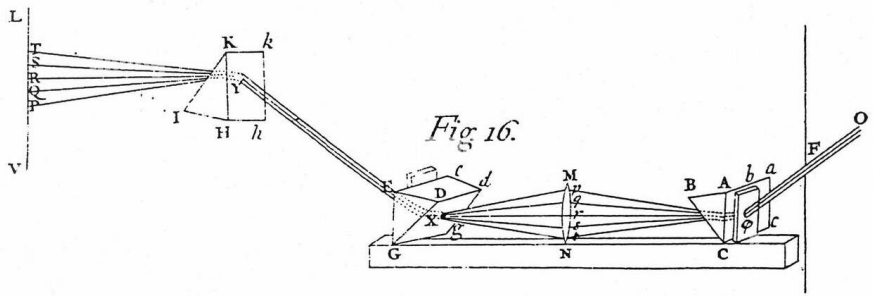
Les lois de la mécanique, qui régissent les mouvements des objets, ont été établies par Newton puis améliorées au fur et à mesure. Par contre, la lumière est longtemps restée une énigme pour les physiciens. La lumière posait problème, car on sait aujourd'hui qu'elle possède fondamentalement des propriétés à la fois relativistes et quantiques qui rendaient son comportement difficile à expliquer à partir des modèles classiques. Ce sont ces propriétés, et les conséquences qu'elles ont révélé sur le fonctionnement de la matière à l'échelle atomique, que nous allons effleurer dans ce chapitre.

MQ1.A. Quantification de la lumière

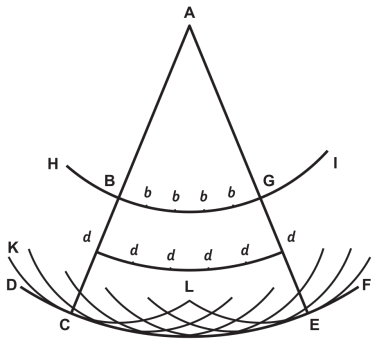
A.1. La lumière en 1900

L'analyse de la lumière a commencé au XVIIIème siècle avec Newton et Huyghens. Snell et Descartes avaient énoncé les lois de la réflexion et de la réfraction, qui indiquaient comment la lumière changeait de direction sur un dioptre ou un miroir ; dans un même temps, Grimaldi observait la diffraction de la lumière. Huyghens, par des analogies avec les vagues à la surface de l'eau, parvint à expliquer ces lois en supposant que la lumière était une onde. Mais dans le même temps, Newton décomposait la lumière blanche grâce à un prisme, et pensait que les phénomènes observés seraient plus proches d'une description corpusculaire, où des particules de lumière ayant chacune leur couleur se déplaceraient indépendamment les unes des autres.

Figure MQ1.1 : Newton et Huyghens, pioneers de l'étude de la lumière.



(a) Décomposition et recomposition de la lumière. I.Newton, Opticks

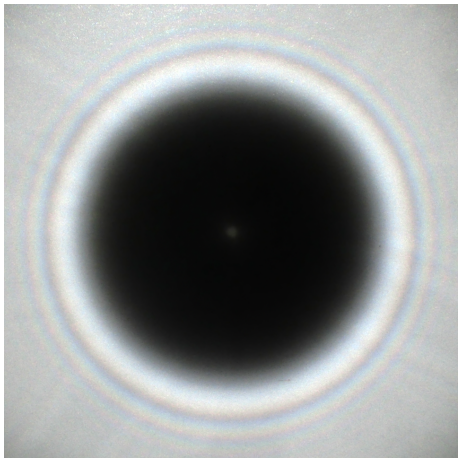


(b) Propagation de la lumière, selon Huyghens.(Crédit : Wikipedia)

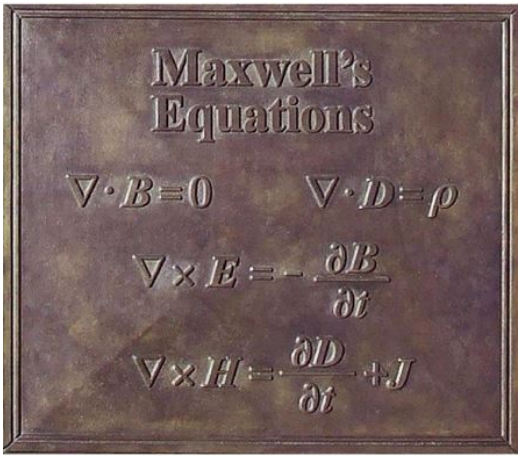
Dans le même temps, Fermat expliquait les lois de la réflexion et de la réfraction par le principe du plus court chemin : pour aller d'un point A à un point B, la lumière choisit toujours un chemin correspondant à un minimum local du temps de parcours. Ce principe fait plutôt penser à la lumière comme formée de corpuscules, mais n'explique pas comment elles choisissent leur chemin.

Au début du XIXème siècle, Fresnel publie un mémoire révolutionnaire sur la théorie de la diffraction. La lumière y est traitée comme une onde, et de nombreuses conséquences en sont déduites. Les prédictions de Fresnel se révèlent toutes conformes à l'expérience, et l'opinion des physiciens, jusque-là plutôt favorables à la théorie corpusculaire, commence à changer. Mais c'est dans la deuxième moitié du XIXème siècle que la théorie ondulatoire de la lumière triomphe : Maxwell publie les équations de l'électromagnétisme, et montre qu'elles admettent des solutions qui sont les ondes lumineuses. Il prédit des ondes dans d'autres domaines de fréquences, que Hertz découvre peu après. Il reste juste un problème conceptuel à régler : une onde se déplace dans quelque chose, par exemple le son se déplace dans l'air ; mais là, on a une onde qui se déplace dans rien du tout. On postule l'existence d'un matériau invisible, l'éther, dans lequel se déplacent ces ondes, mais l'expérience de Michelson et Morley dans les années 1880 montre que cet éther n'existe pas, ou du moins ne se comporte pas comme on s'y attend.

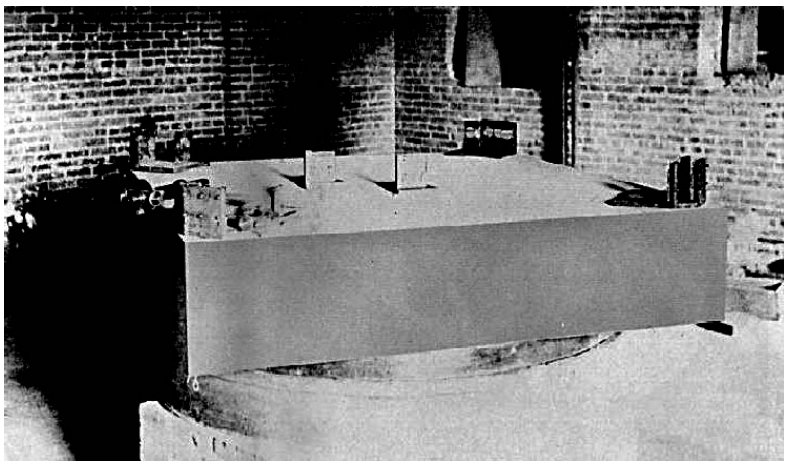
FIGURE MQ1.2 : Au XIXème siècle, la théorie ondulatoire triomphe avec Fresnel et Maxwell, mais des expériences comme celle de Michelson restent inexpliquées.



(a) Le point de Poisson, qui apparaît au milieu de l'ombre d'un disque opaque, a été prédit à partir de la théorie de la lumière de A. Fresnel.(Crédit : Wikipedia)



(b) Plaque commémorative de la statue de J.C. Maxwell à Édimbourg.(Crédit : Wikipedia)



(c) La pierre sur laquelle était posée l'Espérience de Michelson-Morley. (Crédit : Wikipedia)

A.2. Le photon

Au début du XXème siècle, outre le problème de l'éther, d'autres phénomènes expérimentaux résistent à toute explication par la théorie ondulatoire de la lumière :

— le rayonnement du corps noir : tout objet à une température T rayonne de la lumière qui vérifie deux propriétés : d'une part l'intensité totale rayonnée varie proportionnellement à T^4, d'autre part l'émission est maximale pour une longueur d'onde inversement proportionnelle à T. Ainsi, un objet à 300 K émet essentiellement autour de $\lambda = 10\,\mu\text{m}$, tandis que le Soleil à 6000 K, soit 20 fois plus chand, émet à une longueur d'onde 20 fois plus courte, autour de 500 nm.

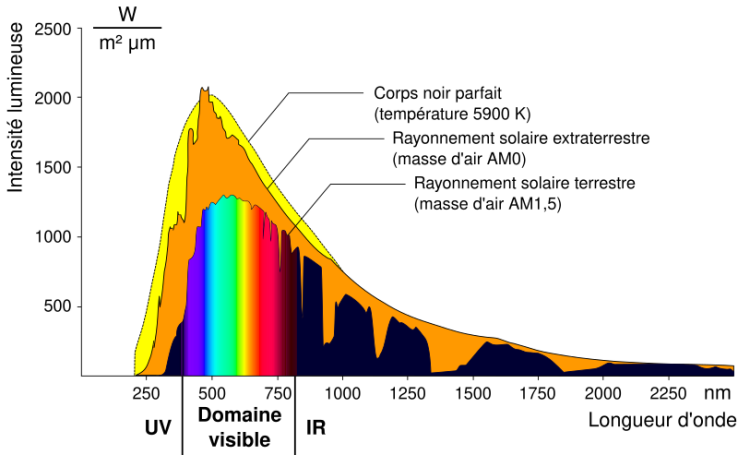
Wien a expliqué ce spectre émis par un modèle d'interaction entre l'onde lumineuse et la matière. Il explique bien la courbe du côté des grandes longueurs d'ondes, mais aux courtes longueurs d'onde, sa formule diverge. En 1900, Max Planck reprend ces calculs en postulant que la lumière de fréquence f ne peut échanger de l'énergie avec la matière que par paquets d'énergie $E = hf$ où $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ est la constate de Planck. Les résultats trouvés sont en accord parfait avec l'expérience. À ce moment-là, Planck ne pense pas remettre en question la théorie ondulatoire de la lumière ; il postule uniquement une quantification des **échanges** d'énergie.

— l'effet photoélectrique : un conducteur électriquement chargé négativement peut être déchargé par exposition à un rayonnement lumineux de courte longueur d'onde ; plus exactement, il existe pour chaque matériau une longueur d'onde limite en-dessous de laquelle l'effet a lieu, et au-dessus de laquelle il n'a pas lieu. Cet effet peut s'expliquer par le postulat de Planck sur les échanges d'énergie : il faut que l'énergie hf soit suffisante pour arracher les électrons au métal.

— l'effet Compton : lorsqu'on envoie de la lumière sur un atome, Compton observe, en 1922, qu'une partie de la

lumière diffusée a une fréquence moindre que la lumière incidente, tandis que des électrons sont éjectés. Dans cet effet, la postulat d'échanges de paquets d'énergie hf ne suffit plus, il faut aussi admettre qu'il y a un échange de quantité de mouvement.

FIGURE MQ1.3 : Le spectre d'émission du Soleil est très proche d'un spectre de corps noir parfait. (Crédit : Wikipedia/Degreen)



En 1905, bien avant la découverte de l'effet Compton, Einstein reprend les calculs de Planck sur le rayonnement du corps noir. En calculant l'entropie de la lumière d'un corps noir à l'équilibre, il constate qu'elle ressemble beaucoup à l'entropie d'un gaz parfait de particules d'énergie hf. Il publie alors un article révolutionnaire dans lequel il ressuscite la vieille théorie corpusculaire de la lumière : l'échange d'énergie quantifié de Max Planck s'explique simplement, d'après lui, par l'absorption ou l'émission de particules de lumière appelées *photons*. A la fin de son article, Einstein propose d'expliquer de même l'effet photoélectrique.

L'article d'Einstein ne convainc pas grand monde ; mais la même année, Einstein publie 3 autres articles qui ont un bien plus grand retentissement, 2 sur la relativité et un sur le mouvement brownien. Ces autres articles le rendent célèbre, même si la plupart des physiciens pensent qu'il s'est trompé sur les photons. Mais avec le temps, d'autres expériences lui donneront raison, en particulier l'effet Compton en 1922.

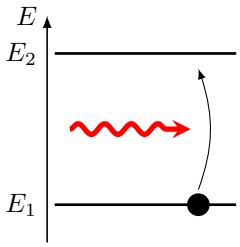
A.3. Absorption et émission de photons

En analysant le rayonnement du corps noir sous l'aspect de photons qui se font absorber ou émettre, Einstein a montré qu'il existe 3 mode d'interaction entre la lumière et la matière.

L'absorption

Définition : Absorption

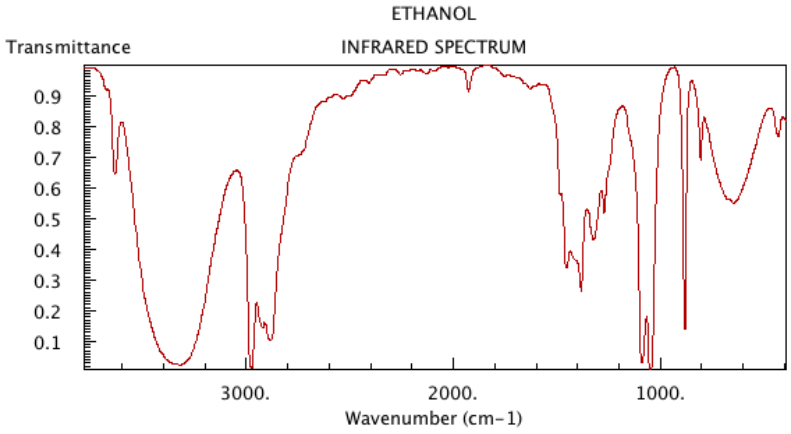
Un système dans un état d'énergie E_1 peut passer à un autre état d'énergie $E_2 > E_1$ en absorbant un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$.



Remarque : On peut aussi écrire $E_2 - E_1 = \frac{h\omega}{2\pi}$ qu'on note $E = \hbar\omega$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ la constante de Planck réduite.

L'absorption est à la base de beaucoup de phénomènes autour de nous, en particulier la majorité des couleurs que nous observons sont dues à l'absorption de la lumière. L'étude de l'absorption de diverses substances en fonction de la longueur d'onde permet de remonter aux états d'énergie possible de ce système, et particulièrement des électrons car ce sont les plus légers et ceux qui font le plus souvent les transitions par absorption. En étudiant différents spectres, on observe des pics d'absorption étroits, ou bandes d'absorption larges (figure MQ1.4).

FIGURE MQ1.4 : Spectre d'absorption dans l'infrarouge de l'éthanol.(Crédit : Wikipedia/Sah002)



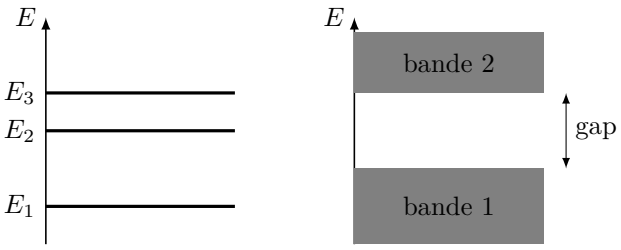
En comparant ces spectres, on fait apparaître une règle générale que vous démontrerez l'an prochain à partir de l'équation de Schrödinger :

Propriété : Niveaux et bandes d'énergie

Les états que les électrons peuvent occuper dans un système quantique ne peuvent pas prendre toutes les énergies possibles :

- si les électrons sont confinés dans une zone précise de l'espace, alors les états électroniques ont des niveaux d'énergie discrets, séparés les uns des autres
- si les électrons sont libres de se déplacer, alors les états électroniques appartiennent à des bandes d'énergies continues

FIGURE MQ1.5 : États électroniques.



(a) États électroniques dans un atome ou une molécule.

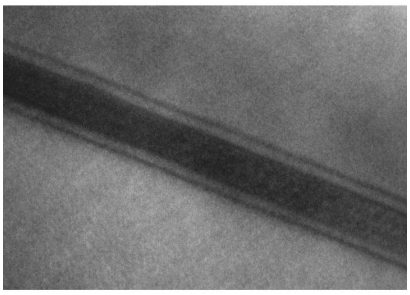
(b) États électroniques dans un solide.

Par exemple, les plantes sont vertes car elles contiennent de la chlorophylle qui absorbe la lumière bleue et rouge correspondant à deux transitions énergétiques différentes entre des états différents. Tous les pigments ou colorants fonctionnent de la même manière ; ce qui change de l'un à l'autre, c'est l'énergie qui sépare les états électroniques, donc la fréquence de la lumière absorbée. Du coup, le tracé du spectre d'absorption d'une molécule met en évidence les transitions énergétiques dans cette molécule qui sont une caractéristique de celle-ci : ainsi, par spectroscopie, on peut repérer la présence de certaines molécules dans un gaz (capteurs de CO_2), ou identifier des groupes chimiques dans une molécule,...

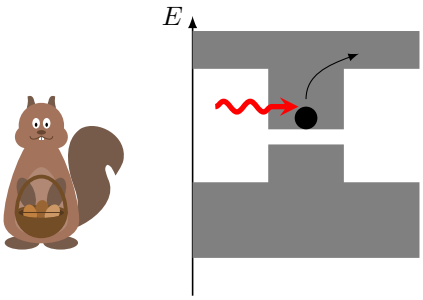
Dans le cas des solides, si les électrons remplissent une couche pleine, on appelle *gap* l'écart énergétique avec le bas de la bande suivante. Alors tout photon possédant une énergie supérieurs au gap est absorbé. Ainsi, le silicium a un gap à 1,1 V donc absorbe tout le visible ($\lambda = 400\,\text{nm} \to 800\,\text{nm}$ soit $E = 1{,}5\,\text{eV} \to 3\,\text{eV}$). D'autres solides n'absorbent qu'une partie du visible et sont colorés.

Cette absorption donne de l'énergie à un électron du solide ; le plus souvent, il va perdre cette énergie sous forme d'agitation thermique. Parfois, cette énergie permet à un électron d'échapper à un piège. Ainsi, quand on réalise des sandwichs de semiconducteurs, on arrive à créer des profils qui stockent les électrons dans un *puits quantique*. Si un photon avec assez d'énergie arrive, il libère l'électron de son puits, et si on a mis une tension électrique, on récupère cet électron sous forme de courant. Les détecteurs de lumière (capteur d'appareil photo, caméras thermiques,...) fonctionnent selon ce principe (figure MQ1.6).

FIGURE MQ1.6 : Puits quantique.



(a) Image de puits quantiques. *(Crédit : ?)*

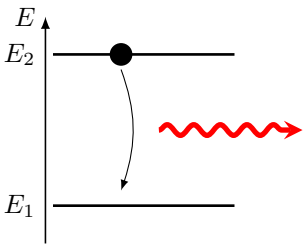


(b) Niveaux d'énergie dans un puits quantique.

L'émission spontanée

Définition : Émission spontanée

Un système dans un état d'énergie E_2 peut passer à un autre état d'énergie $E_1 < E_2$ en émettant spontanément un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$.



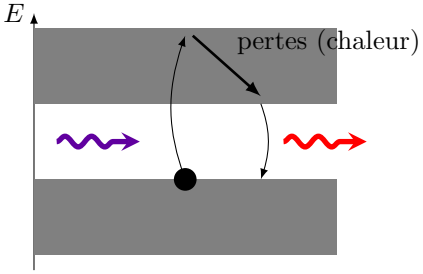
L'émission spontanée est à la base de presque toutes les sources de lumière, dont le principe est de donner de l'énergie à un électron, qui va alors émettre de la lumière. Il existe différentes techniques pour cela :

- dans les objets chauffés, comme les ampoules halogène, c'est l'agitation thermique qui fournit l'énergie aux électrons
- dans les lampes à décharge (comme les lampes au sodium, oranges) c'est une décharge électrique qui ionise les atomes ; les électrons arrachés reviennent alors se fixer sur les ions sur un état excité, puis perdent cette énergie
- dans les LED, on juxtapose deux semiconducteurs qui imposent une énergie différente aux électrons, formant une marche d'escalier. La tension d'une pile donne assez d'énergie aux électrons pour arriver du côté haut de la marche, et quand ils tombent, ils émettent un photon
- la fluorescence combine absorption et émission. On éclaire un solide avec des ultraviolets, rayons de grande énergie. Les électrons les absorbent, passent dans la bande d'énergie supérieure, perdent de l'énergie dans la bande sous forme de chaleur, puis reémettent un photon dont l'énergie correspond exactement au gap.

FIGURE MQ1.7 : Fluorescence.



(a) Fluorescence de la fluorine. (Crédit : Wikipedia/H.Grobe)



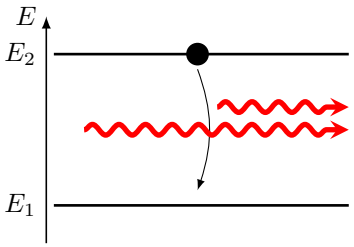
(b) Principe de la fluorescence.

L'analyse du phénomène absorption/émission de lumière est utile pour étudier les fonctionnements de celui-ci à l'échelle microscopique. Si le photon émis a une énergie différente du photon absorbé, c'est qu'il s'est passé quelque chose à l'échelle microscopique.

Les phénomènes d'absorption et d'émission spontanée étaient connus avant Einstein ; mais celui-ci a découvert le troisième type d'interaction lumière-matière :

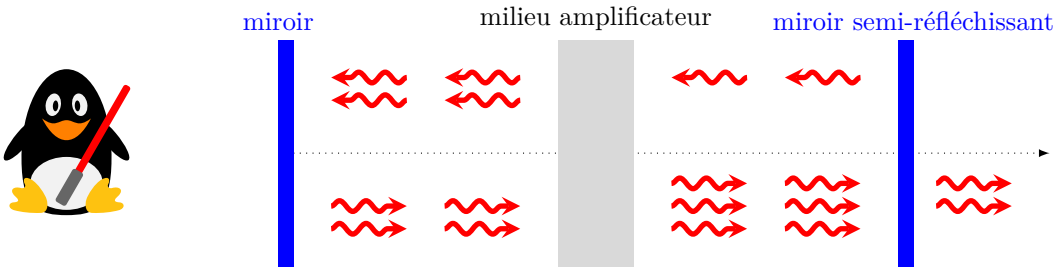
Définition : Émission stimulée

Un système dans un état d'énergie E_2 peut passer à un autre état d'énergie $E_1 < E_2$ sous l'effet de la stimulation par un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$; dans ce cas, le photon émis aura exactement les mêmes caractéristiques (énergie, direction, phase,...) que le photon stimulant, et l'effet sera d'autant plus fort qu'il y a beaucoup de photons stimulants.



Cette découverte est à la base du LASER, dans lequel, grâce à des miroirs, on provoque une émission stimulée qui s'amplifie jusqu'à obtenir un faisceau de lumière très intense.

FIGURE MQ1.8 : Cavité LASER.

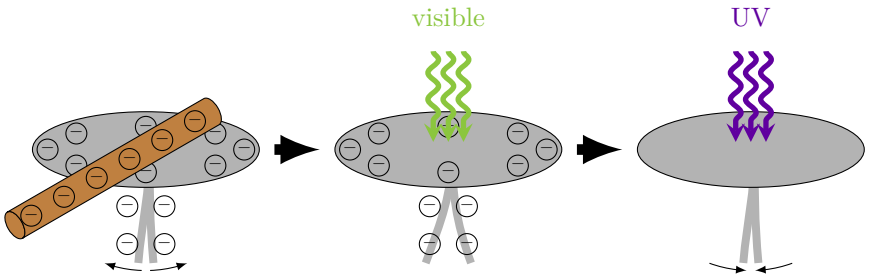


A.4. L'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique consiste en une décharge d'un métal chargé négativement par l'éclairage avec de la lumière de longueur d'onde courte. Il est illustré sur la figure MQ1.9 :

- on charge un métal en électricité statique par contact avec un bâton d'ébonite frotté ; les charges se répartissent partout, et deux feuilles d'aluminium initialement verticales se repoussent car elles se chargent toutes deux négativement
- on éclaire le métal avec de la lumière visible : rien ne se passe
- on éclaire le métal avec de la lumière UV : les charges disparaissent, les feuilles d'aluminium se rapprochent

FIGURE MQ1.9 : Effet photoélectrique.

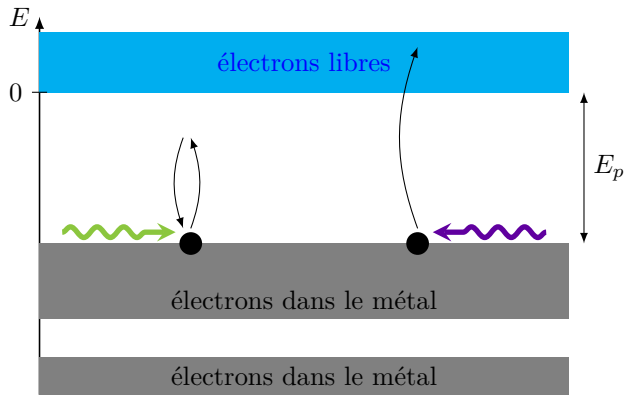


Pour comprendre cet effet, il faut regarder le schéma énergétique de la figure MQ1.10 :

- les électrons se promenant dans le vide ont une énergie $\frac{1}{2}mv^2$ qui peut prendre toutes les valeurs positives
- les électrons dans le métal sont dans des bandes d'énergie qui sont toutes situées au-dessous de 0 car sinon les électrons s'échapperaient tous du métal
- on note $-E_p$ l'énergie de l'électron du métal le plus énergétique

Alors tout photon ayant une énergie supérieure à E_p pourra faire passer un électron dans la bande d'énergie des électrons libres du métal : ainsi les rayons de courte longueur d'onde arrivent à arracher des électrons du métal, qui perd ses charges et se décharge.

FIGURE MQ1.10 : Explication de l'effet photoélectrique.



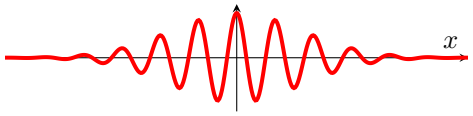
MQ1.B. Description des particules quantiques

B.1. Le photon

L'analyse des différentes expériences faisant intervenir les interactions entre la lumière et la matière permettent de proposer une description quantique du photon.

Propriété : Photon

La lumière est constituée de particules de lumière appelées *photons* qui se comportent comme des ondes localisées ; on parle de *paquets d'onde*. Ces photons possèdent :



- une fréquence f (parfoit notée ν) correspondant à la fréquence de l'onde associée
- une masse nulle
- une énergie donnée par la relation de Planck-Einstein

$$E = hf = \hbar\omega \tag{MQ1.1a}$$

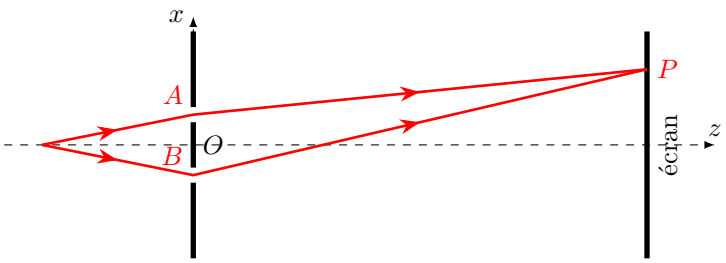
avec $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054\,571\,82 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$

- une vitesse qui dépend du milieu traversé ; dans le vide elle vaut $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
- une quantité de mouvement (ou impulsion)

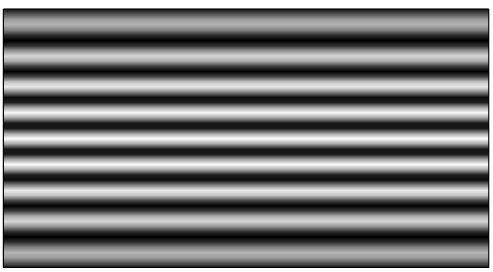
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \tag{MQ1.1b}$$

Comment se manifeste cet dualité onde-corpuscule, ou le fait que le photon est à la fois une onde et une particule ? L'aspect ondulatoire se voit surtout dans les interférences. Si on réalise l'expérience des fentes d'Young (figure MQ1.11), la figure d'interférence sur l'écran montre que l'onde passe par les deux fentes, puis interfère.

FIGURE MQ1.11 : Dispositif des fentes d'Young.



(a) Dispositif des fentes d'Young



(b) Figure d'interférences

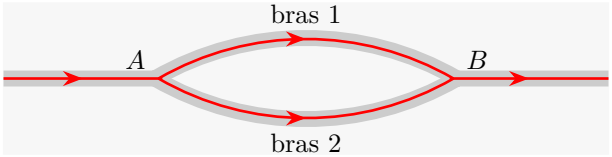
Dans l'interféromètre de Mach-Zehnder, la lumière est séparée en deux dans deux canaux puis recombinée en sortie après avoir suivi deux chemins différents. En faisant varier ce qu'elle rencontre dans chaque branche, on peut faire varier le déphasage et donc l'interférence. En sortie, une lame semi-réfléchissante recombine les deux branches. L'avantage de ce dispositif microscopique est qu'on peut y envoyer des photons un par un, et placer en sortie un détecteur qui les compte un par un. On constate alors la chose suivante :

— si le déphasage vaut 0, l'interférence est constructive ; alors on capte systématiquement un photon en sortie

— si le déphasage vaut π, l'interférence est destructive ; alors on ne capte jamais de photon en sortie

— si le déphasage est intermédiaire, l'interférence est entre les deux ; alors on capte parfois un photon en sortie, parfois rien, selon une probabilité qui correspond à l'intensité donnée par la loi d'interférence de Fresnel

FIGURE MQ1.12 : Interféromètre de Mach-Zehnder.



Ainsi, on voit apparaître à la fois l'aspect ondulatoire dans l'existence d'interférences, et l'aspect corpusculaire en ce que le photon ne se coupe pas en 2 : soit il passe, soit il disparaît (en fait ici il repart en arrière), et l'intensité de la lumière correspond à la probabilité qu'il a de sortir.

B.2. Les particules massives

L'atome d'hydrogène, le plus simple, avait un spectre dont l'étude avait montré que les longueurs d'ondes vérifiaient toute la formule de Rydberg : elles étaient de la forme

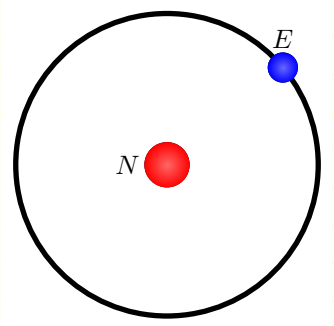
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

avec R_H une constante et n et m deux entiers tels que $m > n$.

Planck et Einstein ayant postulé que l'énergie de la lumière émise lors d'un processus d'émission était reliée à la différence d'énergie de deux niveaux, le physicien Niels Bohr proposa en 1913 un modèle de l'atome d'hydrogène qui expliquait la formule de Rydberg. Ce modèle postulait que les électrons, en orbite autour du noyau, possédaient un certain nombre d'orbites stables correspondant à un moment cinétique égal à un entier multiplié par la constante de Planck réduite.

Exemple : Orbites de Bohr — À connaître

Considérons un atome formé d'un noyau immobile de charge $+e$ et d'un électron de charge $-e$ en orbite autour.



On suppose que l'électron a un mouvement circulaire de rayon r.

1. Projetez selon $\vec{e}_r$ le PFD appliqué à l'électron ; déduisez-en l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r, puis celle du moment cinétique $\vec{L}^O$.
2. Bohr postule que le moment cinétique de l'électron est quantifié : dans l'état n, il vaut $L^O = \left\| \vec{L}_n^O \right\| = n\hbar$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'expression du rayon r_n de l'état n. Faire l'AN de r_1.

3. Exprimez l'énergie de l'état n ; calculez E_1.

Données : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $\varepsilon_0 = 8{,}8 \times 10^{-19}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$; $\hbar = 1{,}0\,\mathrm{J \cdot s}$.

1. L'électron, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, a pour accélération en coordonnées cylindriques $r\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - r\dot{\theta}(t)^2\vec{e}_r(t)$. Il n'est soumis qu'à la force d'attraction électrique du noyau $-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r(t)$. Le PFD projeté sur $\vec{e}_r$ indique que $-mr\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}$ soit $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^3}}$.
   Le moment cinétique vaut donc $\vec{L}^O = m\left(r\vec{e}_r(t)\right) \wedge \left(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t)\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \sqrt{\frac{me^2r}{4\pi\varepsilon_0}}\vec{e}_z$.
2. Considérons l'état n tel que $L^O = n\hbar$, alors $\frac{me^2r_n}{4\pi\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$ d'où on tire facilement $r_n = n^2 r_1$ avec $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 53\,\mathrm{pm}$
3. $E_n = \frac{1}{2}mr_n^2\dot{\theta}_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$ ce qui donne en remplaçant $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = \frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = 13{,}6\,\mathrm{eV}$

Ce modèle était en excellent accord avec les mesures, mais il restait à expliquer la quantification du moment cinétique. Le physicien Louis de Broglie essaya alors d'appliquer la dualité onde-corpuscule aux électrons. Il proposa d'associer à chaque électron une onde donnée par la relation $p = \frac{h}{\lambda}$.

Calcul : Longueur d'onde de l'onde de matière des électrons dans l'atome de Bohr

Un électron a pour quantité de mouvement $p = mv = mr\dot{\theta} = \frac{L^O}{r}$, donc dans l'état n on a $p_n = \frac{n\hbar}{r_n} = \frac{nh}{2\pi r_n}$; or $p_n = \frac{h}{\lambda_n}$ donc

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}$$

Autrement dit, dans l'état n, un tour complet de l'orbite correspond exactement à n longueurs d'onde. La condition de stabilité des orbites s'explique alors simplement par une relation d'interférence constructive après un tour d'orbite.

Propriété : Onde de matière

À toute particule de masse m, on peut associer une onde de matière :

— dont la longueur d'onde est donnée par la relation de De Broglie :

$$p = mv = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \text{(MQ1.2a)}$$

— donc la fréquence est donnée par la relation de Planck-Einstein :

$$E = hf = \hbar\omega \qquad \text{(MQ1.2b)}$$

En essayant de mieux comprendre cette onde de matière, les différents chercheurs ont mis au point le formalisme de description d'une particule en mécanique quantique. Il se base sur de l'algèbre linéaire, les espaces de Hilbert, mais pour cette année, nous pouvons nous contenter d'en retenir une des conséquences concernant la description de cette onde de matière :

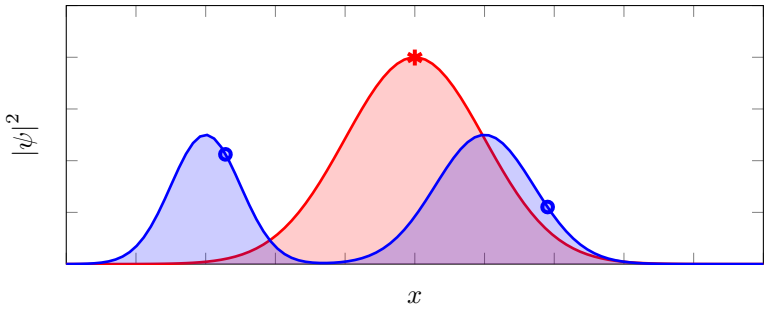
Définition : Fonction d'onde

À toute particule, on associe une fonction d'onde dépendant de la position et du temps $\psi(M,t)$, **à valeurs complexes**, dont le sens physique est le suivant : la probabilité pour la particule de se trouver au voisinage de la position M à l'instant t est donnée par $|\psi(M,t)|^2$. [a]
Cette fonction d'onde obéit à l'*équation de Schrödinger* que vous verrez l'année prochaine.

a. Pour une définition plus précise quand vous aurez vu les probabilités continues : la probabilité pour la particule de se trouver dans un petit volume $\mathrm{d}V$ au voisinage de la position M à l'instant t est donnée par $|\psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}V$.

Tout de suite, on voit la bizarrerie essentielle de la mécanique quantique : les ondes associées aux particules sont complexes ; mais c'est le carré du module de ces ondes qui a un sens physique, un sens probabiliste. Par exemple, la figure MQ1.13 montre deux répartition de fonctions d'onde. Celle en rouge a un pic autour d'une valeur, elle représente donc une particule dont on connaît à peu près la position ; celle en bleu possède deux pics, et représente donc une particule qui a environ 50% de chances d'être en un des pics, et 50% d'être vers l'autre pic, on ne sait pas trop.

FIGURE MQ1.13 : Exemples de probabilités associées à des fonctions d'ondes.



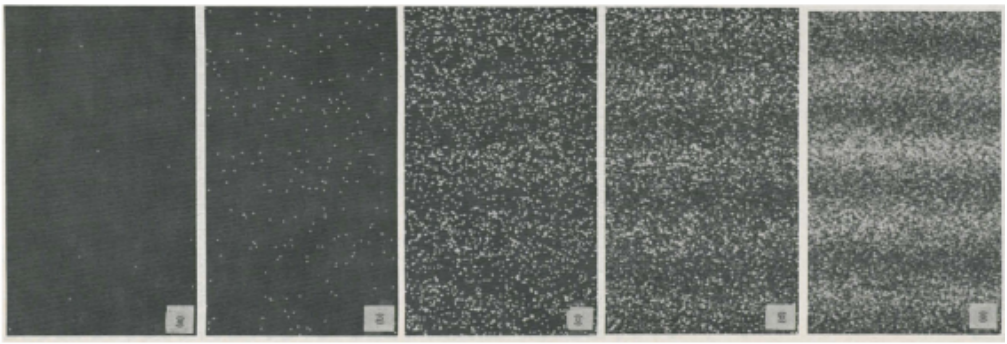
Ce formalisme étonnant a été depuis vérifiée expérimentalement ; citons, par analogie avec l'optique, deux exemples (figure MQ1.14) :

— l'expérience des trous d'Young, réalisée en 1961 par Jönsson, montre une figure d'interférence obtenue sur les électrons. En 1989, Tonomura a réalisé cette expérience de nouveau avec quelques électrons ; on voit alors apparaître sur l'écran des impacts localisés correspondant aux électrons, et lorsque ces impacts deviennent suffisamment nombreux, ils forment la figure d'interférence. Cela prouve qu'un seul électron interfère avec lui-même.

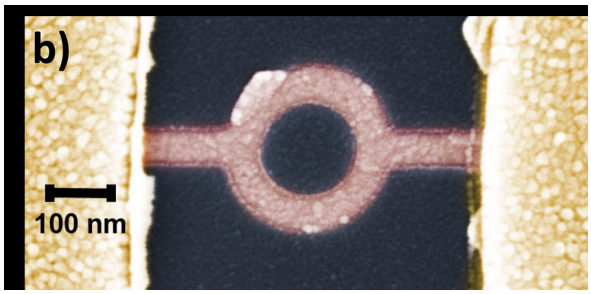
— la réalisation d'interféromètres de type Mach-Zehnder montrent également des effets d'interférence, en particulier l'effet Aharonov-Bohm dépendant du champ magnétique sidué au milieu de la boucle.

Ainsi le module de la fonction d'onde au carré indique une probabilité de présence de la particule en plusieurs endroits ; mais quand on effectue une mesure pour savoir où se trouve la particule, elle ne se trouve qu'en un seul endroit à la fois ; cependant, elle a une probabilité différente de se trouver en chaque endroit.

FIGURE MQ1.14 : Expériences d'interférences sur des électrons.



(a) Expérience d'iterférence entre électrons : les électrons forment des impacts sur l'écran, mais ces impacts dessinent une figure d'interférence.*(Crédit : A. Tomonura)*



(b) Interféromètre d'Aharonov-Bohm : les électrons interfèrent après avoir parcouru les deux branches de l'interféromètre.(Crédit : G.Behner)

La fonction d'onde peut parfois prendre l'allure d'une onde sinusoïdale (mais complexe [1]) pour décrire une particule qui avance. Mais il existe une classe importante de fonctions d'ondes, celles qui décrivent les états stationnaires.

1. En électricité, en mécanique, ou même pour l'étude des ondes classiques, la notation complexe est un formalisme pratique permettant de simplifier les calculs ; en mécanique quantique, les ondes sont fondamentalement complexes.

B.3. États stationnaires

Propriété : États stationnaires

Un état stationnaire est un état d'une particule dans lequel sa probabilité de présence n'évolue pas au cours du temps.
Une particule quantique dans un état stationnaire possède une fonction d'onde de la forme

$$\psi(x,t) = \varphi(x).e^{-i\omega t} \tag{MQ1.3}$$

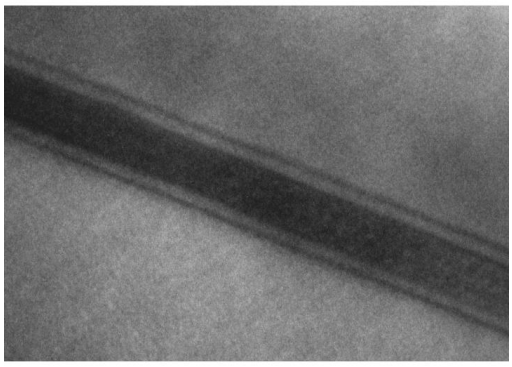
où ω est relié à l'énergie de la particule selon la relation d'Einstein $E = \hbar\omega$.

Remarque : Dans ce cas, $|\psi(x,t)|^2 = |\varphi(x)|^2$ qui ne dépend plus du temps.

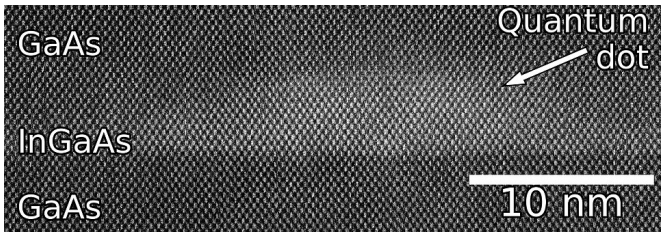
Ainsi, un électron autour d'un noyau est dans un état stationnaire. Pour déterminer sa fonction d'onde, il faut résoudre l'*équation de Schrödinger stationnaire* qui n'est pas au programme de première année. On va donc se contenter d'un cas plus simple.

Pourquoi un électron reste-t-il au voisinage du noyau d'un atome ? Parce qu'il est attiré électriquement par le noyau, et cela le « piège » comme dans trou, mais un trou compliqué à décrire. Mais peut-on piéger un électron dans un trou plus simple, du genre une boîte avec deux bords ? Oui, dans les semiconducteurs, matériaux particuliers dans lesquels les électrons se déplacent, comme dans un métal, mais moins librement. Or, quand on met en contact deux semiconducteurs, les électrons préfèrent souvent aller dans l'un des deux, en fonction de sa composition. On peut alors créer un sandwich formé d'une couche de matériau où les électrons aiment bien aller, entre deux couches de matériau où les électrons aiment moins aller : on a réalisé un *puits quantique* (figure MQ1.15). On peut, de la même manière, fabriquer des boîtes quantiques en 3D.

FIGURE MQ1.15 : Puits et boîtes quantiques.



(a) Deux puits quantiques de part et d'autre d'un puis large. *(Crédit : ?)*



(b) Puits quantiques vus au microscope électronique. (Crédit : Wikipedia/Magnunor)

Dans ce puits quantique, on peut, en première approximation, supposer que l'électron est complètement enfermé entre les deux bords : c'est l'hypothèse du « puits quantique infini. »

B.4. États stationnaires

Exemple : Particules dans un puits quantique infini **À connaître**

On considère une particule de masse m enfermée dans un puits quantique de largeur a, compris entre $x = 0$ et $x = a$. On admet que, si le puits est homogène, alors l'enveloppe de la fonction d'onde est sinusoïdale : $\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.

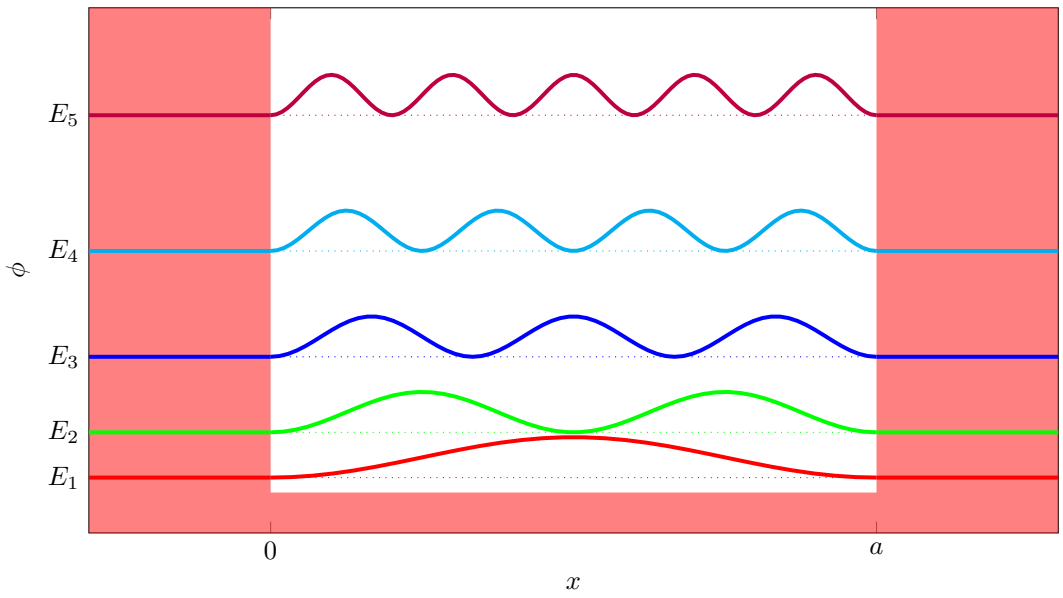
1. $\varphi(x)$ est continue mathématiquement. En déduire les valeurs de $\varphi(0)$ et $\varphi(a)$. En appliquant ces deux relations à la forme de $\varphi(x)$ proposée, montrez que la fonction d'onde est non nulle si et seulement si $\sin(ka) = 0$.
2. En déduire la valeur k_n de k dans l'état numéroté n avec $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la vitesse v_n de la particule dans cet état (en fait, cet état stationnaire correspond à une particule qui fait des aller-retour au fond du puits).

4. En supposant qu'on peut calculer l'énergie de la particule avec la formule de l'énergie cinétique, montrer que l'énergie de l'état n vaut $E_n = n^2 E_1$ avec E_1 à exprimer.
   AN de E_1, E_2 et E_3 pour $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg et $a = 1{,}3$ nm.

1. On sait que $\forall x < 0, \varphi(x) = 0$ puisque la particule ne peut pas sortir du puits donc sa probabilté de présence hors du puits est nulle ; par continuité de la fonction d'onde, $\varphi(0) = 0$. De même $\forall x > a, \varphi(x) = 0$ donc $\varphi(a) = 0$ par continuité.
   On peut donc écrire :
   $$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \\ A\cos(ka) + B\sin(ka) = 0 \end{cases}$$
   La première équation implique que $A = 0$ et la seconde $B\sin(ka) = 0$. Pour avoir une fonction d'onde non nulle, il faut que $B \neq 0$ donc $\sin(ka) = 0$.
2. Cette équation a pour solutions soit $k_n a = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$ (car $n = 0$ donne $\varphi(x) = 0$; et par imparité de sinus, inutile de prendre les n négatifs) soit $k_n = n\frac{\pi}{a}$; l'enveloppe de la fonction d'onde s'écrit alors $\phi(x) = B\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)$.
3. À cette pulsation spatiale est associée d'après la loi de De Broglie une vitesse $v_n = \frac{\hbar k_n}{m} = n\frac{h}{2am}$ où m est la masse de la particule.
4. On va calculer l'énergie comme étant l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$ de la particule. On trouve donc $E_n = \frac{m}{2}v_n^2 = \frac{m}{2}n^2\frac{h^2}{4m^2a^2}$ soit $E_n = n^2 E_1$ avec $E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$.
   AN : $E_1 = 3{,}6 \times 10^{-20}$ J $= 0{,}22$ eV ; $E_2 = 0{,}89$ eV ; $E_3 = 2{,}0$ eV.
   Remarque : l'équation de Schrödinger permet de calculer exactement l'énergie de l'état n ; il se trouve qu'on obtient le même résultat.

À partir de la fonction d'onde calculée, on peut tracer la probabilité de présence $|\varphi(x)|^2 = B^2\sin^2\left(n\frac{\pi}{a}x\right)$ (cf. figure MQ1.16)

FIGURE MQ1.16 : Particules dans un puits carré infini.



Ce qui est très particulier à la mécanique quantique, c'est que l'état fondamental a une énergie non nulle ; on en verra bientôt la cause. En mécanique classique, si on lâche une bille dans un bol, elle tombe au fond et s'immobilise : elle a perdu toute son énergie mécanique. En mécanique quantique, la particule bouge toujours au fond de son puits, et a toujours une certaine énergie, d'autant plus grande que le puits est étroit. Cette « énergie fondamentale » a des conséquences étonnantes :

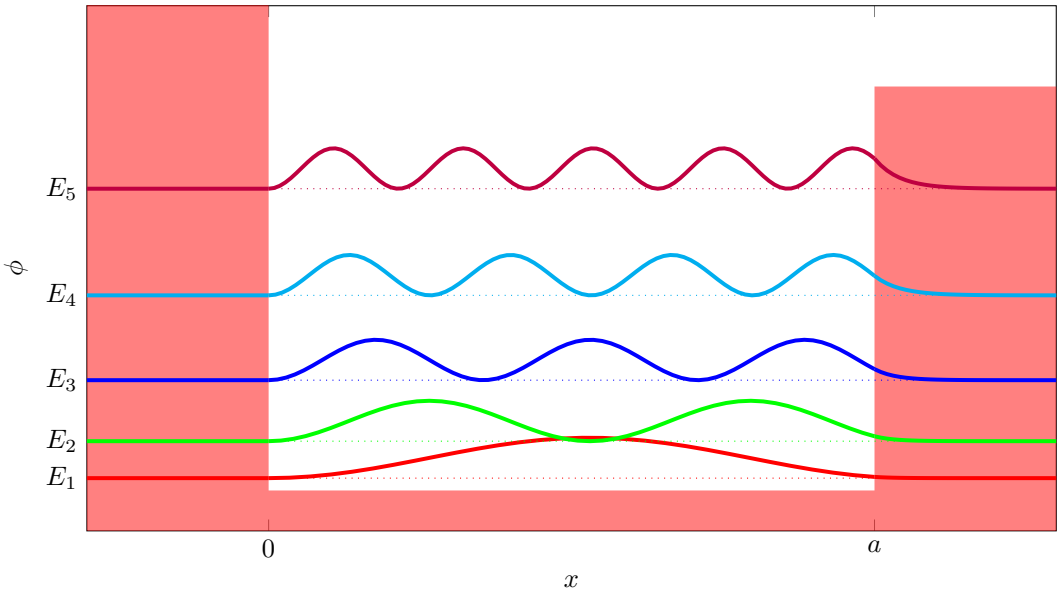
— si on refroidit un solide vers le zéro absolu, on peut s'imaginer que les atomes s'immobilisent ; en réalité, à cause de la mécanique quantique, ils gardent un peu d'énergie cinétique, ce qui a pour conséquence bizarre que l'hélium 3 reste liquide même au zéro absolu

— ce qui est vrai pour les particules l'est aussi pour les photons (particules de lumière). Du coup, même dans le

vide, la lumière a une énergie non nulle ; en fait, le vide est rempli d'énergie en mécanique quantique. Cette énergie mène à des créations de particules virtuelles qui peuplent l'espace et causent des effets très étranges…

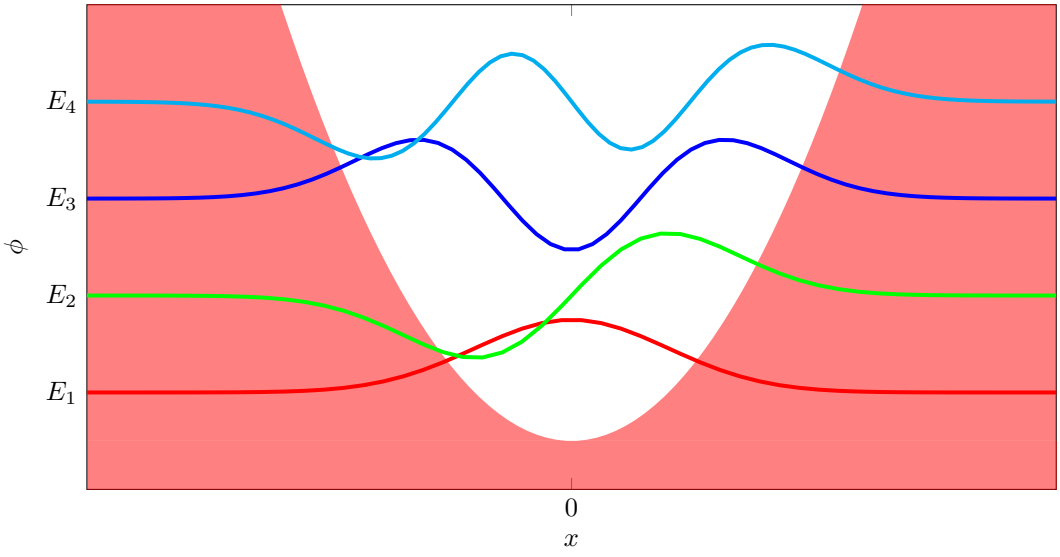
Si le puits n'est plus infini, c'est-à-dire si les particules peuvent sortir du puits, les calculs sont plus compliqués et font appel à l'équation de Schrödinger. La figure MQ1.17 présente les résultats dans le cas d'un puits semi-infini, où les particules peuvent éventuellement sortir d'un côté ; on constate toujours des états stationnaires, mais en nombre finis, et si leur allure générale reste la même, on constate que la probabilité d'être hors du puits n'est plus nulle.

FIGURE MQ1.17 : Particules dans un puits carré semi-infini.



On peut ainsi continuer les calculs avec des puits de forme plus compliqué ; en particulier pour un atome d'hydrogène, le puits a une forme hyperbolique, et des calculs astucieux permettent de retrouver la formule de Rydberg. Ou encore avec un potentiel harmonique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ comme sur la figure MQ1.18, on peut montrer que les états ont pour énergie $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

FIGURE MQ1.18 : Particules dans un puits harmonique.

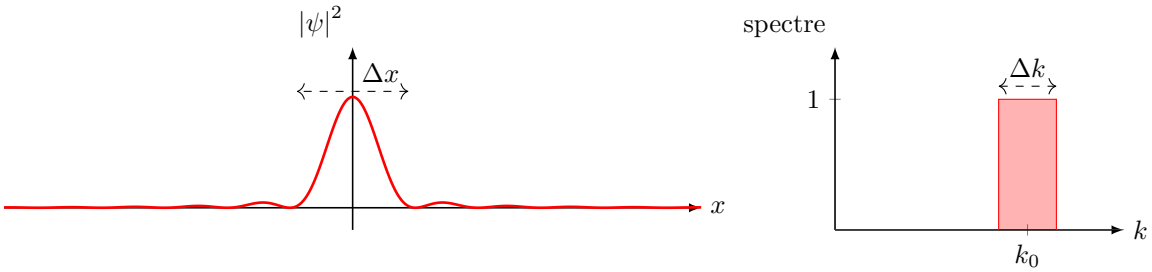


B.5. Inégalité d'Heisenberg

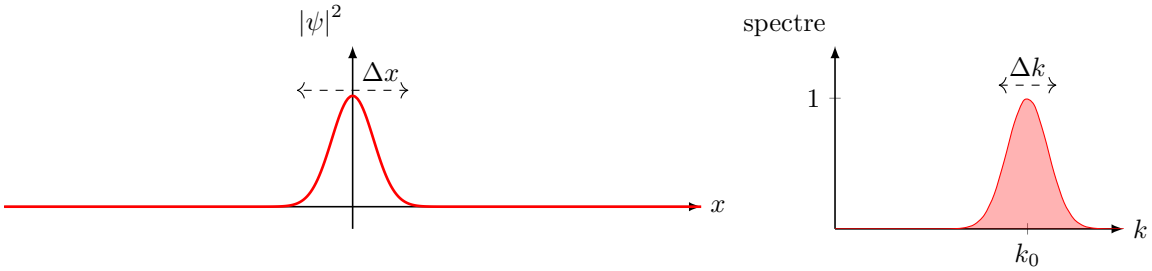
Une fonction d'onde progressive de pulsation spatiale k, de forme mathématique $\psi(x,t) = Ae^{-i\omega t+ikx}$, représente une particule dont la vitesse est donnée par la relation de De Broglie $v = \frac{\hbar k}{m}$. Mais en fait, cela ne représente pas une véritable particule, car la densité de propabilité associée est $|\psi(x,t)|^2 = 1$ partout.

Une particule localisée qui se déplace est modélisable par un *paquet d'onde* quantique ; on a déjà évoqué cette notion de paquet d'onde au chapitre PROPAGATION DES ONDES. Ce paquet d'onde a une largeur Δx qui correspond à la précision avec laquelle on localise la position de la particule : on dit qu'il y a une incertitude sur sa position.

FIGURE MQ1.19 : Module au carré d'une fonction d'onde représentant une particule localisée.



(a) Spectre carré



(b) Spectre gaussien

D'après ce qu'on a vu plus dans le chapitre PROPAGATION DES ONDES, cette largeur Δx est obtenue en ajoutant beaucoup d'ondes monochromatiques ayant des pulsations spatiales k contenues dans un intervalle de largeur $\Delta k \approx \frac{2\pi}{\Delta x}$. Pour une onde classique, cette notion semble floue, mais en mécanique quantique, la pulsation spatiale k est reliée à la vitesse de la particule selon $\vec{e}_x$ donnée par la relation de De Broglie : $v_x = \frac{\hbar k}{m}$ de sorte qu'une incertitude Δk sur la pulsation spatiale se traduit par une incertitude $\Delta v_x = \frac{\hbar \Delta k}{m} \approx \frac{2\pi\hbar}{m\Delta x}$ sur la vitesse. En fait, cette égalité n'est pas toujours vraie, des calculs montrent que c'est plutôt une borne inférieure, une limite à la précision avec laquelle on peut mesurer la vitesse. Ces mêmes calculs montrent que le facteur $2\pi\hbar$ doit être légèrement corrigé :

Inégalité d'Heisenberg (ou principe d'incertitude)

Si on observe une particule de masse m et qu'on mesure sa position avec une incertitude Δx et sa vitesse avec une incertitude Δv_x, alors

$$m\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(MQ1.4)}$$

On rappelle que $\hbar \approx 1{,}0 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

Remarque : On note parfois $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ avec $p_x = m v_x$.

Prenons par exemple une voiture de masse 1 t qui roule et se fait flasher par un radar ; supposons que sa vitesse soit mesurée à $1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ près. Alors d'après l'inégalité d'Heisenberg, sa position n'est connue qu'avec une incertitude $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v} = 5 \times 10^{-36}\,\mathrm{m}$: dommage, mais il ne va pas être possible d'invoquer l'inégalité d'Heisenberg pour prétendre que c'était la voiture de derrière qui roulait trop vite…

L'inégalité d'Heisenberg s'applique à tous les objets, mais seuls les objets de très petite masse en tirent des effets concrets. Voici deux exemples :

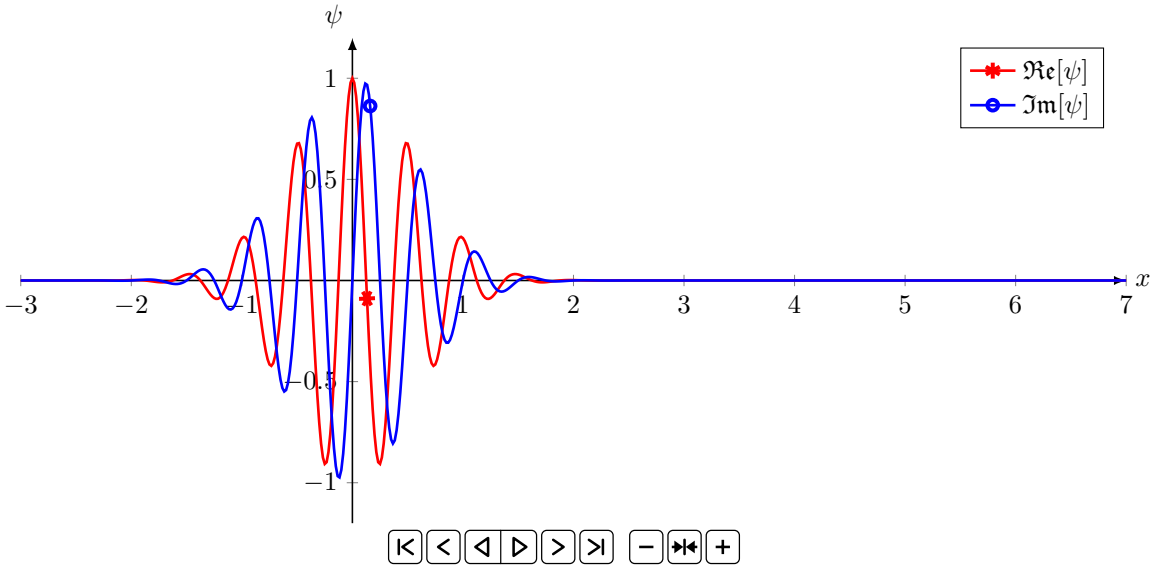
— dans un atome d'hydrogène, la position de l'électron est connue avec une incertitude égale au rayon de l'atome : $a_0 \approx 5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$. Par conséquent, la vitesse de l'électron ne peut être connue qu'avec une incertitude $\Delta v = \frac{1\times10^{-34}}{2\times9\times10^{-31}\times5\times10^{-11}} \approx 1 \times 10^{6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: l'électron est obligé de tourner à toute allure autour du noyau, ce qui explique qu'il ne tombe jamais au centre de l'atome.

— quand on refroidit un métal à très basse température, ses électrons et ses atomes ralentissent. L'incertitude Δv diminue, et du coup la localisation des électrons et des atomes devient de plus en plus imprécise. Quand l'incertitude sur la position d'une particule devient plus grande que la distance moyenne entre ces particules, elles deviennent indistingables, on a une espèce d'assemblée de particules qui se superposent toutes, et cela amène des effets étranges : supraconductivité, superfluidité, condensats de Bose-Einstein,…

Remarque : Dans un puits quantique de largeur a, l'électron piégé est localisé avec une précision $\Delta x \approx a$ donc il y a une incertitude $\Delta v \approx \frac{\hbar}{2ma}$ sur sa vitesse, qui correspond au fait qu'il fait des aller-retour au fond du puits. Cela implique une énergie cinétique minimale $\frac{1}{2}m(\Delta v)^2 \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}$ qui donne bien, à un facteur numérique près, l'énergie de l'état fondamental du puits quantique.

Dans le cas d'une particule qui se propage, l'incertitude sur la vitesse va se traduire par une perte de renseignement sur la localisation exacte de la particule : le paquet d'onde s'élargit en se propageant, ce qui dilue la zone où la probabilité de rencontrer la particule se trouve (figure MQ1.20).

FIGURE MQ1.20 : Étalement du paquet d'onde à cause de l'incertitude sur sa vitesse.



MQ1. Introduction à la mécanique quantique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière	
Le photon : énergie, vitesse, masse, impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.
Introduction au formalisme quantique	
Fonction d'onde : introduction qualitative, interprétation probabiliste.	Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.
Inégalité d'Heisenberg spatiale.	Établir par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.
Quantification de l'énergie	
Modèle planétaire de Bohr. Limites.	Exploiter l'hypothèse de quantification du moment cinétique orbital pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie électronique de l'atome d'hydrogène.
Modèle du puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie.	Exploiter l'inégalité de Heisenberg spatiale pour mettre en évidence l'existence d'une énergie minimale de confinement. Obtenir les niveaux d'énergie par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante. Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification.

MQ1. Introduction à la mécanique quantique

Quelques conseils

✎ Ce cours est vraiment une introduction à la mécanique quantique. Outre les formules de Planck-Einstein et de De Broglie, il faut surtout retenir ceci : l'énergie d'un photon émis ou absorbé est égale à la **différence** d'énergie de l'état de départ et de l'état final.

✎ Le calcul des états stationnaires dans un puits infini est classique ; pour le moment, traitez-le comme la corde de Melde ; l'année prochaine, à l'aide de l'équation de Schrödinger, vous justifierez toutes les hypothèses faites.

MQ1. Introduction à la mécanique quantique

QCMs

réponses page 1260

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1. L'énergie d'un photon est donnée par

(a). $E = \hbar f$
(b). $E = \hbar\omega$
(c). $E = \frac{h}{\lambda}$
(d). $E = \frac{hc}{\lambda}$

Q2. L'impulsion (ou quantité de mouvement) d'un photon est donnée par

(a). $p = \frac{E}{c}$
(b). $p = \frac{h}{\lambda}$
(c). $p = \frac{\hbar}{\lambda}$
(d). $p = \hbar\lambda$

Q3. Si un système passe d'un état d'énergie E_1 à un état d'énergie E_2 en absorbant un photon, alors l'énergie de ce photon vaut

(a). E_1
(b). $E_1 - E_2$
(c). E_2
(d). $E_2 - E_1$

Q4. Si un système passe d'un état E_2 à un état E_1 par émission stimulée, alors

(a). le photon absorbé a une énergie $E_2 - E_1$
(b). le photon émis a la même phase que le photon incident
(c). le photon émis a la même vitesse que le photon incident
(d). le photon émis est dans le spectre visible
(e). il faut qu'un photon incident ait une énergie $E_2 - E_1$
(f). le photon émis a une énergie $E_2 - E_1$

Q5. La relation de De Broglie donne la longueur d'onde quantique d'une particule :

(a). $\lambda = \frac{hm}{v}$
(b). $\lambda = \frac{mv}{h}$
(c). $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$
(d). $\lambda = \frac{h}{mv}$

MQ1. Introduction à la mécanique quantique

Exercices

réponses page 1261

Exercice MQ1.1 : Atome d'hydrogène [*]

Dans l'atome d'hydrogène, les électrons peuvent ocuper des états numérotés par un indice $n \in \mathbb{N}^*$, d'énergie $E_n = \frac{-13{,}6\,\text{eV}}{n^2}$.

1. Calculez l'énergie des 4 premiers états.
2. Un électron est dans l'état 1. Calculez les 3 plus grandes longueurs d'ondes des photons qu'il peut absorber.
3. Un électron est dans l'état 4. Calculez les 3 longueurs d'ondes des photons qu'il peut émettre.

Données : $\hbar = 1{,}0\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ USI, $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$ (charge élémentaire) et $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,\text{kg}$ (masse de l'électron).

Exercice MQ1.2 : Recul d'un électron [*]

Calculez la quantité de mouvement d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 400\,\text{nm}$. En déduire, si un électron l'absorbe entièrement, la vitesse de recul de cet électron. Commentez.

Exercice MQ1.3 : Électrons libres dans un métal [*]

Dans un métal, les électrons libres se comportent un peu comme un gaz. Leur vitesse quadratiquennée, dans la théorie classique, par $v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}}$ avec T la température en Kelvins, $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,\text{kg}$ la masse de l'électron et $k_B = 1{,}0\times10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante de Boltzman.

1. Calculez la vitesse quadratique d'un électron à $T = 300\,\text{K}$ (température ambiante).
2. En fait on connaît approximativement la vitesse absolue de l'électron, mais pas sa direction. Par conséquent, on peut estimer qu'on a une incertitude sur la vitesse de l'électron $\Delta v \approx 2v$.
   Par application de l'inégalité d'Heisenberg, déterminez l'incertitude sur la position de l'électron.
3. Mêmes questions à $T = 0{,}1\,\text{K}$. Quel effet peut apparaître à une telle température ?

Exercice MQ1.4 : Atome d'hydrogène et inégalité d'Heisenberg [**]

Dans un atome d'hydrogène, l'électron se trouve au voisinage du noyau, à une distance r (rayon). On peut donc considérer qu'on a une incertitude $\Delta x = r$ sur la position.

1. Exprimer l'incertitude Δv.
2. Exprimez l'énergie totale $E = E_c + E_p$ de l'électron en fonction de r en supposant que la vitesse est de l'ordre de Δv .
3. On admet que l'électron cherche à minimiser cette énergie. En dérivant E par rapport à r, trouver la valeur de r qui minimise E. Faites l'AN et comparez au vrai rayon de l'atome d'hydrogène $a_0 = 53\,\text{pm}$. Faites aussi l'AN de Δv.
   Données : $\hbar = 1{,}0\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ USI, $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$ (charge élémentaire) et $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,\text{kg}$ (masse de l'électron).

Exercice MQ1.5 : Inversion de population [***] ∂ EDO

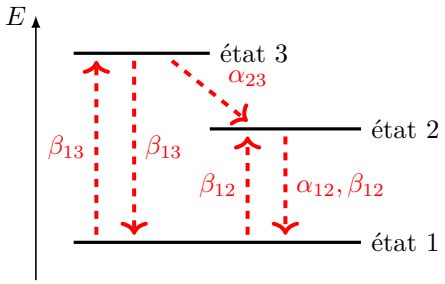
Exercice hors programme.
Les interactions lumière matière proposées par Einstein se traduisent mathématiquement par des équations de

dynamique des populations. Considérons deux états électroniques d'énergies E_1 et $E_2 > E_1$; notons $u_{\nu_{12}}$ la densité de photons à la fréquence correspondant à la transition entre ces deux états : $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$; notons N_1 et N_2 les populations des deux états (nombre d'électrons du système respectivement dans l'état 1 et 2). Alors, en une durée dt :

- un nombre $\delta N_{abs.} = \beta_{12} u_{\nu_{12}} N_1 \mathrm{d}t$ d'électrons passe de l'état 1 à l'état 2 en absorbant un photon
- un nombre $\delta N_{émis.\ sp.} = \alpha_{12} N_2 \mathrm{d}t$ d'électrons passe de l'état 2 à l'état 1 par émission spontanée d'un photon
- un nombre $\delta N_{émis.\ st.} = \beta_{12} u_{\nu_{12}} N_2 \mathrm{d}t$ d'électrons passe de l'état 2 à l'état 1 par émission stimulée d'un photon

les coefficients α_{12} et β_{12} dépendant des états 1 et 2.

1. On considère pour le moment ce système formé de 2 niveaux. En faisant un bilan entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$, établissez les équations différentielles vérifées par $N_1(t)$ et $N_2(t)$.
2. Quel est l'état stationnaire (on suppose $u_{\nu_{12}}$ fixé) ? Est-il possible d'avoir $N_2 > N_1$? Déduisez-en que, pour les photons d'énergie ν_{12}, il y aura toujours plus d'absorption que d'éméssion stimulée.
3. Pour faire un laser, il faut que l'émission stimulée domine. Pour cela il faut faire une « inversion de population » : avoir $N_2 > N_1$.
   La solution proposée pour le premier laser (à rubis) a été de trouver une configuration avec un troisième niveau d'énergie $E_3 > E_2$ tel que :
   - l'émission spontanée de 3 vers 1 est très faible : on prendra $\alpha_{13} = 0$
   - l'émission spontanée de 3 vers 2 est rapide ($\alpha_{23} > \alpha_{12}$) et ne produit pas de lumière (l'énergie est dissipée autrement), du coup la densité de lumière $u_{\nu_{23}}$ correspondant à la transition entre 3 et 2 sera prise nulle



   Établissez les 3 équations différentielles vérifiées par $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$.
4. On va faire une simulation de principe avec Python, avec des valeurs non réalistes : $u_{\nu_{12}} = 1$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{23} = 10$, $\beta_{13} = 1$, $\beta_{12} = 1$; au départ $N_1 = 1000$ et $N_2 = N_3 = 0$. Tracez $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sur une durée égale à 10, pour $u_{\nu_{13}}$ valant $0,1$, puis 1, puis 10. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b) ET (d)
Q2.(a) ET (b)
Q3.(d)
Q4.(b) ET (c) ET (e) ET (f)
Il n'y a pas de photon absorbé.
Q5.(d)

Réponses aux exercices

Corrigé de l'exercice MQ1.1 : Atome d'hydrogène [*]

1. $E_1 = -13{,}6\,\text{eV}$; $E_2 = -3{,}4\,\text{eV}$; $E_3 = -1{,}5\,\text{eV}$; $E_4 = -0{,}85\,\text{eV}$.
2. Les longueurs d'ondes les plus grandes correspondent aux énergies les plus faibles, ce seront donc les transitions vers les états 2, 3 et 4 qu'ils faut considérer. On trouve $\lambda^{1\to2} = \frac{hc}{E_2-E_1} = 122\,\text{nm}$; $\lambda^{1\to3} = 103\,\text{nm}$; $\lambda^{1\to4} = 97\,\text{nm}$.
3. De même, $\lambda^{4\to3} = 489\,\text{nm}$; $\lambda^{4\to2} = 188\,\text{nm}$; $\lambda^{4\to1} = 97\,\text{nm}$; la transition $4 \to 3$ est dans le visible.

Corrigé de l'exercice MQ1.2 : Recul d'un électron [*]

$p = \frac{h}{\lambda} = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Si l'électron l'absorbe, il prend cette même quantité de mouvmement (si le système total est isolé) ce qui lui communique comme vitesse $v = \frac{p}{m_e} = 1820\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: ça semble beaucoup, mais pour un électron, c'est assez lent (l'agitation thermique moyenne d'un électron à 25 °C lui donne comme vitesse quadratique $94\,300\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Corrigé de l'exercice MQ1.3 : Électrons libres dans un métal [*]

1. $v = 99\,500\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où on tire $\Delta x = \frac{\hbar}{4vm_e} = 0{,}29\,\text{nm}$
2. $\Delta x = 16nm$. C'est beaucoup plus que la distance entre deux atomes. À de telles températures, la grande incertitude sur la localisation des électrons produit des effets bizarres, le plus connu étant la supraconductivité. On a aussi des effets de conductance quantifiée, ou d'« effet Hall quantique fractionnaire » où des fractions d'électrons se déplacent…

Corrigé de l'exercice MQ1.4 : Atome d'hydrogène et inégalité d'Heisenberg [**]

1. $\Delta v = \frac{\hbar}{2rm_e}$
2. $E = \frac{1}{2}m_e\Delta v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{8r^2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$
3. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = -\frac{\hbar^2}{4r^3m_e} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. On regarde son signe : $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} > \frac{\hbar^2}{4r^3m_e} \Leftrightarrow r > \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{4e^2m_e} = 13\,\text{pm}$. C'est donc le minimum de E pour ce rayon.
   On est à un quart de la vraie valeur.
   Pour $r = 13\,\text{pm}$ on trouve $\Delta v = 4{,}5 \times 10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; pour $r = 53\,\text{pm}$ on trouve $\Delta v = 1{,}1 \times 10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice MQ1.5 : Inversion de population [***] .py EDO

1. On trouve par un bilan que $N_1(t+\mathrm{d}t) = N_1(t) - \delta N_{abs.} + \delta N_{émis.\ sp.} + \delta N_{émis.\ st.} = N_1(t) - \beta_{12}u_{\nu_{12}}N_1(t)\mathrm{d}t + \alpha_{12}N_2\mathrm{d}t + \beta_{12}u_{\nu_{12}}N_2\mathrm{d}t$. En écrivant que $N_1(t+\mathrm{d}t) = N_1(t) + \frac{dN_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ et en simplifiant par $\mathrm{d}t$, on trouve la première ED. On fait de même pour $N_2(t+\mathrm{d}t)$ et on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_{12}u_{\nu_{12}}\left(N_2(t) - N_1(t)\right) + \alpha_{12}N_2(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_{12}u_{\nu_{12}}\left(N_1(t) - N_2(t)\right) - \alpha_{12}N_2(t) \end{cases}$$

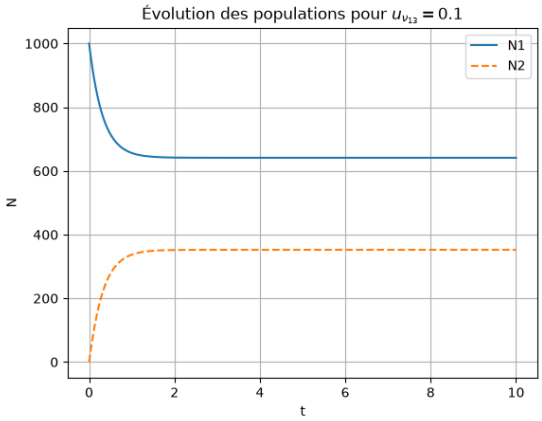
2. En régime permanent, les dérivées sont nulles. On a donc $\beta_{12}u_{\nu_{12}}\left(N_2 - N_1\right) + \alpha_{12}N_2 = 0$ donc forcément $(N_2 - N_1) < 0$ soit $N_2 < N_1$: on ne peut pas inverser la population. L'émission stimulée sera toujours inférieure à l'absorption, donc on ne pourra pas amplifier la lumière à la fréquence ν_{12}.

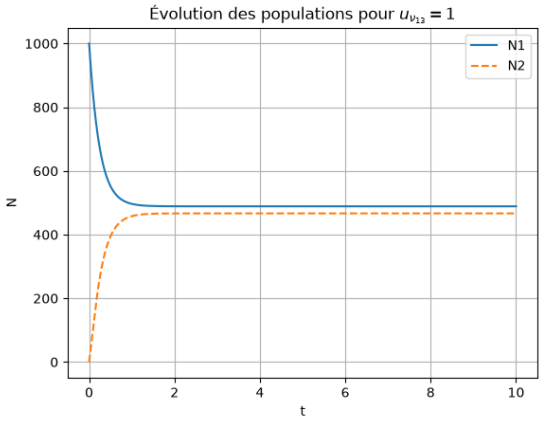
3. Par le même principe

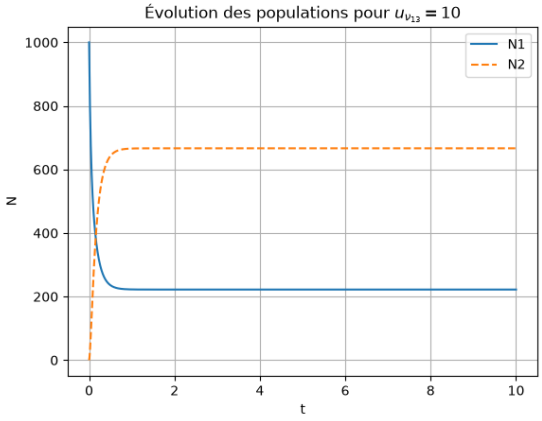
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_{12}u_{\nu_{12}}\left(N_2(t) - N_1(t)\right) + \alpha_{12}N_2(t) + \beta_{13}u_{\nu_{13}}\left(N_3(t) - N_1(t)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_{12}u_{\nu_{12}}\left(N_1(t) - N_2(t)\right) - \alpha_{12}N_2(t) + \alpha_{23}N_3(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}N_3(t)}{\mathrm{d}t} = +\beta_{13}u_{\nu_{13}}\left(N_1(t) - N_3(t)\right) - \alpha_{23}N_3(t) \end{cases}$$

4.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
u12=1
a12,a23=1,10
b12,b13=1,1
tmax=10
pas=0.01
N=int(tmax/pas)
plt.figure()
u13=10
tab_t=np.zeros(N+1)
tab_N1=np.zeros(N+1)
tab_N2=np.zeros(N+1)
tab_N3=np.zeros(N+1)
tab_N1[0]=1000
for n in range(N):
    tab_t[n+1]=tab_t[n]+pas
    taux12=b12*u12*(tab_N2[n]-tab_N1[n])+a12*tab_N2[n]
    taux13=b13*u13*(tab_N3[n]-tab_N1[n])
    taux23=a23*tab_N3[n]
    tab_N1[n+1]=tab_N1[n]+pas*(taux12+taux13)
    tab_N2[n+1]=tab_N2[n]+pas*(-taux12+taux23)
    tab_N3[n+1]=tab_N3[n]+pas*(-taux13-taux23)
plt.plot(tab_t,tab_N1,label="N1")
plt.plot(tab_t,tab_N2,ls="--",label="N2")
plt.grid()
plt.legend()
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("N")
plt.title(r"Évolution des populations pour $u_{\nu_{13}}="+str(u13)+"$")
plt.show()
```







On arrive à inverser la population en mettant une bonne dose de lumière sur la transition $1 \to 3$.

Liste des animations

O1.5 **Propagation d'une onde (monochromatique)** p.40

O1.8 **Évolution de l'angle réfracté en fonction de l'angle d'incidence** p.45

O1.10 **Évolution de la quantité de lumière réfléchie en fonction de l'angle d'incidence** p.46

O3.1 **Image par une lentille convergente** p.119

O3.2 **Image par une lentille divergente** p.120

O3.18 **Influence de la focale de l'objectif sur la profondeur de champ d'un appareil photographique** p.131

O3.19 **Influence du diamètre de l'objectif sur la profondeur de champ d'un appareil photographique** p.131

O4.1 **Ondes de compression et de cisaillement** p.160

O4.3 **Ondes progressives** p.161

O4.4 **Paramètres d'une fonction sinusoïdale** p.162

O4.19 **Évolution temporelle d'une onde présentant des battements** p.177

O4.20 **Battements de N ondes sinusoïdales, à largeur spectrale fixe** p.177

O4.21 **Battements de 4 ondes sinusoïdales, à largeur spectrale variable** . . p.177

O4.23 **Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu non dispersif ou dispersif** p.179

E1.3 **Signe de comptage des charges** p.211

E3.3 **Principe de la méthode d'Euler** p.291

E4.6 **Solutions d'une équations différentielle linéaire en fonction de la valeur du facteur de qualité** p.325

M1.1 **Trajectoire dans deux référentiels** p.362

M2.1 **Référentiels héliocentrique, géocentrique et terrestre** p.383

M2.8 **Construction du portrait de phase de la chute libre** p.390

M2.11 **Portrait de phase du masse-ressort vertical** p.394

M3.1 **Expérience de Galilée** p.416

M3.2 **Minuscule® coccinelle soulevant une pomme** p.418

M3.4 **Déplacement d'un carton sur le sol** p.419

M4.6 **Conservation de l'énergie d'un masse-ressort vertical non amorti** . . p.458
M4.7 **Non-conservation de l'énergie d'un masse-ressort vertical amorti** . . p.458
T1.9 **Chauffage plus ou moins réversible thermiquement d'une casserole** p.498
T3.3 **Simulation des chocs sur une paroi** p.543
T3.4 **Simulation de la convergence de la répartition des vitesse des molécules dans un gaz parfait** p.546
E5.1 **Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence** p.587
E5.3 **Évolution d'un vecteur du diagramme de Fresnel au cours du temps** p.590
E5.4 **Illustration de la tension et du courant pour une résistance en RSF** p.592
E5.5 **Illustration de la tension et du courant pour un condensateur en RSF** p.592
E5.6 **Illustration de la tension et du courant pour une bobine en RSF** . . p.593
E6.4 **Lien entre la courbe de résonance aux bornes de la résistance, et la tension aux bornes de celle-ci** p.630
E6.8 **Lien entre la courbe de résonance aux bornes du condensateur, et la tension aux bornes de celui-ci** p.634
E7.6 **Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal d'amplitude E_0** p.656
E7.14 **Recomposition d'un signal périodique par somme de ses harmoniques** p.665
E8.8 **Tension aux bornes du condensateur du RC en régime libre et forcé** p.706
E8.9 **Tension aux bornes du condensateur du RLC en régime libre et forcé** p.707
M5.15 **Modes propres de deux oscillateurs harmoniques couplés** p.749
M5.17 **Modes propres de 5 oscillateurs harmoniques couplés** p.752
M5.18 **Modes propres d'un pont simple** p.753
O5.1 **Modes propres pour $n = 5$** p.780
O5.3 **Modes propres de la corde de Melde** p.783
O5.5 **Décomposition d'une onde stationnaire en deux ondes progressives** p.785
O5.7 **Ondes stationnaires dans un tube sonore bouché à gauche** p.788
M6.3 **Mouvements possibles du pendule simple** p.813
M9.7 **Illustration de la loi des aires** p.917
M9.9 **Mouvement à force centrale, pour différentes vitesses initiales avec la même constante des aires** p.919
M9.10 **Mouvement à force centrale, pour différentes vitesses initiales avec la même énergie cinétique** p.919
M9.11 **Mouvement à force centrale, pour différentes vitesses initiales orthoradiales** p.920
M9.13 **Mouvement d'un système de 2 objets en interaction gravitationnelle** p.923
M10.8 **Précession de la ligne des nœuds de la Lune** p.953
M11.1 **Accélérateur linéaire** p.982

M11.5 **Fonctionnement d'un cyclotron** p.987
M11.7 **Principe d'un synchrotron avec des particules de signes opposés** . p.988
EM1.10 **Expérience du rail de Laplace** p.1021
EM1.12 **Création d'un champ tournant** p.1025
EM1.13 **Principe d'un moteur synchrone** p.1025
EM2.1 **Expérience du rail de Laplace inversée** p.1040
EM2.2 **Production d'électricité par rotation d'un aimant : l'alternateur** p.1040
EM3.3 **Principe d'un moteur asynchrone** p.1064
EM3.5 **Principe d'un moteur à courant continu** p.1066
T4.5 **Tracé d'une isotherme d'un fluide dans le diagramme de Clapeyron** p.1091
T4.7 **Diagramme des phases en 3D** p.1093
T7.1 **Détente de Joule-Kelvin** p.1174
T8.5 **Machine à mouvement perpétuel par mauvaise application de la poussée d'Archimède** p.1212
MQ1.20 **Étalement du paquet d'onde à cause de l'incertitude sur sa vitesse** p.1254

Liste des TD numériques

P0). Introduction aux outils numériques pour la Physique plot p.19

O2). Lentille plan-convexe plot p.104

O3). Doublet achromatique plot p.146

O3). Zoom plot p.147

O4). Émission par deux antennes plot(polaire) p.188

O4). Trous d'Young plot(image) p.188

E1). Alimentation électrique d'un TGV A.X=B p.236

E2). Balance avec jauge de contrainte plot p.272

E3). Circuit RC soumis à une tension quelconque EDO p.302

E3). Convertisseur Boost EDO p.302

E3). Doublage d'une tension par une pompe à charges EDO p.303

E4). RLC série EDO p.338

E4). Moteur électrique protégé par un condensateur EDO p.338

M2). Chute avec frottements quadratiques EDO p.403

M2). Portraits de phase plot(champ) p.403

M3). Le phénomène de glissé-décolé (stick-slip) EDO p.434

M4). Oscillateur harmonique EDO p.469

M4). Oscillateur non harmonique EDO p.470

T2). Fusible électrique EDO p.534

T3). Modèle du gaz de Van der Waals $f(x) = 0$ p.568

T3). Calcul du travail des forces de pression $f(x).dx$ p.569

T3). Tir d'une balle EDO p.571

T3). Simulation de la distribution de vitesses d'un gaz parfait random p.572

E5). Signaux sinusoïdaux et images complexes $x + i.y$ p.616

E6). Résonances $x + i.y$ $f(x) = 0$ p.644

E7). Série de Fourier et filtrage $x + i.y$ plot p.679

E7). Mesure d'un effet Doppler plot EDO p.679

E7). Détection synchrone py EDO p.681
E7). Boucle à verrouillage de phase py EDO p.682
E8). Filtre à structure de Rauch py A.X=B p.715
M5). Amortisseur dynamique accordé py $x+i.y$ py A.X=B p.764
M5). Résonance d'un bras de microscope à force atomique py $f(x)=0$ py EDO . p.765
O5). Vibration d'une corde de guitare py $f(x).dx$ p.800
M6). Le pendule simple py EDO py $f(x).dx$ p.828
M6). Descente en rappel d'une spéléologue contre une paroi circulaire py EDO p.829
M8). Pendules couplés py EDO p.895
M9). Précession du périhélie de Mercure py EDO py plot(polaire) p.932
M9). Mouvement d'une bille dans un bol py EDO py plot(polaire) p.932
M10). Mouvements astronomiques py EDO py plot(3D) p.966
M10). Expérience de Rutherford py EDO p.967
M11). Séparation isotopique par résonance cyclotron py EDO py plot(3D) p.1000
M11). Lentille magnétique py EDO p.1000
M11). Piège de Paul py EDO p.1001
EM1). Champs magnétiques py plot(champ) py $f(x).dx$ p.1033
EM2). Résonateur de Tesla py A.X=B py EDO p.1055
EM3). Moteur asynchrone py $x+i.y$ p.1074
T4). Formation des nuages py EDO p.1104
T5). Moteur à explosion py EDO py $f(x).dx$ p.1138
T6). Irréversibilité liée aux frottements py EDO p.1166
T8). Ballon-sonde à hélium py EDO p.1226